

Die Unipolarmaschine zweiter Art

9.2.2015

Tilmann Schneider

Rüdesheimer Str. 58, D-53175 Bonn

E-mail: admin@relativistische-asynchronmaschine.de

Abstract. Sometimes in classical electrodynamics the question appears whether the magnetic vector potential from which electric and magnetic fields can be derived is only an operand or a real field. At least in a special case discussed here it seems to be necessary. The so-called type II homopolar machine presented here is based on a force which depends on the vector potential. This force is generated by a construction-conditioned violation of vector potential rotational symmetry in a rotating reference frame.

Zusammenfassung. In der klassischen Elektrodynamik taucht manchmal die Frage auf, ob das Vektorpotential, aus dem sich elektrische und magnetische Felder ableiten lassen, nur eine Rechengröße ist oder ob es sich um ein reales Feld handelt. Zumindest in einem Sonderfall, der hier diskutiert werden soll, erscheint dies unbedingt notwendig. Die hier vorgestellte, sogenannte Unipolarmaschine zweiter Art basiert auf einer Kraft, die vom Vektorpotential abhängt. Sie entsteht durch eine konstruktionsbedingte Verletzung der Rotationssymmetrie des Vektorpotentials in einem rotierenden System.

PACS numbers: 84.50.+d

1. Die Unipolarmaschine erster Art

Als Einführung wird zunächst die Berechnung der Induktionsspannung der bekannten Unipolarmaschine behandelt, die ich mit dem Zusatz “erster Art” versehe, um sie von der später zu beschreibenden Unipolarmaschine zweiter Art zu unterscheiden. Die Berechnung kann dabei auf zwei verschiedenen Wegen durchgeführt werden: Der bekannte Erste führt über die magnetische Feldstärke \vec{B} , der Zweite über das Vektorpotential \vec{A} .

1.1. Berechnung der Induktionsspannung mit Hilfe der magnetischen Feldstärke

Gegeben sei im Laborsystem S ein elektromagnetisches Feld

$$(F_{\delta\chi}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht das Feld in einem Bezugssystem S' aus, das sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit \vec{v} relativ zum Laborsystem bewegt? Dazu transformieren wir das Feld F mit Hilfe der Lorentz-Transformation in das Feld F' [1]. Für die Lorentz-Transformation gilt dann z. B. für eine Bewegung in Richtung der x-Achse

$$(\bar{\Lambda}_{\alpha}^{\delta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_x & 0 & 0 \\ \gamma v_x & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Die Anwendung der Lorentz-Transformation ergibt für das elektromagnetische Feld F' :

$$F'_{\alpha\beta} = \bar{\Lambda}_{\alpha}^{\delta} \bar{\Lambda}_{\beta}^{\chi} F_{\delta\chi}. \quad (1.2)$$

Wir wollen nun einen Sonderfall betrachten. Die Relativgeschwindigkeit soll sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein ($v \ll c$, d. h. klassischer Fall) und im Laborsystem gebe es nur ein Magnetfeld \vec{B} . In diesem Fall gilt $\gamma \approx 1$ und (1.2) reduziert sich in Vektorschreibweise zu

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}, \quad (1.3a)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}. \quad (1.3b)$$

Für \vec{B} wählen wir die folgende rotationssymmetrische Struktur:

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq r < r_1 \\ B\vec{e}_z & \text{für } r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & \text{für } r > r_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

In der x-y-Ebene liege eine dünne, elektrisch leitende Scheibe, die vom homogenen Magnetfeld senkrecht durchdrungen wird und mit der Geschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die z-Achse rotiert. Für die Relativgeschwindigkeit gilt dann

$$\vec{v}_{\varphi} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \vec{e}_{\varphi} \quad (1.5)$$

Mit (1.4) und (1.5) folgt dann gemäß (1.3a):

$$\vec{E}' = \omega r \vec{e}_\varphi \times B \vec{e}_z = \omega r B \vec{e}_r \quad (1.6)$$

Damit folgt für die Induktionsspannung in S' , die mit Schleifkontakten zwischen r_2 und r_1 abgegriffen werden kann:

$$U'_{21} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}' d\vec{r}' = - \frac{B}{2} (r_2^2 - r_1^2) \omega. \quad (1.7)$$

1.2. Berechnung der Induktionsspannung mit Hilfe des Vektorpotentials

Gegeben sei im Laborsystem S ein elektromagnetisches Potential

$$(A_\delta) = (V, -A_x, -A_y, -A_z) = (V, -\vec{A}).$$

Um das entsprechende Potential in S' zu erhalten, führen wir eine zu (1.2) analoge Transformation durch:

$$A'_\alpha = \bar{\Lambda}_\alpha^\delta A_\delta. \quad (1.8)$$

Wir betrachten wieder den obigen Sonderfall, wobei im Laborsystem $V = 0$ gelten soll. In Vektorschreibweise lautet (1.8) dann

$$V' = -\vec{v}\vec{A}, \quad (1.9a)$$

$$\vec{A}' = \vec{A}. \quad (1.9b)$$

Das bedeutet, dass ein magnetisches Vektorpotential im Laborsystem in ein elektrisches Potential im bewegten System transformiert wird.

