

Leistungsbasierte Modellierung dynamischer Reib- und Kontaktprozesse in mechanischen Systemen

Thomas Specker

Band 18

Thomas Specker

**Leistungsbasierte Modellierung dynamischer Reib- und
Kontaktprozesse in mechanischen Systemen**

Schriftenreihe des
Instituts für Mess-, Regel- und Mikrotechnik
Universität Ulm

Herausgeber:
Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer

Band 18

Thomas Specker

Leistungsbasierte Modellierung dynamischer Reib- und Kontaktprozesse in mechanischen Systemen

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Dissertation, Universität Ulm,
Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Informatik und Psychologie, 2016

Impressum

Universität Ulm
Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik
Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer
Albert-Einstein-Allee 41
89081 Ulm
<http://www.uni-ulm.de/mrm>

Eine Übersicht über alle Bände der Schriftenreihe finden Sie unter
<http://www.uni-ulm.de/mrmschriften>.

Diese Veröffentlichung ist im Internet auf dem Ulmer Volltextserver (<http://vts.uni-ulm.de>) verfügbar und dort unter der Lizenz "B - Standard (ohne Print-On-Demand)" publiziert. Details zur Lizenz sind unter <http://www.uni-ulm.de/index.php?id=50392> zu finden.

Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik der Universität Ulm 2016
Print on Demand

ISBN 978-3-941543-24-9

e-ISBN 978-3-941543-25-6



Leistungsbasierte Modellierung dynamischer Reib- und Kontaktprozesse in mechanischen Systemen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

(Dr.-Ing.)

der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Informatik
und Psychologie der Universität Ulm

von

Thomas Specker
aus Tuttlingen

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer
Prof. Dr.-Ing. habil. Christoph Ament
Amtierende Dekanin: Prof. Dr. Tina Seufert

Ulm, 22.03.2016

Meinen Eltern

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik (MRM) der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Informatik und Psychologie der Universität Ulm. Daher gilt mein besonderer Dank dem Institutsdirektor, Herrn Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer, für das entgegengebrachte Vertrauen und die Betreuung meiner Dissertation. Die dreieinhalb Jahre am MRM waren für mich eine besonders schöne und auch sehr produktive Zeit, die ich sicherlich nie vergessen werde.

Darüber hinaus möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Christoph Ament für die Übernahme des Zweitgutachtens und die konstruktive Rückmeldung zu meiner Arbeit bedanken.

Ein großes Dankeschön gilt natürlich auch all meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am MRM, die stets für ein familiäres Arbeitsklima sorgten. Dabei möchte ich mich besonders bei Dr.-Ing. Michael Buchholz für die Unterstützung bei der Projektarbeit, die konstruktiven Diskussionen, die kritische Durchsicht meiner Publikationen und das Erstellen der T_EX-Vorlage bedanken. Ein herzliches Dankeschön gilt darüber hinaus Jürgen Remmlinger, der Michael beim Bau der Vorlage unterstützt hat, Thomas „Paul“ Bächle für sein Feedback zu meiner Dissertation und die damit verbundene Fehlersuche, Claudia Fricke für ihre Hilfe im Dickicht der Bürokratie sowie den technischen Mitarbeitern Oliver Betz, Franz Degenhard und Martin Nieß, ohne die das Kapitel zur praktischen Anwendung nie zustande gekommen wäre. Des Weiteren möchte ich mich bei den ehemaligen Studentinnen und Studenten bedanken, die mich im Rahmen meiner Arbeit tatkräftig unterstützt haben.

Ein ganz besonderes Dankeschön, das weit über diese Arbeit hinausreicht, gilt meiner Familie und meinen Freunden, die in den letzten Jahren zeitlich oft zurückstecken mussten und dabei stets nachsichtig waren. Allen voran seien hier meine Eltern erwähnt, die mich zu jeder Zeit bedingungslos unterstützt haben, mein Bruder und mein Onkel, die immer für genügend Motivation gesorgt haben, sowie Opa und Oma, die es nicht glauben konnten, jemals in einem Buch erwähnt zu werden. Euch und allen anderen vielen Dank!

Leonberg, im April 2016

Thomas Specker

Kurzfassung

Bei modellbasierten Regelungsapplikationen steht und fällt die Regelgüte mit der Genauigkeit der unterlagerten Modelle. Während bei mechanischen Systemen das dynamische Verhalten von Massen bzw. Trägheitsmomenten und der Einfluss von externen Kräften unter Verwendung des Lagrange-Formalismus nachgebildet werden können, lassen sich dissipative und hochgradig nichtlineare Einflüsse, wie z.B. Reibung und unilaterale Beschränkungen, nur bedingt modellieren. Bestehende Ansätze sind entweder zu ungenau in der Beschreibung, zu komplex in der Handhabung oder numerisch instabil für große Abtastzeiten und somit unbrauchbar für den praktischen Einsatz in Kombination mit einem Zustandsbeobachter.

Daher wird in dieser Arbeit jeweils ein neues Verfahren zur leistungsorientierten Modellierung von Reibungen und Beschränkungen in dynamischen Systemen vorgestellt, die – in Abhängigkeit der Parametrierung und der Abtastzeit – sowohl eine hochgenaue Simulation der betrachteten Vorgänge zulassen als auch ein robustes Verhalten für die praktische Regelungsanwendung bieten. Ein großer Vorteil der leistungsorientierten Modellierung ist dabei die Möglichkeit der Berücksichtigung der Reibungs- und Kontaktmodelle im Rahmen des Lagrange-Formalismus. Dies ermöglicht die analytische Transformation der Reibungs- und Kontaktkräfte in Wirkrichtung der verallgemeinerten Koordinaten für eine beliebige Anzahl an simultanen Kontakten und Reibungen ohne eine maßgebliche Erhöhung der Modellkomplexität. Dadurch können sowohl einfache Kontakte in Einkörpersystemen als auch komplexe Kontaktszenarien in Mehrkörpersystemen mit Hilfe eines gleichbleibenden Formalismus modelliert werden. Die Anpassung der Modelle erfolgt dabei anhand weniger Parameter mit eindeutiger physikalischer Bedeutung. Darüber hinaus kann durch die Kombination der beiden Einzelmodelle das Stoß- und Kontaktverhalten mit tangential auftretender Reibung berücksichtigt werden, das – besonders im Hinblick auf Mehrkörpersysteme – zu den größten Herausforderungen der Kontaktmodellierung zählt.

