Nr.26

Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton

Heinz Cremers

Oktober 2000

ISSN 1436-9753

Autor: Prof.Dr.Heinz Cremers
Qualitative Methoden
Und Spezielle Bankbetriebslehre
Hochschule für Bankwirtschaft,
Frankfurt am Main
EMail: cremers@hfb.de

Herausgeber: Hochschule für Bankwirtschaft
Private Fachhochschule der BANKAKADEMIE
Sternstraße 8 • 60318 Frankfurt / M.
Tel.: 069/95946-16 • Fax: 069/95946-28

Inhalt

1 Einleitung..1

2 Bewertung derivativer Produkte mit dem BSM-Modell..2

3 Bewertung derivativer Produkte mit dem Binomialmodell..5

4 Empirische Analyse..12

5 Konvergenz der Modelle..16

6 Konvergenz der Preise..18

Anhang 1 Verteilungen..20

Anhang 2 Schwache Konvergenz und zentraler Grenzwertsatz..23

Anhang 3 Beweis von Lemma 6.1..27

Anhang 4 Beweis von Lemma 6.3..28

Anhang 5 Beweis von Lemma 6.4..32

Literatur

Tabelle der $\mathbb{N}(0,1)$-Verteilung

1 Einleitung

Stochastische Modellbildung. Die Bewertung bestimmter derivativer Finanzprodukte verlangt eine stochastische Modellbildung der Preisentwicklung des zugrundeliegenden Basiswertes. Der faire Preis des Derivats ist dann nicht alleine von den aktuellen Marktinformationen abhängig, sondern wird wesentlich von der Wahl des stochastischen Modells mitbestimmt (Mark to Market and Model-Bewertung). Die meist verwendeten Modelle sind: Das kontinuierliche Modell von Black / Scholes / Merton (im folgenden kurz BSM-Modell) und das diskrete Binomialmodell von Cox / Ross / Rubinstein. Die vorliegende Arbeit zeigt verschiedene Varianten des Binomialmodells auf und weist für jedes dieser Modelle nach, daß bei feiner werdender Zerlegung des Laufzeitbereiches der faire Binomialpreis eines Derivats gegen den entsprechenden fairen BSM-Preis konvergiert. Grundlegend dabei ist die Einsicht, daß die Binomialmodelle im Sinne der schwachen Konvergenz zufälliger Größen gegen das BSM-Modell streben. Eine empirische Analyse versucht Einblicke in das Konvergenzverhalten zu geben.

Voraussetzungen und Notationen. F bezeichne ein Finanzprodukt (Basiswert), für das im Zeitpunkt t_0 der Marktpreis $S_0 = S(t_0, F)$ vorliegt. D ist ein Derivat von F, das im Zeitpunkt $t_\ell > t_0$ zahlt und dessen fairer Preis $S^*(t_0, D)$ zu bestimmen ist. r sei ein kontinuierlicher, laufzeitunabhängiger Marktzins mit dem Tageoperator $T = Tg(t_0, t_\ell)$; insbesondere ist dann

$$zf = \mathrm{e}^{rT} \quad \text{und} \quad df = \mathrm{e}^{-rT}$$

der Zins- bzw. Diskontierungsfaktor für den Zeitraum (t_0, t_ℓ). Im Zeitpunkt t_0 sei $S_0^T = S_0 \mathrm{e}^{cT}$ der Terminpreis des Basiswertes F mit Lieferung in t_ℓ. Die kontinuierliche, annualisierte Haltekostenrate c enthält dabei sämtliche Zahlungen aus dem Produkt (Erträge) bzw. in das Produkt (Kosten) während der Laufzeit (t_0, t_ℓ). s bezeichne die Standardabweichung der kontinuierlichen Jahresrendite von F (die sogenannte *Volatilität*). Der zugrundeliegende Markt ist reibungslos, d.h. es gibt weder Steuern noch Transaktionskosten; die Produkte sind beliebig teilbar, Leerverkäufe sind zugelassen und die Spanne zwischen Kaufpreis und Verkaufpreis ist null.

2 Bewertung derivativer Produkte mit dem BSM-Modell

BSM-Modell. Bezeichnen $S_0 = S(t_0, F)$ und $S_\ell = S(t_\ell, F)$ den Preis des Basiswertes F im Zeitpunkt t_0 bzw. t_ℓ, so berechnet sich die kontinuierliche Rendite R_ℓ für den Zeitraum (t_0, t_ℓ) nach

$$R_\ell = \ln\frac{S_\ell}{S_0} = \ln S_\ell - \ln S_0$$

Ist $t_0 =$ heute und $T = Tg(t_0, t_\ell)$ die zukünftige Zeitspanne gemessen in Jahren, so ist R_ℓ eine zufällige Größe, für die wir eine Normalverteilung $\mathbb{N}(mT, s^2 T)$ mit Jahresdrift m und Volatilität s voraussetzen. Der Preis

$$S_\ell = S_0 \mathrm{e}^{R_\ell} = \mathrm{e}^{\ln S_0 + R_\ell}$$

folgt dann dem Gesetz einer Lognormalverteilung mit den Parametern $\ln S_0 + mT$ und $s^2 T$. Erwartungswert und Varianz berechnen sich damit wie folgt ($\rightarrow$ Anhang 1):

$$\mathrm{E}(S_\ell) = S_0 \mathrm{e}^{(m + s^2/2)T}$$

$$\mathrm{V}(S_\ell) = S_0^2 \mathrm{e}^{2mT + s^2 T}(\mathrm{e}^{s^2 T} - 1)$$

Der Ansatz der *risikoneutralen Bewertung* bestimmt den freien Parameter m so, daß der Erwartungswert $\mathrm{E}(S_\ell)$ des zufälligen Preises S_ℓ mit dem deterministisch berechenbaren Terminpreis übereinstimmt, d.h.

$$S_0 \mathrm{e}^{(m + s^2/2)T} = S_0 \mathrm{e}^{cT}$$

Dabei bezeichnet c die annualisierte kontinuierliche Haltekostenrate (Cost of Carry). Folglich ist

$$\left(m + \frac{s^2}{2}\right)T = cT \quad \Rightarrow \quad m = c - \frac{s^2}{2}$$

Beachten wir noch, daß sich die $\mathbb{N}(mT, s^2 T)$-verteilte Rendite R in der Form $mT + s\sqrt{T}Z$ mit einer $\mathbb{N}(0,1)$-verteilten »Störvariablen« Z schreiben läßt, so erhalten wir das BSM-Modell für den zukünftigen Preis des Basiswertes:

(2.1) $$S_\ell = S_0 \exp\left(\left(c - \frac{s^2}{2}\right)T + s\sqrt{T}Z\right) \quad \text{mit} \quad \mathrm{L}(Z) = \mathbb{N}(0,1)$$

Zusammenfassend halten wir fest: Im BSM-Modell folgt der Preis einer Lognormalverteilung

$$Q = \mathbb{LN}(\ln S_0 + (c - s^2/2)T,\ s^2 T)$$

d.h. S_ℓ hat die kontinuierliche Dichte

$$f_{S_\ell}(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\, s\, \sqrt{T}\, x} \exp\left(- \frac{(\ln(x/S_0) - (c - s^2/2)T)^2}{2s^2 T} \right)$$

Für den Erwartungswert und die Varianz gilt

(2.2) $\quad \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(S_\ell) = S_0 \mathrm{e}^{cT}$

(2.3) $\quad \mathrm{V}_{\mathrm{Q}}(S_\ell) = \mathrm{e}^{2\ln S_0 + 2(c - s^2/2)T + s^2 T}(\mathrm{e}^{s^2 T} - 1) = S_0^2 \mathrm{e}^{2cT}(\mathrm{e}^{s^2 T} - 1)$

Derivate. Ist D ein derivatives Finanzprodukt zum Basiswert F mit der Auszahlung

$$CF(t_\ell, D) = h(S_\ell)$$

So bestimmt sich der faire Preis $S^*(t_0, D)$ im BSM-Modell wie folgt:

(2.4) $\quad S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, D) = \mathrm{E}_Q(\, h(S_\ell))\, \mathrm{e}^{-rT} = \mathrm{e}^{-rT} \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{S_\ell}(x)\, \mathrm{d}x$

d.h. der faire Preis von D ist gleich dem diskontierten Erwartungswert der Auszahlung von D in t_ℓ.

Bemerkung. Eine Begründung der Preisbestimmung (2.4) verlangt tieferliegende Begriffe und Methoden. Aus Sicht der Kapitalmarkttheorie sind die Begriffe »Arbitragefreiheit« und »Vollständigkeit« von Märkten und Modellen zu klären; aus mathematischer Sicht muß das statische Modell, das nur den Preis S_ℓ im Zeitpunkt t_ℓ beschreibt zu einem dynamischen Preisprozeß $t \to S_t,\ t_0 \le t \le t_\ell,$ erweitert werden. Hier sind Martingalmethoden und der Begriff des stochastischen Integrals gefragt. Wir erwähnen noch, daß damit auch die Voraussetzungen der Einleitung verschärft werden müssen; insbesondere werden Zins und Volatilität als konstant in der Zeit angenommen.