Zur Berechnung von \vec{A} verwenden wir den magnetischen Fluss, wobei $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ gilt

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{f} = \oint_C \vec{A} d\vec{s}. \quad (1.10)$$

Die Integration erfolgt über einen Kreis mit dem Radius r . Man erhält

$$\vec{A} = A_\varphi(r) \vec{e}_\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq r < r_1 \\ \frac{B}{2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right) \vec{e}_\varphi & \text{für } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \frac{B}{2} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r} \vec{e}_\varphi & \text{für } r > r_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Mit (1.11) und (1.5) folgt dann gemäß (1.9a) für die Potentialdifferenz zwischen r_2 und r_1 :

$$U'_{21} = V'(r_2) - V'(r_1) = - \frac{B}{2} (r_2^2 - r_1^2) \omega. \quad (1.12)$$

Ein Vergleich der beiden Berechnungsmethoden zeigt, dass die Zweite allgemeiner ist als die Erste. Die Zweite kann eine Induktionsspannung auch in Fällen liefern, bei denen in einem Raumgebiet zwar ein Vektorpotential, *aber kein Magnetfeld vorhanden ist* [vgl. dazu als Beispiel das Gebiet $r > r_2$ in (1.4) und (1.11)]. Im folgenden Kapitel betrachten wir einen solchen Fall.

2. Die Unipolarmaschine zweiter Art

Wir betrachten die folgende Situation [vgl. Abb. (1)]: Parallel zur z-Achse erstreckt sich bei $(-a, 0)$ ein unendlich langer Zylindermagnet (Radius r_0), der den Stator der Maschine bildet. Das homogene Feld \vec{B} im Magneten erzeugt dann den magnetischen Fluss

$$\Phi = B\pi r_0^2. \quad (2.1)$$

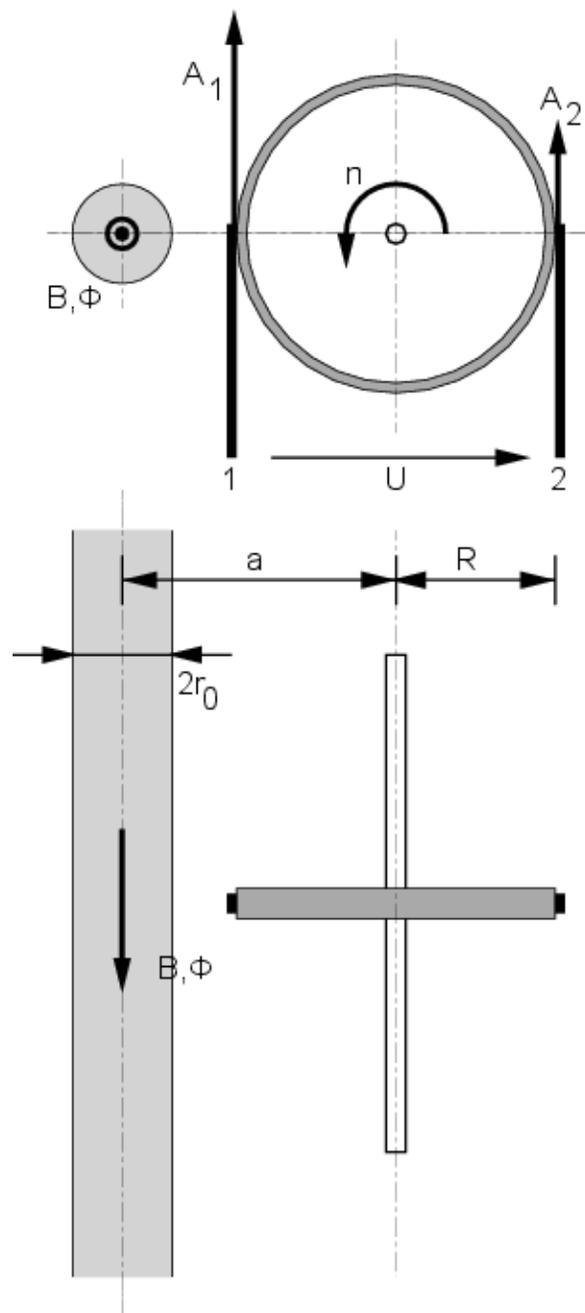


Abbildung 1. Unipolarmaschine zweiter Art

Gemäß der rechten Seite von (1.10) folgt dann im Außenraum für das Vektorpotential bezüglich $(-a, 0)$:

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \vec{e}_\varphi. \quad (2.2)$$

Für die magnetische Feldstärke dort gilt

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = 0. \quad (2.3)$$

Andererseits kann \vec{A} als reales Feld mit dem magnetischen Fluss als Quelle aufgefasst werden. Wegen (2.3) lässt sich im Außenraum ein skalares Potential P einführen:

$$\vec{A} = -\text{grad} P \quad (2.4)$$

Für das hier behandelte Problem ergibt sich

$$P = -\frac{\Phi}{2\pi}(\varphi - \varphi_0). \quad (2.5)$$

Durch geeignete Wahl einer Sperrfläche, die bei einem vollen Umlauf in azimuthaler Richtung nicht überschritten werden darf, ergibt sich ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann wird das Potential eindeutig.

