

Frankfurt School – Working Paper Series

No. 126

**Modellierung des
Kreditrisikos im Einwertpapierfall**

von Heinz Cremers und Jens Walzner

August 2009



**Frankfurt School of
Finance & Management**
Bankakademie | HfB

Sonnemannstr. 9–11 60314 Frankfurt an Main, Germany
Phone: +49 (0) 69 154 008 0 Fax: +49 (0) 69 154 008 728
Internet: www.frankfurt-school.de

Abstract

The current financial market crisis has impressively demonstrated the importance of an effective credit risk management for financial institutions. At the same time, the use and the valuation of credit derivatives has been widely criticised as a result of the crisis. Over the past decade, credit derivatives emerged as an important part of credit risk management as these offer a broad range of possibilities to reduce credit risk through active credit portfolio management. This has represented a quantum leap in the further development of credit risk management. Credit risk management, without using credit derivatives, no longer seems to be an appropriate alternative. However, correct valuation of these derivatives is still challenging. The crisis has demonstrated that the issue is less about using credit derivatives than about developing valid valuation techniques. A sound understanding of already existing credit pricing models is necessary for such a development. These models are the key focus of this working paper.

Literature distinguishes between three different kinds of credit pricing models: Asset-Based-Models, Intensity-Based-Models and hybrid models. The primary purpose of credit risk modelling is to simulate the default of a defaultable asset. Asset-Based-Models try to model the default by analyzing changes in value of such an asset: if the value of a defaultable asset falls below a defined threshold, the asset defaults. While this is economically plausible, the modelling of a default in an Intensity-Based-Model is rather random. It is simply the result of a stochastic process. While Intensity-Based-Models do not offer any economic rationale for the default, their results are surprisingly realistic. Hybrid models are a combination of both kind of models. These try to establish a connection between the economic rationale of the Asset-Based-Models and the empirical validity of the results of the Intensity-Based-Models.

While this paper focuses on the valuation techniques in a single asset case, Frankfurt School Working Paper No. 127 concentrates on credit risk modelling in a portfolio case.

Key words: credit risk pricing models; asset-based models; asset-value models; structural models; intensity-based models; reduced-form models; credit derivatives; credit default swap; pricing; valuation; default spread; risk management; credit portfolio management

JEL classification: C22; G12; G21; G32

ISSN: 14369753

Contact:

Prof. Dr. Heinz Cremers
Frankfurt School of Finance & Management
Sonnemannstrasse 9-11
D-60314 Frankfurt am Main
Germany

Phone: +49-(0)69 154008 – 213
E-Mail: h.cremers@frankfurt-school.de

Jens Walzner, M.Sc.
Dresdner Kleinwort
Theodor-Heuss-Anlage 44-46
D-60486 Frankfurt am Main
Germany

Mobil: +49-(0)160 2859686
E-Mail: jens.walzner@dkib.com

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	4
Symbolverzeichnis	5
1. Einleitung	9
1.1 Ausgangslage.....	9
1.2 Definition der Begriffe Kreditrisiko, bonitätssensitiver Finanztitel und Kreditrisikomodell.....	9
2. Modellüberblick	12
3. Modellierung des Kreditrisikos eines einzelnen bonitätssensitiven Finanztitels	18
3.1 Unternehmenswertmodelle.....	18
3.1.1 Klassischer optionstheoretischer Ansatz.....	18
3.1.2 First-Passage Ansatz.....	29
3.1.3 Kalibrierung von Unternehmenswertmodellen	44
3.1.4 Kritische Würdigung der Unternehmenswertmodelle.....	45
3.2 Intensitätsmodelle.....	47
3.2.1 Intensitätsmodelle mit konstanter Intensität.....	49
3.2.2 Intensitätsmodelle mit zeitvariabler Intensität.....	51
3.2.3 Intensitätsmodelle mit stochastischer Intensität	54
3.2.4 Modellierung von Rating-Migrations-Intensitäten.....	59
3.2.5 Kalibrierung von Intensitätsmodellen	60
3.2.6 Kritische Würdigung der Intensitätsmodelle.....	60
3.3 Hybride Kreditrisikomodelle.....	61
3.3.1 Kritische Würdigung von hybriden Kreditrisikomodellen.....	72
3.4 Praxisbeispiel: Bewertung von Credit Default Swaps.....	73
4. Fazit	79
Literaturverzeichnis	80

Tabellenverzeichnis

Tab. 1: Weiterentwicklung von Unternehmenswertmodellen im Zeitverlauf.....	14
Tab. 2: Weiterentwicklung von Intensitätsmodellen im Zeitverlauf.....	16
Tab. 3: Wert von Fremd- und Eigenkapital bei Fälligkeit.....	20
Tab. 4: Beispiel zum klassischen optionstheoretischen Ansatz	29
Tab. 5: Vergleich des First-Passage-Ansatzes mit zeitabhängiger Ausfallschranke mit dem Merton-Modell anhand einer Beispielrechnung	36
Tab. 6: Wertentwicklung der Kapitalbestandteile im Beispiel.....	41
Tab. 7: Bewertung eines Couponbonds.....	44
Tab. 8: Ratingmigrationsmatrix (alle Angaben in %)	53
Tab. 9: Bedingte Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeiten in %.....	54
Tab. 10: Vergleich des Modells mit unbekanntem Firmenwert zu dem Modell mit unbekannter Ausfallschranke und unbekanntem Firmenwert	71
Tab. 11: CDS-Spreads anhand aktueller Marktdaten	76
Tab. 12: Überlebenswahrscheinlichkeiten bis t_i und Intensitäten	77

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Kreditrisikomodelle im Überblick.....	12
Abb. 2: Ausfallereignisse nach dem klassischen optionstheoretischen Ansatz.....	20
Abb. 3: Graphische Darstellung des Fremd- und Eigenkapitals zum Zeitpunkt T	22
Abb. 4: Strukturkurve der Credit Spreads in Abhängigkeit von der Laufzeit des Fremdkapitals T	27
Abb. 5: Ausfallereignisse nach dem First-Passage Ansatz im Fall $K > DB$	32
Abb. 6: Entwicklung des Credit Spreads bei bekannter Firmenwertentwicklung, aber unbekannter Ausfallschranke	64
Abb. 7: Entwicklung des Credit Spreads bei bekannter Ausfallschranke, aber unbekanntem Firmenwert	66
Abb. 8: Entwicklung des Credit Spreads bei unbekannter Ausfallschranke sowie unbekanntem Firmenwert	67

Symbolverzeichnis

$[t_{i-1}, t_i]$	Zeitintervall von t_{i-1} bis t_i
$[t_{i-1}, \tau]$	Zeitintervall von t_i bis τ
α	Konfidenzniveau
A_i	Standardisierter Firmenwert
A_t	Kompensator / Ausfalltrend
a_j	Konstanter Gewichtungsparmeter
\vec{a}_i	Vektor der konstanten Faktorgewichte des Makro-Faktors X
a	Unterer Tranchierungspunkt
B_i	Standardisiertes Nominal des Fremdkapitals bzw. standardisierte Ausfallschranke
b_i	Konstantes Faktorgewicht des idiosynkratischen Faktors Z_i
b	Oberer Tranchierungspunkt
B_0	Barwert eines ausfallrisikobehafteten Finanztitels
B_0^F	Barwert der Rückzahlung einer Forderung, welche zum Zeitpunkt T erfolgt
B_0^R	Barwert der Recovery-Zahlung, welche bei Eintritt eines Ausfallereignisses zum Zeitpunkt τ geleistet wird
B_T	Wert eines ausfallgefährdeten Finanztitels bei Fälligkeit
c	Konstante Couponzahlungen
$C(\cdot)$	Wert einer europäischen Call-Option
$C(u, v)$	Copulafunktion
CB	Couponbond
CB_0	Barwert eines Couponbonds
CF_T	Cash-Flow zum Zeitpunkt T
C_r^{Ga}	Gauss'sche Copula mit Korrelationskoeffizienten r
$C_{r,w}^t$	t-Copula mit Korrelationskoeffizienten r und w Freiheitsgraden
C_r^{Gumbel}	Gumbel-Copula mit Korrelationskoeffizienten r
$C_r^{Clayton}$	Clayton-Copula mit Korrelationskoeffizienten r
C^\perp	Produkt-Copula
Cov	Kovarianz
$CVaR$	Credit-Value at Risk
D	Ausfallereignis / Defaultindikator
DB	Ausfallsschwelle (Default Barrier)
DF	Diskontfaktor

E^Q	Risikoneutraler Erwartungswert beim äquivalenten Martingalmaß Q
E_t	Marktwert des Eigenkapitals zum Zeitpunkt t
EAD	Exposure at Default
EL	Expected Loss
e	Eulerische Zahl
F	Verteilungsfunktion
$F(x, y)$	Gemeinsame Verteilungsfunktion von x und y
$F_{p,\rho}$	Grenzverlustverteilung bei großen Portfolien
f	Dichtefunktion
$G(x)$	Verteilungsfunktion von W_1^i
$H(x)$	Verteilungsfunktion von Z_i
h_i	Basisintensität bzw. der Intensität bei einem einzelnen bonitätssensitiven Finanztitel
$J(t)$	Sprung-Prozess
j	Ausfallindikatorprozess des Unternehmens / Rating-Kategorie
K	Nominal des Zerobonds
k	Konstanter Faktor / Anzahl der Ausfälle
L	Quasi-Verschuldungsgrad
L_n	Portfolioverlust
LGD	Loss Given Default
M_T	Historisches Tief des Firmenwerts
M	Anzahl alter Aktien
N	Zählprozess / (inhomogener) Poisson-Prozess / Anzahl neuer Aktien
$P(\cdot)$	Wert einer europäischen Put-Option
p	Ausfallwahrscheinlichkeit
\bar{p}	Durchschnittliche Ausfallwahrscheinlichkeit
$p(X)$	Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von X
p_n	Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit in Abhängigkeit von Ratingmigrationen
p_n kum.	Kumulierte bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit in Abhängigkeit von Ratingmigrationen
p_{surv}	Überlebenswahrscheinlichkeit
$Payoff_{[a,b]}(z)$	Auszahlung an den Investor bei eine CDO-Tranche
Q_α	Alpha-Quantil
$Q(x)$	Verteilungsfunktion von X

$q(t,T)$	Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit, welche vom Wissensstand des Investors \mathfrak{S} zum Zeitpunkt t abhängig ist, für den Eintritt eines Ausfallereignisses vor Fälligkeit T eines Finanztitels
Rec	Recovery-Rate
r	Risikoloser (kontinuierlicher) Zinssatz / Korrelationsparameter bei Copulae
S	Emissionskurs eines Zerobonds
$S_{[a,b]}$	Überlebensanteil / Auszahlungsquote
$S_{[a,b]}(X)$	Bedingter Überlebensanteil
s	Credit Spread
\bar{s}	Duchschnittlicher Credit Spread
s_{CDS}	Credit Spread eines Credit Default Swaps
s_{CDS}^{fair}	Fairer Credit Spread eines Credit Default Swaps
$s_{implizit}$	Inpliziter Credit Spread
$s^{n:m}$	Credit Spread eines n^{th} -to-default Swaps mit einem Basket bestehend aus m Titeln
T	Zeitpunkt der Fälligkeit eines Finanztitels
τ	Zufälliger Zeitpunkt des Eintritts eines Ausfallereignisses
τ_1	Ausfallzeitpunkt beim klassischen optionstheoretischen Ansatz
τ_2	Ausfallzeitpunkt beim First-Passage Ansatz
U	Unabhängige Zufallsvariable
U_t	Kontinuierlicher Markow-Prozess
UL	Unexpected Loss
u	Realisation von U / Ausfallzeitpunkt im kontinuierlichen Fall
V_0	Firmenwert zum Zeitpunkt t
V_t	Marktwert eines Unternehmens (Entity-Value) zum Zeitpunkt t
\bar{V}_t	„Kritischer Unternehmenswert“, welcher vorhanden sein muss, damit das Eigenkapital ausreichend ist, um Couponzahlungen zu gewährleisten
Var	Varianz
V_{risky}	Wert eines risikobehafteten Finanztitels
V_{rf}	Wert eines risikofreien Finanztitels
v	Konstanter Abstand des Firmenwerts vom historischen Tief des Firmenwerts
W_t	Standard-Brownsche Bewegung
W_1^i	standardisierter Firmenwert
w	Freiheitsgrade
X	Zufallsvariable, die den Makro-Faktor beschreibt

X_{syst}	Systematisches Ausfallrisiko eines Unternehmens
X_i	Idiosynkratisches Ausfallrisiko eines Unternehmens
x	Realisation des Makro-Faktors X
Y_i	Ausfallindikator
y_{rf}	Rendite einer ausfallrisikofreien Anleihe
y_{risky}	Rendite einer ausfallrisikobehafteten Anleihe
Z_i	Zufallsvariable, die den unternehmensspezifischen, idiosynkratischen Faktor beschreibt
z	Erwarteter Portfolioverlust
λ	Intensität
$\tilde{\lambda}$	Stochastische Intensität
$\tilde{\lambda}_{FTD}$	Stochastische Intensität eines First-to-Default-Swaps
$\tilde{\Lambda}_i$	Nicht-negative stochastische Funktion
ε	„Error“-Faktor
\mathfrak{S}_t	Wissensstand des Investors zum Zeitpunkt t
μ	Drift-Parameter der geometrischen Brownschen Bewegung
π	Pi
σ	Volatilität des Firmenwertes
σ_E	Volatilität des Marktwert des Eigenkapital
ρ	Korrelationsparameter
ρ_{ij}	Korrelation zweier Firmenwerte zueinander
Φ	Standardnormalverteilung
Φ_2	Bivariate Standardnormalverteilung
Φ^{-1}	Inverse der Standardnormalverteilung
$\varphi(\cdot)$	Dichtefunktion
\mathfrak{R}	Menge der reellen Zahlen
Σ	Kovarianzmatrix
Γ	Mittels Cholesky-Zerlegung einer Korrelationsmatrix gewonnene untere Dreiecksmatrix

1. Einleitung

1.1 Ausgangslage

Die jüngste internationale Finanzkrise – ausgelöst durch die sogenannte Subprime-Krise – hat dazu geführt, dass sich die Nachfrage und somit gleichzeitig sowohl die Entstehung von neuen als auch der Handel mit bestehenden, komplexen Kreditprodukten stark reduziert hat.¹ In diesem Zusammenhang wird immer wieder der Ruf nach einer strengeren staatlichen Regulierung von Rating-Agenturen und Kreditinstituten laut.² Oftmals steht hierbei auch die fehlerhafte Anwendung oder die Manipulation von Kreditrisikomodellen in der Kritik. Beispielsweise werden der Rating-Agentur Moody's „Fehler in der Modellberechnung“ von Constant Proportion Debt Obligations (CPDOs) vorgeworfen.³ Wie dieses Beispiel zeigt und die Krise eindrucksvoll verdeutlicht, gehen mit der Modellierung von realen Zusammenhängen Risiken einher, welche nicht zu vernachlässigen sind. Darüber hinaus hat die Finanzkrise unter anderem aufgrund dieser Risiken das Bewusstsein über die Notwendigkeit eines fortschrittlichen Risikomanagements geschärft. Auch der Einsatz von Kreditderivaten im Rahmen eines aktiven Risikomanagements mit dem Ziel eine optimale Risikoallokation zu erreichen, ist weiterhin sinnvoll. Die Identifikation und Quantifizierung von Risiken spielt dabei eine maßgebliche Rolle. Nur durch die Kenntnis risikoadäquater Pricing- und Bewertungsmethoden ist es möglich eine fundierte Entscheidung darüber zu treffen, ob und welche Risiken eingegangen oder abgesichert werden sollen. Die Grundlage dessen bilden die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Kreditrisikomodelle.

1.2 Definition der Begriffe Kreditrisiko, bonitätssensitiver Finanztitel und Kreditrisikomodell

Kreditrisiko. Das Kreditrisiko entsteht dem Gläubiger einer Forderung aus der Unsicherheit über die Zahlungsfähigkeit oder –willigkeit seines Schuldners. Es beschreibt die Gefahr, dass die Forderung nicht, nur teilweise oder verspätet zurückbezahlt wird. Als Forderungen gelten unter anderem Zins- und Tilgungsleistungen aus Krediten und Anleihen, aber auch Forderungen aus dem positiven Marktwert eines derivativen Geschäfts.⁴ Im Hinblick auf die potentielle Verlustursache lässt sich das Kreditrisiko in die Teilkomponenten „(Adressen-/ Kontrahenten-)Ausfallrisiko (Default Risk)“ und „Bonitätsänderungsrisiko (Spread-Widening Risk)“ differenzieren.⁵ Unter dem Ausfallrisiko versteht man die Gefahr eines konkreten Ausfalls – beispielsweise durch Insolvenz – des Kreditnehmers.⁶ Demgegenüber

¹ Vgl. Handelsblatt: Sturm über Wall Street. Ausgabe vom 17.06.2008

² Vgl. Handelsblatt: Die Aufseher ziehen die Zügel an. Ausgabe vom 17.06.2008

³ Vgl. Handelsblatt: Neutralität nicht garantiert. Ausgabe vom 02.07.2008

⁴ Vgl. Müller, Frank: Kreditderivate und Risikomanagement. Frankfurt am Main: Bankakademie-Verlag GmbH, 2000. S. 7

⁵ Vgl. Burghof, Hans-Peter et al.: Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005. S. 774

⁶ Vgl. Burghof, Hans-Peter et al.: Kreditrisiken und Kreditmärkte, in: Burghof, Hans-Peter et al.: Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005. S. 5f.

wird der Wertverlust einer Position, welcher durch eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit oder des Ausmaßes eines möglichen Ausfalls bedingt wird, als Bonitätsänderungsrisiko bezeichnet.⁷ Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf dem Ausfallrisiko. Sofern nicht explizit etwas anderes benannt ist, werden die Begriffe Kreditrisiko und Ausfallrisiko synonym behandelt.

Bonitätssensitiver Finanztitel. Unter einem bonitätssensitiven Finanztitel wird jedes Finanzinstrument verstanden, welches kreditrisikobehaftet ist. Da im Rahmen dieser Arbeit Ausfallrisiken im Vordergrund stehen, bezeichnet der Begriff „bonitätssensitiver Finanztitel“ grundsätzlich ein ausfallrisikobehaftetes Finanzinstrument. Unter ausfallrisikobehafteten Finanzinstrumente werden in dieser Arbeit insbesondere Kredite, Anleihen und Derivate verstanden, wobei die gewonnenen Erkenntnisse auch auf jedes andere ausfallrisikobehaftete Finanzinstrument angewendet werden können.

Kreditrisikomodell. Betrachtet man beispielsweise ein Kreditinstitut, so ist es für dieses von größtem Interesse über die Wertentwicklung innerhalb des eigenen Kreditportfolios informiert zu sein. Hierbei interessieren zum Einen die Gewinnmöglichkeiten, um die potentiellen Renditen auf das eingesetzte Kapital einschätzen zu können, und zum Anderen das inhärente Verlustrisiko, um ausreichende Eigenkapitalreserven zu Deckung der Verluste bereitstellen zu können. Da die Wertentwicklung der Einzeltitel sowie des aggregierten Kreditportfolios des Kreditinstituts unter Umständen von existentieller Wichtigkeit sein kann, ist es notwendig die Wertentwicklung aufgrund des inhärenten Kreditrisikos präzisieren, differenzieren und quantifizieren zu können.⁸ Hierfür dienen sogenannte Kreditrisikomodelle. Unter einem Modell wird im Allgemeinen „eine strukturgleiche bzw. strukturähnliche Abbildung eines Realitätsausschnitts“ verstanden.⁹ Durch die Reduktion der Komplexität der Realität sollen wesentliche Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge aufgezeigt werden. Die zur Reduktion der Komplexität notwendigerweise zu treffenden Annahmen können unter Umständen jedoch zu realitätsverzerrenden Modellergebnissen führen. In der Regel werden zur Quantifizierung der Kreditrisiken innerhalb eines bestimmten Zeithorizonts – dem sogenannten Risikohorizont – mathematische Modelle verwendet. Hierbei steht insbesondere die Vorwegnahme der zukünftigen Entwicklung der kreditrisikobehafteten Finanztitel im Vordergrund. Ein alternativer Ansatz zu den mathematischen Modellen stellt die Übertragung empirischer Beobachtungen von Vergleichstiteln auf die gegebene Problemstellung dar. Im Folgenden werden nur die mathematischen Kreditrisikomodelle berücksichtigt sowie diese auf ihre empirische Tauglichkeit analysiert. Für die Vorwegnahme der zukünftigen Entwicklung der kreditrisikobehafteten Finanztitel müssen alle möglichen Umweltzustände bzw. Einflussfaktoren berücksichtigt werden, welche während des Zeithorizonts auf den Wert

⁷ Vgl. Cremers, Heinz et al.: Risikosteuerung mit Kreditderivaten unter besonderer Berücksichtigung von Credit Default Swaps. Frankfurt School of Finance & Management Working Paper Series No. 80, Frankfurt, 2007. S.9

⁸ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S.110

⁹ Vgl. Jortzik, Stephan: Semi-analytische und simulative Kreditrisikomessung synthetischer Collateralized Debt Obligations bei heterogenen Referenzportfolios. Dissertation an der Universität Göttingen, Universität Göttingen: Göttingen, 2005. S. 59

der Finanztitel einwirken können. Die für das Kreditrisiko relevanten Einflussfaktoren werden auch als „Kreditrisikofaktoren“ bezeichnet. Diese Kreditrisikofaktoren müssen identifiziert werden und auf geeignete Weise mit dem Wert der kreditrisikobehafteten Finanztitel verknüpft werden, so dass – unter sonst gleichen Bedingungen – eine Änderung des Kreditrisikofaktors eine möglichst realitätsnahe Änderung des Werts der kreditrisikobehafteten Finanztitel nach sich zieht. Ein wesentlicher Bestandteil bei dieser „Verknüpfung“ ist die Berücksichtigung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der jeweiligen Umweltzustände. Als Ergebnis eines Kreditrisikomodells erhält man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des Portfoliowerts innerhalb des Risikohorizonts.¹⁰ Anhand dieses Ergebnisses können Handlungsalternativen, wie beispielsweise der Kauf oder Verkauf von kreditrisikobehafteten Finanztiteln, abgeleitet werden. Bevor jedoch eine derartige Entscheidung auf Basis eines Kreditrisikomodells getroffen wird, sollten die getroffenen Annahmen sowie die Ergebnisse kritisch hinterfragt werden.

¹⁰ Vgl. Jortzik, Stephan: Semi-analytische und simulative Kreditrisikomessung synthetischer Collateralized Debt Obligations bei heterogenen Referenzportfolios. Dissertation an der Universität Göttingen, Universität Göttingen: Göttingen, 2005. S. 59f.

2. Modellüberblick

Im Folgenden soll ein Überblick über verschiedene Bewertungsansätze für bonitätssensitive Finanztitel anhand der in der Literatur verbreiteten Unterteilung zwischen Unternehmenswert- („Asset Value-“ oder „Asset-Based-Models“) und Intensitätsmodellen („Intensity-Based-Models“) gegeben werden. Unternehmenswertmodelle, welche oftmals auch als strukturelle Modelle („Structural Models“) bezeichnet werden, modellieren das Ausfallrisiko eines Unternehmens über die zeitabhängige Entwicklung von dessen Firmenwert im Verhältnis zu dessen Fremdkapital. Bei den Intensitätsmodellen, welche auch als „Reduced-Form-Models“ bezeichnet werden, wird der Ausfall eines Unternehmens dagegen durch einen exogenen Intensitätsprozess gesteuert. Darüber hinaus existieren hybride Kreditrisikomodelle, welche eine Mischung aus Unternehmenswertmodellen und Intensitätsmodellen darstellen. Diese bauen im Wesentlichen auf Unternehmenswertmodellen auf, wobei die hybriden Kreditrisikomodelle meist die für Unternehmenswertmodelle bedeutende Annahme vollständiger Information fallen lassen und gezielt Informationsdefizite berücksichtigen.

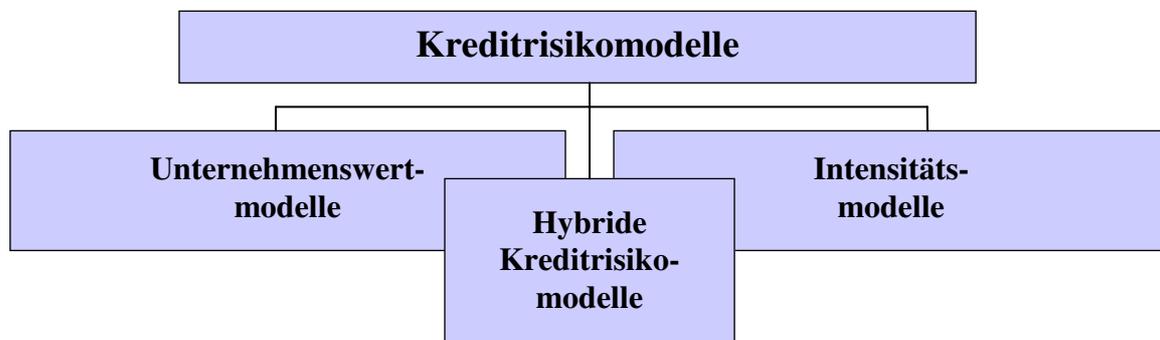


Abb. 1: Kreditrisikomodelle im Überblick¹¹

Unternehmenswertmodelle. Wie bereits beschrieben, bildet die Überlegung, dass letztlich der Wert der Aktiva eines Unternehmens maßgebend dafür ist, ob die Firma dazu in der Lage ist ihre Verbindlichkeiten bei Fälligkeit zurückzuzahlen, die Kernidee der Unternehmenswertmodelle. Ist der Wert der Aktiva bei Fälligkeit des Fremdkapitals geringer als die Forderung, so fällt diese in Höhe des Differenzbetrags zwischen Aktiva und dem Rückzahlungsbetrag des Fremdkapitals zumindest teilweise aus. Bei dem historisch ältesten Unternehmenswertmodell, dem klassischen optionstheoretischen Ansatz nach Merton, wird hierbei davon ausgegangen, dass das Fremdkapital eines Unternehmens lediglich aus einem einzigen ausfallrisikobehafteten Zerobond besteht.¹² Darüber hinaus werden die Vollkommenheit des Kapitalmarktes, die Gültigkeit des Modigliani-Miller Theorems, eine konstante und flache Zinsstruktur, die Möglichkeit kontinuierlichen Handels und eine

¹¹ Eigene Darstellung

¹² Vgl. Merton, Robert C.: On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, in: Journal of Finance Vol. 29, 1974.

geometrisch Brownsche Bewegung für die Entwicklung des Firmenwerts angenommen.^{13,14} Die vielen restriktiven Annahmen dieses „Ausgangsmodells“ boten zahlreiche Möglichkeiten zur Weiterentwicklung des Ansatzes von Merton. So wurden im Zeitverlauf insbesondere die Annahmen einer flachen und konstanten Zinsstruktur, die Unmöglichkeit eines Ausfalls vor der Fälligkeit des Fremdkapitals, das Bestehen eines Zerobonds als einzige Fremdkapitalkomponente sowie die Modellierung der Firmenwertentwicklung über eine geometrisch Brownsche Bewegung kritisch hinterfragt und teilweise aufgehoben. Die nachfolgende Tabelle bietet einen Überblick über die Weiterentwicklungen der Unternehmenswertmodelle im Zeitverlauf. Da die Beschreibung sämtlicher Unternehmenswertmodelle im Rahmen dieser Arbeit nicht zielführend ist, werden im Folgenden exemplarisch der ursprüngliche Ansatz nach Merton, die Einführung einer Ausfallschranke nach Black und Cox sowie die Einbindung eines Couponbonds als Fremdkapitalkomponente in beiden Ansätzen vorgestellt.

Modell	Annahmen und Modellstruktur
<i>Black und Scholes</i> (1973), <i>Merton</i> (1974)	Unter den Annahmen einer Zerteilung der Finanzierungstitel des Unternehmens in Aktien und Nullkuponanleihe sowie dem Ausschluss eines vorzeitigen Ausfalls ergibt sich der Wert einer ausfallbedrohten Nullkuponanleihe als Summe des Wertes einer risikolosen Nullkuponanleihe und dem eines europäischen Short Puts; unter zahlreichen idealisierenden Annahmen (z.B. vollkommener Kapitalmarkt, konstante und flache Zinsstruktur, kontinuierlicher Handel, ein als geometrische Brownsche Bewegung modellierter Unternehmenswert) kann der Wert des Puts mit der Formel von <i>Black und Scholes</i> (1973) ermittelt werden.
<i>Black und Cox</i> (1976)	Erweiterung des BSM-Modells um die Möglichkeit eines vorzeitigen Ausfalls; dieser tritt ein, wenn der Unternehmenswert eine zeitvariable, aber deterministische Schranke unterschreitet; außerdem Bewertung von zwei Klassen von Nullkuponanleihen, die sich durch ihre Rangstellung unterscheiden.
<i>Mason und Bhattacharya</i> (1981)	Modellierung der Unternehmenswertrendite als Summe eines Drifterms und eines homogenen Poisson Prozesses mit binomialverteilter Sprunghöhe; Ausfall bei Unterschreiten einer zeitvariablen, deterministischen Schranke durch den Unternehmenswert.
<i>Shimko, Tejima und van Deventer</i> (1993)	Erweiterung des BSM-Modells um eine stochastische Entwicklung der risikolosen Zinsstruktur; der kurzfristige risikolose Zinssatz wird gemäß dem Modell von <i>Vasicek</i> (1977) modelliert; Unternehmenswert und kurzfristiger risikoloser Zinssatz korrelieren.
<i>Kim, Ramaswamy und Sundaresan</i> (1993)	Erweiterung des BSM-Modells um einen stochastischen kurzfristigen risikolosen Zinssatz (modelliert durch Prozess vom <i>Cox, Ingersoll und Ross</i> (1985)-Typ), der mit dem Unternehmenswert korreliert, sowie der Möglichkeit eines vorfälligen Ausfalls; Bewertung von kündbaren und nicht-kündbaren Kuponanleihen; ein vorfälliger Ausfall tritt ein, wenn der Netto-Cash Flow des Unternehmens nicht hinreichend hoch ist, um die (kontinuierlichen) Kuponzahlungen zu leisten (konstante Schranke); in diesem Fall erhält der Anleihegläubiger im Ausfallzeitpunkt das Minimum eines (exogen spezifizierten) Anteils einer (ausfall-) risikolosen Kuponanleihe mit ansonsten identischen Ausstattungsmerkmalen und dem Unternehmenswert; bei Fälligkeit der Anleihe erhält der Gläubiger das Minimum aus Unternehmenswert und Nominalbetrag der Anleihe.
<i>Lonstaff und Schwartz</i> (1995)	Erweiterung des BSM-Modells um einen stochastischen kurzfristigen risikolosen Zinssatz (modelliert durch einen Ornstein-Uhlenbeck, Prozess), der mit dem Unternehmenswert korreliert, sowie der Möglichkeit eines vorfälligen Ausfalls; dieser tritt ein, wenn der Unternehmenswert niedriger als eine konstante Schranke ist; in diesem Fall erhalten alle Gläubiger des Unternehmens im Ausfallzeitpunkt einen (titelspezifischen, jedoch exogen vorgegebenen) Anteil einer risikolosen Anleihe mit ansonsten identischen Ausstattungsmerkmalen wie ihr zuvor ausfallbedrohter Zahlungsanspruch; Bewertungsformeln (Reihendarstellung) für ausfallbedrohte Nullkuponanleihen

¹³ Die Annahme eines vollkommenen Marktes beinhaltet z.B. die Abwesenheit von Transaktionskosten und Steuern, die beliebige Teilbarkeit aller Finanztitel, eine atomistische Marktstruktur, einen identischen Soll- und Habenzinssatz und die Möglichkeit von Leerverkäufen (s. hierzu auch Abschnitt 3.1.1)

¹⁴ Vgl. Grundke, Peter: Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken. Dissertation an der Universität zu Köln. Der Deutsche Universitätsverlag: Wiesbaden, 2003. S. 8f.

	sowie fest und variabel verzinsliche Kuponanleihen.
<i>Schönbucher</i> (1996)	Modellierung der Unternehmenswertrendite, wie bei <i>Zhou</i> (2001), durch einen Sprung-Diffusionsprozess; Herleitung einer so genannten partiellen Integro-Differenzialgleichung zur Bewertung von Anleihen und Derivaten eines Unternehmens, dessen Aktivwert durch einen Sprung-Diffusionsprozess modelliert wird.
<i>Briys und de Varenne</i> (1997)	Modifizierung des Modells <i>Longstaff</i> und <i>Schwartz</i> (1995) durch Verwendung einer zeitvariablen, stochastischen Ausfallschranke sowie Berücksichtigung eines bei Fälligkeit zur Rückzahlung des Nominalbetrages zu niedrigen Unternehmenswertes als zweite Ausfallquelle; ein vorläufiger Ausfall tritt ein, wenn der Unternehmenswert kleiner als ein exogen spezifizierter Prozentsatz des mit dem (stochastischen) risikolosen Zinssatz über die Restlaufzeit diskontierten Nominalbetrages der emittierten Nullkuponanleihe ist; bei beiden möglichen Ausfallarten erhält der Gläubiger einen vorgegebenen Anteil des verbleibenden Unternehmenswertes; Herleitung einer geschlossenen Bewertungsformel für ausfallbedrohte Nullkuponanleihen.
<i>Cathcart und El-Jahel</i> (1998)	Modifizierung des Modells von <i>Longstaff</i> und <i>Schwartz</i> (1995): Kurzfristiger risikoloser Zinssatz wird durch einen stochastischen Prozess vom <i>Cox, Ingersoll</i> und <i>Ross</i> -Typ modelliert; ein Ausfall tritt ein, wenn ein als geometrische Brownsche Bewegung modellierter Signalprozess eine konstante Schranke unterschreitet; dieser ist annahmegemäß unkorreliert mit dem risikolosen Zinssatz; Herleitung analytischer Bewertungsformeln für ausfallbedrohte Nullkuponanleihen und variabel verzinsliche Kuponanleihen.
<i>Reueby</i> (1998), <i>Ericsson</i> und <i>Reueby</i> (1998)	Modulare Bewertung verschiedener Finanzierungsmittel in einem Unternehmenswertmodell, ähnlich dem von <i>Black</i> und <i>Cox</i> (1976), durch Duplizierung der jeweiligen Zahlungsstruktur mittels Barrier-Optionen.
<i>Saá-Requejo</i> und <i>Santa-Clara</i> (1999)	Erweiterung des BSM-Modells um einen stochastischen kurzfristigen risikolosen Zinssatz (modelliert durch verschiedene, unter Umständen mit dem Unternehmenswert korrelierte Zinsprozesse) sowie der Möglichkeit eines vorfälligen Ausfalls: die Ausfallschranke wird durch einen den Wert der Verbindlichkeiten repräsentierenden stochastischen Prozess, der durch die Brownschen Bewegungen des Unternehmenswertprozesses und des Zinsprozesses getrieben wird, modelliert; wie bei <i>Longstaff</i> und <i>Schwartz</i> (1995) erhalten die Anleihegläubiger bei einem Ausfall einen (titelspezifischen, jedoch exogen vorgegebenen) Anteil des Nominalwertes der Anleihe im Fälligkeitszeitpunkt.
<i>Schöbel</i> (1999)	Modifizierung des Modells von <i>Longstaff</i> und <i>Schwartz</i> (1995), indem ein Ausfall als Unterschreiten des mit dem risikolosen Zinssatz über die Restlaufzeit diskontierten Nominalbetrages der Unternehmensverbindlichkeiten durch den Unternehmenswert definiert wird; diese Ausnahme ermöglicht die Herleitung geschlossener Bewertungsformeln für ausfallbedrohte Nullkuponanleihen und Kuponanleihen.
<i>Zhou</i> (2001)	Modellierung der Unternehmenswertrendite durch einen Sprung-Diffusionsprozess mit jeweils unabhängigen, lognormalverteilten Sprunghöhen; Ausfall bei Unterschreiten einer deterministischen Schranke durch den Unternehmenswert; Zahlung an die Gläubiger bei einem Ausfall erfolgt im Fälligkeitszeitpunkt der Anleihe, wobei die Höhe jedoch vom Unternehmenswert im Ausfallzeitpunkt abhängig ist.