Im Rahmen der Arbeit werden zunächst die einzelnen Modellierungsansätze hergeleitet, die Vorteile und Unterschiede zu bestehenden Verfahren ausführlich erläutert und anschließend das jeweilige Reibungs- und Kontaktverhalten simulativ evaluiert. Um den praktischen Nutzen der leistungsorientierten Reibungs- und Kontaktmodellierung zu verdeutlichen, werden darüber hinaus beide Ansätze im Modell eines Rehabilitationsroboters berücksichtigt und die daraus resultierende Verbesserung der Zustandsschätzung in Kombination mit einem Zentralfilter vorgestellt.

Abstract

The accuracy of model-based control applications depends on the precision of the underlying models. In contrast to the dynamics of a mass or a moment of inertia, which can be modelled using the Lagrangian equations, it is hardly possible to consider highly nonlinear effects such as friction or unilateral constraints within the equations of a mechanical system. Existing modelling approaches are too imprecise in their description, too complex to handle, or numerically unstable for small sample rates. Thus, they are unsuitable for practical applications using a state observer.

To overcome these problems, two new power-based modelling approaches are introduced for friction and constraints, respectively. Depending on the parameterization and the sample rate, it is possible to achieve a high model precision for simulations as well as robust model behaviour for practical control applications. Furthermore, the power-based model functions can be considered within the Lagrangian equations, which is a significant advantage shared by the friction model and the constraint model. Thus, the local forces of any number of contacts and friction effects can be analytically transformed into the direction of the generalized coordinates, which is still possible if the contacts and friction effects occur at the same time. Since there is no remarkable increase in modelling effort for an increasing number of contacts or bodies, it is possible to describe the behaviour of simple single-body contacts as well as complex contact scenarios in multi-body systems using a consistent modelling formalism. The model behaviour can be adjusted by a small number of parameters for each contact or friction effect. Thereby, each parameter is connected with a certain physical property. If the single modelling approaches are further combined to an overall approach, it is also possible to describe the contact behaviour considering tangential friction effects, which belongs to the main challenges of constraint modelling, especially for multi-body systems.

Within this work, the single modelling approaches for friction and constraints are deduced at first. Thereby, the differences between the power-based and other modelling theories are discussed. Subsequently, the properties and advantages of the proposed models are evaluated within different simulations. The practical benefit of the power-based models is further illustrated using both approaches for the modelling of a gait rehabilitation robot. Thereby, the consequent improvement of the state estimation in combination with a central difference Kalman filter can be shown.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Numerisch robuste Modellierung von Reibungseffekten	5
2.1	Grundlagen der Reibungsmodellierung	5
2.1.1	Statische Reibungsmodelle	6
2.1.2	Dynamische Reibungsmodelle	7
2.1.3	Anwendbarkeit bestehender Reibungsmodelle	8
2.2	Robuste Modellierung dynamischer Reibungseffekte	10
2.2.1	Leistungsbasierte Modellierung statischer Reibungseffekte . .	11
2.2.2	Verallgemeinerung statischer Reibungseffekte im Lagrange- Formalismus	17
2.2.3	Dynamische Erweiterung der Lagrange-Gleichungen	21
2.3	Simulative Evaluation des robusten Reibungsmodells	26
2.3.1	Das LuGre-Modell	26
2.3.2	1D-Stick-Slip-Szenario eines Masse-Feder-Elements	27
2.3.3	2D-Stick-Slip-Szenario eines Masse-Feder-Elements	34
2.4	Fazit	37
3	Modellierung des Kontaktverhaltens reibungsfreier Objekte	39
3.1	Grundlagen der Kontaktmodellierung	39
3.2	Kontaktmodellierung mit leistungsbasierten Restriktionsfunktionen .	43
3.2.1	Aktivierungsfunktion	44
3.2.2	Schrankenspezifische Leistungsfunktion	47
3.2.3	Formulierung der Restriktionsfunktion	50
3.2.4	Reaktionskräfte, Kontaktverluste und Impulsverhalten	53
3.2.5	Modellierung von Schrankendurchbrüchen	59
3.2.6	Berücksichtigung der Beschränkungsfunktion im Lagrange- Formalismus	62
3.3	Simulative Evaluation des leistungsbasierten Kontaktmodells	64
3.3.1	Einfache Stöße und Kontakte in Einkörpersystemen	64
3.3.2	Mehrkörpersysteme unter Einfluss mehrerer, paralleler Kontakte	74
3.3.3	Beschränkung dreidimensionaler Objekte	80
3.4	Fazit	86

4	Dynamisches Kontaktverhalten mit tangentialer Reibung	89
4.1	Grundlagen der Modellierung reibungsbehafteter Kontakte	89
4.2	Modellierung unilateraler Kontakte mit tangentialer Reibung	91
4.3	Simulative Evaluation des Kontaktmodells mit Reibung	93
4.3.1	Mehrkörpersysteme unter Einfluss mehrerer, paralleler Kontakte mit tangentialer Reibung	94
4.3.2	Beschränkung dreidimensionaler Objekte mit kontaktbedingter Reibung	99
4.4	Fazit	103
5	Leistungsbasierte Modellierung in der praktischen Anwendung	105
5.1	Der Bewegungstrainer MoreGait II	106
5.2	Modellierung des Rehabilitationsroboters	108
5.2.1	Reibungs- und kontaktfreies Basismodell	109
5.2.2	Berücksichtigung dominanter Reibungseffekte	114
5.2.3	Berücksichtigung mechanischer Beschränkungen	116
5.2.4	Modellierung des reibungsbehafteten Kontakts zwischen Stimulationseinheit und Linearführung	119
5.3	Zustandsschätzung am Rehabilitationsroboter	122
5.3.1	Das Zentralfilter	124
5.3.2	Implementierung und Versuchsaufbau	126
5.3.3	Versuchsergebnisse	130
5.4	Fazit	142
6	Zusammenfassung und Ausblick	145
A	Modellgleichungen	149
A.1	2D-Stick-Slip-Modell	149
A.2	Beschränktes Doppelpendel ohne Reibung	150
A.3	Unbeschränkter Würfel ohne Reibung	152
A.4	Beschränktes Doppelpendel mit Reibung	152
A.5	Rehabilitationsroboter MoreGait	153
B	Algorithmus des Zentralfilters	155
C	Betreute Abschlussarbeiten	157
D	Eigene Veröffentlichungen	159
	Symbolverzeichnis	161
	Literaturverzeichnis	165