Optionen. Wenden wir das Konzept der risikoneutralen Bewertung an auf europäische Optionen

$$h(S_\ell) = \begin{cases} \max(S_\ell - K, 0) & \text{(Call)} \\ \max(K - S_\ell, 0) & \text{(Put)} \end{cases}$$

so erhalten wir

$$S^*(t_0, \text{Option}) = \begin{cases} e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \max(x-K, 0) f_{S_\ell}(x)\, dx & \text{(Call)} \\ e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \max(K-x, 0) f_{S_\ell}(x)\, dx & \text{(Put)} \end{cases}$$

Die rechentechnische Auswertung der Integrale ($\rightarrow$ Basiswissen Finanzmathematik) führt auf die BSM-Optionspreisformeln:

$$\begin{aligned} &\text{Call} \quad S^*_{\text{BSM}}(t_0, \text{C}) = S_0 e^{(c-r)T} \text{N}(d_1) - K\, e^{-rT} \text{N}(d_2) \\ &\text{Put} \quad S^*_{\text{BSM}}(t_0, \text{P}) = K\, e^{-rT} \text{N}(-d_2) - S_0 e^{(c-r)T} \text{N}(-d_1) \\ &\qquad \text{mit} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (c + s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T} \\ &\qquad \text{N(x)} = \text{Verteilungsfunktion der } \mathbb{N}(0,1)\text{-- Verteilung} \end{aligned}$$

Die Haltekosten c konkretisieren sich mit der Wahl des speziellen Basiswertes F der Option:

Haltekosten c	Basiswert F
$c = r$	Aktie ohne Dividendenzahlungen
$c = r - q$	Aktie mit kontinuierlicher Dividendenrate q
$c = r - r_f$	Devise mit Auslandszinssatz r_f
$c = 0$	Terminprodukt und Bond; ersetze S_0 durch $S_0^T = S_0 e^{cT}$

3 Bewertung derivativer Produkte mit dem Binomialmodell

Binomialmodell. Das Binomialmodell ersetzt die kontinuierliche Verteilung des Preises S_ℓ im BSM-Modell durch eine diskrete Verteilung. Dazu zerlegen wir die Laufzeit $T = Tg(t_0, t_\ell)$ in n gleiche Teilintervalle der Länge $\Delta t = T/n$ ($\rightarrow$ Bild 1). Setzen wir $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$ und $S_k = S(t_k, F)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ (beachte: $t_n = t_\ell$ und $S_n = S_\ell$), so entwickelt sich der Preis innerhalb eines jeden Teilintervalls Δt nur um eine bestimmte Rate nach oben oder nach unten:

$$S_{k+1} = S_k u \quad \text{oder} \quad S_{k+1} = S_k d$$

Dabei sind $u > 1$ (für »*up*«) und $0 < d < 1$ (für »down«) feste, zeitunabhängige Multiplikatoren. p sei die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung und entsprechend $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung ($\rightarrow$ Bild 2).

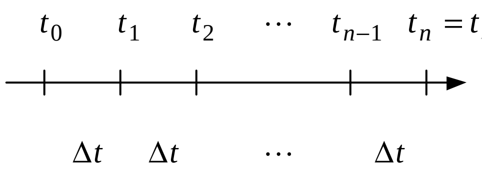

Bild 1

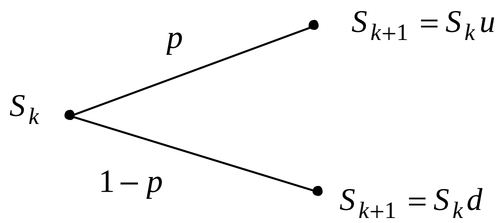

Bild 2

Startet der Preis im Zeitpunkt t_0 in S_0, so gibt jede Folge $(S_1, \ldots, S_n)$ bestehend aus up's und down's einen konkreten Preisverlauf an. Ist etwa $n = 4$ und $(S_1, S_2, S_3, S_4) =$(up, down, up, up), so beschreibt der zugehörige Preis in den Zeitpunkten (t_0, t_1, t_2, t_3) die Bewegung: $S_0, S_1 = S_0 u, S_2 = S_0 ud, S_3 = S_0 u^2 d$, $S_4 = S_0 u^3 d$. Die Gesamtheit der möglichen Preisverläufe ist in Bild 3 dargestellt. Die spezielle Baumstruktur wird *rekombinierend* genannt: Wegen $S_0 ud = S_0 du$ ist das Preisresultat einer Aufwärtsbewegung gefolgt von einer Abwärtsbewegung gleich dem Resultat bei umgekehrter Reihenfolge.

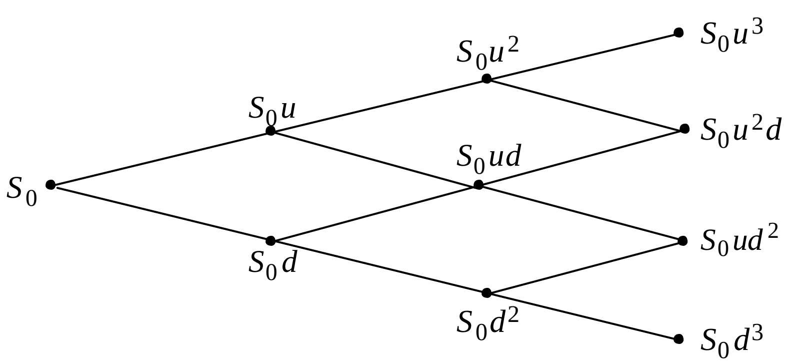

Bild 3

Der Preis S_n im Zeitpunkt $t_n = t_\ell$ ist damit eine zufällige Größe der Form

$$S_n = S_0 \cdot Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_n$$

mit unabhängigen, identisch zweipunktverteilten Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$; genauer: $\mathrm{L}(Y_k) = \mathbb{ZP}(u, d, p)$ für $k = 1, \ldots, n$ (→ Anhang 1). Da jedes Y_k darstellbar ist durch

$$Y_k = u^{I_k} d^{1-I_k}$$

mit einer $\mathbb{ZP}(1, 0, p)$-verteilten Zufallsvariablen I_k und die n-fache Summe unabhängiger $\mathbb{ZP}(1, 0, p)$-verteilter Zufallsvariablen binomialverteilt ist (→ Anhang 1), gilt für den Preis S_n

(3.1) $$S_n = S_0 u^{B_n} d^{n-B_n} \quad \text{mit} \quad \mathrm{L}(B_n) = \mathrm{L}\left(\sum_{k=1}^{n} I_k\right) = \mathbb{B}(n, p)$$

Damit berechnen sich die Wahrscheinlichkeiten zu

$$P(S_n = S_0 u^k d^{n-k}) = P(B_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Zusammenfassend halten wir fest: Im Binomialmodell folgt der Preis einer transformierten Binomialverteilung Q_n mit der diskreten Dichte

$$f_{S_n}(x_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{mit} \quad x_k = S_0 u^k d^{n-k} \quad \text{und} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Für den Erwartungswert und die Varianz gilt

(3.2) $$\mathrm{E}_{Q_n}(S_n) = S_0 (pu + (1-p)d)^n$$

(3.3) $$\mathrm{V}_{Q_n}(S_n) = S_0^2 ((pu^2 + (1-p)d^2)^n - (pu + (1-p)d)^{2n})$$

Ist speziell $d = 1/u$ so schreibt sich (3.1) wie folgt:

(3.4) $$S_n = S_0 u^{B_n} u^{-(n-B_n)} = S_0 u^{2B_n - n}$$

Drei Modellvarianten. Durch Spezifikation der Modellparameter u, d und p ergibt sich ein konkretes Binomialmodell. Wir betrachten im folgenden die Modelle:

Modell	u	d	P
1	$\mathrm{e}^{m\Delta t+s\sqrt{\Delta t}}$	$\mathrm{e}^{m\Delta t-s\sqrt{\Delta t}}$	$\frac{1}{2}$
2	$\mathrm{e}^{s\sqrt{\Delta t}}$	$\mathrm{e}^{-s\sqrt{\Delta t}}$	$\dfrac{m\Delta t-\ln d}{\ln u-\ln d}$
3	$\mathrm{e}^{s\sqrt{\Delta t}}$	$\mathrm{e}^{-s\sqrt{\Delta t}}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{c\Delta t}-d}{u-d}$

Dabei bezeichnet s wieder die Volatilität des Basiswertes F und $m=c-s^2/2$ die Drift der risikoneutralen Bewertung. In den Abschnitten 5 und 6 werden wir zeigen: Für jedes der Modelle 1-3 gilt

$$S_n \Rightarrow S_\ell\,, \quad \mathrm{E}_{Q_n}(S_n)\to \mathrm{E}_Q(S_\ell) \quad \text{und} \quad \mathrm{V}_{Q_n}(S_n)\to \mathrm{V}_Q(S_\ell)$$

bei immer feiner werdender Zerlegung des Zeitintervalls. In diesem Sinne sind alle drei Binomialmodelle Approximationen des BSM-Modells. Bevor wir die drei Varianten näher charakterisieren, stellen wir noch fest: Für die Modelle 2 und 3 gilt $ud=1$, d.h. eine Aufwärtsbewegung gefolgt von einer Abwärtsbewegung erzielt den Startpreis.

Modell 1. Für die kontinuierliche Rendite R_n gilt

$$\begin{aligned} R_n &= \ln(S_n/S_0) = B_n \ln u + (n-B_n)\ln d \\ &= B_n(m\Delta t + s\sqrt{\Delta t}) + (n-B_n)(m\Delta t - s\sqrt{\Delta t}) \\ &= nm\Delta t + (2B_n - n)s\sqrt{\Delta t} \\ &= mT + s\sqrt{T}\cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Z_k \end{aligned}$$

wobei $Z_1,\ldots,Z_n$ unabhängige identisch $\mathbb{ZP}(1,-1,1/2)$-verteilte Zufallsvariablen sind ($\rightarrow$ Anhang 1) mit $\mathrm{E}(Z_k)=0$ und $\mathrm{V}(Z_k)=1$. Mit dem Zentralen Grenzwertsatz ($\rightarrow$ Anhang 2, Korollar A.2.7 und Satz A.2.3) gilt:

- $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Z_k \Rightarrow Z$ mit $\mathrm{L}(Z)=\mathrm{N}(0,1)$ und damit $R_n \Rightarrow R_\ell$
- $\mathrm{E}_{Q_n}(R_n) = mT = \mathrm{E}_Q(R_\ell)$
- $\mathrm{V}_{Q_n}(R_n) = s^2 T = \mathrm{V}_Q(R_\ell)$

In diesem Sinne ist die Rendite R_n die diskrete Version der Rendite R_ℓ im BSM-Modell. Die »Störvariable« $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ ist die klassische Form eines Random Walks, der sich in jedem Zeitschritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit um 1 nach oben bzw. nach unten bewegt.

Bemerkung. Stellen wir umgekehrt die Frage nach dem Binomialmodell, dessen Parameter u, d und p die Bedingungen

$$\mathrm{E}_{Q_n}(R_n) = mT, \quad \mathrm{V}_{Q_n}(R_n) = s^2 T \quad \text{und} \quad p = 1/2$$

erfüllt, so ist Modell 1 die Lösung ($\rightarrow$ Basiswissen Finanzmathematik).

