

Nr. 17

**Value at Risk-Konzepte
für Marktrisiken**

Heinz Cremers

August 1999
ISSN 1436-9753

Autor: Prof. Dr. Heinz Cremers
*Quantitative Methoden
und Spezielle Bankbetriebslehre*
Hochschule für Bankwirtschaft,
Frankfurt am Main
eMail: cremers@hfb.de

Herausgeber: Hochschule für Bankwirtschaft
Private Fachhochschule der BANKAKADEMIE
Sternstraße 8 • 60318 Frankfurt/M.
Tel.: 069/95946-16 • Fax: 069/95946-28

Inhaltsverzeichnis

1 Value at Risk–Analyse	1
2 Value at Risk-Konzepte	4
3 Historische Simulation.....	7
4 Monte Carlo Simulation.....	9
5 Varianz-Kovarianz-Verfahren.....	10
6 Varianzzerlegung	19
Literatur.....	22
Weiterführende Literatur	22

Ziel der Analyse ist, die Quantifizierung möglicher Wertänderungen eines Portfolios aufgrund von Änderungen der Marktgrößen (*Risikofaktoren*, z.B. Zinsen, Kurse, Währungen). Während die Szenario–Analyse (vgl. Basiswissen, Lektion 8, Abschnitt 8.4.3) von festen Änderungen der Risikofaktoren ausgeht, versucht die Value at Risk–Analyse, das Zufallsgesetz der Marktänderungen auf das Zufallsgesetz der Wertänderung des Portfolios zu übertragen. Der *Value at Risk* ist dann als derjenige Portfolioverlust definiert, der innerhalb eines bestimmten Zeitraumes nur mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit noch höher ausfallen kann.

1 Value at Risk–Analyse

Vorgegeben sind ein Portfolio PF , ein Zeitraum Δt (Haltedauer; etwa $\Delta t = 1$ Tag oder 10 Tage) und eine Wahrscheinlichkeit p (Sicherheitsniveau; etwa $p = 1\%$, 2% oder 5%). Wir fassen die Wertänderung

$$\Delta V = V(t_0 + \Delta t, PF) - V(t_0, PF)$$

des Portfolios im zukünftigen Zeitraum $(t_0, t_0 + \Delta t)$ als Zufallsvariable auf. $V(t, PF)$ bezeichnet den Wert des Portfolios PF um Zeitpunkt t .

Exkurs: p -Quantil. Gegeben sei eine Zufallsvariable X und eine Wahrscheinlichkeit p mit $0 < p < 1$. Dann heißt jede Zahl Q_p mit der Eigenschaft $P(X < Q_p) \leq p \leq P(X \leq Q_p)$ *Quantil der Ordnung p* (kurz: p -Quantil). Selbst wenn X kontinuierlich verteilt ist – und folglich $P(X < Q_p) = p = P(X \leq Q_p)$ gilt – ist das p -Quantil i.a. nicht eindeutig bestimmt. Hinreichend für die Eindeutigkeit von Q_p ist etwa die Bedingung: Die Dichtefunktion f_X von X ist in einer Umgebung von Q_p strikt positiv. Da für die Dichte f_X einer normalverteilten Zufallsvariablen $f_X(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist das p -Quantil in diesem Fall durch $P(X < Q_p) = p$ stets eindeutig bestimmt.

Value at Risk. Das negative p -Quantil $-Q_p$ der zufälligen Wertänderung ΔV wird *Value at Risk* (des Portfolios PF bei der Haltedauer Δt zur Wahrscheinlichkeit p) genannt und mit VaR bezeichnet. Folglich gilt

$$P(\Delta V < -VaR) = P(\Delta V < Q_p) = p \quad \text{bzw.} \quad P(-\Delta V > VaR) = p$$

Die Größe VaR ist somit diejenige Verlustgrenze des Portfolios, die im Zeitraum Δt nur mit der Wahrscheinlichkeit p noch überschritten werden kann (vgl. Bild 1).

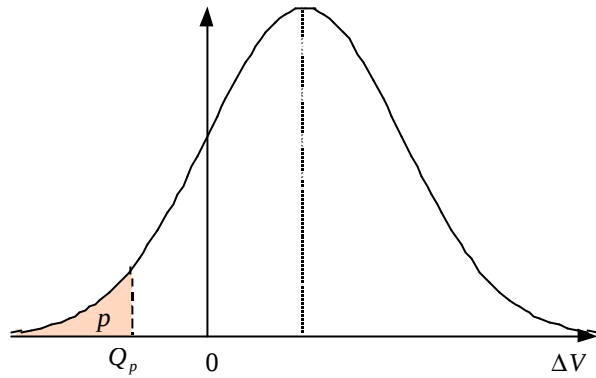


Bild 1

Spezielle Quantile. Liegt die Meßreihe $\Delta V_1, \dots, \Delta V_N$ empirischer Wertänderungen vor, berechnet sich das empirische Quantil (vgl. Basiswissen, Lektion 12, Abschnitt 12.2.3) zu

$$\hat{Q}_p = \Delta V_{[gT(Np)+1]} \quad \text{wobei} \quad gT(a) = \text{ganzzahliger Teil von } a$$

d.h. $\hat{Q}_p$ ist in der geordneten Stichprobe $\Delta V_{[1]} \leq \Delta V_{[2]} \leq \dots \leq \Delta V_{[N]}$ der $(gT(Np)+1)$ -te Wert. Ist die Wertänderung ΔV normalverteilt mit den Parametern m und s^2 , so bestimmt sich das p -Quantil aus

$$P(\Delta V < Q_p) = p \Leftrightarrow P\left(\frac{\Delta V - m}{s} < \frac{Q_p - m}{s}\right) = p \Leftrightarrow Q_p = m + s N_p$$

wobei N_p das p -Quantil der $\mathbb{N}(0,1)$ -Verteilung ist. Häufige Werte enthält die folgende Tabelle:

p	10%	5%	2,5%	2%	1%	0,5%	0,1%
N_p	-1,2816	-1,6449	-1,9600	-2,0537	-2,3263	-2,5758	-3,0902

Beispiel. Ein Investor hält ein bestimmtes Portfolio PF über längere Zeit. Im Zeitpunkt t_0 bestimmen wir zu den Vorgaben $\Delta t = 10$ Tage (Haltedauer) und $p = 5\%$ (Sicherheitsniveau) den Value at Risk. Die vorliegenden Daten enthalten 30 historische Wertänderungen $\Delta V_1, \dots, \Delta V_{30}$ (in Geldeinheiten GE) des Portfolios in Zeitabständen von 10 Tagen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ΔV_n	1	3	2	5	11	8	28	9	-19	-13	21	13	11	23	-11
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ΔV_n	10	15	1	17	-5	-2	18	-7	-5	6	14	-7	6	-8	5

Je nach Auffassung der Daten können zwei Verfahren zur Bestimmung des Value at Risk unterschieden werden.