Im Außenraum werde gemäß Abbildung (1) entlang der z-Achse parallel zum Zylindermagneten ein Rotor (bei Gleichstrommaschinen Anker genannt) angeordnet, der aus einer drehbar gelagerten Welle mit darauf befestigter Scheibe besteht. Die Scheibe soll aus einem nichtleitenden Material bestehen (z. B. Kunststoff), auf dessen Rand ein metallener Schleifring (Außenradius R) fest aufgeschraubt ist. Über zwei Blattfedern 1 und 2 werde ein elektrisch leitender Kontakt zum Schleifring hergestellt.

Statt des Zylindermagneten (Permanenterregung) kann als Stator auch ein massiver Eisenstab verwendet werden, der mit einer Wicklung versehen ist. Der Fluss wird dann durch einen Gleichstrom I_f erzeugt (Fremderregung):

$$\Phi = \frac{LI_f}{w}. \quad (2.6)$$

2.1. Generatorbetrieb

Die Scheibe rotiere mit der Drehzahl n um den Koordinatenursprung. Für das Potential am Kontakt 1 ergibt sich nach (1.9a)

$$V'_1 = -\vec{v}_1 \vec{A}_1 = -(\omega R \vec{e}_\varphi) \left[-\frac{\Phi}{2\pi(a-R)} \vec{e}_\varphi \right] = \frac{R}{a-R} \Phi n \quad (2.7)$$

Und am Kontakt 2

$$V'_2 = -\vec{v}_2 \vec{A}_2 = -(\omega R \vec{e}_\varphi) \frac{\Phi}{2\pi(a+R)} \vec{e}_\varphi = -\frac{R}{a+R} \Phi n \quad (2.8)$$

Für die abgegriffene Spannung U (für eine einfachere Schreibweise wird der Akzent weggelassen) gilt dann

$$U = V'_1 - V'_2 = k \Phi n, \quad (2.9)$$

wobei k eine für Gleichstrommaschinen typische Maschinenkonstante ist [2]. Es ist hier

$$k = \frac{2\frac{R}{a}}{1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2}. \quad (2.10)$$

Für ein Zahlenbeispiel wählen wir folgende Werte: Es sei $B=1$ T, $r_0=20$ mm, $R=270$ mm, $a=300$ mm und $n=300$ 1/min. Damit ergibt sich $k=9,474$ und für die Spannung $U \approx 60$ mV.

Es stellt sich die Frage, welche Kraft auf eine Ladung im Schleifring einwirkt. Dazu bilden wir

$$\vec{E}' = -\text{grad}V' = \nabla(\vec{v}\vec{A}). \quad (2.11)$$

Zur weiteren Berechnung wird der folgende Entwicklungssatz verwendet:

$$\nabla(\vec{v}\vec{A}) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{A}\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{A}. \quad (2.12)$$

oder mit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$\nabla(\vec{v}\vec{A}) = \vec{v} \times \vec{B} + \vec{A} \times 2\vec{\omega} + (\text{grad}\vec{v})\vec{A} + (\text{grad}\vec{A})\vec{v}. \quad (2.13)$$

$\text{grad}\vec{v}$ ist ein Vektorgradient und entspricht der Jacobimatrix. Es gilt in Zylinderkoordinaten und $v_\varphi = \omega r$

$$\text{grad}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_r}{r\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial v_\varphi}{r\partial\varphi} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{r\partial\varphi} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

und entsprechend

$$\text{grad}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial r} & \frac{\partial A_r}{r\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{r} & 0 \\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial A_\varphi}{r\partial\varphi} + \frac{A_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Mit (2.11) und (2.13) gilt dann

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} + \omega \left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi \right). \quad (2.16)$$

Im Fall der Unipolarmaschine erster Art verschwindet, da (1.11) nicht von φ abhängt (Rotationssymmetrie), der zweite Term und es bleibt die aus (1.3a) bekannte Lorentzkraft übrig:

$$\vec{F}'_L = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.17)$$

Bei der Unipolarmaschine zweiter Art aber bleibt wegen $\vec{B} = 0$ im Außenraum der Anteil

$$\vec{F}' = q\omega \left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi \right), \quad (2.18)$$

denn für \vec{A} gilt hier

$$A_x = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{-y}{(x+a)^2 + y^2},$$

$$A_y = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2},$$

d. h. \vec{A} ist hier von φ abhängig (keine Rotationssymmetrie):

$$A_r(R, \varphi) = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{a \sin \varphi}{R^2 + a^2 + 2aR \cos \varphi}, \quad (2.20a)$$

$$A_\varphi(R, \varphi) = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{R + a \cos \varphi}{R^2 + a^2 + 2aR \cos \varphi}. \quad (2.20b)$$

Gleichung (2.16) lässt sich auch als allgemeine Bewegungsgleichung darstellen (siehe Anhang).