Kapitel 1

Einleitung

Betrachtet man das dynamische Verhalten mechanischer Systeme, so muss stets auch das Problem der Systemreibung berücksichtigt werden. Es gibt in der praktischen Anwendung keine reibungsfreie Mechanik, da bei jeder relativen Bewegung zweier sich berührender Objekte auch immer Reibung auftritt. Die Reibung kann dabei sowohl rotatorisch, z. B. in Kugel- und Drehgelenken, als auch translatorisch, z. B. in Linearführungen, auftreten. Die Auswirkung der Reibung auf die Systemdynamik kann dabei jedoch sehr unterschiedlich sein. Ist die Reibungskraft im Vergleich zu den Kräften, die zur Bewegung der Massen aufgebracht werden müssen, gering, ist auch der Einfluss der Reibung auf das System weitestgehend vernachlässigbar. Liegt jedoch die Reibungskraft in der Größenordnung der beschleunigenden Kräfte, wird der Einfluss der Reibung immer dominanter und führt zu ungewollten Effekten wie z. B. dem sogenannten Stick-Slip-Verhalten, bei dem es wiederholt zu einem ruckartigen Übergang zwischen Stillstand und Bewegung kommt.

Um den Einfluss der Reibung auf mechanische Systeme möglichst gering zu halten, wurden daher im Laufe der Zeit immer neue Verfahren und Materialien entwickelt. Eine ausführliche Übersicht der einzelnen Entwicklungsfortschritte, deren Anfänge bis in die Frühzeit der Menschheitsgeschichte zurückreichen, ist u. a. in [Dow98] gegeben. Bereits im alten Ägypten wurden beim Transport tonnenschwerer Steinquader Rundhölzer zur Verringerung der Reibung eingesetzt, ein Konzept, das im Laufe der Zeit stets verbessert wurde und sich auch heute noch in modernen Kugel- und Rollenlagern wiederfindet. Darüber hinaus wurden auch die Gleiteigenschaften unterschiedlicher Materialien stetig verbessert und neue Werkstoffe erforscht, angefangen von den Stein- und Porzellanlagern in den Töpferscheiben in Mesopotamien und im frühzeitlichen China bis hin zu den heute eingesetzten Teflonbeschichtungen. Doch auch unter Verwendung neuester Techniken und Materialien konnte und kann die Reibung nur im Rahmen physikalischer Grenzen verringert werden. Daher stellt die Reibung aus regelungstechnischer Sicht weiterhin ein in vielen Systemen nicht zu vernachlässigendes Problem dar.

Da das Problem der Reibung mechanisch nicht vollständig gelöst werden kann, ist es umso wichtiger, den Effekt der Reibung zu verstehen und abschätzen zu können. Daher untersuchten bereits Leonardo da Vinci und später Guillaume Amontons den systematischen Einfluss von Reibung. Erste Ansätze zur mathematischen Beschreibung von Reibungseffekten wurden aber erstmalig zu Beginn des 19. Jahrhunderts von Charles-Augustin de Coulomb [Cou21] vorgestellt und später unter anderem durch Richard Stribeck [Str03] erweitert. Die daraus resultierenden statischen Reibungsmodelle bilden den Grundstein einer ganzen Reihe von Modellen, die bis heute zur Beschreibung von Reibung in mechanischen Systemen eingesetzt werden. Allerdings erlauben diese Modellierungsansätze zumeist nur eine Approximation der Reibung in einfachen Systemen. Bei Mehrkörpersystemen mit komplexer Kinematik erreichen sie hingegen sehr schnell die Grenzen ihrer Anwendbarkeit.

Ein Beispiel für ein solch komplexes Mehrkörpersystem stellt der neu entwickelte Bewegungstrainer MoreGait II dar, der für die Gangrehabilitation inkomplett Querschnittgelähmter und Schlaganfallpatienten konzipiert wurde. Innerhalb des Forschungsprojekts, das vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie im Rahmen des *Zentralen Innovationsprogramms Mittelstand* gefördert wurde, wurden am Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik der Universität Ulm neue und innovative Ansätze zur Regelung, Zustandsbeobachtung sowie zur Parameter- und Patientenaktivitätsschätzung untersucht. Dabei stellten auch hier dominante Reibungseffekte im System eine besondere Herausforderung dar, da sie zu signifikanten Abweichungen in den Schätzergebnissen und somit auch zu einer Verschlechterung der Regelgüte führten. Um eine Verbesserung der Schätzungen zu erreichen, musste daher auch die Reibung im Modell des Zustandsfilters berücksichtigt werden. Da sich die etablierten Reibungsmodelle für diesen Zweck jedoch nur als bedingt geeignet darstellten, wurde eine neue, leistungsorientierte Methode zur Modellierung von Reibung entwickelt, die sich aufgrund ihrer verallgemeinerten Beschreibung auch auf andere, beliebig komplexe Systeme anwenden lässt. Zusätzlich konnte durch die ausschließliche Verwendung kontinuierlicher Funktionen auch die Anwendung des Modells innerhalb eines nichtlinearen Zustandsfilters gewährleistet werden. Die theoretische Herleitung dieses neuen und vielseitigen Reibungsmodells sowie dessen Verallgemeinerung im Lagrange-Formalismus wird im Rahmen dieser Arbeit in Kapitel 2 vorgestellt. Dabei werden die Eigenschaften des Modells anhand von Simulationsbeispielen erläutert und die daraus resultierenden Ergebnisse mit etablierten Modellierungsansätzen verglichen. Der praktische Nutzen des leistungsorientierten Reibungsmodells bei der Verbesserung der Zustandsschätzung am Bewegungstrainer wird anschließend in Kapitel 5 untersucht. Dabei wird zunächst das Projekt MoreGait II vorgestellt und anschließend das Modell des Bewegungstrainers hergeleitet und mit einem nichtlinearen Zentralfilter kombiniert. Die resultierenden Ergebnisse der Zustandsschätzung werden mit Referenzschätzungen auf Basis von vereinfachten Reibungsmodellen verglichen und anschließend ausführlich ausgewertet und diskutiert.