(a) Empirische Verteilung. Wir fassen die Datenreihe als empirische Verteilung der Zufallsvariable ΔV auf und bestimmen das empirische 5%-Quantil $\hat{Q}_{0,05}$ mit der oben angegebenen Schätzfunktion $\hat{Q}_p$ des empirischen Quantils. Ordnen der Stichprobe $\Delta V_{[1]}, \dots, \Delta V_{[30]}$ ergibt

$$\hat{Q}_{0,05} = \Delta V_{[gT(1,5)+1]} = \Delta V_{[2]} = -13$$

und damit

$$VaR = -\hat{Q}_{0,05} = 13 \text{ GE}$$

Das Portfolio PF wird also innerhalb der nächsten 10 Tage mit der Wahrscheinlichkeit von 95% keinen größeren Verlust erleiden als 13 GE.

(b) Normalverteilung. Wir fassen die Daten als Stichprobe einer $\mathbb{N}(m, s^2)$ -verteilten Zufallsvariablen ΔV auf und bestimmen aus den Daten und den entsprechenden Schätzfunktionen des empirischen Erwartungswertes wird der empirischen Standardabweichung (vgl. Basiswissen, Lektion 12, Abschnitt 12.2.3) zunächst die Parameter m (Erwartungswert) und s (Standardabweichung):

$$\hat{m} = \frac{1}{30} \sum_{n=1}^{30} \Delta V_n = 5 \quad \text{und} \quad \hat{s} = \left(\frac{1}{29} \left(\sum_{n=1}^{30} \Delta V_n^2 - 30\hat{m}^2 \right) \right)^{1/2} = 11,2924$$

Mit dem 5%-Quantil $N_{0,05} = -1,6449$ der Standardnormalverteilung berechnet sich das 5%-Quantil $Q_{0,05}$ der $\mathbb{N}(\hat{m}, \hat{s}^2)$ -Verteilung zu

$$Q_{0,05} = 5 - 11,2924 \cdot 1,6449 = -13,57$$

und damit

$$VaR = -Q_{0,05} = 13,57 \text{ GE}$$

2 Value at Risk-Konzepte

Zur Bestimmung des Quantils und damit des Value at Risk muß die Verteilung der zufälligen Wertänderung ΔV vorliegen. Hierzu sind verschiedene Konzepte denkbar und teilweise in der Praxis auch umgesetzt. Zur Systematisierung dieser Ansätze legen wir uns die folgenden vier Fragen vor:

- (1) Auf welcher Ebene wird modelliert?
- (2) Was wird modelliert?
- (3) Wie wird modelliert?
- (4) Wie wird die Verteilung der Wertänderung ΔV bestimmt?

Die erste Frage zielt auf die Bestimmung der Risikofaktoren. Folgende Ansätze sind möglich:

- Portfolioansatz: Einziger Risikofaktor ist das Portfolio
- Produktansatz: Risikofaktoren sind die einzelnen Produkte des Portfolios
- Marktansatz: Risikofaktoren sind bestimmte Marktgrößen (Zinsen, Kurse, Devisen), die den Wert des Portfolios beeinflussen können

Bemerkung. Während der Portfolioansatz das Portfolio als Ganzes betrachtet, wird im Produktansatz das Portfolio PF aus den einzelnen Produkten $F_1, \dots, F_J$ mit ihren entsprechenden Vielfachheiten $q_1, \dots, q_J$ (linear) zusammengesetzt: $PF = q_1 F_1 + \dots + q_J F_J$. Im Marktansatz geht man noch einen Schritt weiter hinter die Produkte zurück und koppelt über eine Bewertungsformel das einzelne Produkt an die Marktgrößen. So ist z.B. bei gegebener Zinsstruktur $r_1, \dots, r_N$ (Risikofaktoren) der Barwert $PV(CB)$ eines Couponbonds CB mit Coupon C und Nennwert A eine Funktion der Zinsen (Zerosätze):

$$PV(CB) = \sum_{n=1}^N \frac{C}{(1+r_n)^n} + \frac{A}{(1+r_N)^N}$$

Die zweite Frage zielt auf die Quantifizierung der Risikofaktoren. Wir nennen einen quantifizierten Risikofaktor *Modellgröße* und haben zur Auswahl:

- Preis / Wert des Risikofaktors
- Änderung des Preises / Wertes des Risikofaktors
 - absolut
 - relativ (Rendite) – linear
 - kontinuierlich

Bemerkung. Zielgröße der Value at Risk-Bestimmung ist die absolute Wertänderung ΔV des Portfolios. Im praktischen Umgang empfiehlt sich jedoch meist die Wahl einer anderen Modellgröße, die dann mit der Beantwortung der vierten Frage nach ΔV zu transformieren ist.

Mit der Beantwortung der dritten Frage wird die Verteilung der Modellgrößen festgelegt. Dies kann auf zwei Weisen erfolgen:

- empirisch: aus historischen Beobachtungen oder subjektiven Einschätzungen
- parametrisch: durch die Wahl einer Verteilungsklasse und Schätzung der erforderlichen Parameter

Bemerkung. Das Ergebnis einer empirischen Festlegung ist im univariaten Fall (eine einzelne Modellgröße) eine Meßreihe $x_1, \dots, x_N$ von Zahlen und im multivariaten Fall (mehrere Modellgrößen) eine Meßreihe $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ von Vektoren. Eine parametrische Festlegung kann sich z.B. für die Normalverteilung entscheiden, d.h. $N(m, s^2)$ im univariaten Fall und $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$ im multivariaten Fall. Die freien Parameter werden durch geeignete Schätzfunktionen bestimmt. Beide Arten der Festlegung der Verteilung können historische Beobachtungen einbeziehen. Die Wahl des *Beobachtungszeitraumes* ist in bezug auf das VaR-Konzept eine externe Vorgabegröße.

Die vierte Frage klärt, wie die Verteilung der Modellgrößen in eine Verteilung der Wertänderung ΔV des Portfolios transformiert wird. Je nach Festlegung der Verteilung der Modellgrößen und der Verteilung der Portfolioänderung sind verschiedene Konzepte möglich:

- historisch/empirisch (*Historische Simulation*): Zu jeder historischen Beobachtung der Modellgrößen wird die zugehörige Wertänderung des Portfolios berechnet. Das Quantil wird aus der empirischen Verteilung (Meßreihe) der Wertänderungen empirisch bestimmt.
- parametrisch/empirisch (*Monte Carlo Simulation*): Auf der Basis der Verteilung der Modellgrößen werden zufällig Werte erzeugt und die zugehörigen Wertänderungen des Portfolios berechnet. Das Quantil wird aus der empirischen Verteilung (Meßreihe) der Wertänderungen empirisch bestimmt.
- parametrisch/parametrisch (*Varianz-Kovarianz-Verfahren*): Die Verteilung der Modellgrößen wird in eine Verteilung der Wertänderung ΔV transformiert.