Tab. 1: Weiterentwicklung von Unternehmenswertmodellen im Zeitverlauf¹⁵

Intensitätsmodelle. Wie bereits erwähnt, erfolgt der Ausfall bei Intensitätsmodellen im Gegensatz zu Unternehmenswertmodellen nicht endogen aufgrund einer ökonomisch nachvollziehbaren Basis, sondern exogen über einen Ausfallprozess. Der erste Sprung eines Sprungprozesses, dem Ausfallprozess, entspricht hierbei dem Ausfallzeitpunkt. Da der Firmenwert nicht modelliert wird, ist bei Intensitätsmodellen die Definition der Ausgleichszahlung, der sog. Recovery-Zahlung, bei Eintritt eines Ausfallereignisses relevant. Hierbei ist sowohl eine Annahme über die Höhe als auch über den Zeitpunkt der Recovery-Zahlung zu treffen. Diese wird in der Regel entweder direkt beim Eintritt des Ausfallereignisses („Recovery at Default“) oder am Ende der Laufzeit des bonitätssensitiven Finanztitels („Recovery at Maturity“) geleistet. Als Höhe der Recovery-Zahlung kann ein fester Betrag, der Austausch des Zahlungsanspruchs der Gläubiger gegen einen exogen

¹⁵ Vgl. Grundke, Peter: Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken. Dissertation an der Universität zu Köln. Der Deutsche Universitätsverlag: Wiesbaden, 2003. S. 15f.

vorgegebenen Anteil eines ausfallrisikofreien Finanztitels mit ansonsten gleichen Spezifikationen, ein Prozentsatz des Nominals des ausfallrisikobehafteten Finanztitels oder ein Anteil des Marktwertes des bonitätssensitiven Finanztitels direkt vor dem Ausfallzeitpunkt definiert werden.¹⁶ Auch die Intensitätsmodelle basieren auf mehreren Annahmen, wobei die Anzahl der Annahmen aufgrund des zugrundeliegenden nicht-ökonomisch begründeten Modells deutlich geringer ist als bei den Unternehmenswertmodellen. Neben den Annahmen über die Recovery-Zahlung muss bei Intensitätsmodellen auch eine Annahme über die Modellierung des Zinssatzes getroffen werden. Darüber hinaus ist es notwendig eine Annahme über die sog. Intensitätsrate, der exogen gegebenen Ausfallrate, zu treffen. Im Rahmen des Abschnitts 3.2 sollen Intensitätsmodelle mit konstanter, deterministischer oder auch stochastischer Intensität untersucht werden. Darüber hinaus ist es mit Intensitätsmodellen möglich neben den zwei Stadien „Ausfall“ und „kein Ausfall“ auch Bonitätsänderungen zu modellieren. Derartige Modelle werden auch als Rating-Migrations-Modelle bezeichnet und stellen eine Untergruppe der Intensitätsmodelle dar. Die Idee dieser Modelle wird im Rahmen des Abschnitts 3.2 ebenfalls kurz erläutert. Wie bereits für Unternehmenswertmodelle festgehalten, soll nachfolgende Tabelle einen Überblick der Weiterentwicklung von Intensitätsmodellen geben.

Modell	Annahmen und Modellstruktur
<i>Jarrow und Turnbull (1995)</i>	Ausfallzeitpunkt entspricht dem ersten Sprung eines Sprungprozesses mit konstanter Intensitätsrate; stochastische risikolose Zinsstruktur und Ausfallzeitpunkt sind stochastisch unabhängig; Gläubiger erhalten im Ausfallzeitpunkt einen (konstanten und exogen spezifizierten) Anteil einer risikolosen Anleihe mit ansonsten identischen Ausstattungsmerkmalen; Bewertung verschiedener Finanztitel im Rahmen einer so genannten „Wechselkursanalogie“.
<i>Monkkonen (1997)</i>	Zeitdiskretes Modell, bei dem der Ausfallzeitpunkt dem ersten Sprung eines Sprungprozesses mit stochastischer, vom kurzfristigen risikolosen Zinssatz abhängiger Intensitätsrate entspricht; Anteilsquote der Gläubiger im Ausfallzeitpunkt wird durch den von <i>Das</i> und <i>Tufano</i> (1996) verwendeten stochastischen Prozess modelliert; Ausfallzeitpunkt, risikolose Zinsstruktur und Anteilsquote sind stochastisch abhängig.
<i>Madan und Unal (1998)</i>	Ausfallzeitpunkt entspricht dem ersten Sprung eines Sprungprozesses mit stochastischer, vom Eigenkapitalwert abhängiger Intensitätsrate; Anteilsquote der Gläubiger im Ausfallzeitpunkt wird durch Betaverteilung modelliert; Ausfallzeitpunkt, risikolose Zinsstruktur und Anteilsquote sind gemeinsam stochastisch unabhängig.
<i>Schönbucher (1998)</i>	Erweiterung des Modells von <i>Heath, Jarrow und Morton</i> (1992) für Terminzinsstrukturen von mit Ausfallrisiken behafteten Anleihen; Möglichkeit mehrfacher Ausfälle, bei denen der Nominalwert jeweils um einen stochastischen Faktor reduziert wird, sowie von Sprüngen in der ausfallrisikobehafteten Terminzinsstruktur in den Ausfallzeitpunkten.
<i>Lando (1994, 1998)</i>	Ausfallzeitpunkt entspricht dem ersten Sprung eines Cox Prozesses; kurzfristiger risikoloser Zinssatz und Intensitätsratenprozess können durch Abhängigkeit von gemeinsamen Zustandsvariablen korrelieren; Bewertung von „Grundbausteinen“ der Zahlungsstruktur ausfallbedrohter Finanztitel.
<i>Duffie (1998)</i>	Ausfallzeitpunkt entspricht dem ersten Sprung eines Sprungprozesses mit stochastischer Intensitätsrate; kurzfristiger risikoloser Zinssatz und Intensitätsratenprozess können korrelieren; Verwendung der Annahme, dass Gläubiger im Ausfallzeitpunkt einen exogen spezifizierten (zufälligen) Anteil des Nominalwertes der Anleihe erhalten; diese Annahme impliziert, dass Kuponhöhe und Restlaufzeit nicht maßgeblich für die Höhe der Ausgleichszahlung sind.

¹⁶ Vgl. Grundke, Peter: Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken. Dissertation an der Universität zu Köln. Der Deutsche Universitätsverlag: Wiesbaden, 2003. S. 17

<i>Duffie und Singleton</i> (1999)	Ausfallzeitpunkt entspricht dem ersten Sprung eines Sprungprozesses mit stochastischer Intensitätsrate; kurzfristiger risikoloser Zinssatz und Intensitätsratenprozess können korrelieren; Gläubiger erhalten im Ausfallzeitpunkt einen (zufälligen) Anteil des Marktwertes des Titels unmittelbar vor dem Ausfall; Bewertung ausfallbedrohter Anleihen kann (unter geeigneten Annahmen) wie im ausfallrisikolosen Fall erfolgen, wenn der Diskontierung verwendete Zinssatz modifiziert wird.
<i>Madan und Unal</i> (2000)	Ausfall tritt ein, falls der Verlust L höher ist als die Differenz zwischen dem Unternehmenswert und den mit dem risikolosen Zinssatz diskontierten zukünftigen Zahlungen an die Fremdkapitalgeber ist; der Zeitpunkt des Verlustes entspricht dem Erstsprungzeitpunkt eines homogenen Poisson Prozesses mit exogen vorgegebener Intensitätsrate λ ; die Verlusthöhe L ist eine vom Poisson Prozess unabhängige Zufallsvariable mit stationärer, exogen spezifizierter Verteilung M ; der Ausfallzeitpunkt ergibt sich als Zeitpunkt des ersten Sprunges eines Sprungprozesses, dessen Intensitätsrate dem Produkt aus λ und der Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag L höher als die obige Differenz ist, entspricht; durch Taylor-Approximation 1. Ordnung der Intensitätsrate ist diese eine lineare Funktion des Logarithmus des (nicht zinssensitiven Teils) des Unternehmenswertes und des kurzfristigen risikolosen Zinssatzes, so dass sich geschlossene Bewertungsformeln für ausfallbedrohte Nullkuponanleihen angeben lassen.
<i>Duffie und Lando</i> (2001)	Unternehmenswertmodell, bei dem angenommen wird, dass die Marktteilnehmer nur unvollständige Informationen über den aktuellen Unternehmenswert besitzen; es lässt sich zeigen, dass durch diese Zusatzannahme dem Ausfallzeitpunkt eine stochastische Intensität zugeordnet werden kann (hybrides Kreditrisikomodel).
<i>Lotz und Schlögl</i> (2000), <i>Schönbucher</i> (2000)	Berücksichtigung von Ausfallrisiken in so genannten „Marktmodellen“ der Zinsstrukturentwicklung.
<i>Schmidt und Zagst</i> (2000)	Verwendung des <i>Duffie und Singleton</i> (1999)-Modellrahmens mit drei stochastischen Zustandsvariablen; kurzfristiger risikoloser Zinssatz „Unsicherheitsfaktor“, der als aggregierter Index alle aktuellen Informationen zur Qualität des Unternehmens widerspiegeln soll, sowie kurzfristiger Spread; Faktoren werden durch Mean-Reverting-Prozesse modelliert; die stochastische Entwicklung des „Unsicherheitsfaktors“ beeinflusst direkt das langfristige Niveau des Spreads; theoretisch ist eine Korrelation zwischen allen drei Faktoren möglich.
<i>Jarrow und Yu</i> (2001)	Intensitätsratenprozess jedes Schuldners enthält Sprungterme, die direkt durch den Ausfall anderer Unternehmen ausgelöst werden; aufgrund dieser Modellierung sind die Ausfallzeitpunkte verschiedener Schuldner stärker korreliert, als wenn die Ausfallintensitäten lediglich von gemeinsamen Zustandsvariablen abhängig sind.

Tab. 2: Weiterentwicklung von Intensitätsmodellen im Zeitverlauf¹⁷

Hybride Kreditrisikomodelle. Hybride Kreditrisikomodelle können diverse Ausprägungen haben. Grundsätzlich basieren diese jedoch auf Unternehmenswertmodellen und führen einen Unsicherheitsfaktor ein, welcher meist in einem Informationsdefizit begründet ist. Durch diesen Informationsdefizit kann dem Ausfallzeitpunkt eine stochastische Intensität zugeordnet werden und bietet somit eine ökonomische Rechtfertigung für Intensitätsmodelle.¹⁸ Dieser Informationsdefizit kann beispielsweise in der Höhe der Ausfallschranke, dem Firmenwert oder aber dem Eintritt einer zukünftigen Verbindlichkeit in unbekannter Höhe liegen. Die beiden zuerst genannten Ansätze dienen im Rahmen von Abschnitt 3.3 als Beispiele für hybride Kreditrisikomodelle. Der letztere Ansatz dagegen ist grundsätzlich ähnlich und beschreibt das unerwartete Auftreten einer Schuld, welche beispielsweise durch hohe Verluste im Handel eines Kreditinstituts begründet sein kann, wobei der Ausfall dadurch ausgelöst

¹⁷ Vgl. Grundke, Peter: Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken. Dissertation an der Universität zu Köln. Der Deutsche Universitätsverlag: Wiesbaden, 2003. S. 22f.

¹⁸ Vgl. Grundke, Peter: Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken. Dissertation an der Universität zu Köln. Der Deutsche Universitätsverlag: Wiesbaden, 2003. S. 20

wird, dass der Firmenwert abzüglich der diskontierten Verbindlichkeiten nicht ausreicht, um diese zusätzliche Schuld zu begleichen.¹⁹

Alle drei Modelltypen können sowohl zur Modellierung des Kreditrisikos eines einzelnen bonitätssensitiven Finanztitels als auch im Portfoliofall eingesetzt werden. Im Folgenden wird ausschließlich auf die Modellierung des Kreditrisikos eines einzelnen bonitätssensitiven Finanztitels eingegangen. Hinsichtlich der Modellierung des Kreditrisikos im Portfoliofall wird auf das Frankfurt School Working Paper No. 127 verwiesen.

¹⁹ Vgl. Thabe, Tim: Bewertung von Kreditrisiko, Zahlungsunfähigkeit, optimale Kapitalstruktur und Agencykosten bei unvollständiger Information. Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Wirtschaftswissenschaften der Universität Mannheim. Mannheim: 2006. S. 26ff.

3. Modellierung des Kreditrisikos eines einzelnen bonitätssensitiven Finanztitels

3.1 Unternehmenswertmodelle

3.1.1 Klassischer optionstheoretischer Ansatz

Der klassische optionstheoretische Ansatz bildet den Ausgangspunkt der Unternehmenswertmodelle und basiert auf der Arbeit von Merton aus 1974, welcher den grundlegenden Ansatz von Black und Scholes zur Bewertung von Unternehmensverbindlichkeiten über Optionsbewertung aus 1973 erweitert hat.²⁰ Daher wird der klassische optionstheoretische Ansatz häufig als „Merton-Modell“ bezeichnet. Nach Merton wird das Fremdkapital eines Unternehmens als Eventualforderung der Gläubiger auf die Vermögenswerte des Unternehmens betrachtet.²¹ Daher liegt die Grundidee des klassischen optionstheoretischen Ansatzes darin, dass ein Unternehmen genau dann ausfällt, wenn dessen Vermögenswerte nicht ausreichend sind, um die fälligen Verbindlichkeiten zu tilgen. Entsprechend liegt die Zielsetzung dieses Ansatzes darin, das Ausfallrisiko über eine Funktion des Marktwerts der Vermögenswerte eines Unternehmens zur Fälligkeit des Fremdkapitals zu beschreiben. Es gilt hierbei zu beachten, dass ein Ausfall nach diesem Ansatz ausschließlich zur Fälligkeit des Fremdkapitals erfolgen kann. Darüber hinaus ist zu beachten, dass der Marktwert der Vermögenswerte eines Unternehmens nur bei Vernachlässigung von Steuern und Insolvenzkosten dem Marktwert des Unternehmens entspricht.²²

Grundlegende Modellannahmen. Aus Vereinfachungsgründen gehen Unternehmenswertmodelle davon aus, dass das betrachtete Unternehmen sich ausschließlich über Eigenkapital sowie einen Zerobond mit Nominal K und Fälligkeit zum Zeitpunkt T refinanziert. Ebenso werden Steuern und Insolvenzkosten im Merton-Modell nicht berücksichtigt, weswegen im Folgenden der Marktwert der Vermögenswerte eines Unternehmens und der Marktwert des Unternehmens äquivalent behandelt werden. Das Eigenkapital ist nachrangig und da daneben Kapitalerhöhungen, –verminderungen oder –ausschüttungen modellseitig ausgeschlossen werden, beschränkt sich der Haftungsumfang der Eigenkapitalgeber auf die Höhe und Entwicklung der ursprünglichen Einlagen.²³ Dementsprechend ist ebenso eine Nachschussmöglichkeit oder gar –pflicht modellseitig ausgeschlossen. Darüber hinaus ist auch die Aufnahme von weiterem Fremdkapital nicht

²⁰ Vgl. Black, Fischer et. al.: The pricing of options and corporate liabilities, in: Journal of Political Economy Vol. 81, 1973. S. 637 - 654. sowie Merton, Robert C.: On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, in: Journal of Finance Vol. 29, 1974. S. 449 - 470

²¹ Vgl. Merton, Robert C.: On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, in: Journal of Finance Vol. 29, 1974. S. 452ff.

²² Vgl. Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 153

²³ Vgl. Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 167f.

zulässig. Der Marktwert eines Unternehmens V entspricht dem Barwert aller zukünftigen Cashflows (Entity-Ansatz des Discounted Cash-Flow-Modells) und stellt somit die Summe der Marktwerte von Eigenkapital und Fremdkapital (hier: dem Zerobond) dar. Die Modellierung der Entwicklung des Firmenwerts V erfolgt über eine geometrische Brownsche Bewegung.

Modellierung der Entwicklung des Firmenwerts. Die Entwicklung des Firmenwerts V wird über eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift-Parameter $\mu \in \mathfrak{R}$, Volatilitäts-Parameter $\sigma > 0$, der Standard-Brownschen Bewegung $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ und einem anfänglichen Firmenwert $V_0 > 0$ modelliert:

$$(1) \frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Setzt man $m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ folgt aus Itô's Lemma:

$$(2) V_t = V_0 e^{mt + \sigma W_t}$$

Entsprechend ist der Firmenwert zum Zeitpunkt T mit

$$(3) V_T \sim LN(V_0 + mT, \sigma\sqrt{T}) \text{ logarithmisch normalverteilt.}^{24}$$

Eintritt des Ausfallereignisses. Aufgrund der Vorrangigkeit des Fremdkapitals kommt es zum Eintritt des Ausfallereignisses D , wenn zur Fälligkeit des Fremdkapitals der Marktwert des Unternehmens unterhalb des Nominals des Zerobonds liegt. Formal gilt also für den Ausfallzeitpunkt τ sowie für das Ausfallereignis D :

$$(4) \tau = \begin{cases} T & \text{falls } V_T < K \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und somit } D_{\{\tau=T\}} = V_T < K$$

Nachfolgend soll die Funktionsweise des klassischen optionstheoretischen Ansatzes graphisch veranschaulicht werden. Hierzu werden drei unterschiedliche Entwicklungen des Firmenwerts eines Unternehmens mit einem anfänglichen Firmenwert von $V_0 = 100$ und einem in fünf Jahren zu $K = 70$ fälligen Zerobond betrachtet. Es kommt zum Eintritt eines Ausfallereignisses, wenn zum Zeitpunkt T der Firmenwert unterhalb der fälligen Verbindlichkeit K liegt:

²⁴ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 4

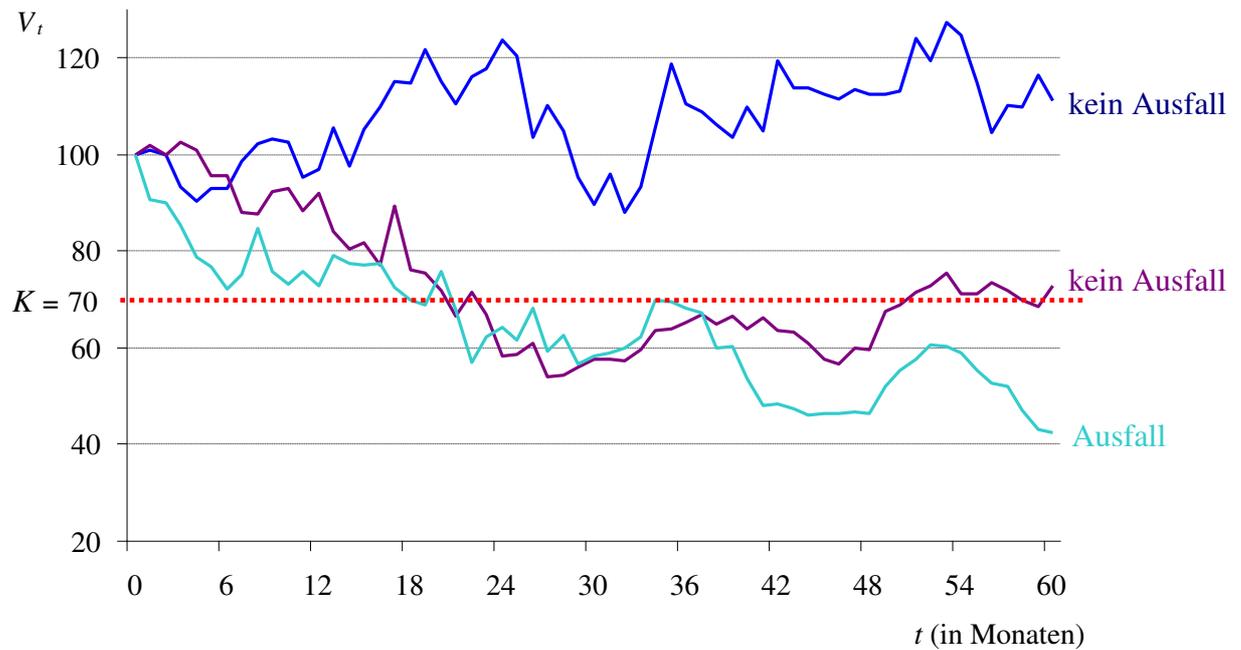


Abb. 2: Ausfallereignisse nach dem klassischen optionstheoretischen Ansatz²⁵

Wenn zum Zeitpunkt T die Vermögenswerte eines Unternehmens V_T größer oder gleich groß wie die Verbindlichkeiten K sind, werden die Fremdkapitalgeber ausbezahlt und den Eigenkapitalgebern verbleibt der Restbetrag $V_T - K$ (kein Ausfall). Liegt der Unternehmenswert V_T allerdings unterhalb K , reicht der Firmenwert zur Begleichung der Schuld nicht aus. Da ein Eigenkapitalnachschnitt modellseitig ausgeschlossen ist, fällt das Unternehmen aus. Die Fremdkapitalgeber übernehmen die Firma und erhalten somit V_T . Entsprechend ist der Wert des Eigenkapitals in diesem Fall „null“. Nachfolgende Tabelle soll die möglichen Stadien zum Zeitpunkt T noch einmal verdeutlichen:

Wert des ...	Unternehmenswert	
	$V_T \leq K$	$V_T > K$
Fremdkapitals	V_T	K
Eigenkapitals	0	$V_T - K$

Tab. 3: Wert von Fremd- und Eigenkapital bei Fälligkeit²⁶

²⁵ Eigene Darstellung in Anlehnung an: Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 5

²⁶ Vgl. Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 164

Der Wert des ausfallrisikobehafteten Zerobonds zum Zeitpunkt T ergibt sich demnach aus dem Minimum von K und V_T :

$$(5) B_T = \min(K, V_T)$$

Die Umformung der Gleichung zeigt, dass der ausfallrisikobehaftete Zerobond zu einem Portfolio bestehend aus einem (ausfall-)risikofreien Kredit mit Nominal K und Fälligkeit zum Zeitpunkt T sowie einer Short-Position in einer europäischen Put-Option auf den Firmenwert V mit Strike K und Verfall zum Zeitpunkt T identisch ist:

$$(6) B_T = \min(K, V_T) = K - \max(0, K - V_T)$$

Ebenso kann der Wert des Eigenkapitals zum Zeitpunkt T über eine Long-Position in einer europäischen Call-Option auf den Firmenwert V mit Strike K und Verfall zum Zeitpunkt T ausgedrückt werden:

$$(7) E_T = \max(0, V_T - K).^{27}$$

Inhaltlich können die Formeln (6) und (7) anhand zweier unterschiedlicher Alternativen interpretiert werden:

1. Als Gegenleistung für das zur Verfügung gestellte Kapital erhalten die Fremdkapitalgeber sämtliche Rechte an dem Unternehmen. Gleichzeitig verkaufen diese den Eigenkapitalgebern eine europäische Call-Option auf den Unternehmenswert mit oben genannten Spezifikationen. Die Eigenkapitalgeber werden ihre Call-Option nur dann ausüben, wenn der Unternehmenswert am Verfalltag der Option (= Fälligkeit des Fremdkapitals) V_T oberhalb des Strikes K liegt. In diesem Fall kaufen die Eigenkapitalgeber den Fremdkapitalgebern die Rechte am Unternehmenswert zum Strikepreis ab, welchen diese aus dem (zurück-) erworbenen Unternehmenswert zahlen. Dementsprechend verbleibt den Eigenkapitalgebern die Differenz $V_T - K$. Andernfalls werden die Eigenkapitalgeber ihre Option verfallen lassen. Entsprechend steht dann der gesamte Unternehmenswert den Fremdkapitalgebern zu.²⁸
2. Die Position der Fremdkapitalgeber kann – wie bereits erwähnt – auch als Portfolio bestehend aus einer risikofreien Anlage, welche zum Nominal K zurückgezahlt wird (z.B.: risikofreier Zerobond) und deren Kontrahent die Eigenkapitalgeber sind, sowie dem Verkauf einer europäischen Put-Option auf den Unternehmenswert mit oben genannten Spezifikationen an die Eigenkapitalgeber interpretiert werden. Aus der risikolosen Anlage erhalten die Fremdkapitalgeber immer K zurück. Die Eigenkapitalgeber werden ihre Put-Option nur dann ausüben, wenn der Wert des Unternehmens am Verfalltag der Option (= Fälligkeit des Fremdkapitals) V_T

²⁷ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 5f.

²⁸ Vgl. Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 165f.

unterhalb des Strikes K liegt. In diesem Fall verkaufen diese den Fremdkapitalgebern die Rechte an dem Unternehmenswert und erhalten dafür den Kaufpreis in Höhe des Strikes. Da der Kaufpreis und die Rückzahlung aus der risikofreien Anlage identisch sind, netten sich diese zu „null“. Den Fremdkapitalgebern verbleibt lediglich der geringere Unternehmenswert, während die Eigenkapitalgeber nichts erhalten. Andernfalls werden die Eigenkapitalgeber ihre Option verfallen lassen und die fällige Anlage aus dem Erlös des Unternehmenswerts begleichen. Entsprechend erhalten die Fremdkapitalgeber K und die Eigenkapitalgeber $V_T - K$.²⁹

Der Payoff des Eigen- und Fremdkapitals mit Strike 70 (= Nominal des Fremdkapitals) zum Zeitpunkt T kann anhand der folgenden Graphik verdeutlicht werden:

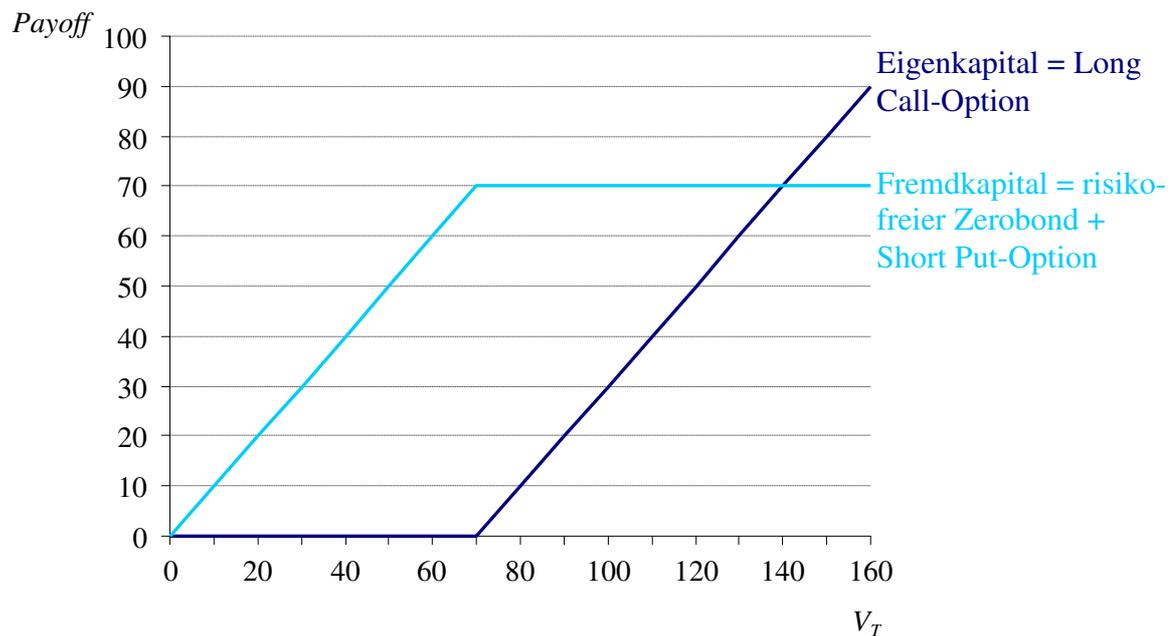


Abb. 3: Graphische Darstellung des Fremd- und Eigenkapitals zum Zeitpunkt T ³⁰

Pricing und Bewertung der Kapitalbestandteile. Da dem Eigenkapital eine europäische Call-Option und dem risikobehafteten Fremdkapital unter Anderem eine europäische Put-Option zugrunde liegen, kann das Pricing der einzelnen Kapitalbestandteile – wie generell bei europäischen Optionen – über die Black-Scholes-Formel erfolgen. Bevor jedoch das Pricing der Kapitalbestandteile näher beschrieben wird, sollen nachfolgend die wichtigsten Modellannahmen des Black-Scholes-Modells in Erinnerung gerufen werden:

- a. Underlying (hier: der Firmenwert) folgt einer geometrisch Brownschen Bewegung mit zeitlich konstanter Volatilität

²⁹ Vgl. Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 165f.

³⁰ Vgl. Summer, Christopher: Credit Risk – Advanced Models, Skriptum des Fachbereichs Bankbetriebslehre der Wirtschaftsuniversität Wien, Wien: 2007. S. 48

- b. Vorliegen eines vollkommenen, wenn auch idealisierten,³¹ Kapitalmarkts mit kontinuierlichem Handeln (d.h. implizit unter Anderem: vollständige Information, Arbitragefreiheit, Markow-Prozess)
- c. Abwesenheit von Transaktionskosten, wozu unter Anderem Insolvenzkosten gezählt werden sollen, und Steuern („idealisierte Kapitalmarkt“)
- d. Normalverteilungsannahme hinsichtlich der Bewegungen des Underlyings
- e. Liquidität und beliebige Teilbarkeit des Underlyings
- f. Möglichkeit zur Durchführung von Leerverkäufen
- g. Keine Vor- oder Nachteilhaftigkeit durch Halten des Underlyings
- h. Existenz einer konstanten und flachen Zinsstrukturkurve mit risikolosem (kontinuierlichem) Zinssatz $r > 0$ sowie Identität von Soll- und Habenzinssatz³²

Obwohl viele der im Modell getroffenen Annahmen in der Realität nicht zutreffen, stellt das Black-Scholes-Modell aufgrund seiner Einfachheit, leichten Modifizierbarkeit und seiner relativ guten approximativen Preisbestimmung ein geeignetes Basismodell zum Pricing von europäischen Optionen dar.³³ Es ist anzumerken, dass die Bewertung der Kapitalbestandteile anhand der Black-Scholes-Formel für jeden beliebigen Zeitpunkt t erfolgen kann. Da für das Pricing der einzelnen Kapitalbestandteile nur der Barwert relevant ist, werden im Folgenden in der Regel lediglich die dafür benötigten Formeln berücksichtigt.

Entsprechend kann der Barwert des Eigenkapitals anhand der klassischen Black-Scholes-Formel für europäische Calls errechnet werden:

$$(8) E_0 = C(\sigma, T, K, r, V_0) = V_0 \cdot \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \cdot \Phi(d_2)$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{-\ln \frac{K}{V_0} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} = \frac{-\ln L \pm \frac{\sigma^2}{2} \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} \text{ und Standardnormalverteilungsfunktion } \Phi,$$

wobei $L = \frac{Ke^{-rT}}{V_0}$ den „Quasi-Verschuldungsgrad“ im Zeitpunkt $t = 0$ darstellt.

³¹ S. Annahme zu c.

³² Vgl. Black, Fischer et. al.: The pricing of options and corporate liabilities, in: Journal of Political Economy Vol. 81, 1973. S. 640 sowie Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 167 sowie Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Johann-Wolfgang Goethe-Universität: Black-Scholes Modell, <http://www.wiwi.uni-frankfurt.de/~doerner/kap3.pdf> [Zugriff am 27.04.2008]

³³ Für eine ausführliche Beurteilung der Modellannahmen vgl. Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Johann-Wolfgang Goethe-Universität: Black-Scholes Modell. S. 5ff., <http://www.wiwi.uni-frankfurt.de/~doerner/kap3.pdf> [Zugriff am 27.04.2008]

L wird als „Quasi-Verschuldungsgrad“ bezeichnet, da das Fremdkapital nicht als Marktwert zum Zeitpunkt $t = 0$ in die Definition einfließt, sondern in Höhe des, mit dem risikolosen Zinssatz diskontierten, Nominalwerts angesetzt wird.³⁴

Auffällig ist hierbei, dass sich der Callpreis mit steigender Volatilität des Firmenwerts ebenfalls erhöht. Das heißt, dass die Eigenkapitalgeber nach dieser Formel immer von einer Erhöhung der Volatilität des Firmenwerts profitieren, was letztlich für diese einen Anreiz zum Eingehen von risikoreicheren Investments darstellt.³⁵

Wie bereits erläutert, entspricht der Barwert des ausfallrisikobehafteten Fremdkapitals dem Barwert eines risikofreien Zerobonds vermindert um einen Abschlag für den erwarteten Ausfallverlust. Der Barwert des risikofreien Zerobonds ergibt sich durch einfache Diskontierung mit dem kontinuierlichen Zinssatz r . Der barwertige Abschlag für den erwarteten Ausfallverlust kann über die Black-Scholes-Formel für europäische Put-Optionen bestimmt werden:

$$(9) B_0 = Ke^{-rT} - P(\sigma, T, K, r, V_0) = Ke^{-rT} - (Ke^{-rT} \cdot \Phi(-d_2) - V_0 \cdot \Phi(-d_1))$$

Gemäß der Put-Call-Parität für europäische Optionen nach Black und Scholes $P(\sigma, T, K, r, V_0) = C(\sigma, T, K, r, V_0) - V_0 + Ke^{-rT}$ gilt für den Barwert des ausfallrisikobehafteten Zerobonds genauso:

$$(10) B_0 = Ke^{-rT} - P(\sigma, T, K, r, V_0) = V_0 - C(\sigma, T, K, r, V_0) = V_0 - E_0$$

Während Formel (10) die Erste der zwei oben beschriebenen inhaltlichen Interpretationsalternativen verdeutlicht, ist Formel (9) der formale Ausdruck für die zweite Interpretationsalternative.