Zusätzlich zur Reibung wird das dynamische Verhalten des Bewegungstrainers von weiteren, hochgradig nichtlinearen Effekten beeinträchtigt. Diese treten durch mechanische Beschränkungen auf, die einerseits konstruktionsbedingt unvermeidlich sind und andererseits dem Schutz des Patienten dienen, indem unzulässige Winkelbereiche an Hüft-, Knie- und Sprunggelenk ausgeschlossen werden. Da für die Nachbildung eines natürlichen Gangverhaltens der Bewegungsbereich am Kniegelenk maximal ausgenutzt werden soll und für ein angenehmes Trainingsgefühl eine weiche und nachgiebige Regelung eingesetzt wird, kann es im laufenden Betrieb mit aktiver Mitarbeit bzw. Störung durch den Patienten wiederholt zu einem Kontakt mit der mechanischen Beschränkung kommen. Da das System dadurch einen Freiheitsgrad verliert, führt dies meist auch zu einem systematischen Fehler zwischen Modell und System und somit zu einem deutlichen Fehler bei der Schätzung der Zustände. Bestehende Modellierungsansätze zur Berücksichtigung von mechanischen Beschränkungen basieren entweder auf Impulserhaltung und sind daher nicht für anhaltende Kontakte geeignet, oder sie basieren auf stückweise definierten Modellen mit einer variablen Anzahl an Zuständen und einer über die Anzahl an Beschränkungen exponentiell anwachsenden Menge an Teilmodellen. Daher wurde im Rahmen der hier vorgestellten Arbeit auch ein neuer Modellierungsansatz für mechanische Beschränkungen entwickelt, mit dem sowohl unilaterale Kontakte als auch Stöße berücksichtigt werden können. Dieser basiert, ebenso wie das neue dynamische Reibungsmodell, auf einer leistungsorientierten Beschreibung, die selbst für komplexe Systeme handhabbar bleibt, in den Lagrange-Gleichungen integrierbar ist und auch in Kombination mit einem Zustandsfilter verwendet werden kann. Die Herleitung des Modellierungsansatzes sowie die Erläuterung der physikalischen Eigenschaften des Ansatzes und die Abgrenzung zu bestehenden Methoden erfolgt dabei zunächst in Kapitel 3. Darin wird, wiederum anhand von Simulationen, die Vielseitigkeit der Methode verdeutlicht, die weit über die Anforderungen für den Einsatz am Bewegungstrainer hinausreichen. So kann z. B. neben einfachen Beschränkungen auch ein Durchbrechen von Schranken modelliert werden. Die Ergebnisse für den praktischen Einsatz des Kontaktmodells am Bewegungstrainer werden gemeinsam mit den Ergebnissen des Reibungsmodells in Kapitel 5 vorgestellt und ausgewertet.

Da sowohl der in Kapitel 2 vorgestellte Ansatz zur Modellierung von Reibung als auch das neue Modell zur Beschränkung von mechanischen Systemen auf leistungsorientierten Funktionsdefinitionen beruht, lassen sich beide Theorien zu einem Gesamtansatz kombinieren. Dadurch wird die Modellierung von unilateralen Kontakten mit tangential auftretender Reibung im Lagrange-Formalismus möglich. Die Modellierung von Kontakten mit Reibung stellt dabei besonders im Hinblick auf die mathematische Nachbildung von Mehrkörpersystemen eine enorme Herausforderung dar, die mit bestehenden Ansätzen kaum zu bewältigen ist. Die Zusammenführung des neuen Reibungs- und Kontaktmodells erfolgt in Kapitel 4, wobei auch hier gezeigt werden kann, dass der Modellierungsaufwand zwar anwächst, aufgrund eines stets gleichbleibenden Formalismus aber weiterhin überschaubar bleibt. Für die

Demonstration der Handhabbarkeit und Vielseitigkeit des kombinierten Ansatzes werden die Kontaktsimulationen aus Kapitel 3 aufgegriffen, um tangentielle Reibung erweitert und das Systemverhalten mit den Simulationen für die Kontakte ohne Reibung verglichen. Wie in Kapitel 5 gezeigt wird, weist auch der Bewegungstrainer einen solchen reibungsbehafteten Kontakt auf, der im Simulationsmodell des Trainingsgeräts berücksichtigt werden kann.

Die Arbeit schließt in Kapitel 6 mit einer Zusammenfassung der vorgestellten Ansätze zur leistungsbasierten Reibungs- und Kontaktmodellierung einschließlich einer Bewertung der Ergebnisse und einer Einschätzung der Signifikanz der vorgestellten Methoden für die Modellierung mechanischer und mechatronischer Systeme. Darüber hinaus wird ein Ausblick auf weitere Einsatzgebiete und mögliche systematische Erweiterungen der leistungsbasierten Reibungs- und Kontaktmodelle gegeben.

Kapitel 2

Numerisch robuste Modellierung von Reibungseffekten

In diesem Kapitel wird ein neuer Ansatz für ein dynamisches Reibungsmodell vorgestellt, das in den Lagrange-Gleichungen berücksichtigt werden kann. Nach einer Diskussion der bestehenden Modellierungsansätze in Abschnitt 2.1 wird hierfür in Abschnitt 2.2 zunächst ein statisches Modell auf Basis von Leistungsfunktionen eingeführt und anschließend verallgemeinert und dynamisch erweitert. In Abschnitt 2.3 werden die Eigenschaften des neuen Modells anhand eines simulativen Vergleichs mit einem etablierten Modellierungsansatz diskutiert, gefolgt von einer abschließenden Bewertung des leistungsbasierten Reibungsmodells in Abschnitt 2.4.

2.1 Grundlagen der Reibungsmodellierung

Reibung tritt in jedem mechanischen System auf, in dem mindestens zwei sich berührende Objekte relativ zueinander bewegt werden. Da diese Eigenschaft in der Robotik und der Mechatronik auf nahezu jede praktische Anwendung zutrifft, ist Reibung eines der gängigsten Probleme im Hinblick auf die Modellierung, die Simulation und die Regelung dynamischer Systeme. Daher sind in den letzten 200 Jahren diverse Modellierungsansätze entstanden, mit dem Ziel, das physikalische Verhalten der Reibung mathematisch nachzubilden. Unter Vernachlässigung der in [ASB07] beschriebenen, stochastischen Prozesse, kann man entsprechend den Ausführungen in [WSWK08] von fünf dominanten Reibungseigenschaften ausgehen, die den Einfluss der Reibung auf die Dynamik des Gesamtsystems bestimmen. Dabei beschreiben drei Eigenschaften das statische und zwei das dynamische Reibungsverhalten. Bei der Modellierung von Reibung wird daher auch zwischen der Klasse der statischen und der Klasse der dynamischen Reibungsmodelle unterschieden, deren wichtigste Eigenschaften in den nachfolgenden Abschnitten zusammenfassend erläutert werden.

Für einen ausführlichen und weitreichenden Vergleich der unterschiedlichen Modellierungsansätze sei hier jedoch auf die Literaturzusammenfassungen in [ADC94; WSWK08] verwiesen.