Bemerkungen. (1) Im einleitenden Beispiel oben wird ein Portfolioansatz gewählt. Modellgröße ist die Wertänderung ΔV des Portfolios. Während die erste

Berechnung des Value at Risk – ohne eine Verteilungsannahme der Zufallsvariablen ΔV – nur die empirischen Daten der Stichprobe einbezieht (empirische Festlegung der Verteilung), geht die zweite Berechnung von der Annahme einer normalverteilten Wertänderung ΔV aus (parametrische Festlegung der Verteilung). Da die Modellgröße ΔV bereits die Wertänderung des Portfolios darstellt, entfällt die Transformation im vierten Schritt. Die beiden Berechnungsverfahren können dennoch als Spezialfälle einer Historischen Simulation bzw. eines Varianz-Kovarianz-Verfahrens angesehen werden. (2) Verlängern wir die Haltedauer von Δt auf $n \cdot \Delta t$ und unterstellen, daß die Wertänderungen $\Delta V_1, \dots, \Delta V_n$ der Teilperioden unkorreliert und identisch verteilt sind, so folgt aus $\Delta V = \Delta V_1 + \dots + \Delta V_n$ für die Parameter $m_{n\Delta t}$ und $s_{n\Delta t}$

$$m_{n\Delta t} = nm_{\Delta t} \quad \text{und} \quad s_{n\Delta t} = \sqrt{n} s_{\Delta t}$$

wobei $m_{\Delta t} = E(\Delta V_1) = \dots = E(\Delta V_n)$, $s_{\Delta t} = \sqrt{V(\Delta V_1)} = \dots = \sqrt{V(\Delta V_n)}$ und $m_{n\Delta t} = E(\Delta V)$, $s_{n\Delta t} = \sqrt{V(\Delta V)}$. Ist z.B. die Wertänderung $\Delta V^{(1)}$ mit einer Haltedauer von $\Delta t = 1$ Tag $N(m, s^2)$ -verteilt, so ist die Wertänderung $\Delta V^{(10)}$ auf der Basis einer 10-tägigen Haltedauer $N(10m, 10s^2)$ -verteilt. (3) Während der Value at Risk einer historischen Simulation äußerst sensibel auf extreme Ausschläge der Modellgrößen reagieren kann, ist die Monte Carlo Simulation mit einer Vielzahl von Simulationen weitaus robuster. (4) Ist bei jedem Durchgang das Portfolio neu zu bewerten (full valuation), kann bei großen Portfolios die Monte Carlo Simulation extrem aufwendig werden. (5) Sollen im Varianz-Kovarianz-Verfahren normalverteilte Modellgrößen in eine normalverteilte Wertänderung ΔV transformiert werden, ist zu beachten, daß die Normalverteilung nur bei linearen Transformationen erhalten bleibt. Allgemein gilt für die lineare Transformation eines multivariat verteilten Zufallsvektors $\mathbf{X}$ in eine Zufallsvariable Y der Satz (vgl. Basiswissen, Lektion 13, Abschnitt 13.2.8, Satz 13.3):

Transformationssatz. Sei $\mathbf{X} = (X_1 \dots X_J)^T$ ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor mit den Parametern

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswertvektor} \quad \boldsymbol{\mu} &= \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_J \end{pmatrix} \\ \text{Kovarianzmatrix} \quad \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{J1} & \cdots & s_{JJ} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kurz: $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$. Sind $a_1, \dots, a_J$ reelle Zahlen, d.h. $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_J)^T \in \mathbb{R}^J$, so ist

$$Z = \sum_{j=1}^J a_j X_j$$

eine $\mathbb{N}(m, s^2)$ -verteilte Zufallsvariable mit den Parametern

$$m = \sum_{j=1}^J a_j m_j \quad \text{und} \quad s^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J a_i a_j s_{ij}$$

Im Marktansatz müssen daher nicht-lineare Bewertungsformeln mit der Taylorentwicklung (vgl. Basiswissen, Lektion 8, Abschnitt 8.2.9) linearisiert werden (*Delta Ansatz*). Wird die zweite Ableitung (Konvexität) einbezogen, kommen andere Verteilungen für ΔV in Betracht (etwa die χ^2 -Verteilung im *Delta-Gamma Ansatz*).

Mit den vier Fragen ist ein Konzeptrahmen gegeben, der in der praktischen Umsetzung schrittweise abzuarbeiten ist. Ausgehend von einem konkreten Portfolio führt jede Festlegung möglicher Alternativen des Fragenkataloges auf ein spezielles Value at Risk-Konzept. Wir geben für jedes der drei Grundkonzepte: Historische Simulation, Monte Carlo Simulation und Varianz-Kovarianz-Verfahren ein Beispiel, wobei der Datenhaushalt aus Gründen der Nachvollziehbarkeit klein gehalten wird.

3 Historische Simulation

Konzept. Eine Bank hält im Zeitpunkt t_0 das folgende Devisenportfolio:

$$PF = q_1 D_1 + \dots + q_J D_J$$

wobei $q_j D_j$ besagt, daß PF den Betrag q_j der Währung D_j enthält. Weiter sind vorgegeben: eine Haltedauer Δt , eine Wahrscheinlichkeit p und ein Beobachtungszeitraum b . Zur Festlegung eines Value at Risk-Konzeptes beantworten wir den Fragenkatalog (1)-(4):

- (1) Produktansatz: Risikofaktoren sind die Währungen $D_1, \dots, D_J$
- (2) Modellgrößen sind die absoluten Wertänderungen der einzelnen Währungen:

$$\Delta S^j = S(t + \Delta t, D_j) - S(t, D_j) \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, J$$

wobei $S(t, D_j)$ den Preis einer Geldeinheit GE_j der Währung D_j in heimischen Geldeinheiten GE bezeichnet (Preisnotierung).

(3) Historische Beobachtungen: In den vergangenen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = t_0$ mit $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ werden innerhalb des Beobachtungszeitraumes b die jeweiligen Preisänderungen der einzelnen Währungen gemessen:

$$\Delta S_n^j = S(t_{n+1}, D_j) - S(t_n, D_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, J \quad \text{und } n = 1, \dots, N$$

(4) Historische Simulation: Jeder Vektor $(\Delta S_n^1, \dots, \Delta S_n^J)$ führt auf eine Wertänderung des Portfolios

$$\Delta V_n = q_1 \cdot \Delta S_n^1 + \dots + q_J \cdot \Delta S_n^J \quad \text{für } n = 1, \dots, N$$

Ordnen der Meßwerte $\Delta V_{[1]} \leq \Delta V_{[2]} \leq \dots \leq \Delta V_{[N]}$ ergibt

$$VaR = -\hat{Q}_p = -\Delta V_{[gT(Np)+1]}$$

Beispiel. Zu einem Kassa-Devisenportfolio

$$PF = 4\,650 \text{ GE}_1 + 31\,200 \text{ GE}_2$$

der Währungen D_1 und D_2 ist weiter gegeben: die Haltedauer $\Delta t = 1$ Woche, die Wahrscheinlichkeit $p = 5\%$ und der Beobachtungszeitraum $b = 26$ Wochen. Aus den Angaben der Tabelle 1 mit

$$\Delta V_n = 4\,650 \Delta S_n^1 + 31\,200 \Delta S_n^2 \quad \text{für } n = 1, \dots, 26$$

bestimmt sich der Value at Risk – Wert wie folgt:

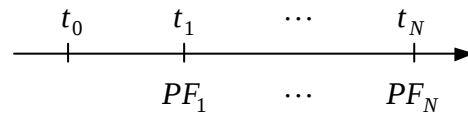
$$VaR = -\Delta V_{[gT(26 \cdot 0,05)+1]} = -\Delta V_{[2]} = 1\,670,97 \text{ GE}$$

n	ΔS_n^1	ΔS_n^2	ΔV_n	$\Delta V_{[n]}$	n	ΔS_n^1	ΔS_n^2	ΔV_n	$\Delta V_{[n]}$
1	0,0320	0,0446	1540,32	-1929,84	14	0,1110	0,0239	1261,83	188,79
2	-0,1400	-0,0219	-1334,28	-1670,97	15	0,0700	0,0488	1848,06	365,43
3	-0,1520	-0,0392	-1929,84	-1334,28	16	-0,0120	0,0269	783,48	521,13
4	0,0390	0,0059	365,43	-922,20	17	0,0370	-0,0317	-816,99	702,84
5	0,1800	0,0422	2153,64	-908,58	18	0,1100	-0,0313	-465,06	783,48
6	0,0840	0,0520	2013,00	-906,27	19	0,0220	-0,0324	-908,58	824,49
7	-0,0490	0,0094	65,43	-842,55	20	-0,0030	-0,0286	-906,27	896,76
8	-0,0970	-0,0391	-1670,97	-816,99	21	-0,0470	-0,0200	-842,55	1147,92
9	-0,0220	-0,0152	-576,54	-876,54	22	-0,0440	-0,0230	-922,20	1261,83
10	-0,0280	0,0267	702,84	-465,06	23	0,1640	0,0043	896,76	1540,32
11	-0,0600	0,0127	117,24	-198,18	24	0,2160	0,0046	1147,92	1848,06
12	-0,0500	0,0011	-198,18	65,43	25	0,0250	0,0227	824,49	2013,00
13	-0,0010	0,0062	188,79	117,24	26	-0,0550	0,0249	521,13	2153,64

Tabelle 1

4 Monte Carlo Simulation

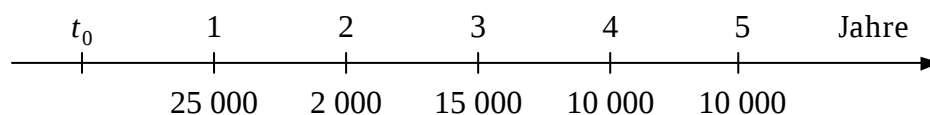
Konzept. Eine Bank hält im Zeitpunkt t_0 ein Portfolio PF mit der Zahlungsreihe



Vorgegeben sind weiter: eine Haltedauer Δt , eine Wahrscheinlichkeit p und ein Beobachtungszeitraum b . Zur Festlegung eines Value at Risk-Konzeptes beantworten wir die Fragen (1)-(4) des Konzeptrahmens:

- (1) Marktansatz: Risikofaktor ist die flache Zinsstruktur des Marktes.
- (2) Modellgröße ist die absolute Zinsänderung Δr bezogen auf die Haltedauer Δt .
- (3) Wir treffen die parametrische Verteilungsannahme $\Delta r \sim \mathbb{N}(m, s^2)$. Die Parameter m und s^2 werden aus Meßreihen innerhalb des Beobachtungszeitraumes b geschätzt.
- (4) Monte Carlo Simulation (vgl. Basiswissen, Lektion 13, Abschnitt 13.4.1)

Beispiel. Zu dem Portfolio PF mit der Zahlungsreihe



ist weiter gegeben: $\Delta t = 1$ Tag, $p = 10\%$, die flache Zinsstruktur $r = 6,5\%$ des Marktes in t_0 und die geschätzten Normalverteilungsparameter $\hat{m} = 0$ und $\hat{s}^2 = 0,001$, also $\Delta r \sim \mathbb{N}(0; 0,001)$. Wir führen die Monte Carlo Simulation in fünf Schritten durch (vgl. hierzu Tabelle 2).

- Erzeuge auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallszahlen

$$x_1, \dots, x_{30}$$

- Transformiere diese in $\mathbb{N}(0; 0,001)$ -verteilte Zufallszahlen

$$\Delta r_n = \Phi_{0; 0,001}^{-1}(x_n) \quad \text{für } n = 1, \dots, 30$$

- Berechne die Wertänderung des Portfolios

$$\Delta V_n = PV(PF; 6,5\% + \Delta r_n) - PV(PF; 6,5\%)$$

$$\text{wobei } PV(PF, r) = \frac{25\,000}{1+r} + \frac{2\,000}{(1+r)^2} + \frac{15\,000}{(1+r)^3} + \frac{10\,000}{(1+r)^4} + \frac{10\,000}{(1+r)^5}$$

- Ordne die Meßwerte

$$\Delta V_{[1]} \leq \Delta V_{[2]} \leq \dots \leq \Delta V_{[30]}$$

- Bestimme den Value at Risk-Wert

$$VaR = -\hat{Q}_p = -\Delta V_{[gT(300,1)+1]} = -\Delta V_{[4]} = 107,91 \text{ GE}$$

x_n	Δr_n	ΔV_n	x_n	Δr_n	ΔV_n	x_n	Δr_n	ΔV_n
0,8087	0,0873%	-107,91	0,2799	-0,0583%	72,28	0,6141	0,0290%	-35,88
0,8049	0,0859%	-106,16	0,0268	-0,1931%	239,95	0,0845	-0,1375%	170,76
0,6964	0,0514%	-63,57	0,1247	-0,1152%	142,94	0,9906	0,2350%	-289,51
0,6158	0,0295%	-36,44	0,6397	0,0358%	-44,25	0,0183	-0,2091%	260,01
0,1770	-0,0927%	114,98	0,7646	0,0721%	-89,15	0,4624	-0,0094%	11,70
0,0943	-0,1315%	163,21	0,4628	-0,0093%	11,56	0,1612	-0,0989%	122,73
0,2584	-0,0648%	80,38	0,5749	0,0189%	-23,36	0,8388	0,0989%	-122,23
0,6008	0,0255%	-31,61	0,0528	-0,1618%	200,96	0,6368	0,0350%	-43,30
0,9308	0,1482%	-182,87	0,2012	-0,0837%	103,83	0,6628	0,0420%	-51,97
0,5800	0,0202%	-24,98	0,4745	-0,0064%	7,91	0,6464	0,0376%	-46,47

Tabelle 2

5 Varianz-Kovarianz-Verfahren

Zu diesem Verfahren geben wir zwei Konzepte an.

Konzept 1 (Produktansatz). Eine Bank hält im Zeitpunkt t_0 das folgende Aktienportfolio:

$$PF = q_1 A_1 + \dots + q_J A_J$$

wobei q_j die Stückzahl der Aktie A_j bezeichnet. Weiter sind vorgegeben: eine Haltedauer Δt , eine Vertrauenswahrscheinlichkeit p und ein Beobachtungszeitraum b . Zur Festlegung eines Value at Risk-Konzeptes gehen wir nun wie folgt vor:

- (1) Produktansatz: Risikofaktoren sind die Aktien $A_1, \dots, A_J$ des Portfolios.
 (2) Modellgrößen sind die relativen Wertänderungen (Renditen) der einzelnen Aktien:

$$R_j = \frac{S(t + \Delta t, A_j) - S(t, A_j)}{S(t, A_j)} \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

Der Preis $S(t + \Delta t, A_j)$ versteht sich dabei inclusive reinvestierter Dividendenzahlungen des Zeitraumes Δt .