Für den Barwert des Unternehmens gilt definitionsgemäß:

$$(11) V_0 = E_0 + B_0$$

Implikationen für die Kapitalstruktur. Es ist hierbei anzumerken, dass – obwohl sowohl der Wert des Eigenkapitals als auch der des Fremdkapitals vom Verschuldungsgrad abhängig sind – aus Formel (11) hervorgeht, dass die Kapitalstruktur für den Firmenwert (als Summe der beiden Komponenten) unerheblich ist. Entsprechend gelten die (Kapital-) Irrelevanztheoreme von Modigliani und Miller für den klassischen optionstheoretischen Ansatz zu jedem Zeitpunkt - dementsprechend ebenso für den Ausfallzeitpunkt.³⁶

³⁴ Vgl. Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 170

³⁵ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 6

³⁶ Vgl. Modigliani, Franco et al.: The cost of capital, corporation finance and the theory of investment, in: American Economic Review Vol. 48, 1958. S. 261-297

Daneben ist anzumerken, dass der Wert des Fremdkapitals mit steigender Volatilität des Unternehmenswertes fällt ($\frac{\partial B(0,T)}{\partial \sigma} < 0$).

Hierin manifestiert sich, dass die Eigenkapitalgeber nicht mehr verlieren können als $V_T - K$. Wie beschrieben, zeigt sich dies bereits bei der Bewertung der Call-Option der Eigenkapitalgeber, welche von einer steigenden Volatilität profitieren, so dass sich deren Risikofreudigkeit erhöht.³⁷

Die erwartete Wachstumsrate des Unternehmenswertes hat dagegen keinerlei Einfluss auf den Barwert des Fremdkapitals.³⁸ Dies ist vor dem Hintergrund, dass die Fremdkapitalgeber maximal das Nominal des Fremdkapitals K zurückerhalten, nachvollziehbar.

Ausfallwahrscheinlichkeit. Die Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt T der Firmenwert V_T geringer ist als das fällige Fremdkapital K . Daher wird diese von der Verteilung des Unternehmenswertes zum Zeitpunkt T determiniert, welcher aufgrund der Annahme einer geometrisch Brownschen Bewegung log-normalverteilt ist. Entsprechend kann die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit p zum Zeitpunkt T auf Basis der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung berechnet werden:

$$(12) \quad \begin{aligned} p_T &= \mathbb{P}[V_T < K] = \mathbb{P}[V_0 e^{mT + \sigma W_T} < K] = \mathbb{P}\left[mT + \sigma W_T \leq \ln \frac{K}{V_0}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[W_T < \frac{\ln\left(\frac{K}{V_0}\right) - mT}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{V_0}\right) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad 39$$

Credit Spread. Um die erwarteten Verluste aus dem Risiko einer Investition in eine ausfallrisikobehaftete Anleihe zu kompensieren, fordern die Investoren eine zusätzliche Rendite gegenüber der Rendite risikofreier Anleihen, den sog. Credit Spread. Formal gilt für den Credit Spread des Zeitraums t bis T :

$$(13) \quad s(t, T) = y_{risky}(t, T) - y_{rf}(t, T)$$

Entsprechend ergibt sich der Wert eines risikofreien Zerobonds zum Zeitpunkt t durch:

$$(14) \quad V_{rf}(t, T) = Ke^{-y_{rf}(t, T)(T-t)} = Ke^{-r(T-t)}$$

sowie der Wert eines ausfallrisikobehafteten Zerobonds zum Zeitpunkt t über:

³⁷ Vgl. Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 171f.

³⁸ Ebenda.

³⁹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Berlin: Humboldt-Universität, 2002. S. 6 sowie Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002. S. 173

$$(15) V_{risky}(t, T) = Ke^{-[y_{rf}(t, T) + s(t, T)](T-t)} = Ke^{-(r+s)(T-t)} = B_t$$

Durch Umformung der Gleichungen (14) und (15) folgt, dass sich der Credit Spread für $t < T$ durch folgende Formel über die Restlaufzeit und den Werten der beiden Zerobonds zum Zeitpunkt t bestimmen lässt:

$$(16) s(t, T) = -\frac{1}{T-t} \cdot \ln\left(\frac{V_{risky}(t, T)}{V_{rf}(t, T)}\right)$$

Ersetzt man V_{risky} und V_{rf} durch die entsprechenden Formeln für die Barwertberechnung, berechnet sich der Credit Spread zum Zeitpunkt $t = 0$ anhand folgender Gleichung:

$$(17) s(0, T) = -\frac{1}{T} \cdot \ln\left(\frac{Ke^{-rT} \cdot \Phi(d_2) + V_0 \cdot \Phi(-d_1)}{Ke^{-rT}}\right) = -\frac{1}{T} \cdot \ln\left(\Phi(d_2) + \frac{1}{L} \cdot \Phi(-d_1)\right)$$

Unter der Annahme eines vollkommenen Marktes entspricht der Credit Spread des Zerobonds zum Zeitpunkt $t = 0$ dem „fairen“ Spread eines Credit Default Swap-Kontrakts auf den Zerobond mit identischer Laufzeit.⁴⁰

Nach Formel (17) kann der Barwert des ausfallrisikobehafteten Zerobonds, welcher die einzige Fremdkapitalkomponente nach dem klassischen optionstheoretischen Ansatz darstellt, alternativ zu Gleichung (10) über

$$(18) B_0 = Ke^{-(r+s)T}$$

bestimmt werden.

Die nachfolgende Abbildung veranschaulicht die Strukturkurve der Credit Spreads zum Zeitpunkt $t = 0$ in Abhängigkeit von der (Rest-)Laufzeit des Fremdkapitals T . Die Graphik zeigt, dass die Credit Spreads mit zunehmender Volatilität des Firmenwerts deutlich zunehmen. Da mit zunehmender Volatilität des Firmenwerts auch das Risiko, dass zur Fälligkeit des Fremdkapitals der Firmenwert kleiner ist als das Nominal des Fremdkapitals und somit ein Ausfallereignis vorliegt, zunimmt, ist dies intuitiv nachvollziehbar. Gleichzeitig fällt auf, dass die Credit Spreads bei zunehmender Laufzeit des Fremdkapitals (ab $T > 5$, wenn $\sigma = 15\%$; ab $T > 4$, wenn $\sigma = 20\%$ bzw. ab $T > 3$, wenn $\sigma = 25\%$) abnehmen. Auch, wenn dieser Trend bei einer höheren Volatilität stärker ausfällt, lässt sich die Tendenz unabhängig vom Niveau der Volatilität beobachten. Diese Entwicklung erscheint vor dem Hintergrund empirisch beobachtbarer steigender Ausfallwahrscheinlichkeiten aufgrund höherer Unsicherheit über die Bonitätsentwicklung des Schuldners bei längeren Kreditlaufzeiten unrealistisch.⁴¹

⁴⁰ Vgl. Ericsson, Jan et al.: Can Structural Models Price Default Risk? Evidence from Bond and Derivative Markets. Montreal, Kanada und Stockholm, Schweden: McGill University und Stockholm School of Economics, 2006. S. 10

⁴¹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 12

Darüber hinaus verdeutlicht die nachfolgende Grafik, dass der Credit Spread für kurze (Rest-) Laufzeiten des Fremdkapitals unabhängig von der Volatilität gegen „null“ geht. Dies impliziert, dass bei kurzen Laufzeiten keinerlei Kreditrisiko besteht, was inhaltlich bedeutet, dass keine Unsicherheit über den Eintritt eines Ausfallereignisses besteht. Vielmehr ist der Eintritt eines Ausfallereignisses nach dem klassischen optionstheoretischen Ansatz aufgrund des Diffusionsprozesses des Firmenwerts vorhersehbar.⁴² Ebenso wie die Verringerung von Credit Spread bei längeren Laufzeiten, steht dies im Widerspruch zu den Ergebnissen empirischer Untersuchungen, welche durchaus signifikante Credit Spreads bei kurzen Laufzeiten beobachten.⁴³ Auf diese Thematik wird im Rahmen der kritischen Würdigung in Abschnitt 3.1.4 ausführlich eingegangen.

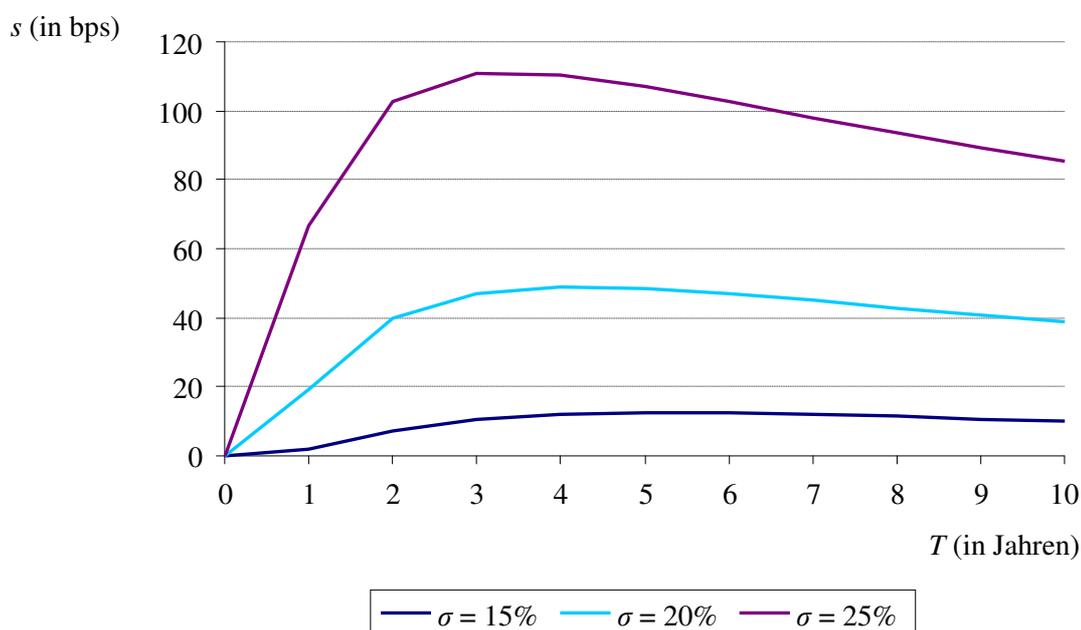


Abb. 4: Strukturkurve der Credit Spreads in Abhängigkeit von der Laufzeit des Fremdkapitals T

Implizite Recovery-Rate. Bei Eintritt eines Ausfallereignisses kommt es meistens nicht zu einem kompletten Verlust des investierten Kapitals. Der prozentuale Anteil des Nominals, welcher bei Eintritt eines Ausfallereignisses an die Investoren zurückfließt, soll im Rahmen dieser Arbeit als „Recovery-Rate“ bezeichnet werden. Ebenso wird in dieser Arbeit grundsätzlich davon ausgegangen, dass die Zahlung der Recovery immer zum Zeitpunkt des Eintritts eines Ausfallereignisses erfolgt. In der Literatur finden sich berechtigterweise auch

⁴² Vgl. Läger, Volker: Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002.

⁴³ Vgl. Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2282 sowie Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 40f.

andere Definitionen hinsichtlich der Höhe und des Zeitpunktes der Recovery-Zahlung. Da eine Unterscheidung für diese Arbeit jedoch nicht Ziel führend ist, wird im Folgenden – sofern nicht explizit etwas anderes angegeben wird – die beschriebene Definition angewendet. Im klassischen optionstheoretischen Ansatz ist die Recovery-Rate implizit enthalten: kommt es nicht zum Eintritt eines Ausfallereignisses, erhalten die Fremdkapitalgeber zum Zeitpunkt T das Nominal des Zerobonds K zurück; kommt es dagegen zum Ausfall, erhalten die Investoren lediglich die Recovery-Rate Rec multipliziert mit dem Nominal des Zerobonds K . Letzterer Fall tritt mit der Ausfallwahrscheinlichkeit p_T ein. Entsprechend erfolgt der erste Fall mit der Überlebenswahrscheinlichkeit $1 - p_T$. Für den Barwert des ausfallgefährdeten Zerobond gilt also:

$$(19) B_0 = (K(1 - p_T) + K \cdot Rec \cdot p_T) e^{-rT}$$

Daraus folgt für die Recovery-Rate:

$$(20) Rec = \frac{B_0 e^{rT} - K \cdot (1 - p_T)}{K \cdot p_T}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (18) in (20) erhält man:

$$(21) Rec = \frac{e^{-sT} + p_T - 1}{p_T}.$$

Beispiel

Der Investor A überlegt einen Anteil an der Neuemission eines Zerobonds des Unternehmens B zu zeichnen. Unternehmen B wird von einer renommierten Rating-Agentur mit „BBB“ geratet. Der Zerobond soll nach fünf Jahren zum Nominal von 70 Geldeinheiten zurückgezahlt werden und wird zu einem Kurs von 54 Geldeinheiten angeboten. Um festzustellen, ob der Emissionskurs S des Zerobonds angemessen ist, soll der „faire“ Wert des Zerobonds anhand des klassischen optionstheoretischen Ansatzes nach Merton kalkuliert werden. Hierzu wird aus Vereinfachungsgründen eine flache Zinsstrukturkurve mit einem Zinssatz $r = 5\%$ unterstellt. Der Firmenwert des Unternehmens zum Zeitpunkt $t = 0$ wird nach dem Discounted Cash-Flow-Modell auf 100 Geldeinheiten und die Volatilität des Firmenwerts auf 20% geschätzt.

Unter der Annahme, dass der Anleiheemittent nicht ausfallgefährdet ist, würde der Barwert des Zerobonds 54,5161 Geldeinheiten ($= Ke^{-rT}$) betragen. Um den Barwert des risikobehafteten Zerobonds festzustellen, muss der Barwert des risikofreien Zerobonds um den Barwert der europäischen Put-Option, also dem Barwert des erwarteten Ausfallverlusts, vermindert werden. Gemäß der Bewertungsformel für europäische Optionen nach Black und Scholes beträgt der Barwert der europäischen Put-Option 1,3083 Geldeinheiten, so dass der

„faire“ Barwert des Zerobonds nach dem Merton-Modell 53,2078 Geldeinheiten beträgt.⁴⁴ Entsprechend beträgt der Barwert des Eigenkapitals bzw. der Barwert der Call-Option gemäß Formel (11) 46,7922 Geldeinheiten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt T kann anhand von Gleichung (12) mit 12,8616% beziffert werden. Da der Emissionskurs oberhalb des „fairen“ Barwerts des Zerobonds liegt, würde der Investor beim Kauf des Zerobonds 0,7922 Geldeinheiten mehr bezahlen als der Zerobond nach dem Merton-Modell und den damit verbundenen Annahmen wert ist. Dementsprechend ist das zugrunde liegende Geschäft nicht „fair“, weshalb Investor A kein Interesse an dem Kauf des angebotenen Zerobonds hat. Stattdessen möchte dieser wissen, wie hoch der „faire“ Spread eines genauso ausgestatteten Zerobonds nach dem Merton-Modell wäre. Zur Kalkulation dessen bedient dieser sich der oben angegebenen Formel (17) und erhält einen „fairen“ Spread von rd. 48,5805 bps. Demgegenüber liegt der implizite Spread des Emissionskurses bei lediglich rd. 19,0224 bps.⁴⁵ Geht man davon aus, dass der Emissionskurs marktkonform ist, so würde der klassische optionstheoretische Ansatz das Risiko dieses Zerobonds überschätzen. Nachfolgende Tabelle soll die Ergebnisse des Beispiels noch einmal zusammenfassen:

Ausgangsdaten		Modellergebnisse	
V_0	100 GE	p_T	12,8616%
K	70 GE	E_0	46,7922 GE
T	5 Jahre	B_0	53,2078 GE
r	5,00%	s_0	48,5805 bps
S	54 GE	Rec	81,3416%
σ	20%		
Differenz ggü. Emissionspreis			
$B_0 - S$	-0,7922 GE	$s_0 - s_{implizit}$	29,5581 bps

Tab. 4: Beispiel zum klassischen optionstheoretischen Ansatz⁴⁶

3.1.2 First-Passage Ansatz

Ein wesentlicher Kritikpunkt an dem klassischen optionstheoretischen Ansatz stellt die Einschränkung dar, dass ein Ausfallereignis nur zur Fälligkeit des Fremdkapitals erfolgen kann. Dies gilt auch, wenn der Firmenwert bereits während der Laufzeit gegen „null“ tendiert.

⁴⁴ Vgl. Formel (9)

⁴⁵ Der implizite Spread kann über die Umformung von Formel (18) errechnet werden. Hierfür gilt:

$$s_{implizit} = \frac{-\ln\left(\frac{B_0}{K}\right)}{T} - r = 19,0224 \text{ bps}, \text{ wobei } B_0 \text{ dem Emissionskurs } S \text{ entspricht}$$

⁴⁶ Eigene Berechnungen

Da dies für die Fremdkapitalgeber unvorteilhaft wäre, vereinbaren diese in der Realität häufig sog. „Safety Covenants“, welche ihnen das Recht einräumen das Unternehmen zu übernehmen oder eine Restrukturierung zu erzwingen, sofern der Firmenwert unter einen bestimmten Wert, der sog. Ausfallschwelle oder Default Barrier DB , sinkt.⁴⁷ Diese Ausfallschwelle wurde erstmals 1976 durch Black und Cox eingeführt, welche einen exponentiellen Verlauf dieser für angemessen halten.⁴⁸ Je nach Definition kann die Ausfallschwelle aber auch konstant sein, im Zeitverlauf deterministisch schwanken oder einem eigenständigen stochastischen Modellierungsprozess unterliegen.⁴⁹ Sobald der Firmenwert die Ausfallschranke zum ersten Mal unterschreitet, tritt das Ausfallereignis ein. Aufgrund dessen bezeichnet man Modelle mit einer derartigen Definition des Ausfallereignisses auch als First-Passage Modelle oder – nach deren Urhebern – als Black/Cox-Modelle. Formal gilt für den Ausfallzeitpunkt τ :

$$(22) \quad \tau = \inf\{t > 0 : V_t < DB\}$$

Ausfallwahrscheinlichkeit. Basierend auf der in Gleichung (22) getroffenen Definition eines Ausfallereignisses, ergibt sich – aufgrund der dem Firmenwert zugrundeliegenden geometrisch Brownschen Bewegung – für die Ausfallwahrscheinlichkeit im Black-Scholes-Modell:

$$(23) \quad p_T = \mathbb{P}[M_T \leq DB] = \mathbb{P}\left[\min_{s \leq T}(ms + \sigma W_s) \leq \ln \frac{DB}{V_0}\right],$$

wobei: $M_t = \min_{s \leq t} V_s = \min_{s \leq t} (V_0 e^{ms + \sigma W_s})$ das historische Tief des Firmenwerts angibt.⁵⁰

Unter der Annahme, dass DB eine deterministische Funktion der Zeit ist, erhält man über die gemeinsame Verteilungsfunktion von W_t und M_T für die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$(24) \quad p_{surv} = \mathbb{P}\left[\min_{s \leq T}(ms + \sigma W_s) \geq \ln \frac{DB}{V_0}\right] = \Phi\left(\frac{-\ln \frac{DB}{V_0} + mT}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{DB}{V_0}\right)^{\frac{2m}{\sigma^2}} \cdot \Phi\left(\frac{\ln \frac{DB}{V_0} + mT}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

und somit über $p_T = 1 - p_{surv}$ für die Ausfallwahrscheinlichkeit:

⁴⁷ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 7

⁴⁸ Vgl. Black, Fischer et al.: Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions, in: Journal of Finance Vol. 31, 1976. S 355

⁴⁹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Berlin: Humboldt-Universität, 2002. S. 8

⁵⁰ s. auch Formel (12)

$$(25) \quad p_T = \Phi \left(\frac{\ln \frac{DB}{V_0} - mT}{\sigma \sqrt{T}} \right) + \left(\frac{DB}{V_0} \right)^{\frac{2m}{\sigma^2}} \cdot \Phi \left(\frac{\ln \frac{DB}{V_0} + mT}{\sigma \sqrt{T}} \right).^{51}$$

Eintritt von Ausfallereignissen. Theoretisch lassen sich für die Höhe der Ausfallschranke im Verhältnis zum Nominal des Fremdkapitals zwei unterschiedliche Fälle definieren: zum Einen kann die Ausfallschranke oberhalb oder identisch zum Nominal des Fremdkapitals liegen ($K \leq DB$) und zum Anderen unterhalb des Nominals ($K > DB$). Kommt es im ersten Fall während der gesamten Laufzeit zu keiner Unterschreitung der Ausfallschranke durch den Firmenwert, erhalten die Fremdkapitalgeber das Nominal $K < V_0$ und die Eigenkapitalgeber erhalten den darüber hinausgehenden Wert $V_T - K$ (kein Ausfall). Passiert der Firmenwert allerdings während der Laufzeit die Ausfallschranke, übernehmen die Fremdkapitalgeber die Firma und erhalten DB während die Eigenkapitalgeber leer ausgehen (Ausfall). Es ist hierbei zu beachten, dass die Fremdkapitalgeber aufgrund dessen, dass die Ausfallschranke oberhalb von K definiert ist ($K \leq DB$), keinerlei Ausfallrisiko tragen: unabhängig davon, ob die Firma ausfällt oder nicht, erhalten diese immer das Nominal K zurück. Dieser – für die Eigenkapitalgeber inakzeptable und daher zugleich unrealistische – Fall wird vermieden, wenn die Ausfallschranke unterhalb des Nominals des Fremdkapitals liegt ($K > DB$). Auf diese Weise tragen die Fremdkapitalgeber einerseits zwar einen Teil des Ausfallrisikos, verfügen andererseits als Ultima Ratio über die Möglichkeit die Firma bei einer schlechten Entwicklung frühzeitig zu übernehmen und somit über eine zusätzliche Sicherheit. Verbleibt der Firmenwert während der Laufzeit oberhalb von DB und ist dieser auch am Ende der Laufzeit größer als K , so fällt das Unternehmen nicht aus. Die Fremdkapitalgeber erhalten entsprechend K und die Eigenkapitalgeber $V_T - K$ (kein Ausfall). Fällt der Firmenwert allerdings während der Laufzeit unter DB , so übernehmen die Fremdkapitalgeber das Unternehmen zu diesem Zeitpunkt und erhalten DB , wobei DB definitionsgemäß allerdings unterhalb von K liegt (Ausfall). Neben den beiden angesprochenen Möglichkeiten im Fall $K > DB$ ist es ebenfalls möglich, dass der Firmenwert zwar während der Laufzeit des Fremdkapitals oberhalb der Ausfallschranke liegt, jedoch zur Fälligkeit des Fremdkapitals T unterhalb von K . In diesem Fall würde das Unternehmen gemäß der in Gleichung (22) getroffenen Definition nicht ausfallen. Dies entspricht allerdings nicht dem ökonomisch korrekten Sachverhalt, da das Unternehmen aufgrund von $V_T < K$ nicht in der Lage ist das fällige Fremdkapital vollständig zurückzuzahlen und somit de facto ausfällt.⁵² Bevor auf die soeben beschriebene Problematik näher eingegangen wird, soll diese durch nachfolgende Abbildung graphisch veranschaulicht werden.

⁵¹ Für eine detaillierte Herleitung der Formeln (24) und (25) siehe insbesondere Corollary B.4.2 – B.4.4. (S. 581) in: Musiela, Marek et al.: *Martingale Methods in Financial Modelling*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005. S. 579ff. sowie Giesecke, Kay: *Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction*. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 8

⁵² Vgl. Giesecke, Kay: *Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction*. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 8f.

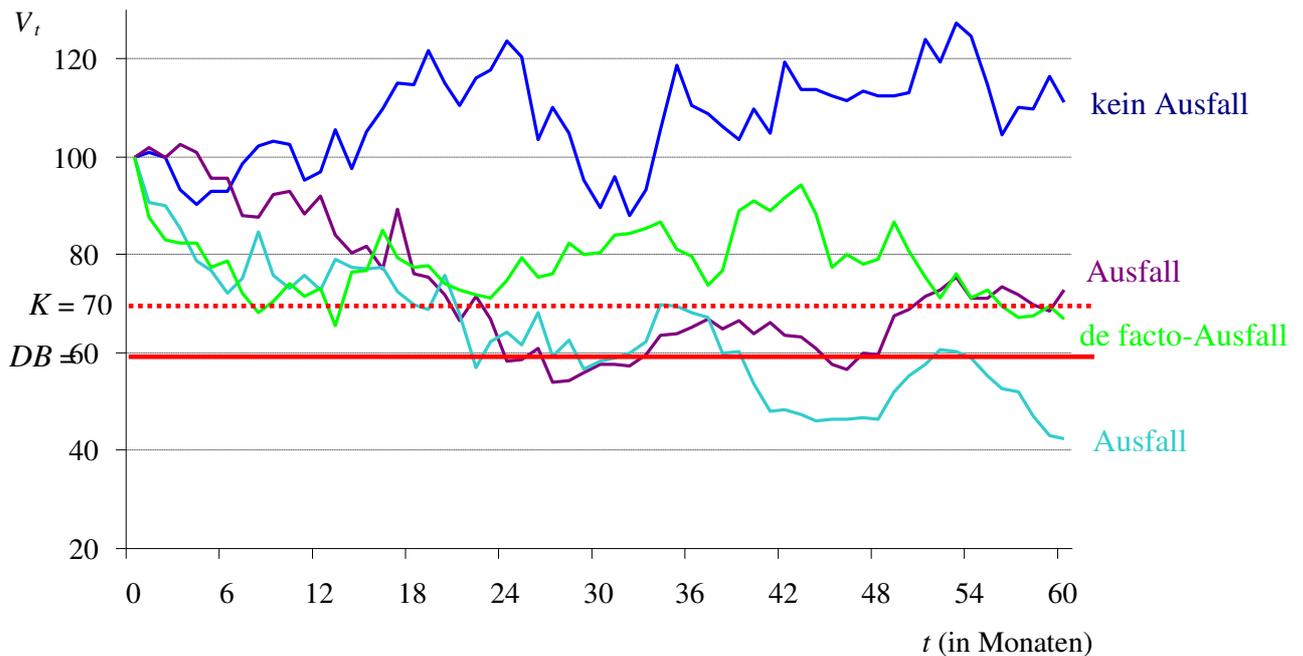


Abb. 5: Ausfallereignisse nach dem First-Passage Ansatz im Fall $K > DB$ ⁵³

Obige Abbildung zeigt den Eintritt von Ausfallereignissen nach dem First-Passage Ansatz, wobei die Ausfallschranke DB konstant mit 60 und somit kleiner als das Nominal des Fremdkapitals K mit 70 definiert ist. Nach dem First-Passage Ansatz führen nunmehr zwei der drei Firmenwertentwicklungen aus Abbildung 2 zum Eintritt eines Ausfallereignisses. Neben dem Unternehmen, dessen Entwicklung der hellblauen Linie zugrunde liegt und welches auch nach dem klassischen optionstheoretischen Ansatz ausfällt (wenn auch zeitlich später), tritt das Ausfallereignis auch bei dem Unternehmen, dessen Entwicklung in lila dargestellt ist, ein. So führt das erstmalige Unterschreiten der Ausfallschranke durch die hellblaue Linie nach 22 Monaten und durch die lila-farbige Linie nach 24 Monaten zum Eintritt des Ausfallereignisses des jeweiligen Unternehmens. Darüber hinaus führt auch die in grün dargestellte Firmenentwicklung zu einem Ausfall. Zwar würde die letztgenannte Firmenwertentwicklung nach der in Gleichung (22) getroffenen Definition eines Ausfallereignisses im First-Passage Ansatz nicht ausfallen, da der Firmenwert V_T zur Fälligkeit des Fremdkapitals unterhalb von K liegt, fällt das Unternehmen jedoch de facto aus. Um de facto-Ausfälle im First-Passage Ansatz zu integrieren, gibt es zwei Möglichkeiten: entweder kann die Definition des Ausfallereignisses breiter gefasst oder eine zeitabhängige Ausfallschranke eingeführt werden. Beide Möglichkeiten sollen im Folgenden näher erläutert werden.

⁵³ Eigene Darstellung in Anlehnung an: Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 9f.

3.1.2.1 Modifizierung der Definition des Ausfallereignisses

Um die angesprochene Problematik zu beheben, muss die neue Definition des Ausfallereignisses sowohl die Definition des Ausfallereignisses nach dem First-Passage Ansatz als auch nach dem klassischen optionstheoretischen Ansatz umfassen. Dies ist der Fall, wenn man festlegt, dass ein Ausfallereignis eintritt, sobald der Firmenwert zu irgendeinem Zeitpunkt während der Laufzeit unter die Ausfallschranke fällt *oder* dieser zur Fälligkeit des Fremdkapitals unterhalb von K liegt. Formal ist der Ausfallzeitpunkt also durch

(26) $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$ mit $\tau_1 =$ Ausfallzeitpunkt des klassischen optionstheoretischen Ansatzes und $\tau_2 =$ Ausfallzeitpunkt des First-Passage Ansatzes definiert.

Modifizierte Ausfallwahrscheinlichkeit. Aufgrund der modifizierten Definition des Eintritts eines Ausfallereignisses muss entsprechend ebenfalls die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit angepasst werden. Die modifizierte Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
 p_T &= 1 - \mathbb{P}[\min(\tau_1, \tau_2) > T] = 1 - \mathbb{P}[\tau_1 > T, \tau_2 > T] = 1 - \mathbb{P}[V_T \geq K, M_T \geq DB] \\
 (27) \quad &= 1 - \mathbb{P}\left[\min_{t \leq T}(mt + \sigma W_t) > \ln \frac{DB}{V_0}, mT + \sigma W_T > \ln \frac{K}{V_0}\right] \\
 &= \Phi\left(\frac{\ln \frac{K}{V_0} - mT}{\sigma \sqrt{T}}\right) + \left(\frac{DB}{V_0}\right)^{\frac{2m}{\sigma^2}} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{DB^2}{K \cdot V_0}\right) + mT}{\sigma \sqrt{T}}\right)
 \end{aligned}$$

Wie anhand von Abbildung 5 deutlich wird, muss – bei identischen Parametern – die Ausfallwahrscheinlichkeit beim klassischen optionstheoretischen Ansatz immer niedriger sein als die Ausfallwahrscheinlichkeit des modifizierten First-Passage Ansatzes. Dies ist der Fall, da die Definition des Ausfallereignis beim modifizierten First-Passage Ansatz einen Ausfall während der Laufzeit ermöglicht und zusätzlich die Definition des klassischen optionstheoretischen Ansatzes umfasst. Anders ausgedrückt, entspricht der klassische optionstheoretische Ansatz dem modifizierten First-Passage Ansatz mit einer Ausfallschranke in Höhe von „null“. Ist die Ausfallschranke jedoch größer als „null“, so führen zusätzliche Pfade der Firmenwertentwicklung zum Eintritt eines Ausfallereignisses als ohne Ausfallschranke, woraus eine höhere Ausfallwahrscheinlichkeit folgt.

Pricing und Bewertung der Kapitalbestandteile. Um den Barwert des Eigenkapitals bestimmen zu können, muss zuerst das Auszahlungsprofil für die Eigenkapitalgeber zum Zeitpunkt T ermittelt werden. Für den Fall, dass $M_T > DB$ gilt, erhalten die Eigenkapitalgeber das Maximum aus $V_T - K$ und „null“. Sollte V_T kleiner sein als K , aber größer als DB , so folgt daraus, dass die Auszahlung für die Eigenkapitalgeber zum Zeitpunkt T „null“ beträgt.⁵⁴

⁵⁴ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 11

$$(28) E_T = \max(V_T - K, 0) \cdot 1_{\{M_T > DB\}}$$

Die Position der Eigenkapitalgeber entspricht damit einer europäischen down-and-out Call-Option auf den Firmenwert V mit Strike K , Barrier $DB < K$ und Fälligkeit T . Entsprechend kann der Barwert des Eigenkapitals anhand des Black-Scholes-Modells für europäische Barrier-Optionen erfolgen:⁵⁵

$$(29) E_0 = C(\sigma, T, K, r, V_0) - V_0 \cdot \left(\frac{DB}{V_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} \cdot \Phi(h_1) + Ke^{-rT} \cdot \left(\frac{DB}{V_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \cdot \Phi(h_2),$$

wobei $C(\sigma, T, K, r, V_0)$ dem Preis für eine Plain-Vanilla Call-Option und

$$h_{1,2} = \frac{\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \ln\frac{DB^2}{K \cdot V_0}}{\sigma\sqrt{T}} \text{ entspricht.}$$

Hierbei ist zum Einen anzumerken, dass der Barwert des Eigenkapitals maximal den Wert einer Plain-Vanilla Call-Option und somit maximal den Wert aus dem klassischen optionstheoretischen Ansatz annehmen kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Ausfallschranke „null“ ist. Entsprechend gilt, dass der Barwert des Eigenkapitals nach dem First-Passage Ansatz gegen den Barwert des Eigenkapitals nach dem klassischen optionstheoretischen Ansatz strebt, wenn der Wert der Ausfallschranke gegen „null“ tendiert. Zum Anderen ist der Wert der Barrier-Option im Gegensatz zum Wert der Plain-Vanilla Option nicht monoton bezüglich der Volatilität des Firmenwerts σ . Dementsprechend profitieren die Eigenkapitalgeber nicht zwangsläufig von einem Anstieg der Volatilität des Firmenwerts.

Das Auszahlungsprofil der Fremdkapitalgeber zum Zeitpunkt T muss im Vergleich zum klassischen optionstheoretischen Ansatz um eine Long-Position in einer down-and-in Call-Option ergänzt werden:

$$(30) B_T = K - \max(K - V_T, 0) + \max(V_T - K, 0) \cdot 1_{\{M_T < DB\}}$$

Dementsprechend ergibt sich das Auszahlungsprofil der Fremdkapitalgeber zum Zeitpunkt T aus einem Portfolio bestehend aus einem risikofreien Zerobond mit Nominal K und Fälligkeit in T , einer Short-Position in einer europäischen Put-Option auf den Firmenwert mit Strike K und Fälligkeit in T sowie einer Long-Position in einer europäischen down-and-in Call-Option auf den Firmenwert mit Strike K und Fälligkeit in T . Daraus folgt, dass der Wert des Fremdkapitals nach dem First-Passage Ansatz mindestens dem Wert im klassischen optionstheoretischen Ansatz entsprechen muss, da die Fremdkapitalgeber im First-Passage Ansatz eine zusätzliche Sicherheit erhalten, welche durch die down-and-in Call-Option

⁵⁵ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 11

beschrieben und im Fall des Eintritts eines Ausfallevents vor der Fälligkeit des Fremdkapitals „aktiviert“ (sog. „knock-in Event“) wird. Für den Barwert des Fremdkapitals gilt entsprechend:⁵⁶

$$\begin{aligned}
 B_0 &= Ke^{-rT} - P(\sigma, T, K, r, V_0) + C_{d\&i}(\sigma, T, K, r, V_0) \\
 (31) \quad &= V_0 - C(\sigma, T, K, r, V_0) + V_0 \cdot \left(\frac{DB}{V_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} \cdot \Phi(h_1) - Ke^{-rT} \cdot \left(\frac{DB}{V_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \cdot \Phi(h_2) = V_0 - E_0
 \end{aligned}$$

3.1.2.2 Einführung einer zeitabhängigen Ausfallschranke

Wie bereits beschrieben, liegt die zweite Möglichkeit, um die de facto-Ausfälle in den First-Passage Ansatz zu integrieren, darin, eine zeitabhängige Ausfallschranke $DB(t) \leq K$ für alle $t \leq T$ einzuführen. So kann zum Beispiel die bereits von Black und Cox 1976 eingeführte Exponentialfunktion

$$(32) \quad DB(t) = Ke^{-k(T-t)}$$

mit der Konstanten $k > 0$ als zeitabhängige Ausfallschranke dienen.⁵⁷ Diese lässt sich auch als das, auf den Zeitpunkt t abdiskontierte, Nominal des Fremdkapitals mit k als kontinuierlichen Zinssatz interpretieren. Der Ausfallzeitpunkt ist der erste Zeitpunkt an dem der Firmenwert unter die Ausfallschranke $DB(t)$ fällt:

$$(33) \quad \tau = \inf(t > 0 : V_t < DB(t))$$

Hierbei ist anzumerken, dass die Problematik, dass de facto-Ausfälle durch den First-Passage Ansatz nicht berücksichtigt werden, dadurch behoben ist, dass die Ausfallschranke im Zeitverlauf gegen K konvergiert und somit im Zeitpunkt T immer K und DB identisch sind. Hierzu muss allerdings die Annahme $k =$ kontinuierlicher Zinssatz r getroffen werden.

Ausfallwahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Ausfallschranke. Durch Einsetzen der Firmenwertentwicklung aus Gleichung (2) mit drift $m - k$ für V_t und der Exponentialfunktion aus Gleichung (32) für DB in Formel (33) erhält man die Ausfallwahrscheinlichkeit des First-Passage Ansatzes unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Ausfallschranke:

⁵⁶ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 12

⁵⁷ Vgl. Black, Fischer et al.: Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions, in: Journal of Finance Vol. 31, 1976. S 355

$$\begin{aligned}
 p_T &= \mathbb{P} \left[\min_{t \leq T} ((m-k)t + \sigma W_t) < \ln \frac{K}{V_0} - kT \right] \\
 (34) \quad &= \Phi \left(\frac{\ln \frac{K}{V_0} - mT}{\sigma \sqrt{T}} \right) + \left(\frac{K}{V_0} e^{-kT} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(m-k)} \cdot \Phi \left(\frac{\ln \frac{K}{V_0} + (m-2k)T}{\sigma \sqrt{T}} \right)
 \end{aligned}$$

Formel (34) entspricht damit exakt Formel (27) wobei DB durch die Exponentialfunktion aus Gleichung (32) ersetzt wird.

Pricing und Bewertung der Kapitalbestandteile. Der jeweilige Barwert der Kapitalbestandteile ergibt sich analog zu den Gleichungen (28) und (29) bzw. (30) und (31), wobei jedoch M_t durch $\min_{s \leq t} (V_0 e^{(m-k)s + \sigma W_s})$ definiert ist und die Ausfallschranke DB der Definition aus Gleichung (32) folgt.

Beispiel

Im Folgenden soll das bereits im Rahmen des klassischen optionstheoretischen Ansatzes eingeführte Beispiel anhand des First-Passage-Ansatzes analysiert werden. Aufgrund der sehr ähnlichen Konstruktion der beiden, in Abschnitt 3.1.2.1 und 3.1.2.2 beschriebenen, Varianten des First-Passage-Ansatzes, soll hierbei lediglich der First-Passage-Ansatz mit zeitabhängiger Ausfallschranke betrachtet werden. Als zeitabhängige Ausfallschranke soll die Definition nach Black und Cox gemäß Formel (32) mit $k = r$ verwendet werden. Unter Anwendung der entsprechenden Gleichungen ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

	gemäß Formel	First-Passage-Ansatz	Merton-Modell	Differenz beider Ansätze
p_T	(34)	23,3234%	12,8616%	10,4618%
E_0	(29)	46,5051 GE	46,7922 GE	-0,2871 GE
B_0	(31)	53,4949 GE	53,2078 GE	0,2871 GE
s_0	(16)	37,8186 bps	48,5805 bps	-10,7619 bps
Rec	(20)	91,9687%	81,3416%	10,6271%
Differenz ggü. Emissionspreis	$B_0 - S$	-0,5051 GE	-0,7922 GE	0,2871 GE
	$s_0 - Simplizit$	18,7962 bps	29,5581 bps	-10,7619 bps

Tab. 5: Vergleich des First-Passage-Ansatzes mit zeitabhängiger Ausfallschranke mit dem Merton-Modell anhand einer Beispielrechnung⁵⁸

⁵⁸ Eigene Berechnungen

Obige Tabelle stellt die Ergebnisse des First-Passage-Ansatzes mit der zeitabhängigen Ausfallschranke nach Black und Cox den Ergebnissen des klassischen optionstheoretischen Ansatzes gegenüber. Darüber hinaus erfasst diese die Differenz des jeweiligen Ansatzes gegenüber dem Emissionspreis des Zerobonds. Der Vergleich der beiden Ansätze zeigt, dass durch die Einführung einer zeitabhängigen Ausfallschranke einerseits die Ausfallwahrscheinlichkeit deutlich ansteigt, während sich andererseits sowohl der Barwert des Eigenkapitals verringert bzw. der Barwert des Fremdkapitals erhöht als auch der „faire“ Credit Spread deutlich geringer ausfällt. Auf den ersten Blick mag es paradox wirken, dass sich der Credit Spread – trotz gestiegener Ausfallwahrscheinlichkeit und somit höherem Risiko – deutlich verringert. Hierin zeigen sich jedoch die Besonderheiten des First-Passage-Ansatzes: da der Eintritt eines Ausfallereignisses nicht mehr ausschließlich am Ende der Laufzeit des Fremdkapitals erfolgen kann, sondern ein Ausfall zusätzlich auch während der Laufzeit möglich ist, muss die Ausfallwahrscheinlichkeit beim First-Passage-Ansatz zwangsläufig größer sein als beim Merton-Modell.⁵⁹ Während dies intuitiv nachvollziehbar ist, mag es verwundern, dass der Credit Spread gleichzeitig fällt. Dies lässt sich jedoch dadurch erklären, dass die Ausfallschranke eine zusätzliche Sicherheit für die Fremdkapitalgeber darstellt. Diese erhalten die Möglichkeit bei Eintritt eines Ausfallereignisses die Firma zu übernehmen und zu liquidieren. Der Liquidationserlös entspricht – zumindest unter Vernachlässigung von Steuern, Liquidationskosten und zeitlichen Realisierungsverzögerungen – exakt der Ausfallschranke. Da der Liquidationserlös für die Restlaufzeit von τ bis T risikofrei angelegt werden kann, wird der Sinngehalt der von Black und Cox gewählten Definition der zeitabhängigen Ausfallschranke deutlich. Die Fremdkapitalgeber würden durch die risikofreie Anlage des Liquidationserlöses zum Ende der Laufzeit immer das komplette Nominal K zurück erhalten. Theoretisch wäre die Investition für die Fremdkapitalgeber in diesem Fall vollkommen risikofrei und der Barwert des Zerobonds müsste entsprechend dem mit dem risikofreien Zinssatz diskontierten Nominal entsprechen. Dies ist jedoch nicht der Fall, da der Firmenwert aufgrund seiner Volatilität in jedem infinitesimal kurzen Zeitintervall Δt von einem Wert oberhalb der Ausfallschranke auf einen Wert unterhalb der Ausfallschranke fallen kann. Entsprechend erhalten die Fremdkapitalgeber einen Liquidationserlös, welcher geringer ist als die definierte Ausfallschranke. Der hohe Prozentsatz der Recovery macht jedoch deutlich, dass die Ausfallschranke – zumindest bei der zugrunde gelegten Volatilität des Firmenwerts von 20% – eine relativ gute Sicherheit für die Fremdkapitalgeber bietet. Wie bereits in Abschnitt 3.1.2.1 erläutert, wird der Wert dieser Sicherheit formal über die Bewertung einer europäischen down-and-in Call-Option berechnet. Dementsprechend muss auch der Barwert des Zerobonds im First-Passage-Ansatz höher sein bzw. näher am Barwert eines risikofreien Zerobonds mit gleichem Nominal liegen als beim klassischen optionstheoretischen Ansatz. Eine Erhöhung der Volatilität und somit des Kreditrisikos macht den wesentlichen Unterschied zwischen dem Merton-Modell und dem First-Passage-Ansatz deutlich: einerseits haben beide Ansätze gemeinsam, dass der Barwert des Fremdkapitals umso niedriger ausfällt,

⁵⁹ s. hierzu auch Abschnitt 3.1.2 sowie 3.1.2.1

desto höher die Volatilität ist, andererseits führt die Erhöhung der Volatilität beim Merton-Modell zu einer drastischen Reduktion des Barwerts des Fremdkapitals während dieser beim First-Passage-Ansatz im Verhältnis nur geringfügig sinkt. Der Hintergrund liegt in der deutlich höheren Recovery-Rate beim First-Passage-Ansatz aufgrund der oben beschriebenen Sicherheitskomponente.

Darüber hinaus ist festzuhalten, dass der Emissionskurs sowie der implizite Spread des Zerobonds deutlich näher an dem „fairen“ Wert bzw. Spread des Zerobonds nach dem First-Passage-Ansatz mit zeitabhängiger Ausfallschranke als an den entsprechenden Werten nach dem Merton-Modell liegt. Nichtsdestotrotz verbleibt eine nicht unerhebliche Diskrepanz zwischen dem Angebot am Markt und dem Pricing anhand des theoretischen Modells.

3.1.2.3 Erweiterte Modellierung des Fremdkapitals beim klassischen optionstheoretischen Ansatz

Da der klassische optionstheoretische Ansatz nach Merton die restriktive Annahme beinhaltet, dass die einzige Fremdkapitalkomponente des betrachteten Unternehmens ein Zerobond darstellt, ist dieser – im Gegensatz zur Bewertung unter Vernachlässigung des Kreditrisikos – lediglich für die Bewertung von Zerobonds oder Produkten, welche auf diesen beruhen oder eine vergleichbare Cashflow-Struktur aufweisen, geeignet. Unter Vernachlässigung des Kreditrisikos ist es möglich eine komplexere Cashflow-Struktur als bei einem Zerobond, wie die einer Anleihe mit Zinsscheinen (Couponbond), über mehrere Zerobonds zu duplizieren und die Bewertung durch Summation der einzelnen Bestandteile zu berechnen. Dies ist bei der Bewertung von ausfallrisikobehafteten Couponbonds nicht mehr möglich, da die Zahlung aller zukünftigen Cashflows von der Zahlung der vorangegangenen Cashflows abhängig ist, d.h., dass, wenn ein Unternehmen während der Laufzeit des Couponbonds ausfällt, die Zahlungen für den Ausfallzeitpunkt sowie sämtliche nachfolgenden Zahlungen ebenfalls ausfallen. Entsprechend hat bereits Merton in seiner grundlegenden Arbeit die anfangs getroffene Annahme, dass die einzige Fremdkapitalkomponente des betrachteten Unternehmens ein Zerobond darstellt, aufgehoben.⁶⁰ Dementsprechend soll im Folgenden die Modellierung von Anteilen mit Zinsscheinen beim klassischen optionstheoretischen Ansatz beschrieben werden, bevor der nachfolgende Abschnitt auf die Modellierung von Anleihen mit Zinsscheinen beim First-Passage Ansatz eingeht. Hierzu soll bei einem konstanten Zinssatz $r > 0$ ein Couponbond mit Fälligkeit zum Zeitpunkt T , Nominal K sowie einer regelmäßigen, konstanten Couponzahlung c in Prozent des Nominals je Zeiteinheit betrachtet werden. Darüber hinaus soll anfangs davon ausgegangen werden, dass die Eigenkapitalgeber zur Refinanzierung der einzelnen Couponzahlungen $C_t (= cK)$ jeweils neue Aktien begeben. Daneben ist zu beachten, dass die Modifizierung der Fremdkapitalkomponente im Merton-Modell gleichzeitig impliziert, dass der Eintritt eines Ausfallereignisses nicht mehr nur am Ende der Laufzeit erfolgen kann, sondern bereits zu jedem Coupontermin. Der Logik des

⁶⁰ Vgl. Merton, Robert C.: On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, in: Journal of Finance Vol. 29, 1974 . S. 467ff.

Merton-Modells folgend wird ein Ausfallereignis immer genau dann eintreten, wenn der Wert des Eigenkapitals zum Coupontermin geringer ist als die Höhe der Couponzahlung. Dies wird deutlich, wenn man davon ausgeht, dass zusätzlich zu den bereits bestehenden N alten Aktien M neue Aktien zur Refinanzierung der Couponzahlung C_t emittiert werden müssen. Entsprechend gilt:

$$(35) \frac{M}{M+N} \cdot E_t = C_t, \text{ wobei } E_t \text{ den Wert des Eigenkapitals zum Coupontermin } t \text{ abbildet.}^{61}$$

Dies entspricht einer Verwässerung des Eigenkapitalanteils der Altaktionäre zum Coupontermin von E_t auf $(N/(M+N)) \cdot E_t$ und somit einer Reduzierung von deren Eigenkapitalanteil um exakt C_t . Ist der Wert des Eigenkapitalanteils der Altaktionäre, welcher bekanntermaßen im Merton-Modell über eine europäische Call-Option über die Restlaufzeit berechnet werden kann, zum Coupontermin kleiner als die fällige Couponzahlung lohnt sich die Zahlung des Coupons für die Eigenkapitalgeber nicht.⁶² Diese werden daher das Unternehmen ausfallen lassen. Dementsprechend würden die Fremdkapitalgeber in diesem Fall die Firma übernehmen. Dieses Ergebnis gilt im Übrigen auch, wenn die anfangs getroffene Annahme, dass die Couponzahlungen über die Emission neuer Aktien refinanziert wird, aufgeweicht wird: wird die Couponzahlung durch den Verkauf von Vermögenswerten der Firma refinanziert, so schmälert sich der Firmenwert bei gleich bleibenden Verbindlichkeiten, was einer Reduktion des Eigenkapitals in Höhe der Couponzahlung entspricht und somit mit der Emission neuer Aktien gleichgestellt ist. Eine Zahlung der Coupons durch neu eingebrachtes Eigenkapital der alten Eigenkapitalgeber („Zahlung aus eigener Tasche“) ist dagegen nicht sinnvoll, da das neu eingebrachte Eigenkapital den Firmenwert nicht schmälert und somit einerseits zwar sowohl den Fremdkapitalgebern als auch den Eigenkapitalgebern dienlich ist, aber andererseits komplett nur von den Eigenkapitalgebern finanziert wird.⁶³

Pricing und Bewertung der Kapitalbestandteile. Die Bewertung der Kapitalbestandteile erfolgt aufgrund der Möglichkeit eines Ausfalls vor der Fälligkeit des Fremdkapitals T rekursiv. Hierzu wird bei n Couponzahlungen zu den Terminen t_1, \dots, t_n folgendes Prozedere angewandt:

1. Bewertung der Kapitalbestandteile zum Zeitpunkt $t > t_{n-1}$ anhand des klassischen optionstheoretischen Ansatz
2. Zum Zeitpunkt t_{n-1} muss zuerst der Wert \bar{V}_{n-1} bestimmt werden. Der Wert \bar{V}_{n-1} ist der Firmenwert, bei welchem der Wert des Eigenkapitals dem Wert der Couponzahlung zum Zeitpunkt t_{n-1} entspricht. Mit anderen Worten, ist \bar{V}_{n-1} der „kritische Unternehmenswert“, welcher vorhanden sein muss, damit das Eigenkapital

⁶¹ Vgl. Lando, David: Credit Risk Modeling – Theory and Applications. Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 2004. S. 27

⁶² Vgl. Formel (8), wobei sowohl die gewünschte Zeitspanne als auch die Zahlung zukünftiger Coupons zu berücksichtigen ist

⁶³ Vgl. Lando, David: Credit Risk Modeling – Theory and Applications. Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 2004. S. 27ff.

ausreichend im um die Couponzahlung zu gewährleisten, d.h. formal $C_{n-1} - C(t_n - t_{n-1}, \bar{V}_{n-1}, C_n, K, r, \sigma) = 0$

3. Anschließend erfolgt die Bewertung der Kapitalbestandteile zum Zeitpunkt t_{n-1} anhand:

$$\text{a. } E_{n-1} = \begin{cases} C(t_n - t_{n-1}, V_{n-1}, C_n, K, r, \sigma) - C_{n-1} & , \text{wenn } V_{n-1} \geq \bar{V}_{n-1} \\ 0 & , \text{wenn } V_{n-1} < \bar{V}_{n-1} \end{cases}$$

$$\text{b. } B_{n-1} = \begin{cases} C_{n-1} + V_{n-1} - C(t_n - t_{n-1}, V_{n-1}, C_n, K, r, \sigma) & , \text{wenn } V_{n-1} \geq \bar{V}_{n-1} \\ V_{n-1} & , \text{wenn } V_{n-1} < \bar{V}_{n-1} \end{cases}$$

4. Anhand dessen kann der Wert des Eigenkapitals direkt nach der Couponzahlung zum Zeitpunkt t_{n-2} bestimmt werden. Nach Bestimmung des Werts \bar{V}_{n-2} , welcher der Couponzahlung C_{n-2} entsprechen muss, kann anschließend anhand Punkt 3. die Bewertung der Kapitalbestandteile zum Zeitpunkt t_{n-2} berechnet werden. Dieser Vorgang wird bis zum Zeitpunkt „null“ wiederholt.⁶⁴

Beispiel

Da Investor A den Emissionskurs des Zerobonds aufgrund seiner beschriebenen Berechnungen als zu hoch einschätzt sucht er nach einer alternativen Anlagemöglichkeit mit vergleichbarem Risiko. Im Rahmen dessen überlegt er an der Neuemission eines fünfjährigen Couponbonds mit einem Nominal von 70 Geldeinheiten und konstanten, jährlichen Couponzahlungen von 3% des Nominals des Unternehmens C teilzunehmen. Unternehmen C und Unternehmen B sind hinsichtlich ihres Firmenwerts und dessen Volatilität vergleichbar, d.h. weiterhin gilt $V_0 = 100$ und $\sigma = 20\%$. Darüber hinaus geht der Investor A weiterhin von einer flachen Zinsstrukturkurve von $r = 5\%$ aus. Hierzu modelliert er den Firmenwert anhand einer geometrisch Brownschen Bewegung und erhält folgende Tabelle:

⁶⁴ Lando, David: Credit Risk Modeling – Theory and Applications. Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 2004. S. 28

Jahr	Cash-Flows	Firmenwert V_t	Wert des EKs E_t	Wert des FKs B_t	„Kritischer Firmenwert“ \bar{V}_t
0	0,0000	100,0000	46,7922	53,2078	65,8990
1	2,1000	91,7355	34,0104	57,7251	67,2389
2	2,1000	84,4532	24,2426	60,2106	66,0051
3	2,1000	72,6739	11,0944	61,5795	62,7230
4	2,1000	58,8923	0,0000	58,8923	59,0257
5	72,1000	65,8866	0,0000	0,0000	

Tab. 6: Wertentwicklung der Kapitalbestandteile im Beispiel⁶⁵

Die zweite Spalte der Tabelle zeigt die Cash-Flows an die Fremdkapitalgeber, sofern kein Ausfallereignis eintritt. Geht man exemplarisch von der in der dritten Spalte dargestellten Firmenwertentwicklung aus, so zeigt sich, dass diese im vierten Jahr zu einem Ausfallereignis führt, da zu diesem Zeitpunkt der „kritische Firmenwert“ unterschritten wird. Dieser entspricht dem Mindestwert, welchen das Unternehmen haben muss, um den Coupon des gleichen Jahres durch Ausgabe neuer Aktien oder den Verkauf von Vermögenswerten des Unternehmens refinanzieren zu können. Aufgrund des kontinuierlich fallenden Firmenwerts reicht im vierten Jahr der Eigenkapitalanteil nicht mehr aus, um den fälligen Coupon von 2,1 Geldeinheiten auszuzahlen. Da davon ausgegangen wird, dass die Eigenkapitalgeber weder zusätzliches Eigenkapital aus „eigener Tasche“ zuführen noch die Couponzahlung über eine Fremdkapitalaufnahme refinanzieren, übernehmen die Fremdkapitalgeber das Unternehmen und erhalten den restlichen Firmenwert in Höhe von 58,8923 Geldeinheiten. Zusätzlich verdeutlicht das Beispiel, weshalb es für die Eigenkapitalgeber nicht sinnvoll ist zusätzliches Eigenkapital in die Firma einzubringen: obwohl der Firmenwert im fünften Jahr steigen würde, würden die Eigenkapitalgeber leer ausgehen, da der Firmenwert bei Fälligkeit des Fremdkapitals immer noch unterhalb des Rückzahlungsbetrags liegt. Entsprechend würden die Eigenkapitalgeber nur bei einem extremen Anstieg des Firmenwerts auf einen Wert, welcher oberhalb des Rückzahlungsbetrags zuzüglich des zusätzlich eingebrachten Eigenkapitals liegen müsste, profitieren. In dem hier dargestellten Fall sind es aber lediglich die Fremdkapitalgeber, welche von dem zusätzlich eingebrachten Eigenkapital profitieren würden, da diese statt der 58,8923 Geldeinheiten nach fünf Jahren immerhin 65,8866 Geldeinheiten erhalten würden.

⁶⁵ Eigene Berechnungen

3.1.2.4 Erweiterte Modellierung des Fremdkapitals beim First-Passage

Ansatz

Wie bereits im vorherigen Abschnitt angesprochen, soll im Folgenden nicht nur die Modellierung von Anleihen mit Zinsscheinen aufgenommen werden, sondern darüber hinaus diese in den bereits vorgestellten First-Passage Ansatz nach Black und Cox integriert werden. Entsprechend wird in diesem Abschnitt ebenfalls von einem Couponbond mit denselben Spezifikationen wie in Abschnitt 3.1.2.3 ausgegangen. Darüber hinaus wird die Ausfallsschranke als zeitabhängig im Sinne von Black und Cox gemäß Formel (32) definiert. Der Barwert des Couponbonds CB ergibt sich aus der Summation der einzelnen diskontierten und risikogewichteten Bestandteile, d.h. aus dem diskontierten Nominal gewichtet mit der Überlebenswahrscheinlichkeit über die gesamte Laufzeit, der diskontierten Recovery-Zahlung zum Zeitpunkt des Ausfalls gewichtet mit der Ausfallwahrscheinlichkeit über die gesamte Laufzeit sowie den mit der jeweiligen Überlebenswahrscheinlichkeit für die einzelnen Perioden gewichteten und entsprechend diskontierten Coupon-Zahlungen:⁶⁶

$$(36) \quad CB_0 = Ke^{-rT} \cdot p_{\{\tau > T\}}^{surv} + Rec \cdot K \cdot E^Q \left[e^{-r\tau} \cdot 1_{\{\tau \leq T\}} \right] + c \cdot \int_0^T e^{-rs} \cdot p_{\{\tau > s\}}^{surv} ds$$

Wird bei Formel (36) aus Vereinfachungsgründen von einer Rec von „null“ ausgegangen, so entfällt der mittlere Term. Der Barwert des Couponbonds ergibt sich folglich lediglich aus der risikogewichteten Summe eines diskontierten Zerobonds und der diskontierten Coupon-Zahlungen. Analog zu Formel

⁶⁶ Vgl. Bielecki, Tomasz R. et al.: Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2004. S. 50

(25) ergibt sich für die periodenspezifische Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$(37) p_{\{\tau>s\}}^{surv} = \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{V_0}{DB(0)} \right) + \hat{m}s}{\sigma\sqrt{s}} \right) - \left(\frac{DB(0)}{V_0} \right)^{\frac{2\hat{m}}{\sigma^2}} \cdot \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{DB(0)}{V_0} \right) + \hat{m}s}{\sigma\sqrt{s}} \right),$$

$$\text{mit } \hat{m} = r - k - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Durch Umformung des Integrals aus Gleichung (36) erhält man:

$$(38) \int_0^T e^{-rs} p_{\{\tau>s\}}^{surv} ds = \frac{1}{r} \cdot \left(1 - e^{-rT} p_{\{\tau>T\}}^{surv} + \int_0^T e^{-rs} dp_{\{\tau>s\}}^{surv} \right)$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \left(1 - e^{-rT} p_{\{\tau>T\}}^{surv} - \left(\frac{DB(0)}{V_0} \right)^{\frac{\hat{m} + \sqrt{\hat{m}^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}} \cdot \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{DB(0)}{V_0} \right) + \sqrt{\hat{m}^2 + 2\sigma^2 r} \cdot T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left(\frac{DB(0)}{V_0} \right)^{\frac{\hat{m} - \sqrt{\hat{m}^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}} \cdot \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{DB(0)}{V_0} \right) - \sqrt{\hat{m}^2 + 2\sigma^2 r} \cdot T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right) \cdot 67$$

Durch Verknüpfung der Formeln (36) und (38) erhält man den Barwert des Couponbonds:

$$(39) CB_0 = Ke^{-rT} \cdot p_{\{\tau>T\}}^{surv} + c \cdot (38)$$

Ist die Recovery dagegen größer als „null“, so muss Formel (39) um den mittleren Term von Gleichung (36) ergänzt werden. Aus Vereinfachungszwecken soll jedoch die Recovery-Zahlung nicht direkt zum Ausfallzeitpunkt gezahlt werden, sondern erst bei Fälligkeit des Fremdkapitals. Dies ermöglicht die Diskontierung mit T anstelle von des unbekanntem τ . Für den Barwert des Couponbonds gilt entsprechend:

$$(40) CB_0 = Ke^{-rT} \cdot p_{\{\tau>T\}}^{surv} + Rec \cdot Ke^{-rT} \cdot p_T + c \cdot (38)$$

Beispiel

In einem nächsten Schritt berechnet Investor A den Barwert des Couponbonds mit den Spezifikationen aus vorherigem Beispiel anhand des First-Passage Ansatzes, um das Ergebnis mit der Kalkulation des Zerobonds nach dem First-Passage Ansatz zu vergleichen. Dem First-

⁶⁷ Für eine detaillierte Herleitung s. Bielecki, Tomasz R. et al.: Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2004. S. 74 und 79

Passage Ansatz legt er die Definition der Ausfallschranke nach Black und Cox mit $k = r$ zugrunde. Da die Ausfallwahrscheinlichkeit lediglich von der Entwicklung des Firmenwerts und der Definition der Ausfallschranke abhängig ist, kann der Investor die bereits nach dem First-Passage-Ansatz mit zeitabhängiger Ausfallschranke berechnete Ausfallwahrscheinlichkeit für die Kalkulation nutzen, d.h. $p_T = 23,3234\%$. Da auch die Höhe der Recovery-Zahlung von den gleichen Komponenten abhängig ist, nutzt er die implizite Recovery-Rate des First-Passage-Ansatzes mit zeitabhängiger Ausfallschranke in Höhe von $91,9687\%$ für seine Berechnungen und erhält:

	gemäß Formel	bei $Rec = 0$	bei $Rec = 91,9687\%$
CB_0	(40)	41,9229 GE	53,6167 GE
E_0	(11)	58,0771 GE	46,3833 GE

Tab. 7: Bewertung eines Couponbonds⁶⁸

Wenig überraschend zeigt obige Tabelle, dass die Höhe der Recovery-Zahlung den Barwert des Couponbonds deutlich beeinflusst. Darüber hinaus lässt sich feststellen, dass der Barwert des Couponbonds größer ist als der des vergleichbaren Zerobonds, sofern die Couponzahlungen größer als „null“ sind. Dies ist intuitiv nachvollziehbar, da der Barwert des Couponbonds sich aus der Summe des Barwerts des risikobehafteten Zerobonds und des Barwerts der risikogewichteten Couponzahlungen ergibt. Betragen die Couponzahlungen „null“ so entspricht der Barwert des Couponbonds dem Barwert des Zerobonds unter Anwendung des First-Passage-Ansatzes mit zeitabhängiger Ausfallschranke.

3.1.3 Kalibrierung von Unternehmenswertmodellen

Bevor Unternehmenswertmodelle beispielsweise zur Bewertung von risikobehafteten Einzeltiteln angewendet werden können, müssen die Parameter r , σ , V_0 , K , DB und T kalibriert, d.h. aus Markt- und Unternehmensdaten abgeleitet werden. Da die Ausfallschranke DB nur beim First-Passage Ansatz integriert ist, muss diese auch nur bei Anwendung dieses Ansatzes kalibriert werden.

Der risikofreie Zinssatz r kann direkt aus den Marktdaten entnommen werden. Hierfür können zum Beispiel der Zinssatz einer ausfallrisikofreien Staatsanleihe oder Geldmarktsätze dienen. Ein linearer Zinssatz, wie EURIBOR, muss lediglich in einen kontinuierlichen Zinssatz transformiert werden.

Grundsätzlich können die Höhe K und die Laufzeit T des Fremdkapitals aus der Bilanz des Unternehmens entnommen werden. Da dies in der Realität aufgrund der oftmals komplexen Finanzierungsstruktur von Unternehmen diffizil ist, werden diese Parameter in der Praxis meist ad hoc beispielsweise aus dem Durchschnitt zwischen kurz- und langfristigen

⁶⁸ Eigene Berechnungen

Verbindlichkeiten geschätzt. Diese – aufgrund der Fremdkapitaldefinition in Unternehmenswertmodellen notwendige – Vorgehensweise stellt in den meisten Fällen eine deutliche Abstraktion der Realität dar und ist somit kritisch zu betrachten.

Der Firmenwert V_t und dessen Volatilität σ können nicht direkt aus den Markt- und Unternehmensdaten abgeleitet werden. Diese Parameter können über den Marktwert des Eigenkapitals E_t sowie dessen Volatilität σ_E geschätzt werden. Hierzu soll im ersten Schritt der Marktwert des Eigenkapitals E_t mit dem Firmenwert V_t , dessen Volatilität σ und der Zeit t in Beziehung gesetzt werden. Aufgrund der Dynamik des Firmenwerts im Black-Scholes Modell entspricht dies der Black-Scholes-Bewertungsfunktion einer europäischen Call-Option mit Strike K und Fälligkeit T :

$$(41) E_t = f(t, V_t) = V_t \cdot \Phi(d_1(t, V_t)) - Ke^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2(t, V_t)) \text{ mit}$$

$$d_{1,2} = \frac{-\ln \frac{K}{V_t} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = \frac{-\ln L \pm \frac{\sigma^2}{2} \cdot (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}$$

Aus der Anwendung von Itô's Lemma auf Gleichung (41) folgt:

$$(42) df(t, V_t) = \left(rV_t f_x(t, V_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 V_t^2 f_{xx}(t, V_t) + f_t(t, V_t) \right) dt + \sigma V_t f_x(t, V_t) dW_t$$

Vergleicht man den Diffusionskoeffizienten aus (42) $\sigma V_t f_x(t, V_t) dW_t$ mit dem entsprechenden Koeffizienten der Dynamik des Eigenkapitals $dE_t = E_t r dt + E_t \sigma_E dW_t$ und berücksichtigt darüber hinaus, dass $f_x(t, V_t) = \Phi(d_1)$ gilt, so erhält man:

$$(43) E_t = \frac{\sigma}{\sigma_E} \cdot f_x(t, V_t) \cdot V_t = \frac{\sigma}{\sigma_E} \cdot \Phi(d_1) \cdot V_t .^{69}$$

Sind der Marktwert des Eigenkapitals E_t sowie dessen Volatilität σ_E bekannt, so können aus den Gleichungen (41) und (43) der Firmenwert V_t sowie dessen Volatilität σ bestimmt werden.

3.1.4 Kritische Würdigung der Unternehmenswertmodelle

Trotz ihrer intuitiven Nachvollziehbarkeit und ihrer ökonomisch fundierten Basis zeigen empirische Studien, dass Unternehmenswertmodelle das Kreditrisiko relativ schlecht abbilden können. Während die Credit Spreads im Merton-Modell das Kreditrisiko tendenziell unterschätzen, weisen Modelle nach dem First-Passage Ansatz – genau wie beim klassischen optionstheoretischen Ansatz – eine Struktur auf, welche nicht mit empirischen Daten konform ist.⁷⁰ Wie bereits in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, liegt ein wesentlicher Kritikpunkt an der Struktur der Credit Spreads bei Unternehmenswertmodellen darin, dass sich der Credit Spread

⁶⁹ Vgl. Jones, E. Philip et al.: Contingent claims analysis of corporate capital structures: an empirical investigation, in: Journal of Finance, Vol. 39, 1984, S. 611-625

⁷⁰ Vgl. Giesecke, Kay et al.: Forecasting Default in the Face of Uncertainty, in: The Journal of Derivatives, Herbst 2004, 2004, S. 11

einerseits bei längeren (Rest-)Laufzeiten asymptotisch „null“ annähert und dieser andererseits bei kurzen (Rest-)Laufzeiten gegen „null“ geht, da der Eintritt eines Ausfallereignisses vorhersehbar ist.⁷¹ Der erste Punkt lässt sich darauf zurückführen, dass die Kapitalstruktur während der Laufzeit als konstant angenommen wird, während der Firmenwert durch einen positiven Drift-Parameter wächst. Entsprechend sinkt das Risiko eines Ausfalls und somit fällt der Credit Spread bei längeren (Rest-)Laufzeiten. Diese Problematik kann durch Einführung einer Wachstumsrate des Fremdkapitals oder einer „Ziel-Leveragequote“ behoben werden.⁷² Die Vorhersagbarkeit von Ausfallereignissen lässt sich auf den Diffusionsprozess des Firmenwerts zurückführen: da der Firmenwert den einzigen Unsicherheitsfaktor darstellt, kann jederzeit der Abstand zur Ausfallschranke gemessen werden. Da es per Definition keine überraschenden Sprünge in der Firmenwertentwicklung gibt, lässt sich über die Festlegung von „pre-default-Schranken“, welche oberhalb der eigentlichen Ausfallschranke liegen und deren Durchschreiten einen möglichen Ausfall ankündigt, ein Ausfallereignis vorhersagen.⁷³ Entsprechend ist die Einführung einer Sprung-Komponente (sog. „jumps“), welche es dem Firmenwert erlaubt, jederzeit überraschend in unbekannter Höhe zu „springen“, ein möglicher Ansatz zur Behebung dieser Problematik. Wie in Abschnitt 3.3 über hybride Kreditrisikomodelle näher erläutert wird, ist dieser Ansatz jedoch nicht ausreichend, weshalb bevorzugt die Annahme vollständiger Information fallen gelassen werden sollte, um diese Problematik zu beheben. Dieser Ansatz wird ebenfalls im Rahmen der sog. „Incomplete Information Models“ in Abschnitt 3.3 näher erläutert. Die schlechte Abbildung der Realität durch klassische Unternehmenswertmodelle führt auch dazu, dass diese schwer zu kalibrieren sind.⁷⁴ Ebenso stellen die Modellannahmen über die Höhe und Laufzeit des Fremdkapitals eine starke Vereinfachung und somit eine schlechte Abbildung der Realität dar. Darüber hinaus werden bonitätsbeeinflussende Faktoren, wie Ratingänderungen oder die Möglichkeit zum Nachschuss von Eigenkapital, modellseitig nicht berücksichtigt, obwohl diese in der Realität durchaus vorkommen. Gleichzeitig besteht die Annahme, dass der Firmenwert jederzeit handelbar ist, was in der Realität ebenfalls nicht gegeben ist. Zwar ist u.U. der Wert des Eigenkapitals in Form von Aktien handelbar, jedoch ist der Firmenwert weder handelbar noch mit Sicherheit am Markt beobachtbar. Dies macht insbesondere die Anwendung des First-Passage-Ansatzes in der Realität schwierig.⁷⁵

Positiv ist dagegen, dass der Eintritt eines Ausfallereignisses bei Unternehmenswertmodellen endogen bestimmt werden kann und somit auch eine Bewertung von Fremdkapital, für welches keine Marktwerte vorhanden sind, möglich ist. Darüber hinaus kann über diese der relative Wert für Fremd- und Eigenkapital berechnet werden und die Ergebnisse somit genutzt

⁷¹ Ebenda.