2.1.1 Statische Reibungsmodelle

Die statischen Reibungsmodelle gehen auf die Beobachtungen von Charles Augustin de Coulomb zurück, der in [Cou21] erstmalig den Zusammenhang zwischen Normalkraft, Gleitreibungskoeffizient und Reibungskraft mathematisch beschrieben hat. Die Gleitreibung, die auch als trockene Reibung oder Coulomb-Reibung bekannt ist, ist unabhängig vom Betrag der Geschwindigkeit, hängt jedoch von deren Vorzeichen ab, wodurch sie im Stillstand ein sprungförmiges Verhalten aufweist. Der Begriff der statischen Reibung bezieht sich dabei auf den direkten Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Reibungskraft ohne zusätzliche Eigendynamik. Für weitere Untersuchungen der Eigenschaften der Coulomb-Reibung hinsichtlich unterschiedlicher Materialien und Temperaturen wurden im Laufe der Jahre unzählige praktische Messungen durchgeführt. Die daraus resultierenden Ergebnisse zum thermischen und stofflichen Verhalten des Gleitreibungskoeffizienten sind unter anderem in [Bow82; Pop10] beschrieben. Da sie jedoch für die nachfolgenden Betrachtungen der Reibungsmodellierung keine Relevanz besitzen, werden sie nicht weiter betrachtet. Trotz der Vielzahl an Untersuchungen zur Gleitreibung blieb die grundlegende mathematische Definition von Coulomb bis heute unverändert. Sie wird in ihrer ursprünglichen Form noch immer in vielen Reibungsmodellen eingesetzt und wird daher auch als Grundlage bei der Herleitung des neuen Reibungsmodells in Abschnitt 2.2.1 verwendet.

Knapp 100 Jahre nach Coulomb überarbeitete Richard Stribeck dessen Modell und führte in [Str03] einen zusätzlichen Term zur Beschreibung der Haftreibungskraft und deren Abklingverhalten ein. Dadurch konnte erstmalig die erhöhte Reibungskraft im Stillstand, die zum Teil deutlich über dem Wert der Coulomb-Reibung liegt und erst beim Übergang in die Bewegung auf den Wert der Gleitreibung abfällt, in einem mathematischen Modell berücksichtigt werden. Für den Übergang zwischen Haft- und Gleitreibung wurden dabei im Laufe der Zeit diverse Basisfunktionen definiert, die sich unter anderem durch exponentielles [Tus47], verallgemeinert exponentielles [BP82], Gauß'sches [ADC94] sowie Lorentz'sches [HS90] Abklingverhalten auszeichnen. Die mathematische Definition des Stribeck-Effekts mit Gauß'schem Abklingverhalten ist dabei am weitesten verbreitet. Sie wird daher ebenfalls in Abschnitt 2.2.1 vorgestellt und als Ausgangspunkt für das nachfolgend vorgestellte Reibungsmodell verwendet.

In den meisten statischen Reibungsmodellen, wie z. B. in [ADC94; MDSH05], wird neben der Coulomb-Reibung und dem Stribeck-Effekt noch ein dritter und letzter dominanter Reibungseffekt berücksichtigt. Dieser beschreibt das linear ansteigende

Verhalten der Reibungskraft über der Geschwindigkeit und wird daher als lineare bzw. viskose Dämpfung bezeichnet. Anders als bei der Coulomb-Reibung und dem Stribeck-Effekt ist die Reibungskraft der viskosen Dämpfung im Nulldurchgang der Geschwindigkeit stetig differenzierbar, wodurch sie bei der Modellierung ein numerisch robustes Verhalten aufweist.

Eine Übersicht unterschiedlicher statischer Reibungsmodelle ist in [ADC94; BP82; HS90; Tus47; WSWK08] zu finden. Die darin beschriebenen Modelle bestehen dabei im Allgemeinen aus unterschiedlichen Kombinationen der drei oben genannten Einzeleffekte. Für praktische Anwendungen wird die statische Reibung jedoch oftmals zu einem rein viskosen Reibungsverhalten vereinfacht, wie nachfolgend in Abschnitt 2.1.3 noch erläutert wird.

2.1.2 Dynamische Reibungsmodelle

Wie in [HS90; LF98] gezeigt wurde, tritt bei der experimentellen Untersuchung des Reibungsverhaltens mit oszillierendem Geschwindigkeitsverlauf eine verzögerte Dynamik zwischen Geschwindigkeit und gemessener Reibungskraft auf, die mit den statischen Reibungseigenschaften nicht erklärbar ist. Daher wurden die statischen Reibungsmodelle nachträglich um dynamische Eigenschaften erweitert. Die dynamischen Reibungsmodelle berücksichtigen dabei, neben viskoser, Coulomb- und Stribeck-Reibung, zusätzlich das Hysterese-Verhalten der Reibungskraft und das Reibungskraftgedächtnis. Wie in [OÄC⁺98] dargelegt wird, weisen beide Effekte einen signifikanten Einfluss auf das Gesamtsystemverhalten auf, weshalb die Verwendung von dynamischen Reibungsmodellen für eine möglichst exakte Beschreibung der Reibungseffekte dringend empfohlen wird.

Folgt man den Ausführungen in [WSWK08], resultiert das Hystereseverhalten der Reibungskraft beim Nulldurchgang der Geschwindigkeit von einem mikroskopischen Federverhalten der Haftreibungskraft unmittelbar vor dem Übergang in die Gleitphase. Das Verhalten basiert dabei auf einer elastischen Deformation der Kontaktfläche. Bildlich gesprochen kann dieses Verhalten als ein Ineinandergreifen zweier Bürsten angesehen werden. Werden die Bürsten gegeneinander ausgelenkt, resultiert aus der Deformation der Borsten eine Rückstellkraft in Richtung der Ruhelage. Übersteigt jedoch die auf die Bürsten wirkende Kraft die Rückstellkraft, bewegen sich die Bürsten relativ zueinander und die Borsten greifen nicht mehr ineinander. Daher tritt das Hysterese-Verhalten nur im Bereich des Stillstands auf.