- (3) Parametrische Verteilungsannahme: Der Vektor $\mathbf{R} = (R_1 \dots R_J)^T$ der Aktienrenditen besitzt eine gemeinsame Normalverteilung $\mathbb{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$ mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\mathbf{S}$, d.h.

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_J \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} & \cdots & s_{1J} \\ s_{21} & s_2^2 & \cdots & s_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{J1} & s_{J2} & \cdots & s_J^2 \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet $m_j = E(R_j)$ die erwartete Rendite der Aktie A_j und $s_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$ die Kovarianz der Renditen R_i und R_j (beachte: $s_{ij} = s_{ji}$ und $s_{jj} = s_j^2 = V(R_j) = \text{Varianz von } R_j$). Die Bestimmung der Verteilungsparameter erfolgt mit den Schätzfunktionen

$$\hat{m}_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_n^j \quad \text{und} \quad \hat{s}_{ij} = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{n=1}^N R_n^i R_n^j - N \hat{m}_i \hat{m}_j \right)$$

Die Renditehistorien (Stichprobe)

$$(R_1^1, R_1^2, \dots, R_1^J), (R_2^1, R_2^2, \dots, R_2^J), \dots, (R_N^1, R_N^2, \dots, R_N^J)$$

entsprechen dabei dem Beobachtungszeitraum b .

- (4) Die Transformation der Verteilung $\mathbb{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$ der Aktienrenditen in die Verteilung der Wertänderung

$$\Delta V = S(t_0 + \Delta t, PF) - S(t_0, PF) = \sum_{j=1}^J q_j \cdot \Delta S^j \quad \text{mit } \Delta S^j = S(t_0 + \Delta t, A_j) - S(t_0, A_j)$$

des Portfolios PF erfolgt parametrisch. Zunächst zeigt sich mit dem Transformationssatz in Abschnitt 2 oben und der Annahme normalverteilter Aktienrenditen, daß die Portfoliorendite

$$R_{PF} = \sum_{j=1}^J w_j R_j \quad \text{mit} \quad w_j = \frac{q_j S(t_0, A_j)}{S(t_0, PF)} \quad \text{und} \quad S(t_0, PF) = \sum_{j=1}^J q_j S(t_0, A_j)$$

ebenfalls normalverteilt ist. Für den Erwartungswert m_{PF} und die Varianz s_{PF}^2 der Portfoliorendite gilt

$$m_{PF} = \sum_{j=1}^J w_j m_j \quad \text{und} \quad s_{PF}^2 = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J w_i w_j s_{ij} = \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w}$$

Durch Standardisieren

$$\frac{R_{PF} - m_{PF}}{s_{PF}} = \frac{\Delta V / S(t_0, PF) - m_{PF}}{s_{PF}}$$

erhalten wir eine $\mathbb{N}(0,1)$ -verteilte Zufallsvariable Z . Mit dem p -Quantil N_p der $\mathbb{N}(0,1)$ -Verteilung – d.h. $P(Z < N_p) = p$ – gilt schließlich

$$\begin{aligned} P(\Delta V < -VaR) &= p \Leftrightarrow P\left(\frac{\Delta V / S(t_0, PF) - m_{PF}}{s_{PF}} < -\frac{VaR / S(t_0, PF) + m_{PF}}{s_{PF}}\right) = p \\ &\Leftrightarrow -\frac{VaR / S(t_0, PF) + m_{PF}}{s_{PF}} = N_p \\ &\Leftrightarrow VaR = -S(t_0, PF)(m_{PF} + N_p s_{PF}) \end{aligned}$$

Beispiel. Zu einem Kassa-Aktienportfolio

$$PF = 20A_1 + 10A_2 + 15A_3$$

ist weiter gegeben: die Haltedauer $\Delta t = 1$ Woche, die Wahrscheinlichkeit $p = 1\%$ und der Beobachtungszeitraum $b = 26$ Wochen. Aus den Preisen $S_n^j = S(t_n, A_j)$ der letzten 26 Wochen ($t_1 = t_0 - 26$ Wochen, $t_2 = t_0 - 25$ Wochen, ..., $t_{27} = t_0 = \text{heute}$) werden zunächst die linearen Wochenrenditen R_n^j berechnet (vgl. Tabelle 3):

$$R_n^j = \frac{S_{n+1}^j - S_n^j}{S_n^j} \quad \text{für} \quad n = 1, \dots, 26 \quad \text{und} \quad j = 1, 2, 3$$

Preise				Renditen			
n	S_n^1	S_n^2	S_n^3	n	R_n^1	R_n^2	R_n^3
1	62,50	121,85	85,40				
2	64,75	122,55	87,00	1	3,60%	0,57%	1,87%
3	67,90	124,40	89,85	2	4,86%	1,51%	3,28%
4	65,95	119,70	88,65	3	-2,87%	-3,78%	-1,34%
5	66,30	121,80	91,60	4	0,53%	1,75%	3,33%
6	68,90	122,45	94,30	5	3,92%	0,53%	2,95%
7	71,95	124,90	90,60	6	4,43%	2,00%	-3,92%
8	70,80	122,90	87,45	7	-1,60%	-1,60%	-3,48%
9	69,25	119,30	85,80	8	-2,19%	-2,93%	-1,89%
10	68,35	117,95	81,20	9	-1,30%	-1,13%	-5,36%
11	68,80	117,25	83,40	10	0,66%	-0,59%	2,71%
12	67,50	117,05	82,70	11	-1,89%	-0,17%	-0,84%
13	68,30	118,90	85,95	12	1,19%	1,58%	3,93%
14	66,85	116,60	83,60	13	-2,12%	-1,93%	-2,73%
15	69,05	121,00	83,20	14	3,29%	3,77%	-0,48%
16	65,20	120,15	79,40	15	-5,58%	-0,70%	-4,57%
17	64,15	118,35	77,30	16	-1,61%	-1,50%	-2,64%
18	64,55	120,90	79,85	17	0,62%	2,15%	3,30%
19	58,75	115,80	73,90	18	-8,99%	-4,22%	-7,45%
20	60,00	119,90	69,35	19	2,13%	3,54%	-6,16%
21	63,90	124,20	71,35	20	6,50%	3,59%	2,88%
22	62,40	123,50	74,50	21	-2,35%	-0,56%	4,41%
23	64,25	127,75	78,65	22	2,96%	3,44%	5,57%
24	64,60	127,10	78,95	23	0,54%	-0,51%	0,38%
25	61,55	122,25	77,85	24	-4,72%	-3,82%	-1,39%
26	65,90	125,90	79,10	25	7,07%	2,99%	1,61%
$t_0 = 27$	65,30	122,55	83,80	26	-0,91%	-2,66%	5,94%

Tabelle 3

Mit den Schätzfunktionen für Erwartungswert, Varianz und Kovarianz bestimmen wir dann den Erwartungswertvektor $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ und die Kovarianzmatrix $\hat{\mathbf{S}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} 0,2379\% \\ 0,0511\% \\ -0,0034\% \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0,001431 & 0,000730 & 0,000672 \\ 0,000730 & 0,000604 & 0,000312 \\ 0,000672 & 0,000312 & 0,001431 \end{pmatrix}$$