⁷² Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 12

⁷³ Vgl. ebd. S. 40

⁷⁴ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 252 sowie Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2282

⁷⁵ Vgl. Bielecki, Tomasz R. und Rutkowski, Marek: Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging. Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 2004. S. 64 sowie 71

werden, um ein Cross-Asset-Hedging, also das hedgen eines Vermögenswerts über einen anderen Vermögenswert, zu ermöglichen, d.h., dass Kreditrisiko beispielsweise über den Handel mit Aktien und Aktienoptionen gehedged werden kann.⁷⁶

3.2 Intensitätsmodelle

Der Hintergrund der Einführung von Intensitätsmodellen, welche auch als Hazard-Rate Modelle bezeichnet werden, liegt darin, dass die Gründe, welche zum Ausfall eines Unternehmens führen können, vielfältig sind. Eine präzise Modellierung der Ausfallereignisse, wie dies Unternehmenswertmodelle versuchen, ist daher schwierig. Dementsprechend werden die Auslöser eines Ausfallereignisses bei den Intensitätsmodellen – im Gegensatz zu Unternehmenswertmodellen, bei welchen der Eintritt eines Ausfallereignisses auf fundierten ökonomischen Zusammenhängen basiert – nicht explizit erklärt. Vielmehr stellt deren Eintritt ein zufälliges, vollkommen unerwartetes und somit exogenes Ereignis dar. Dementsprechend wird der Ausfallzeitpunkt als eine Zufallsvariable definiert.⁷⁷ Hierdurch soll die Vorhersagbarkeit von Ausfallereignissen, welche – wie bereits beschrieben – bei Unternehmenswertmodellen ein großes Problem darstellt, beseitigt werden. Die Zielsetzung von Intensitätsmodellen ist eine möglichst marktkonsistente Darstellung der Preise von ausfallrisikobehafteten Anleihen und den daraus resultierenden impliziten Ausfallwahrscheinlichkeiten.⁷⁸ Neben der Herleitung der Ausfallwahrscheinlichkeit aus Marktpreisen, kann diese beispielsweise auch über die Anwendung von Ratingmatrizen oder separaten Modellen, wie beispielsweise den beschriebenen Unternehmenswertmodellen, exogen gewonnen werden. Diese Flexibilität bei der Kalibrierung der Ausfallwahrscheinlichkeit stellt einen großen Vorteil der Intensitätsmodelle dar.⁷⁹

Definition des Ausfallereignisses. Die Modellierung des Ausfallrisikos respektive des Ausfallprozesses erfolgt bei Intensitätsmodellen über einen Zählprozess $N=(N_t)_{t \geq 0}$, der bei Eintritt eines Ausfallereignisses einen Sprung in Höhe von eins macht:

$$(44) \quad N_t = 1_{\{\tau \leq t\}} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \tau \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

⁷⁶ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 252

⁷⁷ Vgl. Schmidt, Thorsten: Credit Risk Modeling with Random Fields, Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades an den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen (Mathematik) der Justus-Liebig-Universität Gießen, Gießen: 2003. S. 11

⁷⁸ Vgl. Albrecht, Peter: Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick, in: German Risk and Insurance Review, 2005. S. 66

⁷⁹ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 196f.

Der Zählprozess besitzt somit einen ganzzahligen Wertebereich bei monoton steigenden Pfaden.⁸⁰ Darüber hinaus basieren Intensitätsmodelle auf der Annahme, dass der Ausfallzeitpunkt mit dem ersten Sprung des Zählprozesses identisch ist:

$$(45) \tau = \inf \{t \in \mathfrak{R}_{\geq 0} : N_t = 1\}$$

Diese Definition eines Ausfallereignisses macht noch einmal den Unterschied zwischen Intensitätsmodellen und Unternehmenswertmodellen deutlich: während Ausfallereignisse bei Intensitätsmodellen rein formal definiert sind, beruht die entsprechende Definition bei Unternehmenswertmodellen auf der Modellierung ökonomischer Zusammenhänge.⁸¹ Ein ökonomisches Modell zur Beschreibung des Eintritts von Ausfallereignissen wird nicht mehr benötigt, was die Flexibilität der Intensitätsmodelle deutlich verbessert.

Ausfallintensität. Da der Ausfallprozess monoton steigend ist, muss die kumulierte bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt s , dass das Unternehmen zum Zeitpunkt $t \geq s$ ausfällt, mindestens so groß sein wie N_s selbst.⁸² Ein Prozess dessen bedingter Erwartungswert – wie bei dem beschriebenen Ausfallprozess – positiv ist, wird auch als Submartingal bezeichnet ($E(X_t | X_s = x) \geq x$). Demgegenüber wird ein Prozess dessen bedingter Erwartungswert gleich null ist, als fairer Prozess oder als Martingal bezeichnet. Die Doob-Meyer-Zerlegung von Submartingalen ermöglicht die Isolierung des Aufwärtstrends von N . Demnach kann ein rechts-stetiges nicht negatives Submartingal, welches in diesem Fall dem Ausfallprozess entspricht, in einen eindeutigen, wachsenden und vorhersehbaren Prozess A_t mit $A_0 = 0$ und in ein kontinuierliches Martingal zerlegt werden. Das Martingal ergibt sich aus der Differenz des Ausfallprozesses und dem Prozess A_t , d.h. durch $1_{\{t \geq \tau\}} - A_t$. Der eindeutig wachsende vorhersehbare Prozess A_t „kompensiert“ den Aufwärtstrend des Ausfallprozesses, weshalb dieser auch als Kompensator bezeichnet wird. Mit anderen Worten: Der Kompensator gleicht genau den Aufwärtstrend des Ausfallprozesses aus, so dass die Differenz zwischen dem Ausfallindikatorprozess und dem Kompensator ein Martingal ist. Entsprechend kann jeder Zuwachs des Kompensators auch als der erwartete Zuwachs des Ausfallprozesses angesehen werden.⁸³ Daher kann der Kompensator auch als Ausdruck der kumulativen, bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit interpretiert werden. Die Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit bezieht sich in diesem Kontext darauf, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit künftiger Zeitpunkte davon abhängig ist, dass bis zum derzeitigen Zeitpunkt noch kein Ausfallereignis eingetreten ist. Der Kompensator wird durch eine nicht-negative Funktion, der sog. Intensität λ , beschrieben:⁸⁴

$$(46) A_t = \int_0^{\min(t, \tau)} \lambda_s ds = \int_0^t \lambda_s 1_{\{\tau > s\}} ds$$

⁸⁰ Vgl. Albrecht, Peter: Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick, in: German Risk and Insurance Review, 2005. S. 66

⁸¹ Vgl. beispielsweise die Definitionen (44) und (4)

⁸² Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 41

⁸³ Vgl. ebd. S. 25

⁸⁴ Vgl. ebd. S. 42

Die Intensität λ ist Ausdruck für die exogen gegebene, bedingte Ausfallrate während eines infinitesimal kurzen Zeitintervalls Δt bis zu welchem noch kein Ausfall erfolgt ist ($t < \tau$). Das Produkt aus λ_t und Δt bildet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ausfall in dem Zeitintervall $(t, t + \Delta t]$ erfolgt, ab. Als Definition der Intensität kann jede nicht-negative Funktion dienen. So sollen nachfolgend Intensitätsmodelle mit konstanter, im Zeitverlauf schwankender und einem stochastischen Prozess unterliegender Intensität beschrieben werden.

3.2.1 Intensitätsmodelle mit konstanter Intensität

Ist λ konstant und sind die Zuwächse $N_t - N_s$ für $s < t$ unabhängig und poissonverteilt mit Parameter $\lambda(t - s)$, so entspricht N einem homogenen Poisson-Prozess mit (konstanter) Intensität λ :

$$(47) \quad P[N_t - N_s = k] = \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \cdot (t - s)^k \cdot e^{-\lambda(t-s)}, \text{ wobei } k \text{ der Anzahl der Ausfälle zwischen den}$$

Zeitpunkten t und s entspricht.

Entsprechend ist τ exponentialverteilt mit Parameter λ . Daraus folgt eine kumulative Ausfallwahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt T von:

$$(48) \quad p_T = P[\tau \leq T] = 1 - e^{-\lambda T}$$

Aus Formel (49) ergibt sich, dass die Intensität oder Hazard Rate der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit für einen beliebigen Zeitpunkt $t \leq T$, bis zu welchem noch kein Ausfall erfolgt ist, entspricht:

$$(49) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P[t < \tau \leq t + h | \tau > t] = \frac{1}{1 - F(t)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda, \quad \text{wobei}$$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung und $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ die Dichtefunktion der Exponentialverteilung darstellen.⁸⁵

Bewertung von ausfallrisikobehafteten Forderungen. Unter der Annahme eines konstanten, kontinuierlichen Zinssatzes $r > 0$ sowie einer konstanten Recovery-Rate, deren Zahlung zum Zeitpunkt T geleistet wird, ist die Berechnung des Barwerts einer ausfallrisikobehafteten Forderung B_0 über die Diskontierung der, mit der Ausfallwahrscheinlichkeit gewichteten, Cash-Flows, welche ebenfalls in T gezahlt werden, möglich:⁸⁶

$$(50) \quad B_0 = [CF_T \cdot (1 - p) + CF_T \cdot Rec \cdot p] \cdot DF_T = [CF_T - CF_T \cdot (1 - Rec) \cdot p] \cdot DF_T \\ = [CF_T - CF_T \cdot (1 - Rec) \cdot (1 - e^{-\lambda T})] \cdot e^{-rT} = CF_T \cdot e^{-(r+\lambda)T} \cdot (1 + Rec(e^{\lambda T} - 1))$$

⁸⁵ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Berlin: Humboldt-Universität, 2002. S. 16

⁸⁶ Vgl. ebd. S. 17

Diese Bewertungsformel ist für alle ausfallrisikobehafteten Forderungen anwendbar, welche zum Zeitpunkt T fällig sind und über eine gegebene, nicht zwangsläufig konstante, Recovery-Rate verfügen. Entsprechend kann diese genutzt werden, um beispielsweise einen ausfallrisikobehafteten Zerobond (d.h. $CF_T = 1$ sowie $Rec \neq 0$) oder eine Call-Option auf S mit Strike K bei einem ausfallrisikobehafteten Kontrahenten (d.h. $CF_T = \max(S_T - K)$ sowie $Rec \neq 0$) zu bewerten.

Im Spezialfall einer Recovery-Rate von „null“ wird zur Bewertung der ausfallrisikobehafteten Anleihe gegenüber der Bewertung einer ausfallrisikofreien Anleihe lediglich der Diskontfaktor modifiziert. Der zweite Term von Formel (50) entfällt entsprechend komplett:

$$(51) \quad B_0 = CF_T \cdot e^{-(r+\lambda)T}$$

Die hierbei zur Diskontierung verwendete Intensität λ wird auch als risikoneutrale Intensität bezeichnet und kann auch als Spread s interpretiert werden.

Alternativ kann die konstante Recovery-Zahlung nicht – wie bei Formel (50) zugrunde gelegt – zum Zeitpunkt T , sondern statt dessen zum Zeitpunkt des Ausfalls τ geleistet werden. Als Recovery-Zahlung erhalten die Investoren den auf den Zeitpunkt τ diskontierten Cash-Flow des Bonds. Für die Bewertung folgt daraus:⁸⁷

$$\begin{aligned} B_0 &= E^Q [CF_T \cdot 1_{\{\tau > T\}} \cdot DF_T + CF_T \cdot DF_{\tau,T} \cdot Rec \cdot 1_{\{\tau \leq T\}} \cdot DF_\tau] = CF_T \cdot DF_T \cdot (1 - p_T + Rec \cdot p_T) \\ (52) \quad &= CF_T \cdot DF_T \cdot (1 - p_T - Rec \cdot (1 - p_T) + Rec) = CF_T \cdot DF_T \cdot ((1 - p_T)(1 - Rec) + Rec) \\ &= CF_T \cdot (1 - Rec) e^{-(r+\lambda)T} + CF_T \cdot Rec \cdot e^{-rT} \end{aligned}$$

Der Wert des ausfallrisikobehafteten Bonds ergibt sich also aus der Summe des Barwerts des risikobehafteten Cash-Flows und dem Barwert des risikofreien Anteils.

Credit Spread. Für den „fairen“ Credit Spread ergibt sich aus Formel (51) und dementsprechend bei einer Recovery-Rate von „null“:

$$(53) \quad s_0 = -\frac{1}{T} \ln \frac{e^{-(r+\lambda)T}}{e^{-rT}} = \lambda$$

Wie Formel (53) beweist, entspricht der „faire“ Credit Spread der risikoneutralen Intensität. Dies ist intuitiv nachvollziehbar, da der „faire“ Credit Spread exakt das eingegangene Ausfallrisiko des Anleiheinvestors kompensieren soll. Dies gilt analog auch für eine Recovery-Rate > 0 . Darüber hinaus zeigt Formel (53), dass der Credit Spread bei Intensitätsmodellen im Gegensatz zu den Credit Spreads bei Unternehmenswertmodellen nicht im Zeitverlauf abnimmt, sondern – identisch mit der Intensität λ – konstant bleibt. Dies bedeutet, dass Anleiheinvestoren auch für kurze Laufzeiten eine Risikoprämie verlangen. Diese Eigenschaft ist konform mit empirischen Beobachtungen und ergibt sich aus der Tatsache, dass der Eintritt eines Ausfallereignisses bei Intensitätsmodellen – ebenfalls im

⁸⁷ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Berlin: Humboldt-Universität, 2002. S. 17

Gegensatz zu Unternehmenswertmodellen – aufgrund des zugrunde liegenden Poisson-Prozesses vollkommen zufällig und somit unvorhersehbar ist. Offensichtlich ergibt sich bei konstanter Intensität und konstanter Recovery-Rate eine unrealistische, flache Struktur der Credit Spreads, so dass die Annahme konstanter Intensität im Folgenden aufgehoben werden soll.

Beispiel

Investor A versucht herauszufinden, ob die Bewertung des – im Rahmen der Unternehmenswertmodelle beschriebenen und als „unfair ge priced“ geltenden – Zerobonds anhand von Intensitätsmodellen zu einem anderen Ergebnis führt. Entsprechend nutzt er zur Bewertung die folgenden Parameter: $CF_T = 70$ Geldeinheiten, $r = 5\%$ und $T = 5$ Jahre. Zur besseren Vergleichbarkeit beschließt er die Recovery-Rate des First-Passage-Ansatzes für seine Kalkulation zu nutzen (d.h.: $Rec = 91,9687\%$). Da diese bei Ausfall gezahlt wird, erfolgt die Bewertung des Zerobonds anhand von Formel (52). Daneben orientiert er sich hinsichtlich der kumulativen Ausfallwahrscheinlichkeit ebenfalls an den Ergebnissen der Unternehmenswertmodelle und schätzt diese als zwischen dem Merton-Modell und dem First-Passage Ansatz liegend ein. Da er jedoch die Annahmen des First-Passage Ansatzes für realistischer hält, gewichtet er diesen Ansatz stärker und geht von einer Ausfallwahrscheinlichkeit von $p_T = 20\%$ innerhalb von fünf Jahren aus. Durch Umformung von Formel (48) erhält er $\lambda = 4,4629\%$. Durch Einsetzen der genannten Daten erhält er als faire Barwert des Zerobonds 53,6404 Geldeinheiten.⁸⁸ Der faire Credit Spread entspricht – wie oben bereits beschrieben – exakt der Intensität. Im Rahmen dessen ist anzumerken, dass wenn beide exogen gewählten Faktoren, die Recovery-Rate und die Ausfallwahrscheinlichkeit, den ermittelten Werten aus den Unternehmenswertmodellen entsprechen würden, der Barwert des Zerobonds logischerweise identisch mit dem Wert aus den Unternehmenswertmodellen wäre. Darüber hinaus ist festzuhalten, dass da die beiden genannten exogenen Faktoren die einzigen, für die Berechnung des Barwerts der Fremdkapitalkomponente relevanten Variablen darstellen, diese sorgfältig bestimmt werden müssen. Wie in Abschnitt 3.2.5 näher erläutert wird, ist hierzu eine Kalibrierung anhand von Marktdaten nötig. Hierauf wird bereits in den folgenden Beispielen näher eingegangen werden.

3.2.2 Intensitätsmodelle mit zeitvariabler Intensität

Wird λ durch eine deterministische Funktion der Zeit t beschrieben, also $\lambda = \lambda(t)$, und sind die Zuwächse $N_t - N_s$ für $s < t$ unabhängig und poissonverteilt, so entspricht N einem inhomogenen Poisson-Prozess mit deterministischer Intensität $\lambda(t)$:

$$(54) \quad P[N_t - N_s = k] = \frac{1}{k!} \cdot \left(\int_s^t \lambda(u) du \right)^k \cdot e^{-\int_s^t \lambda(u) du}$$

⁸⁸ Eigene Berechnungen

Für die kumulative Ausfallwahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt T gilt entsprechend analog zu Formel (48):

$$(55) \quad p_T = \mathbb{P}[\tau \leq T] = 1 - \mathbb{P}[N_T = 0] = 1 - e^{-\int_0^T \lambda(u) du}$$

Bewertung von ausfallrisikobehafteten Forderungen. Analog zur Bewertung von ausfallrisikobehafteten Forderungen im Fall einer konstanten Intensität, ergibt sich unter der Annahme eines konstanten, kontinuierlichen Zinssatzes $r > 0$ sowie einer konstanten Recovery-Rate, deren Zahlung zum Zeitpunkt T geleistet wird, der Barwert der ausfallrisikobehafteten Forderung B_0 über die Diskontierung der, mit der Ausfallwahrscheinlichkeit gewichteten, Cash-Flows:

$$(56) \quad \begin{aligned} B_0 &= [CF_T \cdot (1 - p) + CF_T \cdot Rec \cdot p] \cdot DF_T = \left[CF_T - CF_T \cdot (1 - Rec) \cdot \left(1 - e^{-\int_0^T \lambda(u) du} \right) \right] \cdot e^{-rT} \\ &= CF_T \cdot e^{-rT - \int_0^T \lambda(u) du} \cdot \left(1 + Rec \left(e^{\int_0^T \lambda(u) du} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

bzw. für eine Recovery-Rate von „null“:

$$(57) \quad B_0 = CF_T \cdot e^{-rT - \int_0^T \lambda(u) du}$$

Credit Spread. Entsprechend gilt für den „fairen“ Credit Spread bei einer Recovery-Rate von „null“⁸⁹:

$$(58) \quad s_0 = -\frac{1}{T} \ln \frac{e^{-rT - \int_0^T \lambda(u) du}}{e^{-rT}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \lambda(u) du$$

bzw. bei einer Recovery-Rate > 0 :

$$(59) \quad s_0 = -\frac{1}{T} \ln \frac{e^{-rT - \int_0^T \lambda(u) du} \cdot \left(1 + Rec \left(e^{\int_0^T \lambda(u) du} - 1 \right) \right)}{e^{-rT}},$$

wobei sich – analog zum Fall konstanter Intensität – für kurze Laufzeiten der Credit Spread der Intensität λ zum Zeitpunkt $t = 0$ annähert ($\lim_{t \rightarrow 0} S(0, t) = \lambda(0)$) und somit definitionsgemäß > 0 ist.

Empirische Beobachtungen. Bei der Anwendung der Intensitätsmodelle mit konstanter Ausfallintensität sowie mit zeitvariabler, aber deterministischer Ausfallintensität resultieren Credit Spreads, welche empirisch wenig valide sind, da Credit Spreads in der Realität nicht

⁸⁹ Vgl. Formel (16)

relativ glatt oder vorhersehbar sind.⁹⁰ Vielmehr weisen diese selbst ein stochastisches Element auf. Daher soll die zeitvariable Intensität selbst im Folgenden als stochastischer Prozess dargestellt werden. Nichtsdestotrotz soll davor noch ein kurzes Beispiel für die Anwendung deterministischer Intensitäten zur Bewertung aufgezeigt werden.

Beispiel

Wie bereits im Beispiel des vorherigen Abschnitts angesprochen, ist eine Kalibrierung anhand von Marktdaten nötig. Investor A möchte seine Analyse in einem ersten Schritt auf historische Marktdaten abstellen, um seine – im Beispiel des Abschnitts 3.2.1 – getroffenen Annahmen hinsichtlich der Recovery-Rate und der Ausfallwahrscheinlichkeit zu überprüfen. Anhand der Analyse der historischen Daten stellt er schnell fest, dass die Höhe der Recovery-Rate, welche er bislang dem First-Passage Ansatz entnommen hatte, deutlich höher ist als empirisch zu erwarten. Entsprechend revidiert er seine Annahme und geht im Folgenden von einer Recovery-Rate von lediglich 40% aus.⁹¹ Um die Höhe der Ausfallwahrscheinlichkeit besser einschätzen zu können, versucht er herauszufinden wie hoch die kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit über fünf Jahre eines mit „BBB“-gerateten Unternehmens sein könnte. Aus den historischen Daten der Rating-Agentur geht die folgende Migrationsmatrix hervor:

		Rating am Jahresanfang						
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Rating am Jahresende	AAA	98,20	0,80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	AA	1,40	96,30	2,50	0,00	0,00	0,00	0,00
	A	0,40	2,87	93,20	4,80	0,00	0,00	0,00
	BBB	0,00	0,00	4,25	88,20	6,50	0,00	0,00
	BB	0,00	0,00	0,00	6,80	80,90	7,00	0,00
	B	0,00	0,00	0,00	0,00	11,20	75,40	10,00
	CCC	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	10,80	66,00
	Default	0,00	0,03	0,05	0,20	1,40	6,80	24,00

Tab. 8: Ratingmigrationsmatrix (alle Angaben in %)⁹²

Der Investor A nutzt die Ratingmigrationmatrix, um daraus zuerst die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten für jede Periode und anschließend die kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit anhand nachfolgender Tabelle zu berechnen.

⁹⁰ Vgl. Schönbucher, Philipp J.: Credit Derivates Pricing Models: Models, Pricing and Implementation. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2003. S.118f.

⁹¹ Die Annahme einer Recovery-Rate in Höhe von 40% entspricht der in der Praxis gängigen Annahme bei Senior Unsecured Debt einer Investment Grade Adresse (wie in dem Beispiel zugrunde gelegt); vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. 179

⁹² Vgl. Schierenbeck, Henner: Ertragsorientiertes Bankmanagement – Band 3: Fallstudien mit Lösungen, Gabler Verlag 2005. S. 518

Jahr	1	2	3	4	5
p_n	0,2000	0,2740 ⁹³	0,3740	0,4987	0,6387
p_n kum.	0,2000	0,4740	0,8480	1,3467	1,9854
p_{surv}	99,8000	99,5260	99,1520	98,6533	98,0146

Tab. 9: Bedingte Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeiten in %

Anhand der obigen Tabelle kann Investor A ersehen, dass 1,9854% als kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit für die Laufzeit von fünf Jahren gemäß der historischen Daten adäquat wären. Entsprechend versucht er eine möglichst einfache deterministische Funktion der Zeit für die Intensität λ zu finden, welche ungefähr zu derselben kumulierten Ausfallwahrscheinlichkeit kommt. Nach reiflicher Überlegung beschließt er (willkürlich) die folgende Funktion zu verwenden und die unbekannte Variable $x = 0,295$ zu setzen:

$$(60) \lambda(t) = \frac{(1+x)^t - 1}{t \cdot 100} = \frac{1,295^t - 1}{t \cdot 100}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (60) in Formel (55) erhält er 1,9856% als kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit und somit näherungsweise das Ergebnis aus den historischen Daten.

Durch Anwendung von Formel (56) erhält er für den fairen Barwert des risikobehafteten Zerobonds 53,8666 Geldeinheiten. Es ist auffällig, dass dieses Ergebnis von allen bislang erläuterten Berechnungen am nächsten an dem Emissionspreis liegt. Die Ursache dafür ist in der Kalibrierung des Modells mit Marktdaten – auch, wenn diese historischer Natur waren – zu sehen. Das Beispiel zeigt, dass es durch adäquate Kalibrierung der Intensitätsmodelle möglich ist, realitätsnahe Ergebnisse zu erzielen.⁹⁴

3.2.3 Intensitätsmodelle mit stochastischer Intensität

Ein inhomogener Poisson-Prozess mit der stochastischen Intensitätsfunktion $\tilde{\lambda}(t)$ wird als doppelt stochastischer Poisson-Prozess oder als Cox-Prozess bezeichnet. Ein derartiger Cox-Prozess kann gebildet werden, indem mehrere stochastische Prozesse $(X_s)_{s \geq 0}$, welche als Risikofaktoren die Intensität beeinflussen, ausgewählt werden, um diese anschließend über eine nicht-negative stochastische Funktion $\tilde{\Lambda}(X_s)$ miteinander in Bezug zu setzen. In einem zweiten Schritt wird dann das Integral der Funktion $\tilde{\Lambda}(X_s)$ mit der Intensität gleich gesetzt ($\tilde{\lambda}(t) = \int \tilde{\Lambda}(X_s) ds$). Folgt die Intensität einem Cox-Prozess, so ist deren Wert zwar zufällig, aber dennoch abhängig von der stochastischen Funktion $\tilde{\Lambda}(X_s)$ (dem inhomogenen Poisson-

⁹³ Entspricht der Summe der mit den Ausfallwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit des Ratings am Jahresanfang gewichteten Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten zum Jahresende des Vorjahres (d.h.: $4,80\% \cdot 0,05\% + 88,20\% \cdot 0,20\% + 6,80\% \cdot 1,40\% = 0,274\%$); vergleichbar mit der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeiten in Credit MetricsTM von J.P. Morgan (vgl. J.P. Morgan: The J.P.Morgan Guide to Credit Derivatives. Risk Publications, 1999. S. 42-47)

⁹⁴ Eigene Berechnungen

Prozesses).⁹⁵ Dementsprechend muss die bedingte, kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit mit der kumulierten Ausfallwahrscheinlichkeit bei einem inhomogenen Poisson-Prozess identisch sein:

$$(61) \quad \mathbb{P}[\tau \leq T | (\tilde{\lambda}_t)_{0 \leq t \leq T}] = 1 - \mathbb{P}[N_T = 0 | (\tilde{\lambda}_t)_{0 \leq t \leq T}] = 1 - e^{-\int_0^T \tilde{\lambda}(u) du}$$

Für die von $\tilde{\lambda}(X_s)$ unabhängige, kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich anhand des Gesetzes der schrittweisen Erwartungen („Law of Iterated Expectations“):

$$(62) \quad \mathbb{P}[\tau \leq T] = E^Q \left[\mathbb{P}[\tau \leq T | (\tilde{\lambda}_t)_{0 \leq t \leq T}] \right] = 1 - E^Q \left[e^{-\int_0^T \tilde{\lambda}(u) du} \right]$$

Modellierung der stochastischen Intensität. Grundsätzlich kann jeder stochastische Prozess genutzt werden, um die Intensität darzustellen. Ein simpler Ansatz zur Beschreibung der stochastischen Intensität ist die Annahme eines autoregressiven Prozesses 1.Ordnung, wie beispielsweise:

$$(63) \quad \tilde{\lambda}(t) = \alpha + \beta \cdot \tilde{\lambda}(t-1) + \varepsilon(t)$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit gemäß Formel (62) muss dabei über eine Monte-Carlo-Simulation bestimmt werden. Da diese Formel jedoch eine negative Ausfallintensität zulässt, ist sie zur Beschreibung der stochastischen Intensität suboptimal.⁹⁶ Demgegenüber stellt der Cox-Ingersoll-Ross-Diffusionsprozess (CIR-Prozess) eine Alternative dar, da dieser keine negative Ausfallintensität zulässt:

$$(64) \quad d\tilde{\lambda}(t) = \alpha[\mu - \tilde{\lambda}(t)]dt + \sigma\sqrt{\tilde{\lambda}(t)}dW(t) \quad , \quad \text{wobei } W(t) \text{ eine geometrisch Brownsche Bewegung abbildet.}$$

Duffie und Gârleanu erweitern den beschriebenen CIR-Prozess noch um einen Sprungprozess $J(t)$, dessen Sprung unabhängig von der geometrisch Brownschen Bewegung zum Zeitpunkt t erfolgen kann:⁹⁷

$$(65) \quad d\tilde{\lambda}(t) = \alpha[\mu - \tilde{\lambda}(t)]dt + \sigma\sqrt{\tilde{\lambda}(t)}dW(t) + dJ(t)$$

Bewertung von ausfallrisikobehafteten Forderungen. Die Bewertung von ausfallrisikobehafteten Forderungen im Fall stochastischer Intensität erfolgt aufgrund des doppelt stochastischen Prozesses – im Gegensatz zur Bewertung im Fall deterministischer Intensität – anhand von risikoneutralen Erwartungswerten anhand eines adäquaten Martingalmaßes Q . Darüber hinaus soll angenommen werden, dass sich der Cash-Flow zum Zeitpunkt T anhand einer deterministischen Funktion c aus einem Risikofaktor X , welcher den

⁹⁵ Vgl. Albrecht, Peter: Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick, in: German Risk and Insurance Review, 2005. S.69f.

⁹⁶ Ebenda.

⁹⁷ Vgl. Duffie, Darrell et al.: Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations. Stanford, USA: Stanford University, Graduate School of Business, 2003. S. 7

Ausfall bedingt, berechnen lässt (d.h. $CF_T = c(X_T)$). So ergibt sich unter der Annahme einer Recovery-Rate von „null“ sowie eines konstanten Zinssatzes $r > 0$ der Barwert der ausfallrisikobehafteten Forderung B_0 durch die Diskontierung der erwarteten Auszahlung zum Zeitpunkt T unter Berücksichtigung der entsprechenden Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$(66) \quad \begin{aligned} B_0 &= E^Q \left[CF_T \cdot e^{-rT} \cdot 1_{\{\tau > T\}} \right] = e^{-rT} \cdot E^Q \left[CF_T \cdot 1_{\{\tau > T\}} \right] = e^{-rT} \cdot E^Q \left[E^Q \left[CF_T \cdot 1_{\{\tau > T\}} \mid (X_s)_{s \leq T} \right] \right] \\ &= e^{-rT} \cdot E^Q \left[CF_T \cdot Q[\tau > T \mid (X_s)_{s \leq T}] \right] = e^{-rT} \cdot E^Q \left[CF_T \cdot e^{-\int_0^T \tilde{\lambda}_s ds} \right] \end{aligned}$$

Für die Umformung von dem letzten Term der ersten Zeile in den ersten Term der zweiten Zeile wurde die Tatsache genutzt, dass sich der Cash-Flow zum Zeitpunkt T bei gegebenem Risikofaktor X_T berechnen lässt. Darüber hinaus wurde für die Umformung des vorletzten Terms in den letzten Term genutzt, dass τ dem ersten Sprung des inhomogenen Poisson-Prozesses entspricht.⁹⁸

Wird die Annahme konstanter Zinsen fallen gelassen und werden diese statt dessen durch eine stochastische Funktion $g(X_T)$, wobei $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, beschrieben, so folgt daraus:⁹⁹

$$(67) \quad B_0 = E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \cdot CF_T \cdot 1_{\{\tau > T\}} \right] = E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \cdot CF_T \cdot Q[\tau > T \mid (X_s)_{s \leq T}] \right] = E^Q \left[CF_T \cdot e^{-\int_0^T (r_s + \tilde{\lambda}_s) ds} \right]$$

Es ist zu beachten, dass bei konstantem Zinssatz und konstanter Intensität Formel (67) identisch mit Formel (51) ist.

Wird darüber hinaus noch die Annahme einer Recovery-Rate von „null“ fallen gelassen, so setzt sich der Barwert B_0 aus zwei Komponenten zusammen. Während die erste Komponente B_0^F den Barwert der Rückzahlung der Forderung zum Zeitpunkt T umfasst, entspricht die zweite Komponente B_0^R dem Barwert der Recovery-Zahlung bei Eintritt eines Ausfallereignisses. Die erste Komponente ist mit dem Barwert der gesamten Forderung im Fall einer Recovery-Rate von „null“ identisch und lässt sich daher unverändert anhand Formel (67) berechnen. Die zweite Komponente ergibt sich dagegen aus dem Erwartungswert des Barwerts der Recovery-Zahlung und der Ausfallwahrscheinlichkeit:¹⁰⁰

⁹⁸ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 48

⁹⁹ Vgl. ebd. .S. 49f.

¹⁰⁰ Ebenda.

$$\begin{aligned}
 (68) \quad B_0^R &= E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \cdot Rec_\tau \cdot 1_{\{\tau \leq T\}} \right] = E^Q \left[E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \cdot Rec_\tau \cdot 1_{\{\tau \leq T\}} \mid (X_s)_{s \leq T} \right] \right] \\
 &= E^Q \left[\int_0^\infty e^{-\int_0^u r_s ds} \cdot Rec_u \cdot 1_{\{u \leq T\}} k(u) du \right] = \int_0^T E^Q \left[e^{-\int_0^u r_s ds} \cdot Rec_u k(u) \right] du = \int_0^T E^Q \left[e^{-\int_0^u (r_s + \tilde{\lambda}_s) ds} \cdot Rec_u \tilde{\lambda}(u) \right] du,
 \end{aligned}$$

wobei $k(u)$ der bedingten Dichtefunktion von τ zum Zeitpunkt u des gegebenen Pfades $(X_s)_{s \leq T}$ für alle $0 \leq u \leq T$. Diese Dichtefunktion ist bei einem Cox Prozess definiert als:¹⁰¹

$$(69) \quad k(u) = \frac{d}{du} Q[\tau \leq u \mid (X_s)_{s \leq T}] = \tilde{\lambda}_u \cdot e^{-\int_0^u \tilde{\lambda}_s ds}$$

Daraus folgt für den Barwert der ausfallrisikobehafteten Forderungen bei einer Recovery-Rate von $\neq 0$:

$$(70) \quad B_0 = E^Q \left[CF_T \cdot e^{-\int_0^T (r_s + (1-Rec)\tilde{\lambda}_s) ds} \right]$$

Die Modifikation des Exponenten durch $(1-Rec)$ kann anhand der nachfolgenden Überlegungen intuitiv nachvollzogen werden: Die Forderung fällt mit der Intensität $\tilde{\lambda}$ aus. Bei Eintritt eines Ausfallereignisses verfällt die Forderung mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-Rec)$ wertlos, während der Wert der Forderung mit einer Wahrscheinlichkeit von Rec unverändert bleibt. Für die Bewertung der Forderung kann der Teil, welcher bei Eintritt des Ausfallereignisses unverändert bleibt und mit einer Intensität von $\tilde{\lambda} \cdot Rec$ erfolgt, unberücksichtigt bleiben. Dementsprechend kann die Forderung so bewertet werden, als ob beim Eintritt eines Ausfallereignisses keine Recovery-Zahlung erfolgen würde und im Gegenzug eine verringerte Ausfallintensität $\tilde{\lambda} \cdot (1-Rec)$ zum Tragen käme.¹⁰²

Credit Spread. Für die Betrachtung der Credit Spreads soll aus Vereinfachungsgründen ein Zerobond mit einer Recovery-Rate von „null“ betrachtet werden. Darüber hinaus wird angenommen, dass die risikofreien Zinsen unabhängig von dem Ausfallzeitpunkt sind. Vorausgesetzt, dass $t < \tau$, ergibt sich für den Credit Spread bei infinitesimal kurzen Zeiträumen:¹⁰³

$$(71) \quad \lim_{T \rightarrow t} S(t, T) = -\lim_{T \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial T} E^Q \left[e^{-\int_t^T \tilde{\lambda}_s ds} \mid (X_s)_{s \leq t} \right] = -\lim_{T \rightarrow t} E^Q \left[-\tilde{\lambda}_T e^{-\int_t^T \tilde{\lambda}_s ds} \mid (X_s)_{s \leq t} \right] = \tilde{\lambda}_t$$

¹⁰¹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004.S. 49f.