2.2. Motorbetrieb

Im Stillstand werde die Maschine von einem Gleichstrom I_A von Klemme 1 nach Klemme 2 durchflossen. Dieser Ankerstrom teilt sich dabei gleichmäßig auf die beiden Schleifringhälften auf. Um die auf den Schleifring ausgeübte Kraft zu berechnen, gehen wir von (2.18) aus. Auf eine Ladung $dq = I_A dt$ wirkt dann die Kraft

$$d\vec{F}' = I_A \omega \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right) dt = I_A \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right) d\varphi, \quad (2.21)$$

oder nach Integration:

$$\vec{F}'(R) = I_A \vec{A} \quad (2.22)$$

Um die Kirchhoffsche Knotenregel zu erfüllen, werde der an Klemme 1 zufließende Strom negativ und der an Klemme 2 abfließende Strom positiv gezählt und der Spannungspfeil habe die gleiche Richtung wie im Generatorbetrieb (Verbraucher-Zählpeilsystem). Es bleibt nur eine Kraft mit einer φ -Komponente für die Drehbewegung übrig. Dann ist

$$F'_\varphi(R, \pi) = (-I_A) \left[-\frac{\Phi}{2\pi(a - R)} \right], \quad (2.23a)$$

$$F'_\varphi(R, 0) = (+I_A) \frac{\Phi}{2\pi(a + R)}. \quad (2.23b)$$

und für das Drehmoment

$$M = R F'_\varphi(R, \pi) + R F'_\varphi(R, 0) = \frac{k}{2\pi} \Phi I_A. \quad (2.24)$$

Für ein Zahlenbeispiel wählen wir die gleichen Abmessungen und die gleiche Feldstärke wie oben und für den Ankerstrom $I_A = 10 \text{ A}$. Dann ergibt sich für das Drehmoment $M \approx 19 \text{ mNm}$.

Wie die Zahlenbeispiele zeigen, sind die zu erwartenden experimentellen Effekte sehr klein. Im folgenden Kapitel soll diskutiert werden, welche konstruktiven Verbesserungen der Maschine möglich sind.

3. Konstruktive Verbesserungen

3.1. Zwei Erregermagnete und mehrere Schleifringe

Die erste Verbesserung besteht darin, parallel gegenüber dem ersten Magneten im gleichen Abstand einen Zweiten mit entgegengerichtetem Fluss anzuordnen [Abb. (2)].