Aus dem heutigen Portfoliopreis

$$S(t_0, PF) = 20 \cdot 65,30 + 10 \cdot 122,55 + 15 \cdot 83,80 = 3788,50 \text{ GE}$$

berechnen sich die Portfolioanteile wie folgt:

j	q_j	$S(t_0, A_j)$	w_j
1	20	65,30	0,3447
2	10	122,55	0,3235
3	15	83,80	0,3318

Und damit weiter Erwartungswert und Standardabweichung der Portfoliorendite

$$m_{PF} = 0,0974\% \quad \text{und} \quad s_{PF} = 2,7824\%$$

Mit dem 1%-Quantil $N_{0,01} = -2,3263$ der Standardnormalverteilung ergibt sich schließlich der Value at Risk zu

$$VaR = -3788,50 \cdot (0,0974\% - 2,3263 \cdot 2,7824\%) = 241,53 \text{ GE}$$

Kontinuierlicher Value at Risk. Nur kontinuierliche Renditen haben die Eigenschaft, daß die Rendite eines Gesamtzeitraumes gleich ist der Summe der Renditen der Einzelzeiträume (vgl. Basiswissen, Lektion 6, Abschnitt 6.2.4). Folglich liefert der Zentrale Grenzwertsatz auch nur für diesen Renditetyp eine Begründung für die Normalverteilung (vgl. Basiswissen, Lektion 13, Beispiel 13.3.1). Wählen wir nun aber als Modellgrößen die kontinuierlichen Renditen

$$R_j = \ln \frac{S(t + \Delta t, A_j)}{S(t, A_j)} \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

so gilt für die Portfoliorendite nur approximativ

$$R_{PF} = \ln \frac{S(t + \Delta t, PF)}{S(t, PF)} \approx \sum_{j=1}^J w_j R_j$$

Unterstellen wir Gleichheit, so berechnet sich wegen

$$\Delta V = S(t_0 + \Delta t, PF) - S(t_0, PF) = S(t_0, PF)(e^{R_{PF}} - 1)$$

der kontinuierliche Value at Risk VaR_{con} wie folgt:

$$\begin{aligned}
P(\Delta V < -VaR_{con}) &= P\left(R_{PF} < \ln\left(1 - \frac{VaR_{con}}{S(t_0, PF)}\right)\right) \\
&= P\left(\frac{R_{PF} - m_{PF}}{s_{PF}} < \frac{1}{s_{PF}} \left[\ln\left(1 - \frac{VaR_{con}}{S(t_0, PF)}\right) - m_{PF}\right]\right) = p \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{s_{PF}} \left[\ln\left(1 - \frac{VaR_{con}}{S(t_0, PF)}\right) - m_{PF}\right] = N_p \\
&\Leftrightarrow VaR_{con} = S(t_0, PF)(1 - e^{m_{PF} + N_p s_{PF}})
\end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung). Mit den Werten des Beispiels gilt

$$VaR_{con} = 3788,50 \cdot (1 - e^{0,041\% + 2,32632,7993\%}) = 237,39 \text{ GE}$$

Annahme $m_{PF} = 0$. Für kurze Haltedauern kann der Erwartungswert m_{PF} der Portfoliorendite vernachlässigt werden. Der lineare und kontinuierliche Value at Risk berechnen sich dann nach

$$VaR_{lin} = -S(t_0, PF) \cdot N_p \cdot s_{PF} = 245,22 \text{ GE}$$

$$VaR_{con} = S(t_0, PF)(1 - e^{N_p s_{PF}}) = 238,85 \text{ GE}$$

Unter der Annahme $m_{PF} = 0$ kann der lineare Value at Risk VaR_{lin} des Portfolios auch über die Werte

$$VaR_{lin}^j = -q_j \cdot S(t_0, A_j) \cdot N_p \cdot s_j \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

der Portfolioanteile der Einzeltitel A_j berechnet werden. Setze dazu

$$\mathbf{VaR}_{lin} = (VaR_{lin}^1 \dots VaR_{lin}^J)$$

für den gesamten Value at Risk-Vektor und

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1J} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{J1} & r_{J2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i \cdot s_j}$$

für die Korrelationsmatrix des Renditevektors $\mathbf{R} = (R_1 \dots R_J)^T$. Mit den Beziehungen

$$S(t_0, PF) = \sum_{j=1}^J q_j \cdot S(t_0, A_j) \quad \text{und} \quad w_j = \frac{q_j \cdot S(t_0, A_j)}{S(t_0, PF)}$$

gilt dann für den linearen Value at Risk des Gesamtportfolios

$$\begin{aligned} VaR_{lin} &= -S(t_0, PF) \cdot N_p \cdot s_{PF} = -S(t_0, PF) \cdot N_p \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J w_i w_j s_{ij}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J (q_j \cdot S(t_0, A_i) \cdot N_p \cdot s_i)(q_j \cdot S(t_0, A_j) \cdot N_p \cdot s_j) r_{ij} \right)^{1/2} \\ &= (\mathbf{VaR}_{lin}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{VaR}_{lin})^{1/2} \end{aligned}$$

Approximativ gilt diese Beziehung auch für den kontinuierlichen Value at Risk:

$$VaR_{con} \approx (\mathbf{VaR}_{con}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{VaR}_{con})^{1/2}$$

Beispiel (Fortsetzung). Für die linearen Value at Risk-Werte der Portfolioanteile gilt

$$VaR_{lin}^1 = 20 \cdot 65,30 \cdot 2,3263 \cdot 2,7824\% = 114,92 \text{ GE}$$

$$VaR_{lin}^2 = 10 \cdot 122,55 \cdot 2,3263 \cdot 2,7824\% = 70,07 \text{ GE}$$

$$VaR_{lin}^3 = 15 \cdot 83,80 \cdot 2,3263 \cdot 2,7824\% = 110,62 \text{ GE}$$

und weiter für die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0,7853 & 0,4695 \\ 0,7853 & 1 & 0,3354 \\ 0,4695 & 0,3354 & 1 \end{pmatrix}$$

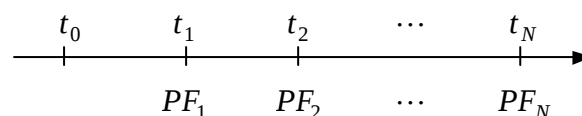
Folglich erhalten wir mit

$$VaR_{lin} = (\mathbf{VaR}_{lin}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{VaR}_{lin})^{1/2} = 245,22 \text{ GE}$$

das gleiche Resultat wie oben. Eine analoge Rechnung zeigt

$$VaR_{con} \approx (\mathbf{VaR}_{con}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{VaR}_{con})^{1/2} = 233,94 \text{ GE}$$

Konzept 2 (Delta Ansatz). Eine Bank hält im Zeitpunkt t_0 ein Portfolio PF mit den Zahlungen $PF_n = CF(t_n, PF)$ im Zeitpunkt t_n :



Vorgegeben sind: eine Haltedauer Δt , eine Wahrscheinlichkeit p und ein Beo-

bachtungszeitraum b . Die Festlegung eines Value at Risk-Konzeptes erfolgt wieder in vier Schritten