Modell 2. Wir betrachten wieder die kontinuierliche Rendite R_n und beachten $d = 1/u$ für dieses Modell:

$$R_n = \ln(S_n/S_0) = (2B_n - n)\ln u = (2B_n - n)s\sqrt{\Delta t}$$

Für die Wahrscheinlichkeit p gilt

$$p = \frac{m\Delta t + s\sqrt{\Delta t}}{2s\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{m\Delta t}{s\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{mT}{s\sqrt{T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

und folglich für den Erwartungswert und die Varianz

- $\mathrm{E}_{Q_n}(R_n) = (2pn - n)s\sqrt{\Delta t} = m\Delta t \cdot n = mT = \mathrm{E}_Q(R_\ell)$
- $\mathrm{V}_{Q_n}(R_n) = 4\mathrm{V}_{Q_n}(B_n)s^2\Delta t = 4np(1-p)s^2\Delta t \quad \rightarrow \quad s^2 T = \mathrm{V}_Q(R_\ell)$

Bemerkung. Stellen wir umgekehrt die Frage nach dem Binomialmodell, dessen Paramter u, d und p die Bedingungen

$$\mathrm{E}_{Q_n}(R_n) = mT, \quad \mathrm{V}_{Q_n}(R_n) = s^2 T \quad \text{und} \quad d = 1/u$$

erfüllen, so ist

$$u = \mathrm{e}^{\sqrt{s^2\Delta t + m^2\Delta t^2}} \approx \mathrm{e}^{s\sqrt{\Delta t}} \qquad d = \mathrm{e}^{-\sqrt{s^2\Delta t + m^2\Delta t^2}} \approx \mathrm{e}^{-s\sqrt{\Delta t}} \qquad p = \frac{m\Delta t - \ln d}{\ln u - \ln d}$$

die Lösung ($\rightarrow$ Basiswissen Finanzmathematik und $\rightarrow$ Cox/Rubinstein). Dies ist – zumindest approximativ – Modell 2.

Modell 3. Wir betrachten nun den Preis S_n des Basiswertes F und stellen fest, daß Modell 3 als einzige Version der Forderung der risikoneutralen Bewertung genügt:

$$\mathrm{E}_{Q_n}(S_n) = S_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_{Q_n}(Y_k) = S_0(pu + (1-p)d)^n = S_0(\mathrm{e}^{c\Delta t})^n = S_0\mathrm{e}^{cT}$$

Damit ist die Folge

$$S_k^\circ = S_k \cdot \mathrm{e}^{-c\Delta t \cdot k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

der abgezinsten Preise ein Martingal (→ Anhang 3); denn wegen der Unabhängigkeit des k+1-ten Entwicklungsschrittes von der vorhergehenden Entwicklung gilt für $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{Q_n}(S_{k+1}^\circ \mid S_1^\circ, \ldots, S_k^\circ) &= \mathrm{E}_{Q_n}(S_k^\circ Y_{k+1} \mathrm{e}^{-c\Delta t} \mid S_1^\circ, \ldots, S_k^\circ) \\ &= S_k^\circ \mathrm{E}_{Q_n}(Y_{k+1})\mathrm{e}^{-c\Delta t} = S_k^\circ \mathrm{e}^{c\Delta t}\mathrm{e}^{-c\Delta t} = S_k^\circ \end{aligned}$$

Bemerkung. Stellen wir wieder die Frage nach dem Binomialmodell, dessen Parameter u, d und p die Bedingungen

$$\mathrm{E}_{Q_n}(S_n) = S_0 \mathrm{e}^{cT}, \quad \mathrm{V}_{Q_n}(S_n) = S_0^2 \mathrm{e}^{2cT}(\mathrm{e}^{s^2 T} - 1) \quad \text{und} \quad d = 1/u$$

erfüllen, so ist

$$u = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} \approx \mathrm{e}^{s\sqrt{\Delta t}} \quad \text{mit} \quad a = \mathrm{e}^{-c\Delta t} + \mathrm{e}^{c\Delta t + s^2 \Delta t}$$

$$d = \frac{1}{u} \approx \mathrm{e}^{-s\sqrt{\Delta t}} \quad \text{und} \quad p = \frac{\mathrm{e}^{c\Delta t} - d}{u - d}$$

die Lösung (→ Basiswissen Finanzmathematik).

Derivate. Ist D ein derivatives Finanzprodukt zum Basiswert F mit der Auszahlung

$$CF(t_n, D) = h(S_n)$$

so bestimmt sich der faire Preis $S^*(t_0, D)$ im Binomialmodell wie folgt:

$$S^*_{\mathrm{BM},n}(t_0, D) = \mathrm{E}_{Q_n}(h(S_n))\mathrm{e}^{-rT} = \mathrm{e}^{-rT} \sum_{k=1}^{n} h(x_k) f_{S_n}(x_k) \tag{3.5}$$

d.h. der faire Preis von D ist gleich dem diskontierten Erwartungswert der Auszahlung von D in t_n.

Bemerkung. Auch im Binomialmodell ist die Preisbestimmung (3.5) zu begründen. Einzig Modell 3 erlaubt eine Kapitalmarkt-theoretische Begründung: Mit der Martingaleigenschaft der Preisentwicklung $S_0^\circ, S_1^\circ, \ldots, S_n^\circ$ hat auch die Preisentwicklung einer selbstfinanzierenden Duplikationsstrategie zum Derivat D diese Eigenschaft. Da Martingale konstante Erwartungswerte haben, folgt (3.5).

Für alle drei Modelle wird unter einschränkenden Bedingungen an die Auszahlungsfunktion h in Abschnitt 6 gezeigt:

$$\mathrm{E}_{Q_n}(\,h(S_n)) \quad\to\quad \mathrm{E}_{Q_n}(\,h(S_\ell)) \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

d.h. die fairen Preise im jeweiligen Binomialmodell konvergieren bei feiner werdender Unterteilung des Zeitintervalls gegen den fairen Preis im BSM-Modell. Diese mathematische Beziehung stellt also für die Modelle 1 und 2 die einzige Begründung dar. Ihre Kapitalmarkt-theoretische Rechtfertigung erhalten diese Modelle somit nur durch das BSM-Modell.

Optionen. Wenden wir die Preisbestimmung (3.5) an auf europäische Optionen

$$h(S_n)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-rT}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\max(S_0u^kd^{n-k}-K,0), & \text{(Call)}\\ \mathrm{e}^{-rT}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\max(K-S_0u^kd^{n-k},0), & \text{(Put)}\end{cases}$$

so erhalten wir

$$S^*_{\mathrm{BM},n}(t_0,\mathrm{Option})=\begin{cases} \mathrm{e}^{-rT}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\max(S_0u^kd^{n-k}-K\,0\,) & \text{(Call)}\\ \mathrm{e}^{-rT}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\max(K-S_0u^kd^{n-k}\,0\,) & \text{(Put)}\end{cases} \tag{3.6}$$

Spezialfall. Liegt Modell 3 mit $c=r$ vor, d.h. die Haltekosten sind mit den reinen Refinanzierungskosten identisch, kann die Preisformel (3.6) noch weiter ausgewertet werden. Wir bemerken zunächst, daß für den vorliegenden Spezialfall die Pseudowahrscheinlichkeit

$$p_0=pu\mathrm{e}^{-r\Delta t}$$

die Eigenschaft

$$1-p_0=(1-p)\,d\mathrm{e}^{-r\Delta t}$$

hat (beachte: $(pu+(1-p)\,d\,)\,\mathrm{e}^{-r\Delta t}=1)$. Weiter gilt für den Call (und analog für den Put)

$$
\begin{aligned}
S_0 u^k d^{n-k} \geq K \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{u}{d}\right)^k \geq \frac{K}{S_0} d^{-n} \\
&\Leftrightarrow \quad k \ln\left(\frac{u}{d}\right) \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - n \ln d \\
&\Leftrightarrow \quad k \geq \frac{\ln(K/S_0) - n \ln d}{\ln(u/d)} \\
&\Leftrightarrow \quad k \geq k_0 = \min\left(i : i \geq \frac{\ln(K/S_0) - n \ln d}{\ln(u/d)} \right)
\end{aligned}
$$

Mit den Verteilungsfunktionen B_0 und B zu den Binomialverteilungen $\mathbb{B}(n, p_0)$ bzw. $\mathbb{B}(n, p)$ ($\rightarrow$Anhang 1) folgt weiter:

$$
\begin{aligned}
S^*_{\mathrm{BM3},n}(t_0, \mathrm{C}) &= \mathrm{e}^{-rT} \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (S_0 u^k d^{n-k} - K) \\
&= S_0 \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} - K\mathrm{e}^{-rT} \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= S_0 (1 - \mathrm{B}_0(k_0)) - K\mathrm{e}^{-rT} (1 - \mathrm{B}(k_0))
\end{aligned}
$$

Analog gilt für den Put

$$
\begin{aligned}
S^*_{\mathrm{BM3},n}(t_0, \mathrm{P}) &= K\mathrm{e}^{-rT} \sum_{k=0}^{k_0-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - S_0 \sum_{k=0}^{k_0-1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \\
&= K\mathrm{e}^{-rT} \mathrm{B}(k_0) - S_0 \mathrm{B}_0(k_0)
\end{aligned}
$$

Bei dieser Form der Preisbestimmung im Binomialmodell wird die Analogie zu den Bewertungsformeln des BSM-Modells besonders deutlich. In Abschnitt 6 zeigen wir mit elementaren Methoden, daß bei feiner werdender Zerlegung des Teilintervalls gilt

$$
S^*_{\mathrm{BM3},n}(t_0, \mathrm{C}) \;\rightarrow\; S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, \mathrm{C}) \qquad \text{und} \qquad S^*_{\mathrm{BM3},n}(t_0, \mathrm{P}) \;\rightarrow\; S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, \mathrm{P})
$$

4 Empirische Analyse

Berechnung des Optionspreises im Binomialmodell. Zur Berechnung des Optionspreises bieten sich zwei Verfahren an:

1. Iteration. Während der Binomialbaum durch Vorwärtsiteration bestimmt wird, ergibt sich der Optionspreis durch iteratives Rückwärtsrechnen.