¹⁰² Ebenda.

¹⁰³ Vgl. ebd. .S. 50

Es zeigt sich also auch für den Fall stochastischer Intensitäten, dass die Credit Spreads bei Intensitätsmodellen im Gegensatz zu den Credit Spreads bei Unternehmenswertmodellen nicht gegen „null“, sondern gegen die Intensität konvergieren. Dies folgt daraus, dass der Eintritt eines Ausfallereignisses bei Intensitätsmodellen als unvorhersehbares zufälliges Ereignis definiert ist. Entsprechend existiert auch bei sehr kurzen Zeiträumen Unsicherheit darüber, ob ein Ausfallereignis eintritt, weshalb ein Investor immer einen Aufschlag auf den Zinssatz – ausgedrückt über die Intensität – verlangen wird. Ebenso führt die Unvorhersehbarkeit eines Ausfallereignisses dazu, dass der Marktpreis eines ausfallrisikobehafteten Wertpapiers zum Zeitpunkt des Ausfalls schlagartig auf den Wert der Recovery-Zahlung fällt. Beide Eigenschaften sind sowohl intuitiv nachvollziehbar als auch empirisch zu beobachten und stehen im direkten Widerspruch zu den Unternehmenswertmodellen, bei welchen die Credit Spreads gegen „null“ und der Marktwert des Wertpapiers gegen den Wert der Recovery-Zahlung strebt.¹⁰⁴

Beispiel

Investor A hält seine Annahme über die Recovery-Rate in Höhe von 40% weiterhin für realistisch. Da ihn mittlerweile aber interessiert, welche kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit bei der Bestimmung des Emissionspreises zugrunde gelegt wurde, versucht er dies näherungsweise herauszufinden, indem er die Variable x aus Formel (60) als Zufallsvariable im Intervall von $[0,1]$ definiert und den ausfallrisikobehafteten Zerobond über Gleichung (68) bewertet. Dabei versucht er die Zufallsvariable so zu bestimmen, dass der Barwert des Zerobonds möglichst nahe an 54 Geldeinheiten liegt. Einerseits nähert er sich dem Emissionspreis von unten an und erhält einen Bondpreis von 53,9939 Geldeinheiten, welchem eine kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit von 1,5912% zugrunde liegt. Andererseits nähert er sich dem Emissionspreis von oben an und erhält einen Bondpreis von 54,0011 Geldeinheiten. Diesem liegt eine kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit von 1,5695% zugrunde. Die kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit, welche dem Emissionspreis zugrunde liegt, muss also – vorausgesetzt die Annahme über die Höhe der Recovery-Rate entspricht der seitens des Emittenten getroffenen Annahme zur ursprünglichen Bestimmung des Emissionspreises – zwischen 1,5695% und 1,5912% liegen. Um die Ausfallwahrscheinlichkeit noch genauer zu bestimmen, ermittelt er anhand der Durchführung von Newton-Iterationen eine kumulative Ausfallwahrscheinlichkeit von 1,5727% um exakt den Emissionspreis zu erhalten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit liegt damit deutlich unterhalb der kumulativen Ausfallwahrscheinlichkeit, welche er gemäß der historischen Daten im Beispiel des vorherigen Abschnitts für ein „BBB“-geratetes Unternehmen ermittelt hatte (1,9854%).¹⁰⁵ Da die historischen Daten das Ausfallrisiko dementsprechend deutlich höher einschätzen als dieses bei der Bestimmung des Emissionspreises zugrunde gelegt wurde, interessiert Investor A, wie das Ausfallrisiko des Unternehmens B aktuell im Markt bewertet

¹⁰⁴ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 50f.

¹⁰⁵ Eigene Berechnungen

wird. Da zu der Analyse sowohl die Kalibrierung anhand aktueller Marktdaten als auch die Grundlagen zur Bewertung von Credit Default Swaps benötigt werden, soll die Berechnung in diesem Abschnitt zurückgestellt werden bis die derartigen Grundlagen im Rahmen dieser Arbeit erläutert wurden. Eine ausführliche Analyse dieses Falls erfolgt im Rahmen des Praxisbeispiels in Abschnitt 3.4.

3.2.4 Modellierung von Rating-Migrations-Intensitäten

Lando nutzt in seinem Ansatz von 1998 die stochastische Intensität, um Änderungen von Kreditratings abzubilden und erweitert somit den Ansatz von Jarrow, Lando und Turnbull von 1997, welche Rating-Migrations-Intensitäten als konstant angenommen haben.¹⁰⁶ Derartige Kreditrisikomodelle, welche Ratingänderungen zugrunde legen, werden allgemein auch als Rating-Migrations-Modelle (Rating-based Transition Matrix Models“) oder Markow-Ketten Modelle bezeichnet. In der Literatur werden diese Modelle meist – wie auch hier – als Untergruppe der Intensitätsmodelle oder aber – zur Verdeutlichung, dass mit diesen die Modellierung von mehr als zwei Stadien möglich sind – als separate Modellgruppe betrachtet.¹⁰⁷ Lando modelliert im Gegensatz zu Jarrow, Lando und Turnbull Änderungen des Kreditratings und den Zeitpunkt des Eintritts eines Ausfallereignisses über einen kontinuierlichen Markow-Prozess U_t . Das Ausfallereignis tritt dann ein, wenn die modellierte Markow-Kette zum ersten Mal den absorbierenden Zustand Y erreicht:

$$(72) \tau = \inf \{t \geq 0 : U_t = Y\}$$

Der Markow-Prozess modelliert die Veränderungen des Kreditratings eines Unternehmens im Zeitverlauf. So werden den unterschiedlichen möglichen Zuständen des Markow-Prozesses sämtliche möglichen Kreditratings zugeordnet, d.h. Zustand „eins“ des Markow-Prozesses entspricht dem „AAA“-Rating nach der Standard & Poor’s-Rating-Matrix, der Zustand „ $Y - 1$ “ beschreibt das letztmögliche Rating vor dem Ausfall (= „CCC“ nach Standard & Poor’s-Rating-Matrix) und Zustand „ Y “ ist einem „D“-Rating gleichgestellt. Der Markow-Prozess wird über eine Übergangsmatrix M mit zufälligen Übergangintensitäten $\tilde{\lambda}_{i,j}(X_t)$, welche als kontinuierliche Funktionen eines Zustands X modelliert werden, dargestellt.¹⁰⁸

$$(73) M_t = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}_1(X_t) & \tilde{\lambda}_{1,2}(X_t) & \cdots & \tilde{\lambda}_{1,Y}(X_t) \\ \tilde{\lambda}_{2,1}(X_t) & -\tilde{\lambda}_2(X_t) & \cdots & \tilde{\lambda}_{2,Y}(X_t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \tilde{\lambda}_{Y-1,1}(X_t) & \tilde{\lambda}_{Y-1,2}(X_t) & \cdots & \tilde{\lambda}_{Y-1,Y}(X_t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

¹⁰⁶ Vgl. Lando, David: On cox processes and credit risky securities, in: Review of Derivatives Research Vol. 2, 1998. sowie Jarrow, Robert A. et al.: A markov model of the term structure of credit risk spreads, in: Review of financial studies Vol. 10, 1997.

¹⁰⁷ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 238 sowie 260ff.

¹⁰⁸ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Berlin: Humboldt-Universität, 2002. S. 20f.

wobei $\tilde{\lambda}_i(X_t) = \sum_{j=1, j \neq i}^Y \tilde{\lambda}_{i,j}(X_t)$ mit $i = 1, \dots, Y - 1$.

Inhaltlich beschreibt die Übergangsmatrix die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Unternehmen, welches derzeit der Rating-Kategorie i angehört, innerhalb eines infinitesimal kurzen Zeitintervalls Δt zur Rating-Kategorie j migriert. Die Migrationswahrscheinlichkeit eines Unternehmens, welches sich derzeit in der Rating-Kategorie i befindet, in irgendeine andere Rating-Kategorie während des infinitesimal kurzen Zeitintervalls Δt ergibt sich folglich aus $\tilde{\lambda}_i \cdot (X_t) \cdot \Delta t$. Die Ausfallintensität ergibt sich anhand der letzten Spalte der obigen Matrix M_t .¹⁰⁹ Diese kann dann in die entsprechenden Bewertungsformeln eingesetzt werden.

3.2.5 Kalibrierung von Intensitätsmodellen

Für die Kalibrierung von Intensitätsmodellen sind lediglich die Parameter r , Rec und λ relevant. Sowohl die Zinsstruktur als auch die Recovery-Rate können entweder anhand von aktuellen Marktdaten oder anhand von historischen Daten gewonnen sowie eigenständig modelliert werden. Die Kalibrierung der Intensität erfolgt direkt über die Marktpreise von ausfallrisikobehafteten Wertpapieren. Hierzu werden oftmals liquide Anleihemärkte, Credit Default Swap- oder Asset Swap-Spreads benutzt. Teilweise werden auch Aktienmärkte zur Kalibrierung verwendet.¹¹⁰ Je nachdem welche Marktpreise zur Kalibrierung der Intensität herangezogen werden, müssen unter Umständen auch die Annahmen für die Recovery-Rate angepasst werden. Zielsetzung ist es dabei den Exponenten $r + (1-Rec)\lambda$ so zu kalibrieren, dass dieser bestmöglich zu den beobachteten Marktdaten passt.

3.2.6 Kritische Würdigung der Intensitätsmodelle

Wie bereits in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, führen die Intensitätsmodelle mit konstanter oder deterministischer Intensität zu Credit Spreads, welche aufgrund deren Konstanz bzw. Vorhersehbarkeit empirisch wenig valide sind.¹¹¹ Da empirisch beobachtbare Credit Spreads selbst ein stochastisches Element aufweisen, führt die stochastische Modellierung der Intensität im Rahmen eines Cox-Prozesses zu valideren Ergebnissen.¹¹² Ein weiterer großer Vorteil von Intensitätsmodellen ist darin zu sehen, dass diese Marktdaten als Inputparameter nutzen. Aufgrund dessen sind Nachforschungen hinsichtlich unternehmensspezifischer Bilanzdaten, wie diese bei Unternehmenswertmodellen notwendig sind, nicht nötig, was die

¹⁰⁹ Vgl. Lando, David: Credit Risk Modeling – Theory and Applications, in: Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 2004. S. 145ff. sowie Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Berlin: Humboldt-Universität, 2002. S. 20f.

¹¹⁰ Vgl. Jarrow, Robert: Default parameter estimation using market prices, in: Financial Analysts Journal Vol. 5, 2001. S. 5ff.

¹¹¹ Vgl. Schönbucher, Philipp J.: Credit Derivates Pricing Models: Models, Pricing and Implementation. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2003. S.118f. sowie Albrecht, Peter: Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick, in: German Risk and Insurance Review, 2005. S. 68f.

¹¹² Vgl. Albrecht, Peter: Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick, in: German Risk and Insurance Review, 2005. S. 68f.

Intensitätsmodelle letztlich weniger aufwendig macht.¹¹³ Die benötigten Inputparameter sind in der Regel relativ gut am Markt ablesbar, wodurch Intensitätsmodelle leicht implementierbar sind.

Der wohl größte Nachteil von Intensitätsmodellen ist darin zu sehen, dass die Modellierung nicht auf einem ökonomischen Hintergrund basiert und daher Intensitätsmodelle nicht intuitiv nachvollziehbar sind.

3.3 Hybride Kreditrisikomodelle

Hybride Kreditrisikomodelle versuchen die positiven Aspekte von Unternehmenswert- sowie Intensitätsmodellen miteinander zu kombinieren, d.h. einerseits sollen die ökonomisch fundierte Modellierung des Eintritts eines Ausfallereignisses sowie die daraus resultierende Eignung zur Analyse von ökonomischen Zusammenhängen und Finanzierungsentscheidungen sowie –risiken bei Unternehmenswertmodellen erhalten bleiben und andererseits die Unvorhersagbarkeit des Eintritts eines Ausfallereignisses sowie die einfache Kalibrierung und die daraus resultierenden realistischeren Credit Spreads bei Intensitätsmodellen erzielt werden.¹¹⁴

Da die im Rahmen dieses Abschnitts beschriebenen hybriden Kreditrisikomodelle auf dem First-Passage-Ansatz aufbauen, sind im Rahmen dieses Kapitels mit der Bezeichnung „Unternehmenswertmodelle“ immer Unternehmenswertmodelle nach dem First-Passage-Ansatz gemeint. Den Ausgangspunkt der hybriden Kreditrisikomodelle bildet die Betrachtung eines sog. „Ausfalltrends“. Der Ausfalltrend entspricht dem Submartingal des Ausfallprozesses und wird somit durch den Kompensator ausgedrückt.¹¹⁵ Der Kompensator beschreibt die faire kumulative Kompensation für das modell-inhärente Kreditrisiko, welches – aufgrund von Unsicherheit über den Eintritt eines Ausfallereignisses – im Kreditprozess enthalten ist.¹¹⁶ Da Ausfälle bei Unternehmenswertmodellen jedoch vorhersehbar sind, existiert bei diesen keine Unsicherheit bei kurzen Zeithorizonten und somit kein kurzfristiges Kreditrisiko, welches zu kompensieren wäre. Im Gegensatz dazu wird bei Intensitätsmodellen das kurzfristige Kreditrisiko aufgrund des als zufällig angenommen Eintritts eines Ausfallereignisses generiert. Der Kompensator entspricht bei diesen somit der Intensität. Formal gilt also:¹¹⁷

¹¹³Vgl. Rehm, Florian Christoph: Kreditrisikomodelle – Bewertung von Kreditderivaten und Portfoliomodelle zur Kreditrisikomessung. Dissertation an der Wissenschaftlichen Hochschule für Unternehmensführung – Otto-Beisheim-Hochschule – Vallendar. Koblenz, 2001. S. 68ff.

¹¹⁴ Vgl. Thabe, Tim: Bewertung von Kreditrisiko, Zahlungsunfähigkeit, optimale Kapitalstruktur und Agencykosten bei unvollständiger Information. Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Wirtschaftswissenschaften der Universität Mannheim. Mannheim: 2006. S. 26

¹¹⁵ Vgl. Abschnitt 3.2

¹¹⁶ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 55

¹¹⁷ Vgl. Formel (46)

$$(74) A_t = \int_0^t \lambda_s ds$$

Entsprechend kann der Ausfalltrend auch als kumulative Ausfallintensität interpretiert werden.¹¹⁸

Soweit entsprechen hybride Kreditrisikomodelle den Intensitätsmodellen. Der entscheidende Unterschied liegt allerdings darin, dass im Folgenden die Modellierung der Intensität nicht exogen, sondern endogen und somit über ein Unternehmenswertmodell erfolgt. Hierzu ist es allerdings notwendig, dass dieses Modell über Unsicherheit und somit über ein kurzfristiges Kreditrisiko verfügt. Hierzu haben sich zwei unterschiedliche Ansätze in der Theorie herausgebildet:

1. Einführung überraschender Sprünge, so genannter „jumps“
2. Fallenlassen der Annahme vollständiger Information bzw. Annahme unvollständiger Information

Die Einführung überraschende Sprünge führt dazu, dass – unabhängig vom Verlauf des Firmenwerts – unvorhergesehen ein Ausfallereignis eintreten kann. Dementsprechend kann bei diesem Ansatz ein kurzfristiges Kreditrisiko vorliegen. Jedoch ist zu beachten, dass der Eintritt eines Ausfallereignisses weiterhin auch im Rahmen des – für Unternehmenswertmodelle typischen – Diffusionsprozess des Unternehmenswerts erfolgen kann und dieser dann vorhersehbar ist. Entsprechend würde in letzterem Fall kein kurzfristiges Kreditrisiko bestehen.¹¹⁹ Da nach diesem Ansatz nicht immer ein kurzfristiges Kreditrisiko vorliegt und dies nicht mit empirischen Beobachtungen vereinbar ist, soll im Folgenden der Fokus auf den zweiten Ansatz gelegt werden.

Durch die Annahme unvollständiger Information ist gewährleistet, dass der Eintritt eines Ausfallereignisses nicht vorhersehbar ist und somit zu jedem Zeitpunkt ein kurzfristiges Kreditrisiko besteht. Modelle, welchen diese Annahme zugrunde liegt, werden daher auch als Kreditrisikomodelle mit unvollständiger Information („Incomplete Information Credit Models“) bezeichnet. Derartige Modelle berücksichtigen die Tatsache, dass in der Realität oftmals weder der Diffusionsprozess des Firmenwerts oder dessen Parameter noch die genaue Höhe der Ausfallschranke zu jedem Zeitpunkt bekannt sind, d.h.: es besteht Unsicherheit über den wirklichen Firmenwert sowie über die exakten Bedingungen, welche zum Eintritt eines Ausfallereignisses führen können. Dementsprechend kann das Ausfallereignis nach diesem Ansatz nicht vorhergesagt werden. Der Ausfalltrend kann somit explizit über die Entwicklung des Firmenwerts und die Ausfallschranke modelliert werden.¹²⁰

¹¹⁸ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 55

¹¹⁹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 56

¹²⁰ Ebenda.

Modellierung des Credit Spreads bei unvollständiger Information über die Höhe der Ausfallschranke. Wie beim First-Passage-Ansatz tritt das Ausfallereignis in dem Moment ein, in welchem der Firmenwert unter die Ausfallschranke fällt. Die Ausfallschranke selbst ist definiert als eine konstante Zufallsvariable, welche somit sowohl von der Zeit als auch vom Firmenwert unabhängig ist:¹²¹

$$(75) \tau = \inf \{t > 0 | V_t \leq DB\}$$

Alternativ zu Formel (16) kann die Berechnung des Credit Spreads bei einem Zerobond mit einer Recovery-Rate von „null“ anhand nachfolgender Gleichung über die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $q(t, T)$, welche vom Wissensstand des Investors \mathfrak{S} zum Zeitpunkt t abhängig ist, erfolgen:

$$(76) s(t, T) = -\frac{1}{T-t} \cdot \ln(1 - q(t, T)) \quad \text{mit } q(t, T) = P[\tau \leq T | \mathfrak{S}_t].$$

Die Grundlage zur Berechnung der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit bildet die Verteilungsfunktion des historischen Tiefs der Firmenwertentwicklung und somit Formel (25). Durch leichte Modifikation von Formel (25) erhält man:¹²²

$$(77) P[M_t \leq \ln(DB/V_0)] = P[M_t \leq x] = \Psi(t, x) = 1 - \Phi\left(\frac{mt - x}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2mx}{\sigma^2}} \cdot \Phi\left(\frac{x + mt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Wird darüber hinaus von einem konstanten Abstand des Firmenwerts vom historischen Tief des Firmenwerts $V_t - M_t = v$ ausgegangen, so wird die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit über folgendes Integral berechnet:

$$(78) P[\tau \leq T | \mathfrak{S}_t] = q(t, T) = \int_{-\infty}^{-v} \Psi(T-t, x) \cdot e^{x+v} dx$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$(79) q(t, T) = \Phi\left(\frac{-v - m \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{(T-t)}}\right) - e^{v+r(T-t)} \cdot \Phi\left(\frac{-v - \zeta(T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{(T-t)}}\right) + \frac{e^{(1-\gamma)v}}{\gamma} \cdot \Phi\left(\frac{m(T-t) - v}{\sigma \cdot \sqrt{(T-t)}}\right) - \frac{e^{v+(T-t)\beta}}{\gamma} \cdot \Phi\left(\frac{\delta(T-t) - v}{\sigma \cdot \sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$\text{mit } \zeta = m + \sigma^2, \quad \gamma = 1 + \frac{2m}{\sigma^2}, \quad \delta = m - \gamma\sigma^2 \quad \text{und} \quad \beta = -m\gamma + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}.^{123}$$

¹²¹ Vgl. Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2285

¹²² Vgl. Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2297

¹²³ Vgl. ebd. S. 2298f.

Wird Formel (79) in Gleichung (76) eingesetzt, so ergibt sich für den Credit Spread, dass dieser bei kurzen Restlaufzeiten gegen „null“ geht, sofern V_t größer als M_t ist, und bei $\nu = 0$ gegen ∞ geht. Nachfolgende Abbildung verdeutlicht dieses Ergebnis graphisch für $\nu = 0$, $\nu = 0,05$ und $\nu = 0,1$.¹²⁴

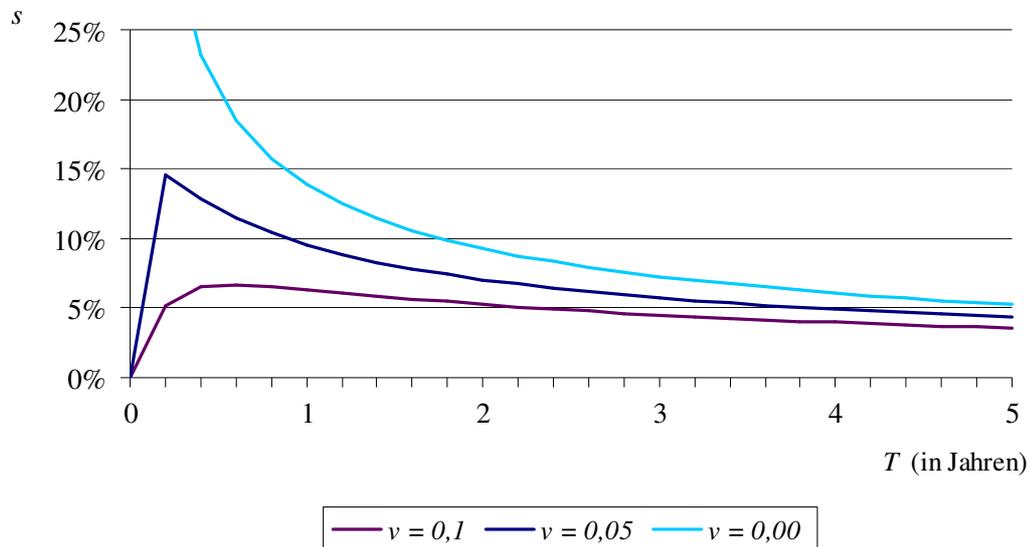


Abb. 6: Entwicklung des Credit Spreads bei bekannter Firmenwertentwicklung, aber unbekannter Ausfallschranke¹²⁵

Die bereits bekannte Problematik von Unternehmenswertmodellen, dass die Credit Spreads bei kürzeren (Rest-)Laufzeiten gegen „null“ gehen, besteht entsprechend – wenn der aktuelle Firmenwert über dem historischen Tief der Firmenwertentwicklung liegt – auch bei hybriden Kreditrisikomodellen mit unbekannter Ausfallschranke. Dies ist intuitiv nachvollziehbar, wenn man bedenkt, dass die unbekannte Ausfallschranke unterhalb des historischen Firmenwerts liegen muss, da das Unternehmen ansonsten bereits ausgefallen wäre, und, dass der aktuelle Firmenwert oberhalb des historischen Tiefs liegt. Es besteht sozusagen ein „Ausfallpuffer“ in Höhe der Differenz ν , welcher das Kreditrisiko insbesondere bei kurzen (Rest-)Laufzeiten gegen „null“ gehen lässt. Der steile Anstieg der Credit Spreads bei etwas längeren (Rest-)Laufzeiten sowie die sich anschließende kontinuierliche Abnahme der Credit Spreads bei noch längeren (Rest-)Laufzeiten lassen sich zum Einen darauf zurückführen, dass aufgrund des positiven Drifts die Credit Spreads bei längeren (Rest-)Laufzeiten sinken müssen, da der Ausfallpuffer tendenziell größer wird, und zum Anderen dadurch erklären, dass bei den etwas längeren (Rest-)Laufzeiten der Firmenwert noch verhältnismäßig nahe an dem historischen Tief und somit an der Ausfallschranke liegt, weshalb der Firmenwert leicht

¹²⁴ Alle anderen Parameter wurden identisch zu den bisher in den Beispielen der Unternehmenswertmodelle (ohne erweiterte Fremdkapitalmodellierung) getroffenen Annahmen gewählt.

¹²⁵ Eigene Berechnungen in Anlehnung an Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2298f.

unter die Ausfallschwelle sinken kann. Entsprechend gilt: je größer v und somit die Bonität des Unternehmens, umso kleiner wird der „Buckel“. Ist der aktuelle Firmenwert dagegen mit dem historischen Tief der Firmenwertentwicklung identisch ($v = 0$), so ist das Risiko, dass der Unternehmenswert kurzfristig weiter sinkt und dadurch die (unbekannte) Ausfallschranke durchschritten wird, entsprechend hoch. Folglich geht der Credit Spread in diesem Fall gegen ∞ . Aufgrund des positiven Drifts fällt der Credit Spreads jedoch bei zunehmender (Rest-) Laufzeit.¹²⁶

Modellierung des Credit Spreads bei unvollständiger Information über den Firmenwert.¹²⁷ Zu unvollständiger Information über den Firmenwert kommt es zum Beispiel dann, wenn die Investoren versuchen den Firmenwert lediglich aus unvollständigen oder fehlerhaften Bilanzen, welche sie unter Umständen nur unregelmäßig erhalten, zu berechnen. Geht man davon aus, dass den Investoren einerseits zum Zeitpunkt $t = 0$ die Höhe der Ausfallschranke bekannt ist, diese andererseits jedoch keinerlei Informationen über den Firmenwert haben (auch nicht zum Zeitpunkt $t = 0$),¹²⁸ berechnet sich die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit gemäß Formel (80) über:

$$(80) \quad q(t, T) = \frac{\Psi(T, x) - \Psi(t, x)}{1 - \Psi(t, x)} \quad \text{mit } x \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad q(t, T) = \frac{\Psi(T, y) - \Psi(t, y)}{1 - \Psi(t, y)} \quad \text{mit } y \leq 0$$

Je nach dem, ob die Ausfallschranke als fix oder zeitabhängig angenommen werden soll, ergibt sich $\Psi(t, x)$ bzw. $\Psi(t, y)$ entweder durch Formel (77) oder (34), wobei bei einer fixen Ausfallschranke $x = \ln(DB/V_0)$ und bei einer zeitabhängigen Ausfallschranke $y = \ln(K/V_0)$ gelten soll. Sofern im Folgenden nichts Anderes erwähnt wird, wird bei der Anwendung des Modells mit unvollständiger Information über den Firmenwert immer von einer zeitabhängigen Ausfallschranke gemäß Black und Cox ausgegangen und somit y über die Definition aus Formel (32) mit der Ausfallschranke DB in Beziehung gesetzt. Die beiden Modelltypen mit unbekannter Ausfallschranke gehen dagegen immer von einer konstanten Ausfallschranke aus.

Nachfolgende Abbildung zeigt die Entwicklung der Credit Spreads für unterschiedliche (Rest-)Laufzeiten sowie für unterschiedliche Volatilitäten unter der Annahme, dass $x = \ln(DB/V_0) = -0,3$, $t = 0,5$ und $Rec = 0\%$ entspricht.¹²⁹

¹²⁶ Vgl. Giesecke, Kay: Default Compensator, Incomplete Information, and the Term Structure of Credit Spreads. Berlin: Department of Economics der Humboldt-Universität zu Berlin, 2001. S. 21ff.

¹²⁷ Erstmals eingeführt wurde diese Idee durch Duffie und Lando; vgl. Duffie, Darrell et al.: Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information, in: *Econometrica*, Vol. 69, No. 3, May 2001.

¹²⁸ Vgl. Duffie, Darrell et al.: Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information, in: *Econometrica*, Vol. 69, No. 3, May 2001. S. 13

¹²⁹ Alle anderen Parameter wurden identisch zu den bisher in den Beispielen der Unternehmenswertmodelle (ohne erweiterte Fremdkapitalmodellierung) sowie den in diesem Abschnitt getroffenen Annahmen gewählt.

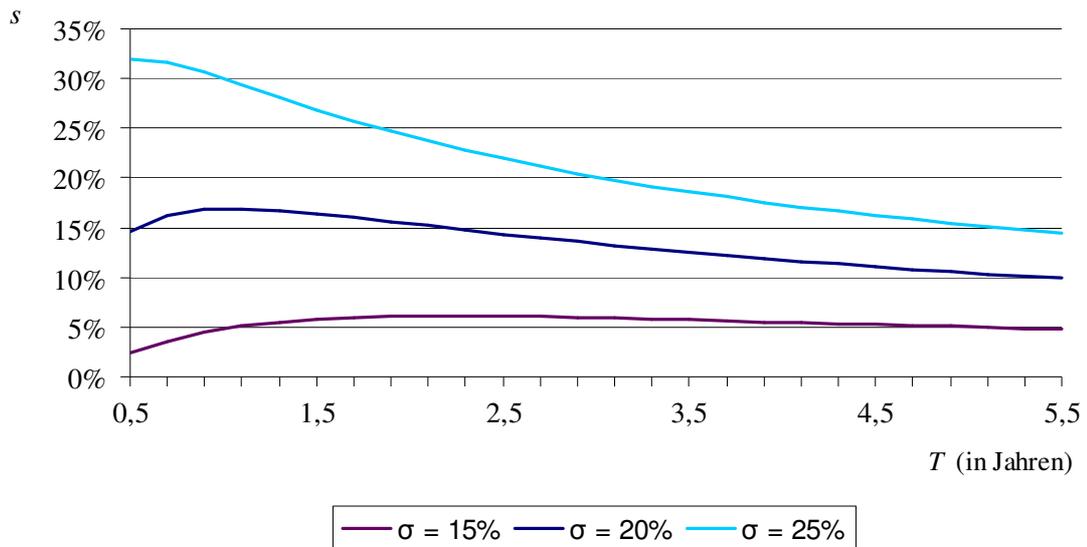


Abb. 7: Entwicklung des Credit Spreads bei bekannter Ausfallschranke, aber unbekanntem Firmenwert¹³⁰

Wie obige Abbildung zeigt, führt die Modellierung von Informationsdefiziten hinsichtlich des Firmenwerts dazu, dass selbst Credit Spreads bei kurzen (Rest-) Laufzeiten nicht gegen „null“ gehen. Nichtsdestotrotz fallen die Credit Spreads bei kurzen (Rest-)Laufzeiten noch einmal ab. Dies liegt daran, dass nur zum Zeitpunkt $t = 0$ der Firmenwert unbekannt ist und gleichzeitig klar ist, dass die Firma (noch) nicht ausgefallen ist. Daher würden die Credit Spreads exakt zu diesem Zeitpunkt „null“ entsprechen, wenn die Laufzeit ebenfalls „null“ wäre. Hierbei ist anzumerken, dass ein derartiges Geschäft wenig sinnvoll und somit unrealistisch ist. Sobald die Laufzeit jedoch minimal größer als „null“ ist, steigt das Risiko eines Ausfalls deutlich an, da den Investoren nicht bekannt ist, wie weit der Firmenwert von der (bekannten) Ausfallschranke entfernt ist. Man beachte, dass diese Aussage nur für die Laufzeit und nicht für die Restlaufzeit gilt, da bei einer Verkürzung der Restlaufzeit – und somit bei Betrachtung eines Zeitpunkts $t \neq 0$ – der Firmenwert per Definition immer unbekannt ist. Im Gegensatz zu Unternehmenswertmodellen ist somit der Eintritt eines Ausfallereignisses nicht vorherzusehen, weshalb die Credit Spreads selbst bei infinitesimal kurzen Restlaufzeiten größer als „null“ sind. Das Absinken der Credit Spreads bei längeren (Rest-)Laufzeiten ist auch hier auf den positiven Drift zurückzuführen. Folglich führt die Annahme eines unbekanntem Firmenwerts im Vergleich zu den Credit Spreads bei den Unternehmenswertmodellen oder den Credit Spreads unter der Annahme einer unbekanntem Ausfallschranke zu realistischeren Ergebnissen. Darüber hinaus zeigt die Abbildung, dass bei höherem Risiko – ausgedrückt in der Volatilität – die Credit Spreads erwartungsgemäß deutlich ansteigen.

¹³⁰ Eigene Berechnungen in Anlehnung an Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2299f.

Modellierung des Credit Spreads bei unvollständiger Information über den Firmenwert und die Ausfallschranke. Sind weder die Ausfallschranke noch der Firmenwert bekannt, so können die Investoren lediglich den Eintritt eines Ausfallereignisses am Markt beobachten. Da sowohl der Firmenwert als auch die Höhe der Ausfallschranke unbekannt sind, können die Investoren den Abstand des Firmenwerts zur Ausfallschranke erst bei Eintritt des Ausfallereignisses und somit ausschließlich bei $v = 0$ feststellen. Entsprechend muss die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit ebenfalls mit $v = 0$ berechnet werden:¹³¹

$$(81) \quad q(t, T) = \frac{q(T) - q(t)}{1 - q(t)}$$

Durch Einsetzen von Formel (79) erhält man für $t = 0,5$ unter der Annahme von einer Recovery-Rate von „null“ sowie für unterschiedliche Volatilitäten die nachfolgend abgebildete Struktur der Credit Spreads:¹³²

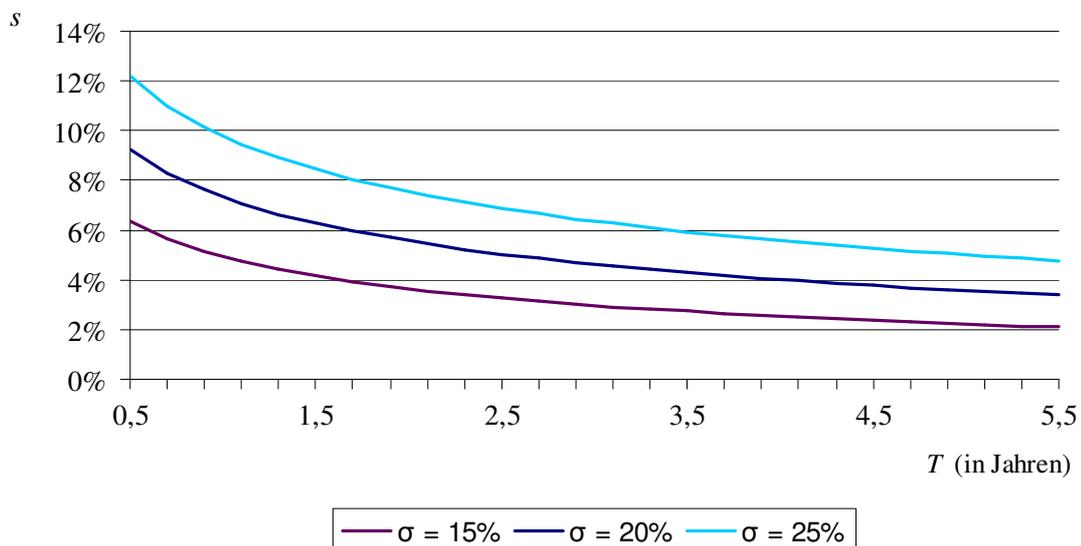


Abb. 8: Entwicklung des Credit Spreads bei unbekannter Ausfallschranke sowie unbekanntem Firmenwert¹³³

Wie obige Abbildung verdeutlicht, gelingt es hybriden Kreditrisikomodellen mit Informationsdefiziten hinsichtlich der Ausfallschranke sowie des Firmenwerts die Problematik von Unternehmenswertmodellen, dass der Credit Spread für kurze (Rest-) Laufzeiten gegen „null“ geht, zu beheben. Dies ist auf die notwendige Definition, dass $v = 0$ entsprechen muss und somit auf das bereits beim Fall mit unbekannter Ausfallschranke

¹³¹ Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2300f.