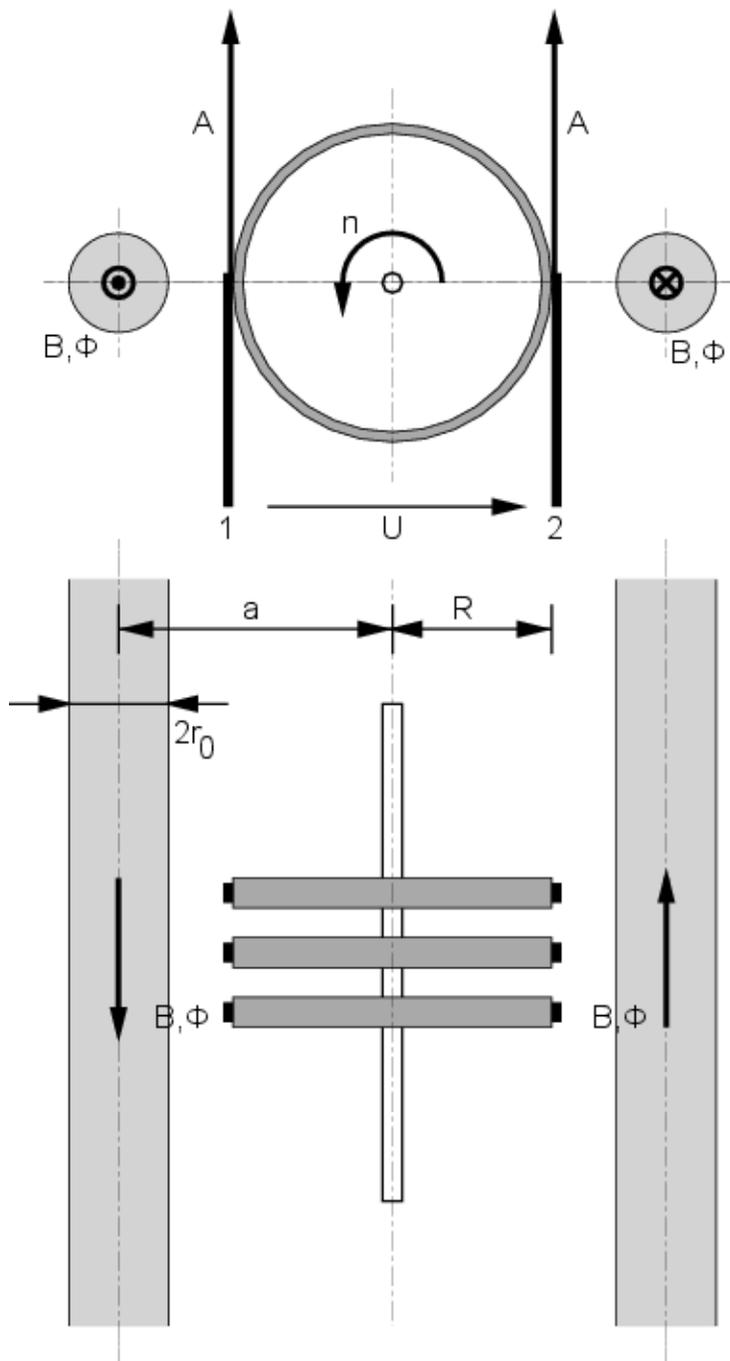


Abbildung 2. Unipolarmaschine zweiter Art mit zwei Erregermagneten ("Bipolarmaschine") und drei Schleifringen.

Durch Superposition der beiden Vektorfelder entsteht ein zur y-z-Ebene spiegelsymmetrisches Feld:

$$A_x = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{-y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{-y}{(x-a)^2 + y^2},$$

$$A_y = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Damit ergibt sich für die Maschinenkonstante

$$k = \frac{4\frac{R}{a}}{1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2}. \quad (3.2)$$

Die Spannung und das Drehmoment werden also verdoppelt.

Noch besser wird es, wenn mehrere Schleifringe nebeneinander auf eine Welle montiert und die Klemmenpaare in Reihe geschaltet werden. Dann ist mit der Anzahl i der Schleifringe

$$k = \frac{4\frac{R}{a}i}{1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2}. \quad (3.3)$$

3.2. Streufreier Erregermagnet

Bisher wurden unendlich lange Erregermagnete als Grundlage für Berechnungen verwendet. Das Vektorpotential kann dann einfach aus (1.10) bestimmt werden. In der Praxis sind aber Magnete endlich lang und erzeugen dann ein Streufeld \vec{B} im Außenraum. Will man dennoch ein Streufeld vermeiden, muss man geschlossene, ringförmige Eisenkerne verwenden. Dann ist für eine Berechnung von \vec{A} (1.10) nicht mehr brauchbar, da dort das Vektorpotential nur implizit enthalten ist. Wünschenswert wäre eine Gleichung etwa von der Form

$$\vec{A} = f(\Phi, \vec{r}), \quad (3.4)$$

d. h. man schließt aus der räumlichen Verteilung des Flusses auf das Vektorpotential. Der Flussverlauf hängt dann von der Form des Ringkerns ab. Um das Gesetz zu finden, betrachten wir die Definition des magnetischen Dipolmoments [3]

$$\vec{m} = \mu I \vec{f} = \mu I f \vec{n}. \quad (3.5)$$

I ist dabei ein Strom in einem ringförmigen Leiter, der eine Fläche f umschließt. \vec{n} ist ihr Normalenvektor. Andererseits erzeugt der Strom einen magnetischen Fluss durch die Fläche. Dann kann \vec{m} auch so definiert werden:

$$\vec{m} = \Phi \vec{s} = \Phi s \vec{n}. \quad (3.6)$$

Das darin eingeführte Wegstück \vec{s} zeigt in Richtung der Flächennormale und gibt zugleich die Flussrichtung an. Beide Definitionen lassen sich eindeutig über eine Konstante ineinander überführen, die die Dimension einer Induktivität hat:

$$L = \frac{\mu f}{s} \quad (3.7)$$

Ein infinitesimales, magnetisches Dipolmoment erzeugt das Dipolfeld:

$$d\vec{A} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{m}'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{\Phi}{4\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (3.8)$$

Hier können wir die Definition (3.6) verwenden, da es sich um ein Fernfeld handelt. Wir betrachten nun eine ringförmige Anordnung von magnetischen Dipolen, sodass sich ein geschlossener, sehr dünner Fluss-Schlauch bildet (magnetischer Kreis). Durch Superposition aller Dipolfelder ergibt sich das Vektorpotential im Außenraum aus dem *Biot-Savartschen Gesetz*

$$\vec{A} = -\frac{\Phi}{4\pi} \oint \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (3.9)$$