Vorwärtsiteration: $S_{k+1} = \begin{cases} S_k u & \text{für up} \\ S_k d & \text{für down} \end{cases}$

Rückwärtsiteration: Mit den Notationen $C_{k,i}$ und $P_{k,i}$ für den Callpreis bzw. Putpreis im Zeitpunkt t_k bei i Aufwärtsbewegungen und entsprechend $S_{k,i}$ für den Preis des Basiswertes – also $S_{k,i} = S_0 u^i d^{k-i}$ - gilt

$$C_{n,i} = \max(S_{n,i} - K, 0) \quad \text{und} \quad C_{k,i} = [C_{k+1,\,i+1} p + C_{k+1,\,i}(1-p)]\,\mathrm{e}^{-r\Delta t} \quad \text{für} \quad k < n$$

$$P_{n,i} = \max(K - S_{n,i}, 0) \quad \text{und} \quad P_{k,i} = [P_{k+1,\,i+1} p + P_{k+1,\,i}(1-p)]\,\mathrm{e}^{-r\Delta t} \quad \text{für} \quad k < n$$

2. Erwartungswert. Gemäß Formel (3.6) werden die zustandsabhängigen Auszahlungen der Option mit den Binomialwahrscheinlichkeiten gewichtet und dann aufsummiert. Diskontieren des Erwartungswertes ergibt dann den Optionspreis.

Aktien. Eine Aktie A ohne Dividendenzahlungen notiert in t_0 mit dem Preis 100 GE. Zu bewerten ist ein europäischer Call C auf A mit Basispreis 105 GE und Verfall in 3 Monaten. Der kontinuierliche Zins für 3 Monate beträgt 10%; die Aktie besitzt eine Volatilität von 40%. Also $S_0 = 100$; $K = 105$; $T = 0{,}25$; $b = r = 0{,}1$ und $s = 0{,}4$. Wir bestimmen den Callpreis durch ein Binomialmodell mit $n = 3$ Schritten (um den Rechenaufwand überschaubar zu halten). Mit $\Delta t = 0{,}25/3 = 1/12$ berechnen wir die Parameter des dritten Modells:

$$u = \mathrm{e}^{0{,}4\sqrt{1/12}} = 1{,}1224 \quad \text{und} \quad d = \frac{1}{u} = 0{,}8909$$

$$p = \frac{\mathrm{e}^{0{,}1/12} - 0{,}8909}{1{,}1224 - 0{,}8909} = 0{,}5073 \quad \text{und} \quad 1 - p = 0{,}4927$$

Mit diesen Angaben kann der Binomialbaum konstruiert werden ($\rightarrow$ Bild 1).

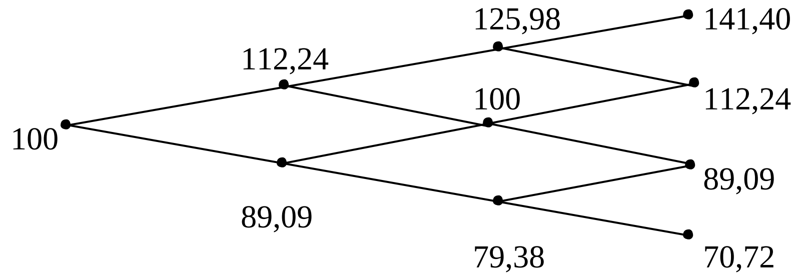

Bild 1

1. Lösungsverfahren (Iteration). Beginnend mit den Callpreisen im Zeitpunkt t_3 werden diese iterativ rückwärts gerechnet, z.B.

$$C_{3,3} = \max(141{,}40 - 105,\, 0\,) = 36{,}40$$

$$C_{2,2} = [36{,}40p + 7{,}24(1-p)]\,\mathrm{e}^{-r\Delta t} = (36{,}40 \cdot 0{,}5073 + 7{,}24 \cdot 0{,}4927)\,\mathrm{e}^{-0{,}1/12} = 21{,}85$$

Aktien–		Call		
preis	t_0	t_1	t_2	t_3
141,40				36,40
125,98			21,85	
112,24		12,77		7,24
100,00	7,32		3,64	
89,09		1,83		0
79,38			0	
70,72				0

Der Faire Callpreis ist damit $S^*_{\mathrm{BM}3,3}(t_0,\mathrm{C}) = 7{,}32$ GE .

2. Lösungsverfahren (Erwartungswert). Die Erwartungswertbildung ist in der folgenden Tabelle aufgearbeitet:

i	$S_{3,i} = S_0 u^i d^{3-i}$	$C_{3,i} = \max(S_{3,i} - 105,\, 0)$	$p_i = \binom{3}{i} p^i (1-p)^{3-i}$	$C_{3,i} \cdot p_i$
0	70,72	0	0,1196	0
1	89,09	0	0,3694	0
2	112,24	7,24	0,3804	2,75
3	141,40	36,40	0,1306	4,75
Summe			1,0000	7,50

Der Faire Callpreis ergibt sich durch Abzinsen des Erwartungswertes in t_ℓ auf den Zeitpunkt t_0:

$$S^*_{\mathrm{BM}3,3}(t_0, \mathrm{C}) = \mathrm{E}_{Q_3}(CF(t_\ell, \mathrm{C})) \cdot \mathrm{e}^{-rT} = 7{,}50 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 0{,}25} = 7{,}32 \ \ \mathrm{GE}$$

Abschließend vergleichen wir dieses Resultat mit dem exakten Ergebnis aus dem BSM-Modell. Zunächst bestimmen wir

$$d_1 = \frac{\ln(100/105) + (0{,}1 + 0{,}4^2/2 \cdot 0{,}25}{0{,}4 \cdot \sqrt{0{,}25}} = -0{,}0190$$
$$d_2 = d_1 - 0{,}4 \cdot \sqrt{0{,}25} = -0{,}2190$$

und damit weiter

$$S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, \mathrm{C}) = 100\mathrm{N}(-0{,}0190) + \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 0{,}25}\mathrm{N}(-0{,}2190)$$
$$= 100(1 - 0{,}5080) - 105\mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 0{,}25} \cdot (1 - 0{,}5871) = 6{,}9144 \ \ \mathrm{GE}$$

Analog folgt für den Put

$$S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, \mathrm{P}) = 9{,}3220 \ \ \mathrm{GE}$$

Die folgende Tabelle zeigt das Konvergenzverhalten der drei Binomialmodelle:

	Modell 1		Modell 2		Modell 3	
n	Call	Put	Call	Put	Call	Put
3	7,3776	9,7896	7,3180	9,7326	7,3214	9,7289
5	7,1134	5,5236	7,0593	9,4711	7,0613	9,4689
10	7,0660	9,4748	7,0804	9,4901	7,0815	9,4890
20	7,0100	9,4182	7,0070	9,4156	7.0076	9,4151
30	6,9731	9,3811	6,9624	9,3706	6,9627	9,3702
50	6,9288	9,3366	6,9101	9,3181	6,9103	9,3179
100	6,9072	9,3148	6,9205	9,3282	6,9206	9,3281
200	6,9238	9,3314	6,9198	9,3274	6,9198	9,3274
300	6,9125	9,3200	6,9127	9,3203	6,9127	9,3203
500	6,9182	9,3257	6,9165	9,3241	6,9166	9,3241
1000	6,9163	9,3239	6,9143	9,3219	6,9143	9,3218

Devisen. Sei $S_0 = S(t_0, 1\mathrm{GE}_f)$ der Preis für eine Geldeinheit der Auslandswährung zahlbar in Geldeinheiten GE der Inlandswährung (Preisnotierung). R bezeichne den Inlandszins und r_f den Auslandszins. Zur Bewertung europäischer Devisenoptionen erhalten wir mit $b = r - r_f$ die Optionspreisformeln des BSM-Modells

$$\text{Call} \quad S^*_{\text{BSM}}(t_0, \text{C}) = S_0 \mathrm{e}^{-r_f T} \mathrm{N}(d_1) - K \mathrm{e}^{-rT} \mathrm{N}(d_2)$$

$$\text{Put} \quad S^*_{\text{BSM}}(t_0, \text{P}) = K \mathrm{e}^{-rT} \mathrm{N}(-d_2) - S_0 \mathrm{e}^{-r_f T} \mathrm{N}(-d_1)$$

$$\text{mit} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

Beispiel. Betrachte eine europäische Call Fremdwährung / Put Euro Option mit 6 Monaten Laufzeit und Strike 83. Der Preis für eine Einheit Fremdwährung ist im Bewertungszeitpunkt mit 85 Euro festgelegt bei einer Volatilität von 10,3%. Der 6-Monatszins des Inlands ist 3%, der des Auslands 5%. Also $S_0 = 85$; $K = 83$; $T = 0{,}5$; $r = 0{,}03$; $r_f = 0{,}05$ und $s = 0{,}103$. Wir berechnen zunächst

$$d_1 = \frac{\ln(85/83) + (0{,}03 - 0{,}05 + 1{,}103^2/2) \cdot 0{,}5}{0{,}103 \cdot \sqrt{0{,}5}} = 0{,}2260$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}103 \cdot \sqrt{0{,}5} = 0{,}1532$$

Damit gilt weiter

$$S^*_{\text{BSM}}(t_0, \text{C}) = 85\mathrm{e}^{-0{,}025} \cdot 0{,}5894 - 83\mathrm{e}^{-0{,}015} \cdot 0{,}5609 = 3{,}0031 \text{ GE}$$

Für den entsprechender Put Fremdwährung / Call Euro gilt $S^*_{\text{BSM}}(t_0, \text{P}) = 1{,}8660$ GE. Die folgende Tabelle zeigt das Konvergenzverhalten der drei Binomialmodelle:

	Modell 1		Modell 2		Modell 3	
n	Call	Put	Call	Put	Call	Put
3	3,1799	2,0429	3,0634	1,9280	3,0644	1,9273
5	3,0973	1,9603	2,9878	1,8517	2,9884	1,8513
10	3,0287	1,8917	3,0573	1,9208	3,0576	1,9206
20	3,0261	1,8891	3,0179	1,8811	3,0181	1,8810
30	3,0215	1,8844	2,9967	1,8598	2,9968	1,8597
50	3,0147	1,8776	3,0025	1,8656	3,0026	1,8655
100	3,0057	1,8686	3,0076	1,8706	3,0077	1,8706
200	3,0019	1,8649	3,0049	1,8679	3,0049	1,8679
300	3,0046	1,8675	3,0032	1,8661	3,0032	1,8661
500	3,0038	1,8668	3,0039	1,8669	3,0039	1,8669
1000	3,0036	1,8666	3,0031	1,8661	3,0031	1,8661

5 Konvergenz der Modelle

Satz. In allen drei Varianten des Binomialmodells konvergiert der Preis S_n im Sinne der schwachen Konvergenz ($\to$ Anhang 3) gegen den Preis S_ℓ des BSM-Modells; in Zeichen $S_n \Rightarrow S_\ell$; d.h. es gilt

$$\mathrm{E}_{Q_n}(g(S_n)) \to \mathrm{E}_Q(g(S_\ell))$$

für jede stetige, beschränkte Funktion $x \to g(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir werden in folgenden für jedes Modell nachweisen, daß die Logarithmen der Preise schwach konvergieren, d.h.

$$\ln S_n \Rightarrow \ln S_\ell = \ln S_0 + mT + s\sqrt{T}\,Z$$

mit $\mathcal{L}(Z) = \mathbb{N}(0,1)$ und $m = c - s^2/2$. Da $x \to \mathrm{e}^x$ eine stetige Funktion ist, folgt dann die Behauptung $S_n \Rightarrow S_\ell$ mit Satz A.2.2 des Anhangs 2.

Modell 1. Wir verwenden den zentralen Grenzwertsatz in der Form A.2.8 mit $p = 1/2$. Mit (3.1) gilt

$$\begin{aligned}\ln S_n &= \ln S_0 + B_n \ln u + (n - B_n)\ln d \quad = \ln S_0 + nm\Delta t + s\sqrt{\Delta t}(2B_n - n)\\ &= \ln S_0 + mT + s\sqrt{T}\,\frac{2B_n - n}{\sqrt{n}} \quad = \ln S_0 + mT + s\sqrt{T}\,\frac{B_n - n/2}{\sqrt{n/4}}\\ &\Rightarrow \ln S_0 + mT + s\sqrt{T}\,Z \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(Z) = \mathbb{N}(0,1)\end{aligned}$$

Modell 2 und 3. Wir beachten zunächst $\ln u = -\ln d = s\sqrt{\Delta t}$ und folgern für Modell 2:

- $p = p_n = \dfrac{m\Delta t + s\sqrt{\Delta t}}{2s\sqrt{\Delta t}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{m\Delta t}{s\sqrt{\Delta t}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{mT}{s\sqrt{T}\sqrt{n}} \quad \to \quad \dfrac{1}{2} \quad$ für $\quad n \to \infty$
- $(2pn - n)\ln u = \sqrt{n}(2p-1)s\sqrt{T} = \dfrac{mT}{s\sqrt{T}}s\sqrt{T} = mT$

In Anhang 4 wird gezeigt, daß analog für Modell 3 gilt:

- $p = p_n \to \dfrac{1}{2} \quad$ für $\quad n \to \infty$
- $(2pn - n)\ln u = \sqrt{n}(2p-1)s\sqrt{T} \quad \to \quad \dfrac{mT}{s\sqrt{T}}s\sqrt{T} = mT$

Dann schließen wir weiter mit dem zentralen Grenzwertsatz A.2.6, A.2.3 und (3.4):

$$\begin{aligned}\ln S_n &= \ln S_0 + (2B_n - n)\ln u \\ &= \ln S_0 + \sqrt{n}(2p-1)s\sqrt{T} + \sqrt{4p(1-p)s^2T}\cdot\frac{(2B_n-n)\ln u - (2pn-n)\ln u}{\sqrt{4np(1-p)(\ln u)^2}} \\ &= \ln S_0 + \sqrt{n}(2p-1)s\sqrt{T} + s\sqrt{T}\sqrt{4p(1-p)}\cdot\frac{B_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\ &\Rightarrow \ln S_0 + mT + s\sqrt{T}Z \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(Z) = \mathbb{N}(0,1)\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

6 Konvergenz der Optionspreise

Modele 1 bis 3. Aus der schwachen Konvergenz $S_n \Rightarrow S_\ell$ der Preise des Basiswertes kann nicht auf die Konvergenz

(6.1) $\quad \mathrm{E}_{Q_n}(h(S_n))\,\mathrm{e}^{-rT} \to \mathrm{E}_Q(h(S_\ell))\,\mathrm{e}^{-rT}$

der Preise eines derivativen Finanzprodukts D mit Auszahlung

$$CF(t_\ell, D) = h(S_\ell)$$

geschlossen werden, da i.a. h weder beschränkt noch stetig ist. Der folgende Satz enthält hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von (6.1).

6.1 Satz. Erfüllt die Auszahlungsfunktion h eines Derivats die folgenden Bedingungen

(6.2) $\quad \sup_n \mathrm{E}_{Q_n}(h^2(S_n)) < +\infty$

(6.3) $\quad x \to h(x),\ x \geq 0,$ ist stückweise stetig

so konvergiert für alle drei Varianten des Binomialmodells der faire Preis $S_n^*(t_0, D)$ im Sinne von (6.1) gegen den fairen Preis $S^*(t_0, D)$ des BSM-Modells.

Beweis. Aus $S_n \Rightarrow S_\ell$ ($\to$ Satz 5.1) und (6.3) folgt zunächst mit Satz A.2.2 des Anhangs 2 die schwache Konvergenz der Auszahlungen, d.h.

$$h(S_n) \Rightarrow h(S_\ell)$$

Ist zusätzlich (6.2) erfüllt, folgt mit Satz A.2.4 des Anhangs 2 die Behauptung.

In den Anwendungen kann der Nachweis der Bedingung (6.2) aufwendig sein. Wir zeigen im folgenden die Gültigkeit von (6.2) für europäische Optionen und beginnen mit einem Hilfssatz, der in Anhang 4 bewiesen wird.

6.2 Lemma. Es gilt $\mathrm{E}_{Q_n}(S_n^2) \to \mathrm{E}_Q(S_\ell^2)$ für alle drei Varianten des Binomialmodells.

Unmittelbare Folgerungen des Lemmas sind

(6.4) $\quad \mathrm{E}_Q(S_n) \to \mathrm{E}_Q(S_\ell) \quad$ und $\quad \mathrm{V}_{Q_n}(S_n) \to \mathrm{V}_Q(S_\ell)$

Denn aus $S_n \Rightarrow S_\ell$ ($\to$ Satz 5.1) folgt mit Lemma 6.2 und Satz A.2.4 (beachte: eine konvergente Folge ist beschränkt) die Konvergenz der Erwartungswerte; die Konvergenz der Varianzen ergibt sich dann mit Lemma 6.2 aus dem Verschiebungssatz.

6.3 Satz. Gilt für die Auszahlungsfunktion $h(x) \le x + c$ für $x \ge 0$ und einer beliebigen Konstanten c, so ist die Bedingung (6.2) erfüllt.

Beweis. Mit Lemma 6.2 und der Konvergenz der Erwartungswerte folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{Q_n}(h^2(S_n)) &\le \mathrm{E}_{Q_n}((S_n + c)^2) \\ &= \mathrm{E}_{Q_n}(S_n^2 + 2cS_n + c^2) \\ &= \mathrm{E}_{Q_n}(S_n^2) + 2c\mathrm{E}_{Q_n}(S_n) + c^2 \\ &\to \mathrm{E}_Q(S_\ell^2) + 2c\mathrm{E}_Q(S_\ell) + c^2 \end{aligned}$$

Da konvergente Folgen beschränkt sind, folgt die Behauptung.

Für die europäischen Optionen

$$\begin{array}{lll} \text{Call} & h(x) = \max(x - K, 0) \le x & \text{für} \quad x \ge 0 \\ \text{Put} & h(x) = \max(K - x, 0) \le x + K & \text{für} \quad x \ge 0 \end{array}$$

sind die Bedingungen (6.2) und (6.3) erfüllt und wir können die empirischen Resultate des Abschnitts 4 nun auch theoretisch begründen:

(6.5) $\quad S^*_{\mathrm{BM},n}(t_0, \mathrm{C}) \to S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, \mathrm{C}) \quad \text{und} \quad S^*_{\mathrm{BM},n}(t_0, \mathrm{P}) \to S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, \mathrm{P})$

Spezialfall. Für den Spezialfall $c = r$ des Modells 3 in Abschnitt 3 beweisen wir in Anhang 5 den folgenden Hilfssatz.

6.4 Lemma. Für $n \to \infty$ gilt

(6.6) $\quad \mathrm{B}_0(k_0) \to \mathrm{N}(-d_1)$

(6.7) $\quad \mathrm{B}(k_0) \to \mathrm{N}(-d_2)$

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir für diesen Spezialfall eine Beweisvariante von (6.5) ohne Rückgriff auf die Sätze A.2.2-A.2.4 zur schwachen Konvergenz in Anhang 2:

$$\begin{aligned} S^*_{\mathrm{BM}3,n}(t_0, \mathrm{C}) &= S_0(1 - \mathrm{B}_0(k_0)) - K\mathrm{e}^{-rT}(1 - \mathrm{B}(k_0)) \\ &\to S_0(1 - \mathrm{N}(-d_1)) - K\mathrm{e}^{-rT}(1 - \mathrm{N}(-d_2)) \\ &= S_0\mathrm{N}(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{N}(d_2) \\ &= S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, \mathrm{C}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^*_{\mathrm{BM}3,n}(t_0, \mathrm{P}) &= K\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{B}(k_0) - S_0\mathrm{B}_0(k_0) \\ &\to K\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{N}(-d_2) - S_0\mathrm{N}(-d_1) \\ &= S^*_{\mathrm{BSM}}(t_0, \mathrm{P}) \end{aligned}$$

Anhang 1 Verteilungen

Zweipunktverteilung. Die Zufallsvarable X besitzt eine Zweipunktverteilung mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und $p \in (0,1)$, wenn X diskret verteilt ist mit der Dichtefunktion

$$f_X = \begin{bmatrix} a & b \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

Bezeichnung: $\mathrm{L}(X) = \mathbb{ZP}(a, b, p)$. Erwartungswert und Varianz berechnen sich wie folgt:

$$\mathrm{E}(X) = ap + b(1-p) \quad \text{und} \quad \mathrm{V}(X) = a^2 p + b^2(1-p) - [ap + b(1-p)]^2$$

Der spezielle Fall $\mathbb{ZP}(1, 0, p)$ wird *Bernoulliverteilung* genannt. Für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable I gilt $\mathrm{E}(I) = p$ und $\mathrm{V}(I) = p(1-p)$.