Die dynamischen Auswirkungen des Reibungskraftgedächtnisses treten hingegen lediglich bei makroskopischen Bewegungen auf, wie in [HS90] erstmalig gezeigt wurde. Betrachtet man einen periodischen, jedoch unidirektionalen Geschwindigkeitsverlauf,

so können sich bei gleicher Geschwindigkeit unterschiedliche Reibungskräfte ergeben. Die Höhe der Reibungskraft hängt dabei vom vorangegangenen Kraftverlauf ab. War die Geschwindigkeit zuvor gering und die Reibungskraft im Bereich der Stribeck-Reibung, so ist die Reibung höher als wenn die Geschwindigkeit zuvor groß und die Reibungskraft im Bereich der Coulomb-Reibung war. Dadurch schließt die Geschwindigkeit-Kraft-Kennlinie einen Bereich ein, dessen Fläche, wie in [OÄC+98] beschrieben, mit zunehmender Frequenz der eingepprägten Geschwindigkeit größer wird.

Kombiniert man die Stillstands-Hysterese mit dem Kraftgedächtnis, erhält man das dominante dynamische Verhalten der Reibung. Um dieses innerhalb eines Reibungsmodells berücksichtigen zu können, muss das zuvor statische Reibungsmodell um einen oder zwei Zustände erweitert werden. Die Dynamik des Reibungsmodells wird dabei durch eine Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung beschrieben. Ein erster Ansatz zur Beschreibung der Reibungsdynamik mit einer Differentialgleichung erster Ordnung wurde von Dahl in [Dah68] beschrieben. Das Dahl-Modell berücksichtigt zwar das dynamische Verhalten der Reibung, allerdings wird dabei der Stribeck-Effekt vernachlässigt. Später kamen weitere Modelle hinzu, wie z. B. die Modelle von Bliman und Sorin [BS93; BS95]. Diese stimmen bei entsprechender Parametrierung zwar mit dem Dahl-Modell überein, ihr dynamisches Verhalten kann aber auch durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben werden, wodurch einerseits die Berücksichtigung der Haftreibung möglich wird, andererseits aber die Komplexität des Reibungsmodells zunimmt. Für eine ausführliche Übersicht und weitere Vergleiche dynamischer Reibungsmodelle, wie z. B. dem Modell von Dankowicz [Dan99] und Swevers [SAGP00], sei auf die Literaturzusammenfassungen in [ASB07; OÄC+98; WSWK08] verwiesen. Darin ist ebenfalls das LuGre-Modell nach [COÄL93; COÄL95; Ols96] beschrieben, das als einer der vielversprechendsten Modellierungsansätze mit hoher Genauigkeit und geringer Komplexität gilt. Es kann ebenfalls als eine Weiterentwicklung des Dahl-Modells gesehen werden, hat aber im Gegensatz zu den Modellen von Bliman und Sorin den Vorteil, dass für die Berücksichtigung der Haftreibung und aller weiteren Reibungseffekte eine Differentialgleichung erster Ordnung ausreichend ist. Daher wird das LuGre-Modell in Abschnitt 2.3 ausführlich erläutert und als Referenz für das in Abschnitt 2.2 vorgestellte dynamische Reibungsmodell verwendet.

2.1.3 Anwendbarkeit bestehender Reibungsmodelle

Betrachtet man die statischen und dynamischen Reibungsmodelle im Hinblick auf Genauigkeit und praktischen Nutzen, so weisen alle zuvor aufgeführten Modellierungsansätze spezifische Vor- und Nachteile auf, die nachfolgend genauer erläutert werden.

Die statischen Modelle sind einfach in ihrer Beschreibung und können ohne dynamische Erweiterung auch in komplexeren Systemmodellen berücksichtigt werden. Dadurch bleibt der Modellierungsaufwand geringer als bei dynamischen Modellen. Da sie jedoch keine Hysterese und kein Reibungskraftgedächtnis aufweisen, müssen Abstriche hinsichtlich der Genauigkeit gemacht werden. Für Simulationen mit kleinen Abtastzeiten hält sich der Modellfehler zwar in Grenzen, jedoch steigt er mit größerer Abtastzeit deutlich an. Ein zusätzliches Problem bei großen Abtastzeiten ist der meist sprungförmige Kraftverlauf beim Nulldurchgang, der zu einem numerisch instabilen Modellverhalten führen kann. Zwar gibt es, wie in [MDSH05] beschrieben, auch statische Modellierungsansätze, die die Reibungskraft über stetig differenzierbare Trajektorien definieren und daher numerisch robuster sind, diese weisen jedoch durch den flachen Verlauf der Reibungskraft im Stillstand einen deutlichen systematischen Modellfehler auf.

Die dynamischen Modelle zeichnen sich in der Simulation durch eine deutlich genauere Approximation des Reibungsverhaltens aus. Da sie zum Teil auf Betrags- anstelle von Sprungfunktionen basieren, zeigen sie neben der höheren Genauigkeit auch ein robusteres Modellverhalten. Allerdings werden diese Vorteile durch einen teils deutlichen Anstieg der Modellkomplexität erkauft, da für jede im System auftretende Reibung die Anzahl der Zustände des Gesamtsystems um mindestens eins erhöht werden muss. Betrachtet man darüber hinaus umfangreiche Mehrkörpersysteme, so wird die Transformation der Reibungskraft von ihrem Angriffspunkt auf das Gesamtsystem mit jedem zusätzlichen Körper aufwändiger und unübersichtlicher, da kein entsprechender Formalismus existiert. Daher ist der Einsatzbereich der bestehenden Reibungsmodelle weitestgehend auf einfache Anwendungen beschränkt.

Möchte man darüber hinaus statische oder dynamische Reibungsmodelle in Kombination mit einem Zustandsbeobachter einsetzen, stellen die nicht stetig differenzierbaren Gleichungen ein erhebliches Problem dar, da sie nur unter großem Aufwand und mit stückweise definierten Modellen für den Zustandsschätzer angepasst werden können oder direkt zu einer Singularität führen. Vereinfacht man hingegen die Modelle so weit, dass sie stetig differenzierbar sind, führt dies zu einer deutlichen Abweichung des Modellverhaltens, wodurch die Zustandsschätzung signifikant verfälscht wird. Daher sind bestehende Verfahren aus der Literatur im Hinblick auf eine präzise Zustandsschätzung in praktischen Anwendungen stark limitiert und für komplexe Mehrkörpersysteme mit multiplen Reibungspunkten weitestgehend ungeeignet.