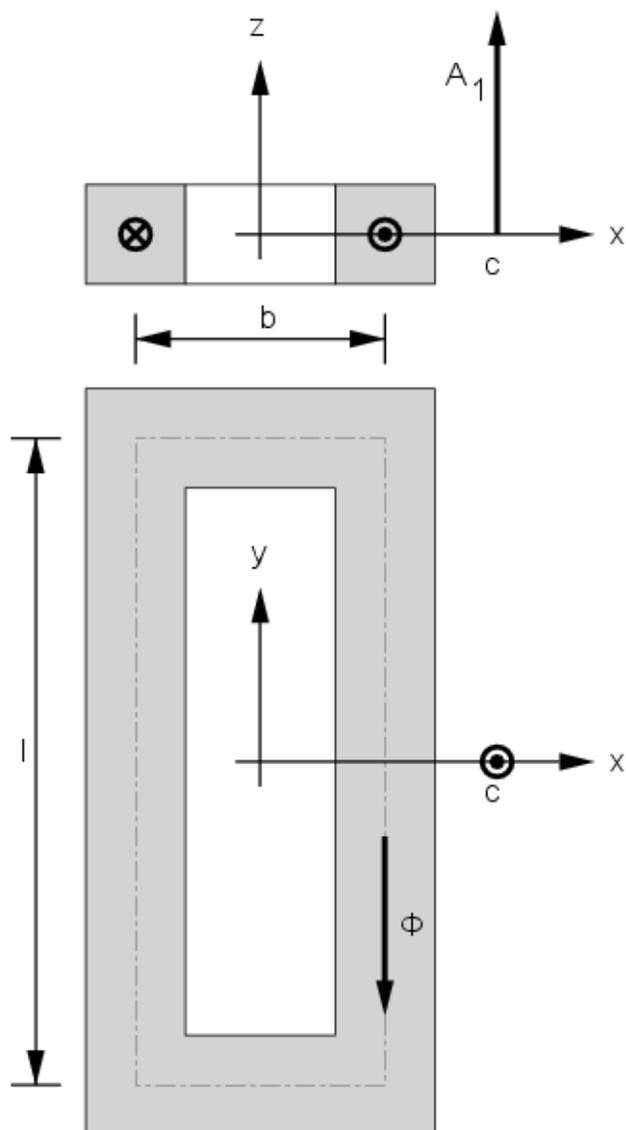


Abbildung 3. Streufreier Erregermagnet.

Es können also bekannte Rechenmethoden verwendet werden.

Das Gesetz werde nun auf einen magnetischen rechteckigen Eisenkern mit quadratischem Querschnitt angewandt. Der magnetische Kreis wird dann durch ein Rechteck der Breite b und der Länge l in der Mitte des Eisenquerschnitts gebildet (Abb. (3)). Der Fluss Φ fließe im Urzeigersinn. Von Interesse ist der Wert des Vektorpotenzials in der x-y-Ebene im Punkt $(c, 0)$. Aus Symmetriegründen gibt es dort nur eine z-Komponente. Nach einiger Rechnung erhält man

$$A_z(c, 0) = \frac{\Phi}{l\pi} \left(\frac{1}{\tanh N} - \frac{1}{\tanh F} \right), \quad (3.10a)$$

$$N = \operatorname{arsinh} \left(\frac{2c - b}{l} \right), \quad (3.10b)$$

$$F = \operatorname{arsinh} \left(\frac{2c + b}{l} \right). \quad (3.10c)$$

Die Berechnung der Spannung erfolgt dann entsprechend (2.7) bis (2.9). Für

$$\frac{2c - b}{l} < \frac{2c + b}{l} < 0, 1$$

erhält man näherungsweise die Superposition für Felder zweier paralleler, unendlich langer Eisenstäbe

$$A_z(c, 0) \approx \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{c - \frac{b}{2}} - \frac{1}{c + \frac{b}{2}} \right) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{b}{c^2 - \frac{b^2}{4}}. \quad (3.11)$$

Trägt der linke lange Schenkel eine Wicklung, so kann mit (2.6) ein Fluss eingepreßt werden. Für die Induktivität gilt dann mit dem Eisenquerschnitt A_e

$$L = \frac{w^2 \mu A_e}{2(b + l)}. \quad (3.12)$$

4. Analogien innerhalb der Magnetostatik

Die Beziehung (3.9) gleicht dem bekannten Biot-Savartschen Gesetz:

$$\vec{B} = -\frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

indem man die Größen μI und \vec{B} formal durch Φ und \vec{A} ersetzt. Ein ähnlicher Zusammenhang ergibt sich aus (2.4). Ersetzt man \vec{A} durch \vec{B} und P durch die Größe μV_m , so erhält man die bekannte Gleichung des magnetischen Skalarpotentials

$$\vec{B} = -\mu \operatorname{grad} V_m.$$

Durch Einführung eines Vektorpotenzials \vec{T} lassen sich eine Reihe weiterer Analogien herstellen. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Analogien im Überblick. Bemerkenswert ist, dass die Gleichung (2.3) erhalten bleibt. Lediglich die Seiten werden getauscht. \vec{B} wird im einen Fall als erzeugte Feldstärke, im anderen Fall als erzeugende Quelle (magnetische Flussdichte) interpretiert. \vec{A} wird umgekehrt als Vektorpotential bzw. als reale Feldstärke betrachtet.

Tabelle 1. Analogien.