A1.1 Satz. Hat die Zufallsvariable X eine $\mathbb{ZP}(1, 0, p)$-Verteilung, so gibt es eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable I mit

$$X = aI + b(1-I) = (a-b)I + b$$

Beweis. Setze $I = (X-b)/(a-b)$.

Binomialverteilung. Die Zufallsvariable X besitzt eine *Binomialverteilung* mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$, wenn X diskret verteilt ist mit der Dichtefunktion

$$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Bezeichnung $\mathrm{L}(X) = \mathbb{B}(n, p)$. Erwartungswert und Varianz berechnen sich wie folgt

$$\mathrm{E}(X) = np \quad \text{und} \quad \mathrm{V}(X) = np(1-p)$$

Hat X eine $\mathbb{B}(n, p)$-Verteilung, so bezeichnet

$$\mathrm{B}(m) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

die Verteilungsfunktion von X an der Stelle $m \in \mathbb{N}$.

A.1.2 Satz. (a) sind $I_1, \ldots, I_n$ unabhängig identisch $\mathbb{ZP}(1, 0, p)$-verteilt, so ist die Summe $B_n = I_1 + \cdots + I_n$ binomial $\mathbb{B}(n, p)$-verteilt.

(b) sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch $\mathbb{ZP}(a, b, p)$-verteilt, so ist die Summe darstellbar als

$$X_1 + \cdots + X_n = (a-b)B_n + nb \quad \text{mit} \quad \mathrm{L}\,(B_n) = \mathbb{B}(n, p)$$

Speziell gilt für den Random Walk $Z_1 + \cdots + Z_k$ mit $\mathrm{L}\,(Z_k) = \mathbb{ZP}(1, -1, p)$

$$Z_1 + \cdots + Z_n = 2B_n - n$$

Normalverteilung. Die Zufallsvariable X besitzt eine Normalverteilung mit den Parametern $m \in \mathbb{R}$ und $s^2 > 0$, wenn X kontinuierlich verteilt ist mit der Dichtefunktion ($\rightarrow$ Bild 1)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\ s}\,\mathrm{e}^{\frac{(x-m)^2}{2s^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Bezeichnung: $\mathrm{L}\,(X) = N(m, s^2)$. Für den Erwartungswert und die Varianz gilt

$$\mathrm{E}(X) = m \quad \text{und} \quad \mathrm{V}(X) = s^2$$

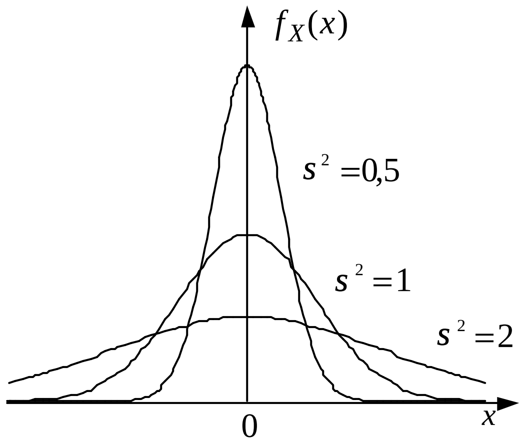

Bild 1

Der spezielle Fall $m = 0$ und $s^2 = 1$ führt auf die Standardnormalverteilung $\mathbb{N}(0, 1)$. Für eine $\mathbb{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable X bezeichnet

$$\mathrm{N}(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

die Verteilungsfunktion von X an der Stelle x ($\rightarrow$Bild 2).

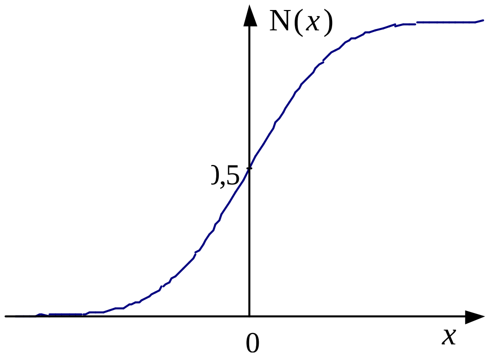

Bild 2

A.1.3 Satz. Eine $\mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable ist darstellbar als

$$X = \mu + \sigma Z \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(Z) = \mathbb{N}(0, 1)$$

Beweis. Setze $Z = (X - \mu)/\sigma$ (Standardisierung).

Wir bemerken abschließend noch die Beziehung

$$\mathrm{N}(-x) = 1 - \mathrm{N}(x)$$

für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, die unmittelbar aus der Symmetrie der Dichtefunktion folgt.

Logarithmische Normalverteilung. Die Zufallsvariable X besitzt eine logarithmische Normalverteilung (auch Lognormalverteilung) mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, wenn $\ln X$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ^2, d.h. $\mathcal{L}(\ln X) = \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$. Sie hat demzufolge die Dichtefunktion ($\rightarrow$ Bild 3)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad \text{für} \quad x > 0$$

und $f_X(x) = 0$ für $x \leq 0$. Bezeichnung: $\mathcal{L}(\ln X) = \mathbb{LN}(\mu, \sigma^2)$. Folgerung: Ist die Zufallsvariable X normalverteilt, so ist e^X lognormalverteilt. Erwartungswert und Varianz berechnen sich wie folgt:

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{e}^{\mu + \sigma^2/2} \quad \text{und} \quad \mathrm{V}(X) = \mathrm{e}^{2\mu + \sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)$$

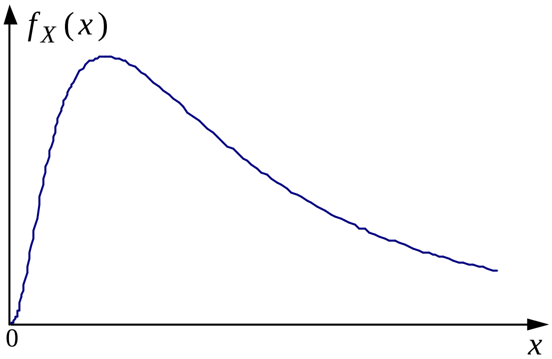

Bild 3

Anhang 2 Schwache Konvergenz und zentraler Grenzwertsatz

Schwache Konvergenz. Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen konvergiert *schwach* (auch: *in Verteilung*) gegen eine Zufallsvariable X, in Zeichen $X_n \Rightarrow X$, wenn für jede stetige, beschränkte Funktion $x \to g(x),\ x \in \mathbb{R}$, gilt:

$$\mathrm{E}(g(X_n)) \quad \to \quad \mathrm{E}(g(X)) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Die schwache Konvergenz einer Zufallsfolge läßt sich auch über den Begriff der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = P(X < x)$$

charakterisieren ($\to$ Billingsley (1968), S. 17-18 und $\to$ Bauer, S.191):

A.2.1 Satz. Es konvergiert $X_n \Rightarrow X$ genau dann, wenn für die zugehörigen Verteilungsfunktionen gilt

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

in allen Stetigkeitsstellen x von F_X. Ist F_X auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, so konvergiert die Folge $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen F_X.

Hat X speziell eine $\mathbb{N}(m, s^2)$-Verteilung und gilt $X_n \Rightarrow X$, sowie $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so folgt

- $P(a < X_n < b) \quad \to \quad \mathrm{N}\left(\frac{b-m}{s}\right) - \mathrm{N}\left(\frac{a-m}{s}\right)$
- $P(a_n < X_n < b_n) \quad \to \quad \mathrm{N}\left(\frac{b-m}{s}\right) - \mathrm{N}\left(\frac{a-m}{s}\right)$

Und analog für $P(a \le X_n \le b)$ bzw. $P(a_n \le X_n \le b_n)$.

A.2.2 Satz. Gilt $X_n \Rightarrow X$ und ist $x \to g(x),\ x \in \mathbb{R}$, stückweise stetig, so folgt $g(X_n) \Rightarrow g(X)$.

Wir benötigen diesen Satz noch in einer allgemeineren Form. Wir fragen uns, ob aus $X_n \Rightarrow X$ auch $g_n(X_n) \Rightarrow g(X)$ folgt, wenn g_n in gewisser Weise gegen g konvergiert. Sie E die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $g_n(x_n) \to g(x)$ bei der Wahl beliebiger Folgen $x_n \to x$ *nicht* gilt ($\to$ Billingsley (1968), S.33-34).

Beispiel. Ist $g(x) \equiv 0$ und $g_n(x) = 1_{(0,1/n]}(x)$, so gilt zwar $g_n(x) \to g(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ (punktweise Konvergenz von g_n gegen g), aber nicht $g_n(x_n) \to g(x)$ für die Folge $x_n = 1/n \to 0$ (keine gleichmäßige Konvergenz von g_n gegen g). In diesem

Beispiel ist $E=\{0\}$. Ist dagegen $g_n(x)=a_n+b_n x$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Sowie $g(x)=a+bx$, so ist $E=\emptyset$

A.2.3 Satz. Ist $X_n \Rightarrow X$ und $P(E)=0$, so folgt $g_n(X_n) \Rightarrow g(X)$. Speziell gilt für $X_n \Rightarrow X$, sowie $a_n \to a$ und $b_n \to b$ auch

$$a_n + b_n X_n \quad \Rightarrow \quad a+bX$$

A.2.4 Satz. Ist $X_n \Rightarrow X$ und $\sup_n \mathrm{E}(X_n^2) < +\infty$, so folgt $\mathrm{E}(X_n) \to \mathrm{E}(X)$.