2.2 Robuste Modellierung dynamischer Reibungseffekte

Da, wie in Abschnitt 2.1.3 dargelegt wurde, die Möglichkeiten bestehender Reibungsmodelle hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit stark beschränkt sind, wird nachfolgend ein gänzlich neuer Ansatz zur Modellierung von Reibung vorgestellt. Dieser beinhaltet alle statischen und dynamischen Reibungseffekte, weist eine hohe Genauigkeit und ein numerisch robustes Verhalten auf und kann einfach auf komplexe Mehrkörpersysteme angewendet werden. Darüber hinaus können mit dem neuen Modellierungsansatz beliebig viele Reibungspunkte mit einer festen Anzahl an zusätzlichen Zuständen berücksichtigt werden. Der Ansatz basiert dabei auf einer stetig differenzierbaren Definition der Reibungskräfte über der Geschwindigkeit und wurde in seiner grundlegenden Idee bereits in [SBD14a] und [SBD14e] veröffentlicht.

In den nachfolgenden Abschnitten wird der Ansatz aus [SBD14a] und [SBD14e] erweitert und verallgemeinert, wodurch sich das Anwendungsspektrum des Reibungsmodells deutlich verbreitert. Hierfür werden die statischen Reibungseffekte nicht mehr über das Verhältnis von Kraft und Geschwindigkeit, sondern über den Zusammenhang von Leistung und Geschwindigkeit definiert. Somit entsprechen sie in ihrem Ansatz der klassischen Idee einer Dissipationsfunktion, die für rein viskose Reibung z. B. auch in [Kuy97] verwendet wird. Die für die statischen Reibungseffekte spezifischen Definitionen der Leistungsfunktionen sind in Abschnitt 2.2.1 ebenso beschrieben wie die daraus resultierenden Kraftfunktionen, die sich aus der partiellen Ableitung der Dissipationsfunktion nach der Geschwindigkeit ergeben. Der große Vorteil der Reibungsmodellierung durch Leistungsfunktionen besteht dabei in der Verallgemeinerbarkeit der Reibungseffekte im Lagrange-Formalismus, für die lediglich die für die Reibung relevante Geschwindigkeit in Abhängigkeit der verallgemeinerten Geschwindigkeiten und Koordinaten angegeben werden muss. Die Transformation der Reibungskräfte in Wirkrichtung der verallgemeinerten Kräfte erfolgt dabei durch das Ableiten nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und wird ausführlich in Abschnitt 2.2.2 erläutert. Die dynamische Erweiterung des Reibungsmodells, die in [SBD14a] noch für jede einzelne im System auftretende Reibung durchgeführt werden musste, wird in Abschnitt 2.2.3 für die bereits verallgemeinerten Reibungskräfte durchgeführt. Dadurch kann, unabhängig von der Anzahl der zu berücksichtigenden Reibungspunkte, die maximale Anzahl an zusätzlichen Zuständen für die dynamische Erweiterung des Reibungsmodells auf die Anzahl der verallgemeinerten Koordinaten begrenzt werden. Dies ermöglicht die Verwendung eines einheitlichen Formalismus für beliebig komplexe Systeme und dadurch einen stets überschaubaren Modellierungsaufwand.

2.2.1 Leistungsbasierte Modellierung statischer Reibungseffekte

Als Grundlage für das neue dynamische Reibungsmodell wird zunächst ein statisches Reibungsmodell eingeführt, das sich aufgrund der kontinuierlichen Definitionen der verwendeten Leistungsfunktionen im Lagrange-Formalismus verallgemeinern lässt. Das statische Modell beinhaltet dabei nicht nur die Rayleigh'sche Dissipationsfunktion, die zur Berücksichtigung der viskosen Reibung schon heute im Lagrange-Formalismus Anwendung findet, sondern bildet darüber hinaus auch die Effekte der Haft- und Gleitreibung ab. Die statischen Modelle der Coulomb- und Stribeck-Reibung setzen sich dabei ebenfalls aus stetig differenzierbaren Trägerfunktionen in Form von Reibungsleistungen zusammen, die eine möglichst exakte Approximation der Reibungseffekte in der Simulation gewährleisten sowie gleichzeitig ein numerisch robustes Verhalten bei der modellbasierten Zustandsschätzung in Kombination mit einem nichtlinearen Beobachteransatz aufweisen. Die geschwindigkeitsabhängigen Leistungsfunktionen der einzelnen Reibungseffekte sind dabei wie folgt definiert:

Viskose Reibung

Als erster und einfachster Term des statischen Reibungsmodells wird zunächst die viskose Reibungskraft

$$F_v^{\mathcal{D}}(v) = \frac{\partial \mathcal{D}_v(v)}{\partial v} = dv \quad (2.1)$$

eingeführt. Diese hängt vom linearen Dämpfungsfaktor d ab und beschreibt das proportionale Verhalten zwischen der viskosen Reibungskraft $F_v^{\mathcal{D}}$ und der Geschwindigkeit v . Die viskose Reibung ist der einzige Reibungseffekt, der bereits im Lagrange-Formalismus berücksichtigt werden kann. Hierfür wird zunächst die Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$\mathcal{D}_v(v) = \frac{1}{2}dv^2 \quad (2.2)$$

definiert, die den Einfluss der viskosen Reibung auf das Gesamtsystem in Form einer geschwindigkeitsabhängigen Leistung beschreibt. Der Zusammenhang zwischen Reibungsleistung und Reibungskraft ist dabei durch die partielle Ableitung der Dissipationsfunktion nach der Geschwindigkeit gegeben. Der Verlauf der Dissipationsfunktion und der Reibungskraft ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Durch die einfache Berücksichtigung der viskosen Reibung in den Lagrange'schen Gleichungen und ihr lineares Verhalten wird für regelungstechnische Anwendungen mit geringem Reibungseinfluss oft die gesamte Reibung auf diesen Einzeleffekt reduziert. Dadurch können auch weiterhin lineare Regelungs- und Beobachteransätze verwendet werden.