Die Größe	wird ersetzt durch	
Vektorpotential \vec{A} , $[\vec{A}] = \frac{Vs}{m}$	Vektorpotential \vec{T} , $[\vec{T}] = Vs$	
Magnetische Feldstärke \vec{B} , $[\vec{B}] = \frac{Vs}{m^2}$	Feldstärke \vec{A} , $[\vec{A}] = \frac{Vs}{m}$	
Elektrische Stromdichte $\mu\vec{j}$, $[\vec{j}] = \frac{A}{m^2}$	Magnetische Flussdichte \vec{B} , $[\vec{B}] = \frac{Vs}{m^2}$	
Elektrischer Strom μI , $[I] = A$	Magnetischer Fluss Φ , $[\Phi] = Vs$	
Skalarpotential μV_m , $[V_m] = A$	Skalarpotential P , $[P] = Vs$	
$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, $\text{div}\vec{B} = 0$	$\vec{A} = \text{rot}\vec{T}$, $\text{div}\vec{A} = 0$	
$\text{rot}\vec{B} = \mu\vec{j}$, $\text{div}\vec{j} = 0$	$\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$, $\text{div}\vec{B} = 0$	
$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}$, $\text{div}\vec{A} = 0$	$\Delta\vec{T} = -\vec{B}$, $\text{div}\vec{T} = 0$	
$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{ \vec{r}-\vec{r}' } d\tau'$	$\vec{T} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{B}}{ \vec{r}-\vec{r}' } d\tau'$	
$\vec{B} = -\frac{\mu I}{4\pi} \oint_{C_I} \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times d\vec{s}'}{ \vec{r}-\vec{r}' ^3}$, $I = \iint \vec{j} d\vec{f}$	$\vec{A} = -\frac{\Phi}{4\pi} \oint_{C_\Phi} \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times d\vec{s}'}{ \vec{r}-\vec{r}' ^3}$, $\Phi = \iint \vec{B} d\vec{f}$	
Integrationskurve ist Leiterschleife C_I	Integrationskurve ist magnetischer Kreis C_Φ (streuungsfrei)	
“Stromdipolmoment”, $\mu I \vec{s}$	Magn. Dipolmoment, $\vec{m} = \Phi \vec{s}$	
Für $\mu\vec{j} = 0$:	Für $\vec{B} = 0$:	
$\vec{B} = -\mu \text{grad} V_m$, $\Delta V_m = 0$	$\vec{A} = -\text{grad} P$, $\Delta P = 0$	

5. Rotationssymmetrie und Drehimpuls

Es lässt sich zeigen, dass die Verletzung der Rotationssymmetrie in (2.18) mit der Nichterhaltung des Drehimpulses zusammenhängt. Zwischen Drehmoment \vec{M} und Drehimpuls \vec{L} gilt die Beziehung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

wobei hier nur die z-Komponenten eine Rolle spielen. Der Drehimpuls hängt i. A. von Zeit und Ort ab. Dann ist

$$M'_z = M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{\partial L_z}{\partial t} + \frac{\partial L_z}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial L_z}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Für den Drehimpuls setzen wir an:

$$L_z = qA_\varphi r. \quad (5.1)$$

Der erste Summand verschwindet, da L_z hier nicht von der Zeit abhängt und der Zweite wegen $r = \text{const.}$ (Schleifring mit Radius R). Es bleibt

$$M'_z = \omega \frac{\partial L_z}{\partial \varphi} = r q \omega \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = r F'_\varphi,$$

was mit dem rechten Summanden in (2.18) übereinstimmt. In der Abhängigkeit vom Winkel macht sich eine *Symmetriebrechung* bemerkbar. Lügen Zylindermagnet und

Schleifring konzentrisch zueinander (vgl. Abbildung (1)) so würde gelten:

$$L_z = \frac{q\Phi}{2\pi} = \text{const.}$$

D. h. es wäre eine kontinuierliche Rotationssymmetrie vorhanden und der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße, wodurch das Drehmoment verschwindet.

Allgemein gilt, dass es zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße gibt und umgekehrt (Noether-Theorem).

6. Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde die Unipolarmaschine zweiter Art (UPM2) vorgestellt. Sie gehört wie die bekannte Unipolarmaschine erster Art (UPM1) zu den elektrischen Maschinen, d. h. sie kann mechanische in elektrische Energie umwandeln und umgekehrt. Im Gegensatz zu allen anderen Maschinen basiert ihre Funktionsweise nur auf dem Vektorpotential, welches nicht mehr üblicherweise als Potential, sondern als reales Feld interpretiert werden muss. Denn es wurde gezeigt, dass dieses Feld sich in Gestalt einer Kraft bemerkbar macht, die durch eine Verletzung der Rotationssymmetrie entsteht. Diese Symmetriebrechung ist durch die Konstruktionsweise bedingt (exzentrische Anordnung des Ankers). Im Folgenden seien weitere Merkmale dieser Maschine genannt.