Zentraler Grenzwertsatz. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien

$$X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$$

unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert m_{nk} und Varianz $s_{nk}^2 > 0$. Setze für jedes n

$$A_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn}, \quad m_n = m_{n1} + \cdots + m_{nn}, \quad s_n^2 = s_{n1}^2 + \cdots + s_{nn}^2$$

A.2.5 Satz (Zentraler Grenzwertsatz). Gilt Lyapounov's Bedingung

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^{n} E(|X_{nk}|^2) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

so folgt

$$\frac{A_n - m_n}{s_n} \quad \Rightarrow \quad Z \quad \text{mit} \quad \mathrm{L}\,(Z) = \mathbb{N}(0,1)$$

Bevor wir aus dieser allgemeinen Formulierung des zentralen Grenzwertsatzes weitere Folgerungen ableiten, geben wir kurz ein Beispiel.

Beispiel (Normalverteilte Renditen). Gegeben sei die Position eines Investors. Die kontinuierliche Rendite $R(T)$ dieser Position über einen Zeitraum T hat die Additivitätseigenschaft, d.h. bei einer Zerlegung von T in n Teilperioden $T_{n1}, \ldots, T_{nn}$ gilt für die Renditen

$$R(T) = \sum_{k=1}^{n} R_{nk} \quad \text{mit} \quad R_{nk} = R(T_{nk}) \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad k = 1, \ldots, n$$

Für einen zukünftigen Zeitraum T wird $R(T)$ als Zufallsvariable aufgefaßt. $R(T)$ habe den Erwartungswert n und die Varianz h^2.

Zunächst setzen wir voraus, daß die Teilrenditen $R_{n1},\ldots,R_{nn}$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind mit Erwartungswert $m_n = n/n$ und Varianz $s_n^2 = h^2/n$. Damit erhalten wir die Darstellung

$$R_{nk} = m_n + s_n Z_{nk}$$

wobei $Z_{n1},\ldots, Z_{nn}$ standardisierte, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind. Setzen wir noch $\mathrm{E}(|Z_{nk}|^3) < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1,\ldots, n$ voraus, so ist mit $s_n^2 = n s_n^2 = h^2$ wegen

$$\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(|R_{nk}-m_n|^3) = \frac{1}{h^3}\cdot n\cdot s_n^3\cdot\mathrm{E}(|Z_{nk}|^3) = \frac{1}{h^3}\cdot n\cdot\frac{h^3}{n^{3/2}}\cdot\mathrm{E}(|Z_{nk}|^3) \le \frac{c}{\sqrt{n}} \to 0$$

die Bedingung von Lyapunov erfüllt. Mit den Notationen

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} R_{nk} \qquad m_n = n m_n = n \qquad s_n^2 = n s_n^2 = h^2$$

folgt dann aus dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$\frac{R(T)-n}{h} = \frac{\sum_{k=1}^{n} R_{nk} - n m_n}{s_n\sqrt{n}} = \frac{A_n - m_n}{s_n} \Rightarrow Z \quad \text{mit } \mathsf{L}(Z) = \mathbb{N}(0,1).$$

d.h. $R(T)$ ist $N(n, h^2)$-verteilt. Damit wären kontinuierliche Renditen einer zukünftigen Periode normalverteilte zufällige Größen. Daß empirische Untersuchungen mehr oder weniger starke Abweichungen von der Normalverteilung ergeben, spricht nicht gegen den Zentralen Grenzwertsatz. Vielmehr dürfte die Annahme unabhängiger Rendite-Zeitreihen in der Praxis nur approximativ erfüllt sein.

A.2.6 Korollar. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien

$$I_{n1}, I_{n2}, \ldots, I_{nn}$$

unabhängige, identisch $\mathbb{ZP}(1,0,p_n)$-verteilte Zufallsvariablen mit $p_n \to p \in (0,1)$. Dann gilt für die Summe $B_n = I_{n1} + \cdots + I_{nn}$

$$\frac{B_n - n p_n}{\sqrt{n p_n (1-p_n)}} \quad\Rightarrow\quad Z \quad \text{mit} \quad \mathsf{L}(Z) = \mathbb{N}(0,1)$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$m_n = n p_n \quad \text{und} \quad s_n^2 = n p_n (1-p_n)$$

Da I_{nk}^3 mit Wahrscheinlichkeit p_n den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-p_n$ den Wert 0 annimmt, gilt $E(I_{nk}^3)=p_n$ und damit weiter

$$\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(I_{nk}^3)=\frac{np_n}{n^{3/2}(p_n(1-p_n))^{3/2}} \quad\to\quad 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

Also ist Lyapounov's Bedingung erfüllt.

A.2.7 Korollar. Für eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_n)=m$ und $V(X_n)=s^2>0$ gilt

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{s\sqrt{n}} \quad\Rightarrow\quad Z \quad \text{mit} \quad \mathsf{L}(Z)=\mathbb{N}(0,1)$$

Wir erwähnen abschließend noch den Spezialfall des Zentralen Grenzwertsatzes in der Form von Moivre-Laplace.

A.2.8 Korollar. Für eine Folge $I_1, I_2, \ldots$ unabhängiger, identisch $\mathbb{ZP}(1,0,p)$-verteilter Zufallsvariablen gilt für die Summe $B_n = I_1+\cdots+I_n$

$$\frac{B_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad\Rightarrow\quad Z \quad \text{mit} \quad \mathsf{L}(Z)=\mathbb{N}(0,1)$$

Anhang 3 Martingale

Begriff. Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufälliger Größen ist ein *Martingal*, wenn für jedes n gilt:

$$E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) = X_n$$

fast sicher d.h. wenn der bedingte Erwartungswert der Größe X_{n+1} bei Vorliegen sämtlicher Informationen aus den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ gleich der Zufallsvariablen X_n ist.

Interpretation. Sei G_n der zufällige Gewinn eines Spielers in der n-ten Runde. Das Gesamtspiel heißt aus naheliegenden Gründen *fair*, wenn gilt:

$$E(G_1) = 0 \quad \text{und} \quad E(G_{n+1} \mid G_1, \ldots, G_n) = 0 \quad \text{fast sicher}$$

Dann gilt für den Gewinn

$$A_n = G_1 + \cdots + G_n$$

nach der n-ten Runde

$$\begin{aligned} E(A_{n+1} \mid A_1, \ldots, A_n) &= E(A_n + G_{n+1} \mid A_1, \ldots, A_n) \\ &= E(A_n \mid A_1, \ldots, A_n) + E(G_{n+1} \mid G_1, \ldots, G_n) \\ &= A_n \end{aligned}$$

d.h. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Martingal.

Anhang 4 Beweis von Lemma 6.2

Für alle drei Modelle ist zu zeigen:

$$\mathrm{E}_{Q_n}(S_n^2) \quad \to \quad \mathrm{E}_Q(S_\ell^2)$$

Zunächst gilt mit (2.2) und (2.3)

$$\mathrm{E}_Q(S_\ell^2) = \mathrm{V}_Q(S_\ell) + [\mathrm{E}_Q(S_\ell)]^2 = S_0^2(\mathrm{e}^{2cT}(\mathrm{e}^{s^2 T}-1) - \mathrm{e}^{2cT}) = S_0^2 \mathrm{e}^{2cT+s^2 T}$$

Modell 1. Aus Abschnitt 5 entnehmen wir

$$\ln S_n = \ln S_0 + mT + s\sqrt{T}\,\frac{2B_n - n}{\sqrt{n}}$$

und damit

$$S_n^2 = S_0^2 \exp\left(2mT + 2s\sqrt{T}\cdot\frac{2B_n - n}{\sqrt{n}}\right)$$

Beachten wir im folgenden $m = c - s^2/2$, $2k - n = k - (n-k)$, $p = 1/2$ und die abkürzende Notation $a = s\sqrt{T}$, so gilt mit dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{Q_n}(S_n^2) &= S_0^2 \mathrm{e}^{2mT} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathrm{e}^{2a/\sqrt{n}(2k-n)} \\
&= S_0^2 \mathrm{e}^{2mT} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2a/\sqrt{n}}\right)^k \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2a/\sqrt{n}}\right)^{n-k} \\
&= S_0^2 \mathrm{e}^{2mT} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2a/\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2a/\sqrt{n}}\right)^n \\
&\to S_0^2 \mathrm{e}^{2mT} \mathrm{e}^{2s^2 T} = S_0^2 \mathrm{e}^{2cT+s^2 T}
\end{aligned}$$

Setzen wir $x = 1/\sqrt{n}$ und $A = A(x)$ für die Klammer in der vorletzten Zeile, so bleibt zu zeigen:

$$A^{1/x^2} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2ax} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2ax}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln A}{x^2}\right) \quad \to \quad \mathrm{e}^{2s^2 T}$$

für $x \to 0$. Nun gilt – weiterhin für $x \to 0$:

$$A(x) = 0{,}5\mathrm{e}^{2ax} + 0{,}5\mathrm{e}^{-2ax} \quad \to \quad 1 \quad \text{und damit} \quad \ln A(x) \to 0$$
$$A'(x) = a\mathrm{e}^{2ax} - a\mathrm{e}^{-2ax} \quad \to \quad 0$$
$$A''(x) = 2a^2\mathrm{e}^{2ax} - 2a^2\mathrm{e}^{-2ax} \quad \to \quad 4a^2$$

Zweimalige Anwendung der l'Hospitalschen Regel liefert

$$\frac{\ln A}{x^2} \mathrel{\hat=} \frac{1}{A}\cdot\frac{A'}{2x} \mathrel{\hat=} \frac{1}{A}\cdot\frac{A''}{2} \quad \to \quad 2a^2 = 2s^2T$$

Modelle 2 und 3. Mit $a = s\sqrt{T}$ folgt aus (3.4):

$$S_n^2 = S_0^2\mathrm{e}^{(2B_n - n)2\ln u} = S_0^2\mathrm{e}^{(2B_n - n)2a/\sqrt{n}}$$

Beachten wir wieder $m = c - s^2/2$, $2k - n = k - (n-k)$ und den binomischen Lehrsatz, so folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{Q_n}(S_n^2) &= S_0^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\mathrm{e}^{2a/\sqrt{n}(2k-n)} \\
&= S_0^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p\mathrm{e}^{2a/\sqrt{n}})^k((1-p)\,\mathrm{e}^{-2a/\sqrt{n}})^{n-k} \\
&= S_0^2(p\mathrm{e}^{2a/\sqrt{n}} + (1-p)\,\mathrm{e}^{-2a/\sqrt{n}})^n \\
&= S_0^2(p\,(\mathrm{e}^{2a/\sqrt{n}} - \mathrm{e}^{-2a/\sqrt{n}}) + \mathrm{e}^{-2a/\sqrt{n}})^n \\
&\to S_0^2\mathrm{e}^{2m\mathrm{T} + 2s^2T} = S_0^2\mathrm{e}^{2c\mathrm{T} + s^2T}
\end{aligned}$$

Setzen wir $x = 1/\sqrt{n}$ und $A = A(x)$ für die Klammer in der vorletzten Zeile, so bleibt zu zeigen

$$A^{1/x^2} = (p(\mathrm{e}^{2ax} - \mathrm{e}^{-2ax}) + \mathrm{e}^{-2ax})^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln A}{x^2}\right) \quad \to \quad \mathrm{e}^{2mT + 2s^2T}$$

für $x \to 0$. Die folgenden Überlegungen werden für die Modelle 2 und 3 getrennt durchgeführt.