- (1) Marktansatz. Risikofaktoren sind die Zinssätze $r_1, \dots, r_N$ der Laufzeiten $t_1 - t_0, \dots, t_N - t_0$.
- (2) Modellgrößen sind die absoluten Zinsänderungen $\Delta r_1, \dots, \Delta r_N$ der einzelnen Laufzeiten, jeweils bezogen auf die Haltedauer Δt . Die Zinsänderungen werden in Basis Points bp gemessen; $1\text{bp} = 0,01\% = 0,0001$.
- (3) Parametrische Verteilungsannahme: Der Vektor $\mathbf{r} = (\Delta r_1 \dots \Delta r_N)^T$ der Zinsänderungen besitzt eine gemeinsame Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$ mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\mathbf{S}$.
- (4) Die Transformation der Verteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$ der Zinsänderung $\mathbf{r}$ in die Verteilung der Wertänderung ΔV des Portfolios PF erfolgt parametrisch. Da mit dem Transformationssatz die Normalverteilung nur bei *linearen* Transformationen erhalten bleibt und die Zinsänderung nicht-linear in die Wertänderung eingeht, approximieren wir ΔV durch das Taylorpolynom erster Ordnung:

$$\Delta V = V(t_0 + \Delta t, PF) - V(t_0, PF) \approx \sum_{n=1}^N \frac{\partial V(t_0, PF, r_1, \dots, r_N)}{\partial r_n} \Delta r_n$$

Die partiellen Ableitungen werden durch die Basis Point Values (vgl. Basiswissen, Lektion 8, Abschnitt 8.4.3) näherungsweise berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t_0, PF, r_1, \dots, r_N)}{\partial r_n} &\approx BPV_n \\ &= V(t_0, PF, r_1, \dots, r_n + 1\text{bp}, \dots, r_N) - V(t_0, PF, r_1, \dots, r_N) \end{aligned}$$

Damit ist approximativ ein linearer Zusammenhang zwischen der Wertänderung des Portfolios und den Zinsänderungen hergestellt:

$$\Delta V \approx \sum_{n=1}^N BPV_n \cdot \Delta r_n$$

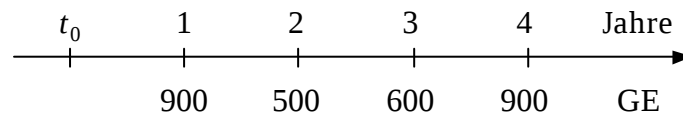
Folglich ist ΔV nach dem Transformationssatz normalverteilt mit Erwartungswert m_{PF} und Varianz s_{PF}^2 , wobei gilt

$$m_{PF} = \sum_{n=1}^N BPV_n \cdot m_n \quad \text{und} \quad s_{PF}^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N BPV_m \cdot BPV_n \cdot s_{mn} = \mathbf{BPV}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{BPV}$$

Mit dem p -Quantil N_p der $\mathcal{N}(0,1)$ -Verteilung berechnet sich der Value at Risk dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
 P(\Delta V < -VaR) = p &\Leftrightarrow P\left(\frac{\Delta V - m_{PF}}{s_{PF}} < -\frac{VaR + m_{PF}}{s_{PF}}\right) = p \\
 &\Leftrightarrow -\frac{VaR + m_{PF}}{s_{PF}} = N_p \\
 &\Leftrightarrow VaR = -(m_{PF} + N_p s_{PF})
 \end{aligned}$$

Beispiel. Zu der Finanzposition



ist weiter gegeben: die Haltedauer $\Delta t = 10$ Tage, die Wahrscheinlichkeit $p = 1\%$ und ein geeigneter Beobachtungszeitraum b . Der Markt zeigt eine normale Zinsstruktur (Zerosätze mit jährlichen Zinsverrechnungen und Tageoperator $Tg = 30E/360$):

Laufzeit	1	2	3	4	Jahre
Zinssatz	5,0	5,5	6,0	7,0	%

Der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{S}$ der zufälligen Zinsänderungen $(\Delta r_1, \dots, \Delta r_4)$ werden auf empirischem Wege aus den Daten des Beobachtungszeitraums b ermittelt. Eine Schätzung ergibt (in Basis Points)

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,3 \\ -0,8 \\ 0,4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 32,7 & 20,4 & 10,5 & 6,3 \\ 20,4 & 27,9 & 18,8 & 13,3 \\ 10,5 & 18,8 & 25,9 & 9,9 \\ 6,3 & 13,3 & 9,9 & 50,3 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt berechnen wir die Basis Point Values:

$$\begin{aligned}
 BPV_1 &= \frac{900}{1,0501} - \frac{900}{1,05} = -0,0816 \\
 BPV_2 &= \frac{500}{1,0551^2} - \frac{500}{1,055^2} = -0,0851 \\
 BPV_3 &= \frac{600}{1,0601^3} - \frac{600}{1,06^3} = -0,1425 \\
 BPV_4 &= \frac{900}{1,0701^4} - \frac{900}{1,07^4} = -0,2566
 \end{aligned}$$

und damit weiter den Erwartungswert und die Standardabweichung der Wert-

änderung ΔV :

$$m_{PF} = 0,0266 \quad \text{und} \quad s_{PF}^2 = 6,8098$$

Schließlich ist dann der Value at Risk

$$VaR = -(0,0266 - 3,3263 \cdot \sqrt{6,8098}) = 6,0440 \text{ GE}$$

6 Varianzzerlegung

Konzept Analog zum ersten Konzept des Varianz-Kovarianz-Verfahrens gehen wir wieder von einem Aktienportfolio

$$PF = q_1 A_1 + \dots + q_J A_J$$

aus. Weiter sind vorgegeben: eine Haltedauer Δt , eine Vertrauenswahrscheinlichkeit p und ein Beobachtungszeitraum b . Die Festlegung eines Value at Risk-Konzeptes sieht nun vor:

- (1) Produktansatz: Risikofaktoren sind die Aktien $A_1, \dots, A_J$ des Portfolios.
- (2) Modellgrößen sind die relativen Wertänderungen (Renditen) der einzelnen Aktien:

$$R_j = \frac{S(t + \Delta t, A_j) - S(t, A_j)}{S(t, A_j)} \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

- (3) Parametrische Verteilungsannahme: Der Vektor $\mathbf{R} = (R_1 \dots R_J)^T$ der Aktienrenditen besitzt eine gemeinsame Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$ mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\mathbf{S}$. Anstelle der Kovarianzen $s_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$ der Aktien untereinander werden im vorliegenden Konzept die Betafaktoren b_j der Einzelwerte A_j zu einem Marktindex M bestimmt. Grundlage hierzu ist das Marktmodell

$$R_j = a_j + b_j R_M + e_j$$

das einen linearen Zusammenhang der entsprechenden Rendite annimmt. b_j gibt an, mit welcher Sensitivität die Aktienrendite R_j auf Änderungen der Marktrendite R_M reagiert. Zu den empirischen Daten $(R_1^M, R_1^j), \dots, (R_N^M, R_N^j)$ der Renditen des Marktes und der Aktie A_j berechnet sind b_j mit der Metho-

de der kleinsten Quadrate aus

$$\hat{b}_j = \frac{\sum_{n=1}^N R_n^M R_n^j - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_n^M \sum_{n=1}^N R_n^j}{\sum_{n=1}^N (R_n^M)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N R_n^M \right)^2}$$