- Bei der UPM2 können im Unterschied zur UPM1 die Werte für Spannung und Drehmoment über die Maschinenkonstante flexibler ausgelegt werden. Die Höhe der Werte hängt dabei vom Verhältnis von Ankerradius zu Anker-Ständer-Abstand ab. Dieses Verhältnis sollte möglichst nahe bei eins liegen.
- Als Konsequenz kann eine UPM2 mit kleinen Querabmessungen dieselben Werte liefern wie eine mit Großen. Wie klein sich die Maschine bauen lässt hängt davon ab, wie eng der Fluss im Eisenkern geführt werden kann.
- Da nur der Schleifring das bestimmende Bauelement des Ankers ist, kann der den Ring tragende Anteil in Leichtbauweise ausgeführt werden. Es muss daher nur eine geringe Masse bewegt werden.
- Wie schon bei der UPM1 ist auch bei der UPM2 im Vergleich zu anderen Gleichstrommaschinen keine Kommutierung erforderlich.
- Infolge der Schleifkontakte entsteht im Betrieb ein Lastmoment, welches überwunden werden muss. Dieses wächst mit der Anzahl der verwendeten Schleifringe.
- Da die UPM2 eine Gleichstrommaschine ist, können alle bekannten Arten der äußeren Beschaltung angewandt werden (Fremderregung, Nebenschluss, Reihenschluss usw.).

7. Anhang: Erweiterung der allgemeinen Bewegungsgleichung

In der Elektrostatik gilt für ein Teilchen die Bewegungsgleichung

$$m\dot{\vec{v}} = -q \operatorname{grad} V. \quad (7.1)$$

Die relativistische Verallgemeinerung dieser Gleichung ist

$$m\dot{u}_\alpha = q(A_\beta u^\beta)_{|\alpha}. \quad (7.2)$$

Die Auswertung mit der Produktregel ergibt

$$\begin{aligned} q(A_\beta u^\beta)_{|\alpha} &= q(A_{\beta|\alpha} u^\beta + A_\beta u^\beta_{|\alpha}) \\ &= q(A_{\beta|\alpha} u^\beta - A_{\alpha|\beta} u^\beta + A_{\alpha|\beta} u^\beta + A_\beta u^\beta_{|\alpha}) \\ &= q(A_{\beta|\alpha} - A_{\alpha|\beta}) u^\beta + q A_{\alpha|\beta} u^\beta + q A_\beta u^\beta_{|\alpha}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Die partielle Ableitung der Geschwindigkeit im letzten Term verschwindet, da die Geschwindigkeit nur von der Eigenzeit τ abhängt. Dann bleibt

$$m\dot{u}_\alpha = q(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) u^\beta + q u^\beta \partial_\beta A_\alpha. \quad (7.4)$$

Der erste Term beschreibt die Lorentz-Kraft und enthält die beiden Maxwell-Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \quad (7.5)$$

oder in Vektorschreibweise:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (7.6a)$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (7.6b)$$

Der zweite enthält ein Feld

$$N_{\alpha\beta} = \partial_\beta A_\alpha, \quad (7.7)$$

welches Phänomene wie etwa die UPM2 beschreibt, die mit den Maxwell-Gleichungen nicht erklärt werden können. Für den klassischen Fall $v \ll c$ ergibt sich dann eine Kraft

$$\vec{K} = q(\vec{v} \nabla) \vec{A} = q\vec{v}(\nabla \otimes \vec{A}) = q(\nabla \otimes \vec{A})^T \vec{v}^T. \quad (7.8)$$

Die beiden Felder $F_{\alpha\beta}$ und $N_{\alpha\beta}$ können zu einem Feld $S_{\alpha\beta}$ zusammengefasst werden und die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\dot{u}_\alpha = q\partial_\alpha A_\beta u^\beta = qS_{\alpha\beta} u^\beta. \quad (7.9)$$

Das den inhomogenen Maxwell-Gleichungen entsprechende Gesetz lässt sich durch die partielle Ableitung des kontravarianten Feldes $S^{\alpha\beta}$ bilden:

$$\partial_\alpha S^{\alpha\beta} = \partial_\alpha (F^{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta}) = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha = \mu j^\beta + \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha. \quad (7.10)$$

Wegen der Lorentz-Eichung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ verschwindet der zweite Term und es bleibt

$$\partial_\alpha S^{\alpha\beta} = \mu j^\beta. \quad (7.11)$$

Mit

$$S^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta \quad (7.12)$$

ergibt sich dann die bekannte Wellengleichung

$$\square A^\beta = \mu j^\beta. \quad (7.13)$$

8. Literaturhinweise

- [1] GREINER, Walter, RAFELSKI, Johann: *Spezielle Relativitätstheorie*. 2. Aufl. Frankfurt a. M. : Harri Deutsch, 1989, S. 179.
- [2] SEINSCH, Hans Otto: *Grundlagen elektrischer Maschinen und Antriebe*. 3. Aufl. Stuttgart : Teubner, 1993, S. 126, 142.
- [3] LEHNER, Günther: *Elektromagnetische Feldtheorie*. Berlin : Springer, 1990, S. 452.