¹³² Alle anderen Parameter wurden identisch zu den bisher in den Beispielen der Unternehmenswertmodelle (ohne erweiterte Fremdkapitalmodellierung) sowie den in diesem Abschnitt getroffenen Annahmen gewählt.

¹³³ Eigene Berechnungen in Anlehnung an Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2300f.

beschriebene Risiko, dass ein leichtes Absinken des Firmenwerts bereits ein Ausfallereignis hervorrufen kann, zurückzuführen. Das Absinken der Credit Spreads bei längeren (Rest-) Laufzeiten ist auch hier auf den positiven Drift zurückzuführen.

Auffällig ist, dass in allen drei beschriebenen Modelltypen aufgrund der hinzugekommenen Unsicherheit der Credit Spread gegenüber den Unternehmenswertmodellen mit vollständiger Information deutlich steigt.¹³⁴ Dieser Effekt wird dadurch verstärkt, dass bei den Modellen mit unbekannter Ausfallschranke der „Ausfallpuffer“ ν mit Werten $\leq 0,1$ sehr gering gewählt wurde sowie bei dem Modell mit unbekanntem Firmenwert die Ausfallschranke anhand $x = -0,3$ relativ hoch angenommen wurde, was in allen drei Modelltypen impliziert, dass ein bonitätsschwaches bzw. hoch verschuldetes Unternehmen betrachtet wird.¹³⁵ Dies relativiert sich, wenn die Annahmen für ν und x weniger restriktiv getroffen werden: die Credit Spreads liegen dann aufgrund der hinzugekommenen Unsicherheitskomponente zwar immer noch oberhalb der Credit Spreads aus dem First-Passage Ansatz, der Unterschied fällt dann aber bei weitem nicht mehr so drastisch aus.¹³⁶

Bestimmung der Intensitäten. Im Folgenden soll zuerst für den Fall des unbekanntem Firmenwerts und unbekannter Ausfallschranke die Intensität berechnet werden. Aus der Verteilungsfunktion des historischen Tiefs der Firmenwertentwicklung in Abhängigkeit von t und x ergibt sich für den Ausfalltrend:¹³⁷

$$(82) \quad A_t = -\ln\left(1 - \int_{-\infty}^0 \Psi(t, x) \cdot e^x dx\right)$$

Die Intensität ergibt sich gemäß Formel (49) aus der Dichtefunktion geteilt durch eins minus der Verteilungsfunktion und somit über:

¹³⁴ Es ist zu beachten, dass der Credit Spread in den drei Graphen dieses Abschnitts in Prozent und nicht wie bei den Unternehmenswertmodellen mit vollständiger Information in bps abgetragen wurde.

¹³⁵ Geht man von $V_0 = 100$ GE, $r = k = 5\%$ und $T = 5$ Jahre aus, so impliziert $x = -0,3$, dass die Ausfallschranke DB in $t = 0$ bei rd. 74,0818 GE liegen muss. Geht man darüber hinaus davon aus, dass die Ausfallschranke wie bei dem Ansatz nach Black und Cox definiert ist, d.h. die Ausfallschranke in $t = 0$ entspricht dem diskontierten Nominal des Fremdkapitals, so beträgt der Rückzahlungsbetrag des Fremdkapitals bei Fälligkeit in T rd. 95,1229 GE. Dies macht deutlich, dass $x = -0,3$ mit $L = 0,7408$ einem relativ hohen „Quasi-Verschuldungsgrad“ in $t = 0$ entspricht.

¹³⁶ Vgl. Beispielrechnung zu diesem Kapitel

¹³⁷ Vgl. Giesecke, Kay: Default Compensator, Incomplete Information, and the Term Structure of Credit Spreads. Berlin: Department of Economics der Humboldt-Universität zu Berlin, 2001. S. 23

$$(83) \quad \lambda_t = \frac{\int_{-\infty}^0 \Psi'(t, x) e^x dx}{1 - \int_{-\infty}^0 \Psi(t, x) e^x dx} \quad \text{mit } t \in (0, \tau) \text{ und der 1. Ableitung von } \Psi(t, x) \text{ nach } t:$$

$$\Psi'(t, x) = \frac{1}{2\sigma} \left[\left(\frac{m}{\sqrt{t}} - \frac{x}{\sqrt{t^3}} \right) \cdot e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \cdot \Phi\left(\frac{x + mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) - \left(\frac{x}{\sqrt{t^3}} + \frac{m}{\sqrt{t}} \right) \cdot \Phi\left(\frac{mt - x}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right].^{138}$$

Bei bekannter Ausfallschranke, aber unbekanntem Firmenwert ist x per Definition gegeben. Der Ausfalltrend und die Intensität sind dementsprechend nur noch von dessen Höhe sowie der Zeit abhängig. Entsprechend vereinfachen sich die Gleichungen (82) und (83) wie in (84) dargestellt:

$$(84) \quad A_t = -\ln(1 - \Psi(t, x)) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_t = \frac{\Psi'(t, x)}{1 - \Psi(t, x)}.$$

Da der Ausfalltrend bei bekanntem Firmenwert, aber unbekannter Ausfallschranke über das historische Tief der Firmenwertentwicklung gesteuert wird und dadurch der Prozess nicht absolut kontinuierlich ist, ist die Bestimmung einer Intensität in diesem Fall nicht möglich.¹³⁹ Der ökonomische Hintergrund liegt darin, dass die Investoren bei unbekannter Ausfallschranke im Verlauf der Zeit dazulernen: da die Ausfallschranke fix ist, wissen die Investoren eines solventen Unternehmens, dass das Unternehmen auch in Zukunft nicht ausfallen wird, solange der Firmenwert oberhalb des historischen Minimums verbleibt. Dementsprechend ist die Ausfallwahrscheinlichkeit in diesem Fall gleich „null“ und somit existiert keine positive Ausfallintensität.¹⁴⁰

Sobald über ein hybrides Kreditrisikomodell eine Intensität ermittelt worden ist, kann diese dazu verwendet werden, um die im Rahmen von Abschnitt 3.2 genannten Formeln zur Bewertung ausfallrisikobehafteter Finanzinstrumente anzuwenden. Auch, wenn bei unbekannter Ausfallschranke die Bestimmung der Intensität nicht möglich ist, können dennoch die genannten Bewertungsformeln genutzt werden, wenn statt des Integrals der Intensität ein Ausfalltrend zur Bewertung eingesetzt wird, welcher nicht zeitabhängig ist und somit nicht über ein Integral bestimmt werden müsste.¹⁴¹

¹³⁸ Ebenda sowie Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 56f.

¹³⁹ Vgl. Giesecke, Kay: Default Compensator, Incomplete Information, and the Term Structure of Credit Spreads. Berlin: Department of Economics der Humboldt-Universität zu Berlin, 2001. S. 20

¹⁴⁰ Vgl. Thabe, Tim: Bewertung von Kreditrisiko, Zahlungsunfähigkeit, optimale Kapitalstruktur und Agencykosten bei unvollständiger Information. Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Wirtschaftswissenschaften der Universität Mannheim. Mannheim: 2006. S. 33

¹⁴¹ Für eine ausführliche Diskussion vgl. Giesecke, Kay et al.: Forecasting Default in the Face of Uncertainty, in: The Journal of Derivatives Vol. Fall/04, 2004. S. 13ff.

Alternativ zu den Formeln (83) und (84) kann die zur Bewertung notwendigerweise zu ermittelnde Intensität über die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit ermittelt werden.^{142,143}

$$(85) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}[\tau \leq T | \mathcal{F}_t] = q(t, T) &= 1 - e^{-\int_t^T \lambda_s ds} \\ \Leftrightarrow \int_t^T \lambda_s ds &= -\ln(1 - q(t, T)) \end{aligned}$$

Beispiel

Da die hybriden Kreditrisikomodelle eine Mischung der beiden vorherigen Modelltypen darstellen, möchte Investor A diese nutzen, um eine Vergleichsrechnung zu den bisherigen Modellergebnissen anzustellen. Da im Zeitpunkt $t = 0$ in der Regel alle notwendigen Parameter zur Bestimmung der Ausfallschranke bekannt sind, verzichtet er auf die Anwendung des Modells mit unbekannter Ausfallschranke.¹⁴⁴ Entsprechend beschließt er sich hauptsächlich mit dem hybriden Kreditrisikomodell mit unbekanntem Firmenwert, aber bekannter Ausfallschranke sowie – interessehalber – zusätzlich mit dem hybriden Kreditrisikomodell mit unbekannter Ausfallschranke und unbekanntem Firmenwert zu beschäftigen. Als Grundlage seiner Berechnungen dienen ihm die in den vorherigen Beispielen getroffenen Spezifikationen der Modellparameter. Da er weiß, dass hybride Kreditrisikomodelle aufgrund des höheren Unsicherheitsfaktors durch die niedrigere Informationsbasis zu tendenziell höheren Credit Spreads und somit niedrigeren Barwerten der untersuchten Finanztitel führen, vermutet er jedoch, dass auch die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen zu dem Ergebnis führen, dass der Emissionspreis zu hoch gewählt ist.

Investor A beginnt mit dem hybriden Kreditrisikomodell mit unvollständiger Information über den Firmenwert. Da die hybriden Kreditrisikomodelle auf dem First-Passage Ansatz beruhen, soll die Ausfallschranke der Definition von Black und Cox folgen. Somit ergibt sich diese bei $k = r$ gemäß Gleichung (32) aus dem diskontierten Nominal des Fremdkapitals. Der Investor errechnet anhand der fünfjährigen Laufzeit, dem risikolosen Zinssatz in Höhe von 5% und dem Nominal des Fremdkapitals in Höhe von 70 Geldeinheiten eine zeitabhängige Ausfallschranke DB zum Zeitpunkt $t = 0$ von rd. 54,5161 Geldeinheiten. Darüber hinaus trifft er die (zufällige) Annahme, dass $y = \ln(K/V_0) = -0,4520$ entspricht, woraus sich ein unbekannter Firmenwert zum Zeitpunkt $t = 0$ in Höhe von $V_0 = 110$ Geldeinheiten ergibt. In diesem konkreten Beispiel führt die zufällige Bestimmung von y also zu der Erkenntnis, dass

¹⁴² Vgl. Gleichung (56).

¹⁴³ Vgl. Giesecke, Kay: Default Compensator, Incomplete Information, and the Term Structure of Credit Spreads. Berlin: Department of Economics der Humboldt-Universität zu Berlin, 2001. S. 24

¹⁴⁴ Vgl. Thabe, Tim: Bewertung von Kreditrisiko, Zahlungsunfähigkeit, optimale Kapitalstruktur und Agencykosten bei unvollständiger Information. Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Wirtschaftswissenschaften der Universität Mannheim. Mannheim: 2006. S. 33

in dem bisher angenommenen Firmenwert zum Zeitpunkt $t = 0$ stille Reserven in Höhe von 10 Geldeinheiten ruhen. Für die Berechnung im Modell mit unbekannter Ausfallschranke sowie unbekanntem Firmenwert entfällt zum Einen die Annahme über einen Wert für y und zum Anderen ist der Investor per Definition an die Annahme $v = 0$ gebunden. Unter ansonsten gleichen Bedingungen errechnet der Investor folgende Werte, wobei er beiden Modelltypen eine Recovery-Zahlung von 40% zugrunde legt:

	Gemäß Formel	Modell mit unbekanntem Firmenwert	Modell mit unbekannter Ausfallschranke und unbekanntem Firmenwert
Bed. Ausfallwahrscheinlichkeit $q(0,T)$	(80) bzw. (81)	16,2712%	23,1240%
Credit Spread $s(0,T)$	(16)	205,4549 bps	298,7276 bps
Integral der Intensität $\int_0^T \lambda_s ds$	(85)	0,1776	0,2630
Barwert des Zerobonds B_0	(56)	49,1938 GE	46,9523 GE

Tab. 10: Vergleich des Modells mit unbekanntem Firmenwert zu dem Modell mit unbekannter Ausfallschranke und unbekanntem Firmenwert¹⁴⁵

Wie der Vergleich der beiden Modelltypen zeigt, führen diese zu deutlich höheren Credit Spreads als die Unternehmenswertmodelle. Dies lässt sich – zumindest für das hybride Kreditrisikomodell mit unbekannter Ausfallschranke und unbekanntem Firmenwert – auf die erhöhte Unsicherheit aufgrund der hinzugekommenen Informationsdefizite und den damit verbundenen Annahmen, wie $v = 0$, zurückführen. Für das Modell mit unbekanntem Firmenwert wird im Folgenden gezeigt werden, dass diese – auf den ersten Blick plausible – Erklärung nicht zutreffend ist. Darüber hinaus mag es verwundern, dass der Barwert des Zerobonds in beiden Modellen trotz der im Vergleich zum First-Passage Ansatz geringeren (bedingten) Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitraum von $t = 0$ bis $T = 5$ (dort: $p_T = 23,3234\%$) deutlich niedriger ausfällt. Der Hintergrund dessen liegt darin, dass der obigen Rechnung die Annahme einer Recovery-Zahlung in Höhe von 40% zugrunde liegt. Einerseits ist diese Annahme zwar – wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben – mit empirischen Ergebnissen konsistent, andererseits bauen hybride Kreditrisikomodelle grundsätzlich auf dem First-Passage Ansatz auf, welchem – zumindest bei einer zeitabhängigen Ausfallschranke nach Black und Cox – der Gedanke zugrunde liegt, dass die Recovery-Rate durch die Annahme

¹⁴⁵ Eigene Berechnungen

über die Ausfallschranke relativ hoch ist.¹⁴⁶ Dementsprechend sollte im Fall des Informationsdefizits hinsichtlich des Firmenwerts die Recovery-Rate des First-Passage Ansatzes Anwendung finden. Bei dem Modell mit unbekannter Ausfallschranke und unbekanntem Firmenwert ist die Recovery-Rate aufgrund der stochastischen Höhe der Ausfallschranke zufällig und sollte sich daher eher an empirischen Daten orientieren als an der impliziten Recovery-Rate von Unternehmenswertmodellen. Da eine Recovery-Annahme von 40% in den vorherigen Beispielen als realistisch angenommen wurde, wird der genannte Modelltyp nicht weiter modifiziert. Das Ergebnis bestätigt die oben beschriebene Vermutung, dass hybride Kreditrisikomodelle mit Informationsdefiziten hinsichtlich der Ausfallschranke sowie des Firmenwerts aufgrund der Annahme von $v = 0$ deutlich geringere Barwerte erzielen. Wird demgegenüber die Recovery-Rate bei dem Modell mit unbekanntem Firmenwert an die implizite Recovery-Rate beim First-Passage Ansatz angepasst, d.h. $Rec = 91,9687\%$, so ergeben sich als fairer Barwert des Zerobonds 53,8036 Geldeinheiten. Damit liegt der faire Barwert trotz der hohen Recovery-Rate und der aufgedeckten stillen Reserven noch (knapp) unterhalb des Emissionspreises von 54 Geldeinheiten. Bei identischer Recovery-Rate hätten rund 19 Geldeinheiten als stille Reserven aufgedeckt werden müssen, um einen fairen Barwert in Höhe des Emissionspreises zu erzielen. Für den Investor bedeutet dieses Ergebnis, dass die Zeichnung des Zerobonds auch gemäß dieser Berechnungen unattraktiv ist.

Darüber hinaus ist anzumerken, dass das Modell mit Informationsdefiziten hinsichtlich des Firmenwerts bei entsprechender Definition von y , welche zu $V_0 = 100$ führen würde, mit dem First-Passage Ansatz identisch wäre. Diese Aussage gilt ebenfalls hinsichtlich des Credit Spreads, weshalb der im Vergleich zum First-Passage Ansatz höhere Credit Spread in obiger Tabelle nicht durch das Informationsdefizit zu erklären ist. Vielmehr liegt der Grund dafür in der abweichenden Annahme hinsichtlich der Recovery-Rate.

3.3.1 Kritische Würdigung von hybriden Kreditrisikomodelle

Der Vorteil hybrider Kreditrisikomodelle liegt darin, dass diese einerseits auf der Ausfalldefinition von intuitiv nachvollziehbaren und ökonomisch begründbaren Unternehmenswertmodellen aufbauen (und deren Ergebnisse somit selbst intuitiv nachvollziehbar und ökonomisch begründbar sind) sowie andererseits – wie bei Intensitätsmodellen – der Eintritt eines Ausfallereignisses nicht vorhersehbar ist.¹⁴⁷ Dadurch ermöglichen Kreditrisikomodelle mit unvollständiger Information eine explizite Bestimmung des Ausfalltrends, welcher genutzt werden kann, um Ausfallwahrscheinlichkeiten und Preise von kreditrisikosensitiven Finanzinstrumenten anhand der allgemeinen Formeln aus den Intensitätsmodellen zu berechnen. Darüber hinaus weisen Kreditrisikomodelle mit unvollständiger Information einen abrupten Verfall des Werts eines entsprechenden Finanzinstruments bei Eintritt eines Ausfallereignisses auf den Wert der Recovery-Zahlung aus und – wie die Abbildungen 7 und 8 verdeutlichen – gehen deren kurzfristige Credit

¹⁴⁶ Vgl. Kapitel 3.1.2.2

¹⁴⁷ Vgl. Giesecke, Kay: Default and Information, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006. S. 2283

Spreads aufgrund der Unsicherheit nicht gegen „null“. ¹⁴⁸ Die beiden letztgenannten Eigenschaften sind konform zu entsprechenden empirischen Beobachtungen, wodurch deutlich wird, dass es den hybriden Modellen gelingt einige wesentliche Nachteile der Unternehmenswertmodelle aufzuheben. ¹⁴⁹ Daneben entsprechen die Annahmen unvollständiger Information über den Firmenwert sowie über die Höhe der Ausfallschranke eher der Realität als die Annahme vollständiger Information. ¹⁵⁰ Alles in Allem können hybride Kreditrisikomodelle daher eine Alternative zu den derzeit in der Praxis bevorzugten Intensitätsmodellen darstellen.

3.4 Praxisbeispiel: Bewertung von Credit Default Swaps

Nachfolgend soll die Bewertung von Credit Default Swaps (CDS) anhand eines Kreditrisikomodells beschrieben werden. Hierzu wird zuerst die Funktionsweise von CDS beschrieben sowie die allgemeine Bewertungsformel hergeleitet. Anschließend wird die Bewertungsformel in das entsprechende Kreditrisikomodell eingebunden.

Funktionsweise und Bewertungsformel von Credit Default Swaps. Ein Credit Default Swap ermöglicht dem Sicherungsnehmer den Transfer des Kreditrisikos aus einem zugrunde liegenden Geschäft auf den Sicherungsgeber. Das Grundkonzept ähnelt dabei dem einer klassischen Versicherung, einer Garantie oder einem Standby-Letter-of-Credit. ¹⁵¹ Während der Laufzeit des Kontraktes entrichtet der Sicherungsnehmer in periodischen Abständen Prämienzahlungen an den Sicherungsgeber. Die Höhe dieser Prämienzahlungen ist abhängig von der Höhe des potentiellen Schadens und von der Schadenseintrittswahrscheinlichkeit. ¹⁵² Dementsprechend ist die Bonität des Schuldners die maßgebliche Bestimmungsgröße für den Preis des CDS. Die Berechnung der Prämienzahlung erfolgt in der Regel in Basispunkten per annum von dem abzusichernden Nominalbetrag. ¹⁵³ Kommt es während der Laufzeit des Kreditderivats nicht zum Eintritt eines Ausfallereignisses geht das Kreditrisiko nach dem Verfall des CDS wieder auf den Sicherungsnehmer über. In dem Fall, dass das Ausfallereignis während der Laufzeit eintritt, ist der Sicherungsgeber zu einer Ausgleichsleistung gegenüber dem Sicherungsnehmer verpflichtet. Diese Recovery-Zahlung soll im Folgenden als konstanter Prozentsatz des Nominals des Fremdkapitals angenommen

¹⁴⁸ Vgl. Duffie, Darrell und Lando, David: Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information, in: *Econometrica*, Vol. 69, No. 3, May 2001. S. 24

¹⁴⁹ Ebenda.

¹⁵⁰ Vgl. Giesecke, Kay et al.: Forecasting Default in the Face of Uncertainty, in: *The Journal of Derivatives*, Herbst 2004, 2004. S. 12

¹⁵¹ Vgl. Hüttemann, Petra: Derivate Instrumente für den Transfer von Kreditrisiken, in: Oehler, Andreas: *Credit Risk and Value-at-Risk Alternativen – Herausforderungen für das Risk Management*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 1998. S. 58

¹⁵² Vgl. Horat, Robert: Kreditderivate – Variantenreiche Finanzinstrumente mit Potential für die Praxis, in: *Der Schweizer Treuhänder*, November 2003. S. 970

¹⁵³ Vgl. Neske, Christian: Grundformen von Kreditderivaten, in: Burghof, Hans-Peter et al.: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005. S. 56

werden. Die Laufzeit des CDS wird damit gleichzeitig beendet.¹⁵⁴ Der „faire“ Preis eines CDS-Kontraktes ist definiert als derjenige Spread, bei dem der Marktwert des CDS genau „null“ entspricht. Unter den Annahmen eines perfekten Markts wird ein Geschäft immer gerade so vereinbart, dass es „fair“ ist. Der Marktwert ergibt sich aus der Summe der Barwerte der beiden Komponenten des CDS, dem sog. Fee- und dem sog. Contingent-Leg.¹⁵⁵ Die erste Komponente, das Fee-Leg, bildet die Prämienzahlungen seitens des Sicherungsnehmers an den Sicherungsgeber ab und berücksichtigt gleichzeitig, dass diese Zahlungen bei Eintritt eines Ausfallereignisses eingestellt werden. Die zweite Komponente, das Contingent-Leg, erfasst die Ausgleichsleistung seitens des Sicherungsgebers, welche lediglich bei Eintritt des Ausfallereignisses fällig wird. Während sich der Zähler der nachfolgenden Formel im Wesentlichen aus dem Contingent-Leg des CDS-Kontrakts ergibt (lediglich die Multiplikation mit dem Nominal des CDS-Kontrakts kürzt sich heraus), besteht der Nenner im Wesentlichen aus den Bestandteilen des Fee-Legs (ohne die Multiplikation mit dem Nominal, da sich dieses herauskürzt und ohne Multiplikation mit dem CDS-Spread, welcher auf die andere Seite der Gleichung geholt wurde). Darüber hinaus liegt der nachfolgenden Formel die Annahme zugrunde, dass der Ausfallzeitpunkt τ ungefähr in der Mitte einer Periode $[t_{i-1}, t_i]$ liegt. Für den Zeitraum $[t_{i-1}, \tau]$ muss der Sicherungsnehmer daher noch die halbe Prämie $N \times s^{CDS} \times \Delta i / 2$ zahlen. Dementsprechend ist diese Prämie mit dem Diskontfaktor $DF[(t_{i-1}+t_i)/2]$ für die Intervallmitte zu diskontieren. Der „faire“ Credit Default Spread berechnet sich daher näherungsweise anhand:

$$(86) \quad s_0^{CDS} \approx \frac{(1 - Rec) \cdot \sum_{i=1}^n DF_{\left[\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right]} \cdot (p_{surv}(i-1) - p_{surv}(i))}{\sum_{i=1}^n \Delta i \cdot DF_i \cdot p_{surv}(i) + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta i}{2} \cdot DF_{\left[\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right]} \cdot (p_{surv}(i-1) - p_{surv}(i))}$$

mit der Überlebenswahrscheinlichkeit $p_{surv}(i)$ bis zum Zeitpunkt t_i .¹⁵⁶ Darüber hinaus ist $p_{def}(i)$ definiert als periodenadäquate Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen t_{i-1} und t_i . Daher gilt $p_{def}(i) = p_{surv}(i-1) - p_{surv}(i)$.

Verzichtet man auf die Annahme, dass der Ausfall in der Mitte einer Periode statt findet, so müssen die Terme, welche von dem Ausfallzeitpunkt abhängig sind, über die gesamte Laufzeit integriert werden. Durch diesen Erweiterung vom diskreten zum kontinuierlichen Fall ergibt sich die mathematisch exakte Bewertungsformel anhand:

¹⁵⁴ Vgl. Cremers, Heinz et al.: Risikosteuerung mit Kreditderivaten unter besonderer Berücksichtigung von Credit Default Swaps. Frankfurt School of Finance & Management Working Paper Series No. 80, Frankfurt, 2007. S. 21

¹⁵⁵ Vgl. ebd. S. 30ff.

¹⁵⁶ Für eine detaillierte Herleitung s. Cremers, Heinz et al.: Risikosteuerung mit Kreditderivaten unter besonderer Berücksichtigung von Credit Default Swaps. Frankfurt School of Finance & Management Working Paper Series No. 80, Frankfurt, 2007. S. 30ff.

$$(87) \quad s_0^{CDS} = \frac{(1 - Rec) \cdot \int_{t_0}^{t_n} DF_u \cdot (p_{surv}(u) - p_{surv}(u + du))}{\sum_{i=1}^n \Delta i \cdot DF_i \cdot p_{surv}(i) + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Delta i \cdot \frac{u - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot DF_u \cdot (p_{surv}(u) - p_{surv}(u + du))}$$

mit $u =$ Ausfallzeitpunkt.¹⁵⁷

Auswahl eines adäquaten Kreditrisikomodells. Aufgrund der in Abschnitt 3.1.4 genannten Nachteile haben sich für die Bewertung von CDS-Kontrakten in der Praxis Unternehmenswertmodelle nicht durchsetzen können. Insbesondere die Tatsache, dass Unternehmenswertmodelle bei empirischen Untersuchungen meist zu nicht realitätsnahen Ergebnissen führten, hat dazu geführt, dass sich Intensitätsmodelle als Marktstandard für die Bewertung von CDS-Kontrakten herausgebildet haben. Konkret wird insbesondere das Intensitätsmodell mit einer als konstant angenommenen Recovery-Rate und einer deterministischen Intensität in der Praxis angewendet, da damit zum Einen die Ausfallintensität „gebootstrapt“ und zum Anderen eine näherungsweise Bewertung auf Basis von Spreadänderungen durchgeführt werden kann.¹⁵⁸ Hybride Kreditrisikomodelle stellen eine adäquate Alternative bei der Bewertung von CDS-Kontrakten dar, doch da diese eine relativ neue Form der Kreditrisikomodellierung darstellen, haben sich diese bislang noch nicht am Markt etabliert. Im Folgenden soll dementsprechend die Bewertung anhand des besagten Intensitätsmodells stattfinden. Dabei steht insbesondere die für Intensitätsmodelle besonders wichtige Kalibrierung mit aktuellen Marktdaten im Vordergrund.

Kalibrierung des Intensitätsmodells anhand aktueller Marktdaten. Im Folgenden sollen aus den am Markt quotierten CDS-Spreads die Intensität hergeleitet werden. Dies wird allgemein auch als „Bootstrapping der Ausfallintensität“ bezeichnet.¹⁵⁹ Die auf diese Weise errechneten Ausfallintensitäten sollen genutzt werden, um das in Kapitel 3.2.3 unterbrochene Beispiel wieder aufzugreifen und die Analyse des Marktes einzubeziehen. Es ist jedoch zu beachten, dass im Folgenden – wie bereits erwähnt – nicht ein stochastisches, sondern ein deterministisches Intensitätsmodell zur Bewertung verwendet wird. Die Berechnung von CDS-Spreads kann analog der im Folgenden dargestellten Vorgehensweise und somit letztlich anhand von einer der beiden oben genannten Gleichungen (86) oder (87) erfolgen, wobei jedoch anstelle der CDS-Spreads die entsprechenden Ausfall- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten oder die entsprechenden Ausfallintensitäten benötigt würden.

Für die Berechnung gelten weiterhin die bereits in Kapitel 3.2.3 zugrunde gelegten Spezifikationen des Zerobonds, welche insbesondere 40% als Annahme für die Recovery-

¹⁵⁷ Vgl. Schmidt, Wolfgang: Credit Default Swaps: Analyse und Bewertung. Deutsche Bank, Global Markets Research & Analytics. März 2001. S. 15

¹⁵⁸ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 167

¹⁵⁹ Vgl. ebd. S. 175

Rate vorsehen. Darüber hinaus entnimmt Investor A die aktuellen CDS-Spreads des Unternehmens B den Marktdaten:

Jahr	1	2	3	4	5
CDS-Spread s^{CDS} in bps	4,279	6,065	8,358	n/a	18,042

Tab. 11: CDS-Spreads anhand aktueller Marktdaten

Da der CDS-Markt für vierjährige Laufzeiten nicht hinreichend liquide ist, ist am Markt kein CDS-Spread für diese Laufzeit verfügbar. Der Investor behilft sich, indem er diesen durch lineare Interpolation berechnet. Er verwendet entsprechend einen CDS-Spread von 13,200 bps für die vierjährige Laufzeit. Zur Kalibrierung anhand von Marktdaten macht man sich die Annahme vollkommener Märkte zu nutze, indem vorausgesetzt wird, dass die am Markt quotierten CDS-Spreads „fair“ sind. Auf diese Weise ist es möglich den CDS-Spread in eine der beiden obigen Gleichungen (86) oder (87) einzusetzen. Für die Kalibrierung wird der diskrete Fall, also Formel (86) verwendet. Unter der Voraussetzung, dass die Recovery-Rate sowie die Zinsstrukturkurve bekannt sind bzw. entsprechenden Annahmen oder Modellierungen unterliegen, können die periodenadäquaten Intensitäten λ_i berechnet werden. Hierbei wird zuerst die Zinsstrukturkurve dazu verwendet, um die Diskontfaktoren zu bestimmen. Idealerweise sollten hierzu neben den ganzjährigen Swapsätzen auch die 6-Monats-Swapsätze herangezogen werden, um die Diskontfaktoren für die Intervallmitte von t_{i-1} und t_i zu bestimmen. Sollten diese nicht vorhanden sein, so können diese – insbesondere bei einer flachen Zinsstruktur, wie diese vereinfachend dem genannten Beispiel zugrunde liegt – durch lineare Interpolation bestimmt werden. Die Diskontfaktoren lassen sich über nachfolgende Formeln bestimmen:

$$(88) \quad DF_1 = \frac{1}{1+r_1} \quad \text{bzw.} \quad DF_n = \frac{1 - r_n \sum_{i=1}^n DF_i}{1+r_n} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Diskontfaktoren, der Recovery-Rate, des CDS-Spreads für jede Periode t_i und der Überlebenswahrscheinlichkeit der Vorperiode t_{i-1} in Gleichung (86) sowie Umformung nach der Überlebenswahrscheinlichkeit $p_{surv}(i)$ bis zum Zeitpunkt t_i , lässt sich selbige bestimmen.¹⁶⁰ Ist die Überlebenswahrscheinlichkeit $p_{surv}(i)$ bestimmt, so kann anhand dieser auch die periodenadäquate Intensität λ_i berechnet werden. Diese ergibt sich durch Umformung von $p_{surv}(i) = p_{surv}(i-1) \cdot e^{-\lambda_i}$. Nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die aus den aktuellen Marktdaten abgeleiteten Überlebenswahrscheinlichkeiten und Intensitäten:

¹⁶⁰ Da das Unternehmen zum Zeitpunkt der Berechnung noch solvent sein muss, fließt hierbei die offensichtliche Annahme, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt $t = 0$ „eins“ entsprechen muss, ein.

Jahr	DF_i	$p_{surv}(i)$	λ_i
½	0,9762	99,9304%	0,0696%
1	0,9524		
1 ½	0,9297	99,8015%	0,1291%
2	0,9070		
2 ½	0,8854	99,5858%	0,2163%
3	0,8638		
3 ½	0,8433	99,1123%	0,4766%
4	0,8227		
4 ½	0,8031	98,4671%	0,6531%
5	0,7835		
Integral der periodenadäquaten Intensitäten			1,5447%

Tab. 12: Überlebenswahrscheinlichkeiten bis t_i und Intensitäten¹⁶¹

Zur Bewertung muss zuerst das Integral der Intensität bestimmt werden, welches sich, da $\Delta i = 1$ gilt, aus der Summe der periodenadäquaten Intensitäten ergibt, bevor der Barwert des Zerobonds gemäß Formel (56) bestimmt wird. Durch Anwendung der genannten Gleichung ergibt sich ein Barwert des Zerobonds von 54,0147 Geldeinheiten und über Gleichung (55) eine kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit in Höhe von 1,5329%.¹⁶² Dies bedeutet, dass das implizite Ausfallrisiko der am Markt quotierten CDS-Spreads eine deutlich weniger konservative Einschätzung des Ausfallrisikos durch die Marktteilnehmer widerspiegelt als es gemäß der historischen Daten zu erwarten gewesen wäre. Da die Bewertung von Finanztiteln „auf den Prinzipien der Arbitragefreiheit und der Idee des dynamischen Hedging“ beruht, geben die Marktdaten in der Regel eine bessere Indikation als historische Daten.¹⁶³ Dementsprechend führt die marktorientierte Bewertung des Zerobonds zu dem Ergebnis, dass der Zerobond „fair“ bzw. geringfügig zum Vorteil des Investors „gepriced“ ist. Es gilt jedoch zu beachten, dass dieses Ergebnis nur vor dem Hintergrund richtig ist, dass die getroffenen Annahmen korrekt sind. Interessant ist hierbei, dass die Annahme über die Höhe der Recovery-Rate in der Regel bei der Bewertung von CDS-Kontrakten anhand des Bootstrapping relativ gering ist, was bei der Betrachtung der Komponenten der Formel für den CDS-Spread deutlich wird: da die Diskontfaktoren und der jeweilige CDS-Spread anhand der Marktdaten gesetzt sind, müssen die Überlebens- bzw. Ausfallwahrscheinlichkeiten die Änderungen der als in beliebiger Höhe konstant angenommenen Recovery-Rate

¹⁶¹ Eigene Berechnungen

¹⁶² Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 175ff.