Das Portfoliobeta b_{PF} bestimmt sich dann als gewichtete Summe der Einzelbetas, d.h.

$$b_{PF} = \sum_{j=1}^J w_j b_j$$

(4) Die Transformation der Verteilung $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$ der Aktienrenditen in die Verteilung der Wertänderung ΔV des Portfolios PF erfolgt parametrisch. Zunächst zeigt sich mit dem Transformationssatz und der Annahme normalverteilter Aktienrenditen, daß die Portfoliorendite

$$R_{PF} = \sum_{j=1}^J w_j R_j \quad \text{mit} \quad w_j = \text{Portfolioanteil der Aktie } A_j$$

ebenfalls normalverteilt ist. Für den Erwartungswert m_{PF} und die Varianz s_{PF}^2 der Portfoliorendite gilt

$$m_{PF} = \sum_{j=1}^J w_j m_j \quad \text{mit} \quad m_j = E(R_j)$$

$$s_{PF}^2 = b_{PF}^2 s_M^2 + \sum_{j=1}^J w_j^2 s^2(e_j) \quad \text{mit} \quad s^2(e_j) = s_j^2 - b_j^2 s_M^2$$

Die Portfoliovarianz s_{PF}^2 (auch: Portfoliorisiko²) zerlegt sich folglich in die beiden Komponenten

- systematisches Risiko² = $b_{PF}^2 s_M^2$
- unsystematisches Risiko² = $s^2(e_{PF}) = \sum_{j=1}^J w_j^2 s^2(e_j)$

Die Residualvarianz $s^2(e_j)$ des Einzeltitels A_j bestimmt sich dabei als Differenz der Gesamtvarianz s_j^2 und dem systematischen Einzelrisiko $b_j^2 s_M^2$. Der Value at Risk berechnet sich damit wie folgt:

$$VaR = \begin{cases} -S(t_0, PF)(m_{PF} + N_p s_{PF}) & \text{für } m_{PF} \neq 0 \\ -S(t_0, PF) \cdot N_p \cdot s_{PF} & \text{für } m_{PF} = 0 \end{cases}$$

Beispiel. Bestimmen wir im Zahlenbeispiel des Abschnittes 5, Konzept 1 einen Marktindex durch das Portfolio

$$M = A_1 + A_2 + A_3$$

so ergeben sich die folgenden Werte

Position	Erw. Wert m_A	Varianz s_A^2	Kovarianz s_{AM}	Beta b_A
M		0,000700		1
A_1	0,2379%	0,001431	0,000870	1,2430
A_2	0,0511%	0,000604	0,000536	0,7656
A_3	-0,0034%	0,001431	0,000720	1,0295

Für das Portfolio $PF = 20A_1 + 10A_2 + 15A_3$ berechnet sich der Betafaktor zu

$$b_{PF} = 0,3447 \cdot 1,2430 + 0,3235 \cdot 0,7655 + 0,3318 \cdot 1,0295 = 1,0177$$

Folglich gilt

$$\text{systematisches Risiko}^2 = 1,0177^2 \cdot 0,000700 = 0,000725$$

Mit den unsystematischen Risiken²

$$s^2(e_1) = s_1^2 - b_1^2 s_M^2 = 0,000350$$

$$s^2(e_2) = s_2^2 - b_2^2 s_M^2 = 0,000194$$

$$s^2(e_3) = s_3^2 - b_3^2 s_M^2 = 0,000689$$

kann das unsystematische Portfoliorisiko² berechnet werden:

$$s^2(e_{PF}) = 0,3447^2 \cdot 0,000350 + 0,3235^2 \cdot 0,000194 + 0,3318^2 \cdot 0,000689 = 0,000138$$

Damit gilt für das Portfoliorisiko

$$s_{PF} = (0,000725 + 0,000138)^{1/2} = 0,0294$$

und folglich mit $m_{PF} = 0,0974\%$ für den Value at Risk

$$VaR = -3788,50 \cdot (0,000974 - 2,3263 \cdot 0,0294) = 255,13 \text{ GE}$$

Gemessen an dem VaR-Wert des Varianz-Kovarianz-Verfahrens mit $VaR = 241,53 \text{ GE}$ schätzt die Varianzzerlegung das Risiko zu hoch ein.

Literatur

Der vorliegende Text ist enthalten in

Cremers, H.: Basiswissen Mathematik und Stochastik für Banker, Bankakademie-Verlag, 2. Auflage, Frankfurt 1999

Weiterführende Literatur

Artzner, Ph. / Delbaen, F. / Eber, J.-M. und Heath, D.: Coherent Measures of Risk, Preprint 1998.

Cremers, H.: Monte Carlo Simulation bei der Bewertung Exotischer Optionen und in der Risikoanalyse, Arbeitsbericht Nr.19 der Hochschule für Bankwirtschaft, Frankfurt 1999

Dowd, K.: Beyond Value at Risk, The new Science of Risk Management, John Wiley & Sons, Chichester 1998

Jendruschewitz, B.: Value at Risk, Ein Ansatz zum Management von Marktrisiken in Banken, Diskussionsbeiträge zur Bankbetriebslehre Band 7, Bankakademie-Verlag, 2. Auflage, Frankfurt 1999

Arbeitsberichte der Hochschule für Bankwirtschaft

Bisher sind erschienen:

Nr.	Autor/Titel	Jahr
1	Moormann, Jürgen Lean Reporting und Führungsinformationssysteme bei deutschen Finanzdienstleistern	1995
2	Cremers, Heinz; Schwarz, Willi Interpolation of Discount Factors	1996
3	Jahresbericht 1996	1997
4	Ecker, Thomas; Moormann, Jürgen Die Bank als Betreiberin einer elektronischen Shopping-Mall	1997
5	Jahresbericht 1997	1998
6	Heidorn, Thomas; Schmidt, Wolfgang LIBOR in Arrears	1998
7	Moormann, Jürgen Stand und Perspektiven der Informationsverarbeitung in Banken	1998
8	Heidorn, Thomas; Hund, Jürgen Die Umstellung auf die Stückaktie für deutsche Aktiengesellschaften	1998
9	Löchel, Horst Die Geldpolitik im Währungsraum des Euro	1998
10	Löchel, Horst The EMU and the Theory of Optimum Currency Areas	1998
11	Moormann, Jürgen Terminologie und Glossar der Bankinformatik	1999
12	Heidorn, Thomas Kreditrisiko (CreditMetrics)	1999
13	Heidorn, Thomas Kreditderivate	1999

- | | | |
|-----------|--|-------------|
| 14 | Jochum, Eduard
Hoshin Kanri / Management by Policy (MbP) | 1999 |
| 15 | Deister, Daniel; Ehrlicher, Sven; Heidorn, Thomas
CatBonds | 1999 |
| 16 | Pierre Chevalier; Thomas Heidorn; Merle Rütze
Gründung einer deutschen Strombörse für Elektrizitätsderivate | 1999 |

Bestelladresse:

Hochschule für Bankwirtschaft, z. Hd. Frau Ellen Glatzer
Sternstraße 8, 60318 Frankfurt/M.
Tel.: 069/95946-16, Fax: 069/95946-28

**Weitere Informationen über die Hochschule für Bankwirtschaft
erhalten Sie im Internet unter www.hfb.de**