Modell 2. Beachten wir $m\Delta t = mTx^2$ und $s\sqrt{\Delta t} = ax$, so gilt

$$p = \frac{m\Delta t - s\sqrt{\Delta t}}{2s\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{m\Delta t}{s\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{mT}{a}x \quad \to \quad \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad x \to 0$$
$$p' = \frac{mT}{2a} \quad \text{und} \quad p'' = 0$$

und weiter für $x \to 0$

$$\begin{aligned} D &= \mathrm{e}^{2ax} - \mathrm{e}^{-2ax} &&\to\quad 0 \\ D' &= 2a\mathrm{e}^{2ax} + 2a\mathrm{e}^{-2ax} &&\to\quad 4a \\ D'' &= 4a^2\mathrm{e}^{2ax} - 4a^2\mathrm{e}^{-2ax} &&\to\quad 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} A &= pD + \mathrm{e}^{-2ax} &&\to 1 \\ A' &= p'D + pD' - 2a\mathrm{e}^{-2ax} &&\to\quad 2a - 2a = 0 \\ A'' &= p''D + 2p'D' + pD'' + 4a^2\mathrm{e}^{-2ax} &&\to\quad 4mT + 4a^2 \end{aligned}$$

Modell 3. Beachten wir $c\Delta t = cTx^2$ und $s\sqrt{\Delta t} = ax$, so gilt

$$\begin{aligned} p(\mathrm{e}^{2ax} - \mathrm{e}^{-2ax}) &= \frac{\mathrm{e}^{cTx^2} - \mathrm{e}^{-ax}}{\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax}}(\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax})(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}) \\ &= (\mathrm{e}^{cTx^2} - \mathrm{e}^{-ax})(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}) = G \cdot H \end{aligned}$$

und weiter für $x \to 0$

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{e}^{cTx^2} - \mathrm{e}^{-ax} &&\to\quad 0 \\ G' &= 2cTx\mathrm{e}^{cTx^2} + a\mathrm{e}^{-ax} &&\to\quad a \\ G'' &= 2cT\mathrm{e}^{cTx^2} + 4c^2T^2x^2\mathrm{e}^{cTx} - a^2\mathrm{e}^{-ax} &&\to\quad 2cT - a^2 \\ H &= \mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax} &&\to\quad 2 \\ H' &= a\mathrm{e}^{ax} - a\mathrm{e}^{-ax} &&\to\quad 0 \\ H'' &= a^2\mathrm{e}^{ax} + a^2\mathrm{e}^{-ax} &&\to\quad 2a^2 \end{aligned}$$

und damit analog zu Modell 2

$$\begin{aligned} A &= GH + \mathrm{e}^{-2ax} &&\to\quad 1 \\ A' &= G'H + GH' - 2a\mathrm{e}^{-2ax} &&\to\quad 2a - 2a = 0 \\ A'' &= G''H + 2G'H' + GH'' + 4a^2\mathrm{e}^{-2ax} &&\to\quad 4cT - 2a^2 + 4a^2 = 4mT + 4a^2 \end{aligned}$$

Zweimalige Anwendung der l'Hospitalschen Regel liefert für beide Modelle

$$\frac{\ln A}{x^2} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{A} \cdot \frac{A'}{2x} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{A} \cdot \frac{A''}{2} \quad\to\quad 2mT + 2s^2T$$

Nachtrag. Der Beweis von Satz 5.1 verwendet in Modell 3 die folgenden Resultate: Für $n \to \infty$, d.h. für $x \to 0$ gilt

- $$p = \frac{e^{cTx^2} - e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}} = \frac{Z}{N} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}$$
- $$\sqrt{n}(2p-1) = \frac{2p-1}{x} \mathrel{\hat{=}} 2p' \quad \rightarrow \quad \frac{mT}{s\sqrt{T}}$$

wir beachten zunächst

$$Z = G \quad \rightarrow \quad 0 \qquad\qquad N = e^{ax} - e^{-ax} \quad \rightarrow \quad 0$$

$$Z' = G' \quad \rightarrow \quad a \qquad\qquad N' = a\,(e^{ax} + e^{-ax}) \rightarrow 2a$$

$$Z'' = G'' \quad \rightarrow \quad 2cT - a^2 \qquad\qquad N'' = a^2 N \quad \rightarrow \quad 0$$

Dann gilt mit der Regel von l'Hospital

$$p = \frac{Z}{N} \mathrel{\hat{=}} \frac{Z'}{N'} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$p' = \frac{Z'N - ZN'}{N^2} \mathrel{\hat{=}} \frac{Z''N - ZN''}{2NN'} = \frac{Z'' - a^2 Z}{2N'} \quad \rightarrow \quad \frac{2cT - a^2}{4a} = \frac{mT}{2s\sqrt{T}}$$

Anhang 5 Beweis von Lemma 6.4

Wir verwenden den zentralen Grenzwert in der einfachen Form des Korollars A.2.7 in Anhang 2 und beachten, daß mit Satz A.2.1 für eine konvergente Folge $a_n \to a$ gilt

$$P\left(\frac{S_n - up}{\sqrt{npq}} < a_n\right) \quad \to \quad \mathrm{N}(a) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Beweis von (6.7). Für ein $\mathbb{B}(n, p)$-verteiltes S_n gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(k_0) = P(S_n < k_0) &= P\left(S_n < -\frac{\ln(S_0/K) + n \ln d}{\ln(u/d)}\right) \\ &= P\left(\frac{S_n - p}{\sqrt{np(1-p)}} < -\frac{\ln(S_0/K) - \sqrt{n}s\sqrt{T} + 2p\sqrt{n}s\sqrt{T}}{2s\sqrt{T}\sqrt{p(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

Da mit dem Nachtrag in Anhang 4 gilt

- $2s\sqrt{T}\sqrt{p(1-p)} \quad \to \quad s\sqrt{T}$
- $\sqrt{n}(2p-1)s\sqrt{T} \quad \to \quad mT = (r - s^2/2)T$

folgt die Behauptung

$$\mathrm{B}(k_0) \quad \to \quad \mathrm{N}\left(-\frac{\ln(S_0/K) + (r - s^2/2)T}{s\sqrt{T}}\right) = \mathrm{N}(-d_2)$$

Beweis von (6.6). Für ein $\mathbb{B}(n, p_0)$-verteiltes S_n gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_0(k_0) = P(S_n < k_0) &= P\left(S_n < -\frac{\ln(S_0/K) + n \ln d}{\ln(u/d)}\right) \\ &= P\left(\frac{S_n - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} < -\frac{\ln(S_0/K) - \sqrt{n}s\sqrt{T} + 2p_0\sqrt{n}s\sqrt{T}}{2s\sqrt{T}\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) \end{aligned}$$

Da $u = \mathrm{e}^{s\sqrt{T}/\sqrt{n}} \to 1$ und $\mathrm{e}^{-r\Delta t} = \mathrm{e}^{-rT/n} \to 1$, folgt aus $p \to 1/2$ auch $p_0 = pu\mathrm{e}^{-r\Delta t} \to 1/2$. Damit gilt im Sinne der Nachtrages in Anhang 4

- $2s\sqrt{T}\sqrt{p_0(1-p_0)} \quad \to \quad s\sqrt{T}$
- $\sqrt{n}(2p_0 - 1)s\sqrt{T} = \dfrac{2p\mathrm{e}^{s\sqrt{T}x - rTx^2} - 1}{x} \cdot s\sqrt{T}$

$$\hat{=} (2p'\mathrm{e}^{s\sqrt{T}x - rTx^2} + 2p(s\sqrt{T} - 2rTx\mathrm{e}^{s\sqrt{T}x - rTx^2})s\sqrt{T}$$

$$\to \left(\frac{mT}{s\sqrt{T}} + s\sqrt{T}\right)s\sqrt{T} = (r - s^2/2)T + s^2T = (r + s^2/2)T$$

und damit die Behauptung

$$\mathrm{B}_0(k_0) \quad \to \quad \mathrm{N}\left(-\frac{\ln(S_0/K) + (r + s^2/2)T}{s\sqrt{T}}\right) = \mathrm{N}(-d_1)$$

Literatur

Bauer, H., Wahrscheinlichkeitstheorie. De Gruyter, Berlin 1991

Billingsley, P., Convergence of Probability Measures. John Wiley, New York 1968

Billingsley, P., Weak Convergence of Measures: Applications in Probability. SIAM, Philadelphia 1971

Cremers, H., Basiswissen Finanzmathematik. 3.Auflage von Basiswissen Mathematik und Stochastik für Banker. Bankakademie Verlag, Frankfurt 2000 / 2001 (geplant)

Cox, J. und Rubinstein, M., Option Markets. Englewood Cliffs 1985

Hull, J.C.; Options, Futures and other Derivatives. Prentice Hall, London 1997

Tabelle der Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung

Tafel: Normalverteilung $\mathbb{N}(0,1)$; Verteilungsfunktion $x \to \mathrm{N}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
für $x < 0$ gilt $\mathrm{N}(x) = 1 - \mathrm{N}(-x)$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000