¹⁶³ Vgl. Schmidt, Wolfgang: Credit Default Swaps: Analyse und Bewertung. Deutsche Bank, Global Markets Research & Analytics. März 2001. S.16

kompensieren, damit sich bei einer Änderung der Recovery-Rate der Marktpreis des CDS-Kontrakts nicht ändert. Wird die gleiche Recovery-Rate, welche zum Bootstrapping eingesetzt wurde auch zur Bewertung des bonitätssensitiven Finanztitels verwendet, so kommt es nur zu geringfügigen Änderungen des Barwerts des Finanztitels. Wird obiges Beispiel zum Einen mit einer konstanten Recovery-Rate von 1% berechnet, so ergibt sich ein Barwert des Zerobonds von 54,0138 Geldeinheiten bei einer kumulierten Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,9307%, während eine unterstellte Recovery-Rate von 99% zu einem Barwert von 54,1279 Geldeinheiten bei einer kumulierten Ausfallwahrscheinlichkeit von 71,2012% führt. Wie das Beispiel zeigt, variiert der Barwert des Zerobonds bei unterschiedlichen Recovery-Quoten nur geringfügig, während die Ausfallwahrscheinlichkeit deutlichen Schwankungen unterliegt. Die Annahme über die Höhe der Recovery-Rate ist entsprechend beim Pricing via Plain-Vanilla-CDS-Kontrakte relativ unbedeutend. Es ist jedoch zu beachten, dass dieses Ergebnis nur für Plain-Vanilla-CDS gilt. Bereits bei minimal veränderten Finanzprodukten, wie beispielsweise einem Digital Default Swap, trifft dieses Ergebnis nicht mehr zu.¹⁶⁴

¹⁶⁴ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 182ff.

4. Fazit

Die vorangegangene Analyse der grundlegenden Kreditrisikomodelle bei einem bonitätssensitiven Finanztitel hat gezeigt, dass Kreditrisikomodelle zur Bewertung von kreditrisikobehafteten Finanztiteln bedingt geeignet sind. Je stärker ein Kreditrisikomodell durch realitätsverzerrende Annahmen von der Abbildung der Realität abweicht, desto größer sind in der Regel die Abweichungen von der „korrekten“ Bewertung. Gleichzeitig hat sich gezeigt, dass durch Verfeinerungen der ursprünglich rudimentären Modelle die Genauigkeit bei der Bewertung deutlich gesteigert werden kann. Als „Verfeinerung“ der Modelle dienen zum Einen Weiterentwicklungen der ursprünglichen Modelle, wobei Schwächen dieser Modelle aufgegriffen und gezielt behoben werden sollen, und zum Anderen die bewusste Kalibrierung der jeweiligen Modelle anhand adäquater Marktdaten. Da selbst weit entwickelte Modelle auf mehr oder weniger stark realitätsvereinfachenden Annahmen beruhen und es teilweise an adäquaten Marktdaten mangelt, ist ein gewisses inhärentes Modellrisiko nicht auszuschließen. Eine kritische Hinterfragung der Modellergebnisse ist deshalb unerlässlich. Grundsätzlich könnte die Bewertung anhand von Marktdaten, das sog. mark-to-market, eine Alternative zu der Bewertung anhand von Modellen, dem sog. mark-to-model, darstellen. Dies bedeutet, dass anstelle der Bewertung anhand von meist komplexen Modellen, welche oftmals nur von darauf spezialisierten Marktteilnehmern angewendet werden können und daher relativ intransparent sind, die Bewertung anhand von Angebot und Nachfrage über den Markt vorgenommen wird, was die Transparenz deutlich erhöhen würde. Voraussetzung hierfür ist, dass der Markt über eine entsprechende Liquidität verfügt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass bis ein (neuer) Markt über eine derartige Liquidität verfügt, eine Bewertung anhand von Modellen nötig ist. Aber selbst, wenn ein Markt über die benötigte Liquidität verfügt, ist eine reine mark-to-market-Bewertung kaum ausreichend. Vielmehr werden beide Bewertungsmethoden gemeinsam benötigt: einerseits müssen die Bewertungsmechanismen flexibel genug sein, um Preisschwankungen am Kreditmarkt zu berücksichtigen, und andererseits werden Modelle benötigt, um Risikofaktoren identifizieren und quantifizieren zu können.¹⁶⁵ Dementsprechend werden Kreditrisikomodelle insbesondere benötigt, um alle Risiken einer Transaktion zu hedgen, welche nicht eingegangen werden sollen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Bewertung anhand von Modellen einerseits zwar gewisse modell-inhärente Risiken mit sich bringt, aber andererseits Modelle notwendig sind, um die Risiken aus den kreditrisikobehafteten Finanztiteln identifizieren, quantifizieren und gegebenenfalls hedgen zu können.

¹⁶⁵ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies. Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 300f.

Literaturverzeichnis

- Albrecht, Peter: *Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick*, in: German Risk and Insurance Review, 2005.
- Arvantis, Angelo und Gregory, Jon: *Credit: The complete guide to pricing, hedging and risk management*. London: Risk Waters Group Ltd., 2001.
- Beck, Andreas und Lesko, Michael und Schlottmann, Frank und Wimmer, Konrad: *Copulas im Risikomanagement*, in: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen Ausgabe 14, 2006.
- Bielecki, Tomasz R. und Rutkowski, Marek: *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2004.
- Black, Fischer und Cox, John C.: *Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions*, in: Journal of Finance Vol. 31, 1976.
- Black, Fischer und Scholes, Myron: *The pricing of options and corporate liabilities*, in: Journal of Political Economy Vol. 81, 1973.
- Burghof, Hans-Peter und Henke, Sabine und Rudolph, Bernd und Schönbucher, Philipp J. und Sommer, Daniel: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005.
- Burghof, Hans-Peter und Paul, Stephan und Rudolph, Bernd: *Kreditrisiken und Kreditmärkte*, in: Burghof, Hans-Peter et al.: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005.
- Burtschell, Xavier und Gregory, Jon und Laurent, Jean-Paul: *A comparative analysis of CDO pricing models*. Paris und Lyon: BNP Paribas und Université de Lyon, 2008.
- Cherubini, Umberto und Luciano, Elisa und Vecchiato, Walter: *Copula Methods in Finance*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2004.
- Collin-Dufresne, Pierre und Goldstein, Robert S. und Helwege, Jean: *Are Jumps in Corporate Bond Yields Priced? Modeling Contagion via the Updating of Belief*. Pittsburgh, USA, St. Louis, USA und Columbus, USA: Carnegie Mellon University, Washington University und Ohio State University, 2002.
- Cremers, Heinz und Walzner, Jens: *Risikosteuerung mit Kreditderivaten unter besonderer Berücksichtigung von Credit Default Swaps*. Frankfurt School of Finance & Management Working Paper Series No. 80, Frankfurt, 2007.
- Duffie, Darrell und Gârleanu, Nicolae: *Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations*. Stanford, USA: Stanford University, Graduate School of Business, 2003.
- Duffie, Darrell und Lando, David: *Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information*, in: Econometrica, Vol. 69, No. 3, May 2001.

- Ericsson, Jan und Reneby, Joel and Wang, Hoa: *Can Structural Models Price Default Risk? Evidence from Bond and Derivative Markets*. Montreal, Kanada und Stockholm, Schweden: McGill University und Stockholm School of Economics, 2006.
- Felsenheimer, Jochen und Gisdakis, Philip und Zaiser, Michael: *Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies*, Weinheim: Wiley Verlag, 2006.
- Giesecke, Kay: *Default Compensator, Incomplete Information, and the Term Structure of Credit Spreads*. Berlin: Department of Economics der Humboldt-Universität zu Berlin, 2001.
- Giesecke, Kay: *Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction*. Berlin: Humboldt-Universität, 2002.
- Giesecke, Kay: *A Simple Exponential Model for Dependent Defaults*, in: Journal of Fixed Income Vol. 13, 2003.
- Giesecke, Kay und Weber, Stefan: *Cyclical Correlations, Credit Contagion, and Portfolio Losses*. Ithaca, USA: Cornell University sowie Berlin: Technische Universität Berlin, 2003.
- Giesecke, Kay: *Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction*. Ithaca, USA: Cornell University, 2004.
- Giesecke, Kay und Goldberg, Lisa R.: *Forecasting Default in the Face of Uncertainty*, in: The Journal of Derivatives Vol. Fall/04, 2004.
- Giesecke, Kay: *Default and Information*, in: Journal of Economic Dynamics & Control Vol. 30, 2006.
- Grundke, Peter: *Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken*. Dissertation an der Universität zu Köln. Wiesbaden: Der Deutsche Universitätsverlag 2003.
- Handelsblatt: *Die Aufseher ziehen die Zügel an*. [Ausgabe vom 17.06.2008]
- Handelsblatt: *Neutralität nicht garantiert*. [Ausgabe vom 02.07.2008]
- Handelsblatt: *Sturm über Wall Street*. [Ausgabe vom 17.06.2008]
- Horat, Robert: *Kreditderivate – Variantenreiche Finanzinstrumente mit Potential für die Praxis*, in: Der Schweizer Treuhänder, November 2003.
- Hull, John und White, Alan: *The Valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model*. Toronto: University of Toronto – Joseph L. Rotman School of Management, 2005.
- Hull, John und White, Alan: *Dynamic Models of Portfolio Credit Risk: A Simplified Approach*, in: Journal of Derivatives Vol. 15., 2008.

- Hüttemann, Petra: *Derivate Instrumente für den Transfer von Kreditrisiken*, in: Oehler, Andreas: *Credit Risk und Value-at-Risk Alternativen – Herausforderungen für das Risk Management*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 1998.
- J.P. Morgan: *The J.P.Morgan Guide to Credit Derivatives*, in: Risk Publications, 1999.
- Jarrow, Robert A. und Lando, David und Turnbull, Stuart M.: *A markov model of the term structure of credit risk spreads*, in: *Review of financial studies* Vol. 10, 1997.
- Jarrow, Robert: *Default parameter estimation using market prices*, in: *Financial Analysts Journal* Vol. 5, 2001.
- Jones, E. Philip und Mason, Scott P. und Rosenfeld, Eric: *Contingent claims analysis of corporate capital structures: an empirical investigation*, in: *Journal of Finance*, Vol. 39, 1984.
- Jortzik, Stephan: *Semi-analytische und simulative Kreditrisikomessung synthetischer Collateralized Debt Obligations bei heterogenen Referenzportfolios*. Dissertation an der Universität Göttingen. Göttingen, 2005.
- Kalemanova, Anna und Schnid, Bernd und Werner, Ralf: *The Normal inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing*. München und London: risklab germany, Algorithmics Inc. und Allianz, 2005.
- Koziol, Philipp: *Auswahl von Copulas zur Bewertung von Basketkreditderivaten*. Vallendar: WHU – Otto Beisheim School of Management, 2005.
- Läger, Volker: *Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten*. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002.
- Lando, David: *Credit Risk Modeling – Theory and Applications*, in: Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 2004.
- Lando, David: *On cox processes and credit risky securities*, in: *Review of Derivatives Research* Vol. 2, 1998.
- Li, David X.: *On Default Correlation: A Copula Function Approach*, in: Riskmetrics: Working Paper Number 99-07, 2000.
- Martin, Marcus R.W. und Reitz, Stefan und Wehn, Carsten S.: *Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung*. Wiesbaden: Vieweg Verlag, 2006.
- Merton, Robert C.: *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*, in: *Journal of Finance* Vol. 29, 1974.
- Modigliani, Franco und Miller, Merton: *The cost of capital, corporation finance and the theory of investment*, in: *American Economic Review* Vol. 48, 1958.
- Müller, Frank: *Kreditderivate und Risikomanagement*. Frankfurt am Main: Bankakademie-Verlag GmbH, 2000.

- Musiela, Marek und Rutkowski, Marek: *Martingale Methods in Financial Modelling*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005.
- Nelson, Roger: *An Introduction to Copulas*. New York: Springer Verlag, 1999.
- Neske, Christian: *Grundformen von Kreditderivaten*, in: Burghof, Hans-Peter et al.: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005.
- Posthaus, Achim: *Exotische Kreditderivate*, in: Burghof, Hans-Peter et al.: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005.
- Rehm, Florian Christoph: *Kreditrisikomodelle – Bewertung von Kreditderivaten und Portfoliomodelle zur Kreditrisikomessung*. Dissertation an der Wissenschaftlichen Hochschule für Unternehmensführung – Otto-Beisheim-Hochschule – Vallendar. Koblenz, 2001.
- Schierenbeck, Henner: *Ertragsorientiertes Bankmanagement – Band 3: Fallstudien mit Lösungen*. Wiesbaden: Gabler Verlag, 2005.
- Schmidt, Thorsten: *Credit Risk Modeling with Random Fields*. Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades an den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen (Mathematik) der Justus-Liebig-Universität Gießen. Gießen, 2003.
- Schmidt, Wolfgang: *Credit Default Swaps: Analyse und Bewertung*, in: Deutsche Bank, Global Markets Research & Analytics, März 2001.
- Schönbucher, Philipp J.: *Credit Derivates Pricing Models: Models, Pricing and Implementation*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- Schwarz, Christian: *Eine gruppierte elliptische Copula und ihre Anwendung im Kreditrisikomanagement*. Diplomarbeit an der Technische Universität München - Zentrum Mathematik. München, 2005.
- Shimko, David: *Credit Risk: Models and Management*. London: Risk Books, a Division of Incisive Financial Publishing Ltd., 2004.
- Summer, Christopher: *Credit Risk – Advanced Models*, Skriptum des Fachbereichs Bankbetriebslehre der Wirtschaftsuniversität Wien. Wien, 2007.
- Thabe, Tim: *Bewertung von Kreditrisiko, Zahlungsunfähigkeit, optimale Kapitalstruktur und Agencykosten bei unvollständiger Information*. Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Wirtschaftswissenschaften der Universität Mannheim. Mannheim: 2006.
- Vasicek, Oldrich: *Probability of loss on loan portfolio*, in: Working paper, KMV Corporation, 1987.
- Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Johann-Wolfgang Goethe-Universität: *Black-Scholes Modell*, <http://www.wiwi.uni-frankfurt.de/~doerner/kap3.pdf> [Zugriff am 27.04.2008]

FRANKFURT SCHOOL / HFB – WORKING PAPER SERIES

No.	Author/Title	Year
125.	Heidorn, Thomas / Schmaltz, Christian Interne Transferpreise für Liquidität	2009
124.	Bannier, Christina E. / Hirsch, Christian The economic function of credit rating agencies - What does the watchlist tell us?	2009
123.	Herrmann-Pillath, Carsten A Neurolinguistic Approach to Performativity in Economics	2009
122.	Winkler, Adalbert / Vogel, Ursula Finanzierungsstrukturen und makroökonomische Stabilität in den Ländern Südosteuropas, der Türkei und in den GUS-Staaten	2009
121.	Heidorn, Thomas / Rupprecht, Stephan Einführung in das Kapitalstrukturmanagement bei Banken	2009
120.	Rosbach, Peter Die Rolle des Internets als Informationsbeschaffungsmedium in Banken	2009
119.	Herrmann-Pillath, Carsten Diversity Management und diversitätsbasiertes Controlling: Von der „Diversity Scorecard“ zur „Open Balanced Scorecard“	2009
118.	Hölscher, Luise / Clasen, Sven Erfolgsfaktoren von Private Equity Fonds	2009
117.	Bannier, Christina E. Is there a hold-up benefit in heterogeneous multiple bank financing?	2009
116.	Roßbach, Peter / Gießamer, Dirk Ein eLearning-System zur Unterstützung der Wissensvermittlung von Web-Entwicklern in Sicherheitsthemen	2009
115.	Herrmann-Pillath, Carsten Kulturelle Hybridisierung und Wirtschaftstransformation in China	2009
114.	Schalast, Christoph: Staatsfonds – „neue“ Akteure an den Finanzmärkten?	2009
113.	Schalast, Christoph / Alram, Johannes Konstruktion einer Anleihe mit hypothekarischer Besicherung	2009
112.	Schalast, Christoph / Bolder, Markus / Radünz, Claus / Siepmann, Stephanie / Weber, Thorsten Transaktionen und Servicing in der Finanzkrise: Berichte und Referate des Frankfurt School NPL Forums 2008	2009
111.	Werner, Karl / Moormann, Jürgen Efficiency and Profitability of European Banks – How Important Is Operational Efficiency?	2009
110.	Herrmann-Pillath, Carsten Moralische Gefühle als Grundlage einer wohlstandschaffenden Wettbewerbsordnung: Ein neuer Ansatz zur erforschung von Sozialkapital und seine Anwendung auf China	2009
109.	Heidorn, Thomas / Kaiser, Dieter G. / Roder, Christoph Empirische Analyse der Drawdowns von Dach-Hedgefonds	2009
108.	Herrmann-Pillath, Carsten Neuroeconomics, Naturalism and Language	2008
107.	Schalast, Christoph / Benita, Barten Private Equity und Familienunternehmen – eine Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung deutscher Maschinen- und Anlagenbauunternehmen	2008
106.	Bannier, Christina E. / Grote, Michael H. Equity Gap? – Which Equity Gap? On the Financing Structure of Germany’s Mittelstand	2008
105.	Herrmann-Pillath, Carsten The Naturalistic Turn in Economics: Implications for the Theory of Finance	2008
104.	Schalast, Christoph (Hrgs.) / Schanz, Kay-Michael / Scholl, Wolfgang Aktionärsschutz in der AG falsch verstanden? Die Leica-Entscheidung des LG Frankfurt am Main	2008
103.	Bannier, Christina E./ Müsch, Stefan Die Auswirkungen der Subprime-Krise auf den deutschen LBO-Markt für Small- und MidCaps	2008
102.	Cremers, Heinz / Vetter, Michael Das IRB-Modell des Kreditrisikos im Vergleich zum Modell einer logarithmisch normalverteilten Verlustfunktion	2008
101.	Heidorn, Thomas / Pleißner, Mathias Determinanten Europäischer CMBS Spreads. Ein empirisches Modell zur Bestimmung der Risikoaufschläge von Commercial Mortgage-Backed Securities (CMBS)	2008

100.	Schalast, Christoph (Hrsg.) / Schanz, Kay-Michael Schaeffler KG/Continental AG im Lichte der CSX Corp.-Entscheidung des US District Court for the Southern District of New York	2008
99.	Hölscher, Luise / Haug, Michael / Schweinberger, Andreas Analyse von Steueramnestiedaten	2008
98.	Heimer, Thomas / Arend, Sebastian The Genesis of the Black-Scholes Option Pricing Formula	2008
97.	Heimer, Thomas / Hölscher, Luise / Werner, Matthias Ralf Access to Finance and Venture Capital for Industrial SMEs	2008
96.	Böttger, Marc / Guthoff, Anja / Heidorn, Thomas Loss Given Default Modelle zur Schätzung von Recovery Rates	2008
95.	Almer, Thomas / Heidorn, Thomas / Schmaltz, Christian The Dynamics of Short- and Long-Term CDS-spreads of Banks	2008
94.	Barthel, Erich / Wollersheim, Jutta Kulturunterschiede bei Mergers & Acquisitions: Entwicklung eines Konzeptes zur Durchführung einer Cultural Due Diligence	2008
93.	Heidorn, Thomas / Kunze, Wolfgang / Schmaltz, Christian Liquiditätsmodellierung von Kreditzusagen (Term Facilities and Revolver)	2008
92.	Burger, Andreas Produktivität und Effizienz in Banken – Terminologie, Methoden und Status quo	2008
91.	Löchel, Horst / Pecher, Florian The Strategic Value of Investments in Chinese Banks by Foreign Financial Institutions	2008
90.	Schalast, Christoph / Morgenschweis, Bernd / Sprengel, Hans Otto / Ockens, Klaas / Stachuletz, Rainer / Safran, Robert Der deutsche NPL Markt 2007: Aktuelle Entwicklungen, Verkauf und Bewertung – Berichte und Referate des NPL Forums 2007	2008
89.	Schalast, Christoph / Stralkowski, Ingo 10 Jahre deutsche Buyouts	2008
88.	Banner, Christina E./ Hirsch, Christian The Economics of Rating Watchlists: Evidence from Rating Changes	2007
87.	Demidova-Menzel, Nadeshda / Heidorn, Thomas Gold in the Investment Portfolio	2007
86.	Hölscher, Luise / Rosenthal, Johannes Leistungsmessung der Internen Revision	2007
85.	Banner, Christina / Hänsel, Dennis Determinants of banks' engagement in loan securitization	2007
84.	Banner, Christina "Smoothing" versus "Timeliness" - Wann sind stabile Ratings optimal und welche Anforderungen sind an optimale Berichtsregeln zu stellen?	2007
83.	Banner, Christina E. Heterogeneous Multiple Bank Financing: Does it Reduce Inefficient Credit-Renegotiation Incidences?	2007
82.	Cremers, Heinz / Löhr, Andreas Deskription und Bewertung strukturierter Produkte unter besonderer Berücksichtigung verschiedener Marktszenarien	2007
81.	Demidova-Menzel, Nadeshda / Heidorn, Thomas Commodities in Asset Management	2007
80.	Cremers, Heinz / Walzner, Jens Risikosteuerung mit Kreditderivaten unter besonderer Berücksichtigung von Credit Default Swaps	2007
79.	Cremers, Heinz / Traughber, Patrick Handlungsalternativen einer Genossenschaftsbank im Investmentprozess unter Berücksichtigung der Risikotragfähigkeit	2007
78.	Gerdesmeier, Dieter / Roffia, Barbara Monetary Analysis: A VAR Perspective	2007
77.	Heidorn, Thomas / Kaiser, Dieter G. / Muschiol, Andrea Portfoliooptimierung mit Hedgefonds unter Berücksichtigung höherer Momente der Verteilung	2007
76.	Jobe, Clemens J. / Ockens, Klaas / Safran, Robert / Schalast, Christoph Work-Out und Servicing von notleidenden Krediten – Berichte und Referate des HfB-NPL Servicing Forums 2006	2006
75.	Abrar, Kamyar / Schalast, Christoph Fusionskontrolle in dynamischen Netzsektoren am Beispiel des Breitbandkabelsektors	2006

74.	Schalast, Christoph / Schanz, Kay-Michael Wertpapierprospekte: Markteinführungspublizität nach EU-Prospektverordnung und Wertpapierprospektgesetz 2005	2006
73.	Dickler, Robert A. / Schalast, Christoph Distressed Debt in Germany: What's Next? Possible Innovative Exit Strategies	2006
72.	Belke, Ansgar / Polleit, Thorsten How the ECB and the US Fed set interest rates	2006
71.	Heidorn, Thomas / Hoppe, Christian / Kaiser, Dieter G. Heterogenität von Hedgefondsindizes	2006
70.	Baumann, Stefan / Löchel, Horst The Endogeneity Approach of the Theory of Optimum Currency Areas - What does it mean for ASEAN + 3?	2006
69.	Heidorn, Thomas / Trautmann, Alexandra Niederschlagsderivate	2005
68.	Heidorn, Thomas / Hoppe, Christian / Kaiser, Dieter G. Möglichkeiten der Strukturierung von Hedgefondsportfolios	2005
67.	Belke, Ansgar / Polleit, Thorsten (How) Do Stock Market Returns React to Monetary Policy ? An ARDL Cointegration Analysis for Germany	2005
66.	Daynes, Christian / Schalast, Christoph Aktuelle Rechtsfragen des Bank- und Kapitalmarktrechts II: Distressed Debt - Investing in Deutschland	2005
65.	Gerdesmeier, Dieter / Polleit, Thorsten Measures of excess liquidity	2005
64.	Becker, Gernot M. / Harding, Perham / Hölscher, Luise Financing the Embedded Value of Life Insurance Portfolios	2005
63.	Schalast, Christoph Modernisierung der Wasserwirtschaft im Spannungsfeld von Umweltschutz und Wettbewerb – Braucht Deutschland eine Rechtsgrundlage für die Vergabe von Wasserversorgungskonzessionen? –	2005
62.	Bayer, Marcus / Cremers, Heinz / Kluß, Norbert Wertsicherungsstrategien für das Asset Management	2005
61.	Löchel, Horst / Polleit, Thorsten A case for money in the ECB monetary policy strategy	2005
60.	Richard, Jörg / Schalast, Christoph / Schanz, Kay-Michael Unternehmen im Prime Standard - „Staying Public“ oder „Going Private“? - Nutzenanalyse der Börsennotiz -	2004
59.	Heun, Michael / Schlink, Torsten Early Warning Systems of Financial Crises - Implementation of a currency crisis model for Uganda	2004
58.	Heimer, Thomas / Köhler, Thomas Auswirkungen des Basel II Akkords auf österreichische KMU	2004
57.	Heidorn, Thomas / Meyer, Bernd / Pietrowiak, Alexander Performanceeffekte nach Directors Dealings in Deutschland, Italien und den Niederlanden	2004
56.	Gerdesmeier, Dieter / Roffia, Barbara The Relevance of real-time data in estimating reaction functions for the euro area	2004
55.	Barthel, Erich / Gierig, Rauno / Kühn, Ilmhart-Wolfram Unterschiedliche Ansätze zur Messung des Humankapitals	2004
54.	Anders, Dietmar / Binder, Andreas / Hesdahl, Ralf / Schalast, Christoph / Thöne, Thomas Aktuelle Rechtsfragen des Bank- und Kapitalmarktrechts I : Non-Performing-Loans / Faule Kredite - Handel, Work-Out, Outsourcing und Securitisation	2004
53.	Polleit, Thorsten The Slowdown in German Bank Lending – Revisited	2004
52.	Heidorn, Thomas / Siragusano, Tindaro Die Anwendbarkeit der Behavioral Finance im Devisenmarkt	2004
51.	Schütze, Daniel / Schalast, Christoph (Hrsg.) Wider die Verschleuderung von Unternehmen durch Pfandversteigerung	2004
50.	Gerhold, Mirko / Heidorn, Thomas Investitionen und Emissionen von Convertible Bonds (Wandelanleihen)	2004
49.	Chevalier, Pierre / Heidorn, Thomas / Krieger, Christian Temperaturderivate zur strategischen Absicherung von Beschaffungs- und Absatzrisiken	2003
48.	Becker, Gernot M. / Seeger, Norbert Internationale Cash Flow-Rechnungen aus Eigner- und Gläubigersicht	2003
47.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Notes on convexity and quanto adjustments for interest rates and related options	2003

46.	Hess, Dieter Determinants of the relative price impact of unanticipated Information in U.S. macroeconomic releases	2003
45.	Cremers, Heinz / Kluß, Norbert / König, Markus Incentive Fees. Erfolgsabhängige Vergütungsmodelle deutscher Publikumsfonds	2003
44.	Heidorn, Thomas / König, Lars Investitionen in Collateralized Debt Obligations	2003
43.	Kahlert, Holger / Seeger, Norbert Bilanzierung von Unternehmenszusammenschlüssen nach US-GAAP	2003
42.	Beiträge von Studierenden des Studiengangs BBA 012 unter Begleitung von Prof. Dr. Norbert Seeger Rechnungslegung im Umbruch - HGB-Bilanzierung im Wettbewerb mit den internationalen Standards nach IAS und US-GAAP	2003
41.	Overbeck, Ludger / Schmidt, Wolfgang Modeling Default Dependence with Threshold Models	2003
40.	Balthasar, Daniel / Cremers, Heinz / Schmidt, Michael Portfoliooptimierung mit Hedge Fonds unter besonderer Berücksichtigung der Risikokomponente	2002
39.	Heidorn, Thomas / Kantwill, Jens Eine empirische Analyse der Spreadunterschiede von Festsatzanleihen zu Floatern im Euroraum und deren Zusammenhang zum Preis eines Credit Default Swaps	2002
38.	Böttcher, Henner / Seeger, Norbert Bilanzierung von Finanzderivaten nach HGB, EstG, IAS und US-GAAP	2003
37.	Moormann, Jürgen Terminologie und Glossar der Bankinformatik	2002
36.	Heidorn, Thomas Bewertung von Kreditprodukten und Credit Default Swaps	2001
35.	Heidorn, Thomas / Weier, Sven Einführung in die fundamentale Aktienanalyse	2001
34.	Seeger, Norbert International Accounting Standards (IAS)	2001
33.	Moormann, Jürgen / Stehling, Frank Strategic Positioning of E-Commerce Business Models in the Portfolio of Corporate Banking	2001
32.	Sokolovsky, Zbynek / Strohhecker, Jürgen Fit für den Euro, Simulationsbasierte Euro-Maßnahmenplanung für Dresdner-Bank-Geschäftsstellen	2001
31.	Roßbach, Peter Behavioral Finance - Eine Alternative zur vorherrschenden Kapitalmarkttheorie?	2001
30.	Heidorn, Thomas / Jaster, Oliver / Willeitner, Ulrich Event Risk Covenants	2001
29.	Biswas, Rita / Löchel, Horst Recent Trends in U.S. and German Banking: Convergence or Divergence?	2001
28.	Eberle, Günter Georg / Löchel, Horst Die Auswirkungen des Übergangs zum Kapitaldeckungsverfahren in der Rentenversicherung auf die Kapitalmärkte	2001
27.	Heidorn, Thomas / Klein, Hans-Dieter / Siebrecht, Frank Economic Value Added zur Prognose der Performance europäischer Aktien	2000
26.	Cremers, Heinz Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton	2000
25.	Löchel, Horst Die ökonomischen Dimensionen der ‚New Economy‘	2000
24.	Frank, Axel / Moormann, Jürgen Grenzen des Outsourcing: Eine Exploration am Beispiel von Direktbanken	2000
23.	Heidorn, Thomas / Schmidt, Peter / Seiler, Stefan Neue Möglichkeiten durch die Namensaktie	2000
22.	Böger, Andreas / Heidorn, Thomas / Graf Waldstein, Philipp Hybrides Kernkapital für Kreditinstitute	2000
21.	Heidorn, Thomas Entscheidungsorientierte Mindestmargenkalkulation	2000
20.	Wolf, Birgit Die Eigenmittelkonzeption des § 10 KWG	2000

19.	Cremers, Heinz / Robé, Sophie / Thiele, Dirk Beta als Risikomaß - Eine Untersuchung am europäischen Aktienmarkt	2000
18.	Cremers, Heinz Optionspreisbestimmung	1999
17.	Cremers, Heinz Value at Risk-Konzepte für Marktrisiken	1999
16.	Chevalier, Pierre / Heidorn, Thomas / Rütze, Merle Gründung einer deutschen Strombörse für Elektrizitätsderivate	1999
15.	Deister, Daniel / Ehrlicher, Sven / Heidorn, Thomas CatBonds	1999
14.	Jochum, Eduard Hoshin Kanri / Management by Policy (MbP)	1999
13.	Heidorn, Thomas Kreditderivate	1999
12.	Heidorn, Thomas Kreditrisiko (CreditMetrics)	1999
11.	Moormann, Jürgen Terminologie und Glossar der Bankinformatik	1999
10.	Löchel, Horst The EMU and the Theory of Optimum Currency Areas	1998
09.	Löchel, Horst Die Geldpolitik im Währungsraum des Euro	1998
08.	Heidorn, Thomas / Hund, Jürgen Die Umstellung auf die Stückaktie für deutsche Aktiengesellschaften	1998
07.	Moormann, Jürgen Stand und Perspektiven der Informationsverarbeitung in Banken	1998
06.	Heidorn, Thomas / Schmidt, Wolfgang LIBOR in Arrears	1998
05.	Jahresbericht 1997	1998
04.	Ecker, Thomas / Moormann, Jürgen Die Bank als Betreiberin einer elektronischen Shopping-Mall	1997
03.	Jahresbericht 1996	1997
02.	Cremers, Heinz / Schwarz, Willi Interpolation of Discount Factors	1996
01.	Moormann, Jürgen Lean Reporting und Führungsinformationssysteme bei deutschen Finanzdienstleistern	1995

**FRANKFURT SCHOOL / HfB – WORKING PAPER SERIES
CENTRE FOR PRACTICAL QUANTITATIVE FINANCE**

No.	Author/Title	Year
19.	Reiswich, Dimitri / Tompkins, Robert Potential PCA Interpretation Problems for Volatility Smile Dynamics	2009
18.	Keller-Ressel, Martin / Kilin, Fiodar Forward-Start Options in the Barndorff-Nielsen-Shephard Model	2008
17.	Griebsch, Susanne / Wystup, Uwe On the Valuation of Fader and Discrete Barrier Options in Heston's Stochastic Volatility Model	2008
16.	Veiga, Carlos / Wystup, Uwe Closed Formula for Options with Discrete Dividends and its Derivatives	2008
15.	Packham, Natalie / Schmidt, Wolfgang Latin hypercube sampling with dependence and applications in finance	2008
14.	Hakala, Jürgen / Wystup, Uwe FX Basket Options	2008

13.	Weber, Andreas / Wystup, Uwe Vergleich von Anlagestrategien bei Riesterrenten ohne Berücksichtigung von Gebühren. Eine Simulationsstudie zur Verteilung der Renditen	2008
12.	Weber, Andreas / Wystup, Uwe Riesterreente im Vergleich. Eine Simulationsstudie zur Verteilung der Renditen	2008
11.	Wystup, Uwe Vanna-Volga Pricing	2008
10.	Wystup, Uwe Foreign Exchange Quanto Options	2008
09.	Wystup, Uwe Foreign Exchange Symmetries	2008
08.	Becker, Christoph / Wystup, Uwe Was kostet eine Garantie? Ein statistischer Vergleich der Rendite von langfristigen Anlagen	2008
07.	Schmidt, Wolfgang Default Swaps and Hedging Credit Baskets	2007
06.	Kilin, Fiodor Accelerating the Calibration of Stochastic Volatility Models	2007
05.	Gribsch, Susanne/ Kühn, Christoph / Wystup, Uwe Instalment Options: A Closed-Form Solution and the Limiting Case	2007
04.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Interest Rate Convexity and the Volatility Smile	2006
03.	Becker, Christoph/ Wystup, Uwe On the Cost of Delayed Currency Fixing	2005
02.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Cross currency swap valuation	2004
01.	Wallner, Christian / Wystup, Uwe Efficient Computation of Option Price Sensitivities for Options of American Style	2004

HfB – SONDERARBEITSBERICHTE DER HfB - BUSINESS SCHOOL OF FINANCE & MANAGEMENT

No.	Author/Title	Year
01.	Nicole Kahmer / Jürgen Moormann Studie zur Ausrichtung von Banken an Kundenprozessen am Beispiel des Internet (Preis: € 120,--)	2003

Printed edition: € 25.00 + € 2.50 shipping

Download:

Working Paper: http://www.frankfurt-school.de/content/de/research/Publications/list_of_publication0.html

CPQF: http://www.frankfurt-school.de/content/de/research/quantitative_Finance/research_publications.html

Order address / contact

Frankfurt School of Finance & Management

Sonnemannstr. 9–11 ■ D–60314 Frankfurt/M. ■ Germany

Phone: +49 (0) 69 154 008–734 ■ Fax: +49 (0) 69 154 008–728

eMail: m.biemer@frankfurt-school.de

Further information about Frankfurt School of Finance & Management

may be obtained at: <http://www.frankfurt-school.de>