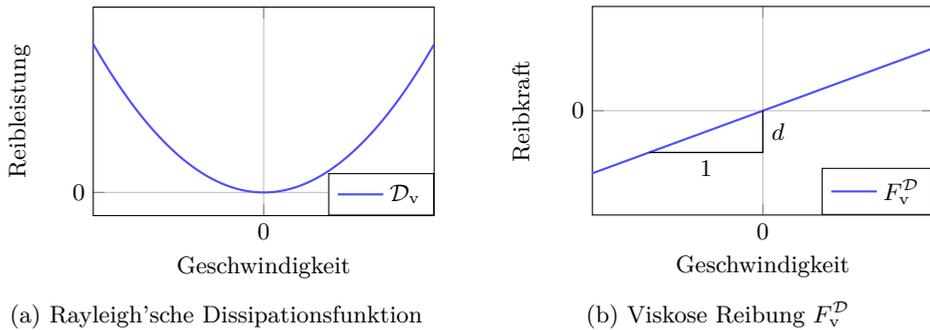


Abbildung 2.1: Leistungsverhalten der Rayleigh'schen Dissipationsfunktion und daraus abgeleitete Reibungskraft

Für Anwendungen, in denen die Reibung jedoch einen signifikanten Einfluss auf die Systemdynamik besitzt, reicht eine Vereinfachung der Reibung auf viskose Effekte nicht mehr aus um eine zufriedenstellende Regelgüte zu erreichen. Hierfür ist die Berücksichtigung weiterer, nichtlinearer Reibungseffekte im Systemmodell notwendig. Einer dieser dominanten dissipativen Effekte ist die Coulomb-Reibung:

Coulomb-Reibung

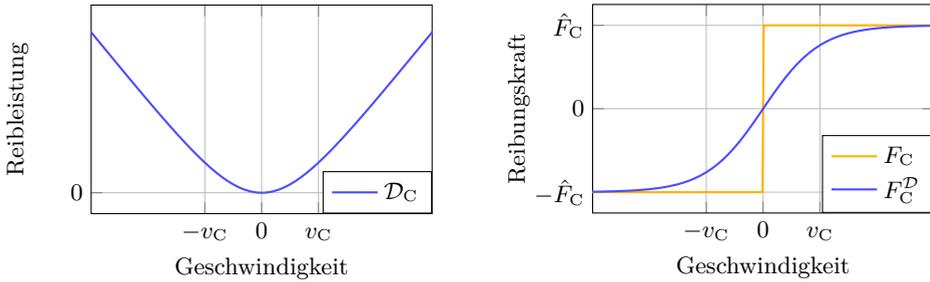
Die Coulomb- oder auch Gleitreibung ist einer der ersten beobachteten Reibungseffekte und wurde bereits in [Cou21] erstmalig beschrieben. Die Gleitreibung beschreibt eine der Geschwindigkeit entgegengesetzte Kraft, die jedoch unabhängig vom Betrag der Geschwindigkeit ist und nur von deren Vorzeichen abhängt. Die gängige mathematische Definition der Coulomb-Reibung

$$F_C(v) = \mu_C F_{\perp} \operatorname{sign}(v) = \hat{F}_C \operatorname{sign}(v), \quad (2.3)$$

die u. a. in [WSWK08] zu finden ist, erfolgt dabei unter Verwendung der Signumfunktion und hängt neben der Geschwindigkeit v von der Normalkraft F_{\perp} und dem Gleitreibungskoeffizienten μ_C ab, die zur Gleitreibungsamplitude

$$\hat{F}_C = \mu_C F_{\perp}. \quad (2.4)$$

zusammengefasst werden können. Aufgrund des Sprungverhaltens der klassischen Beschreibung der Coulomb-Reibung in Gleichung (2.3), eignet sich dieser Ansatz nicht für die Berücksichtigung der Coulomb-Reibung als Leistungsterm im Lagrange-Formalismus, da hierfür stetig differenzierbare Funktionen notwendig sind. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit der Effekt der Gleitreibung über die kontinuierliche



(a) Leistungsfunktion der Gleitreibung

(b) Vergleich von F_C und F_C^D

Abbildung 2.2: Charakteristische Leistungsfunktion der Coulomb-Reibung und Vergleich der daraus resultierenden Gleitreibung mit einer klassischen Gleitreibungsnaherung

Dissipationsfunktion

$$\mathcal{D}_C(v) = \hat{F}_C v_C \log \left(\cosh \left(\frac{v}{v_C} \right) \right) \quad (2.5)$$

angenähert. Diese hängt neben der Coulomb-Amplitude \hat{F}_C und der Geschwindigkeit v von einem weiteren Parameter v_C ab, der die Steigung der approximierten Gleitreibung im Nulldurchgang definiert. Die Leistungsfunktion \mathcal{D}_C sowie die daraus durch partielle Ableitung resultierende Reibungskraft

$$F_C^D(v) = \frac{\partial \mathcal{D}_C(v)}{\partial v} = \hat{F}_C \tanh \left(\frac{v}{v_C} \right) = \mu_C F_\perp \tanh \left(\frac{v}{v_C} \right) \quad (2.6)$$

sind in Abbildung 2.2 dargestellt. Darin wird auch der unterschiedliche Verlauf der klassischen Reibungskraft F_C und der kontinuierlichen Reibungskraft F_C^D verdeutlicht, der sich aus der Approximation der Signum-Funktion mit Hilfe eines hyperbolischen Tangens ergibt.

Wählt man dabei die Übergangsgeschwindigkeit v_C , bei der die Funktion annähernd die Coulomb-Kraft erreicht hat, sehr klein, so ergibt sich ein steilerer Übergang von F_C^D und dadurch auch ein realistischeres Reibungsverhalten. Dementsprechend führt ein größerer Wert für v_C zu einem flacheren Nulldurchgang und dadurch zu einem numerisch robusteren Modellverhalten. Dadurch kann das Modell auch für Simulationen mit großen Abtastzeiten, Zustandsschätzungen in Kombination mit einem nichtlinearen Beobachter oder modellprädiktiven Regelungen eingesetzt werden. Eine Auslegungsvorschrift für den Parameter v_C kann hierbei nicht hergeleitet werden, da der Wert nicht nur von der Kombination der Abtastzeit und des Verfahrens

zur Lösung der Differentialgleichungen abhängt, sondern auch vom verwendeten Beobachteransatz und der Dynamik des Gesamtmodells. Daher muss dieser Wert im Allgemeinen für jede Anwendung empirisch bestimmt werden.

Kombiniert man nun die Gleitreibung mit der viskosen Reibung, so können mit Ausnahme der Hafteffekte während des Stillstands alle charakteristischen Reibungseigenschaften beschrieben werden. Da jedoch gerade die haftenden Stillstandseigenschaften zu einem ungewollten Regelverhalten führen können, wird das statische Reibungsmodell abschließend noch um den nichtlinearen Effekt der Stribeck-Reibung erweitert:

Stribeck-Reibung

Der Stribeck-Effekt definiert das Haftverhalten zwischen zwei Oberflächen und wurde erstmalig in [Str03] beschrieben. Die Adhäsionskraft zwischen den Oberflächen hängt dabei von unterschiedlichen Faktoren ab, z. B. vom Material, der Geometrie und der Temperatur. Wie in [WSWK08] dargelegt wird, kann sie als additiver Term zur Gleitreibung in der allgemeinen Form

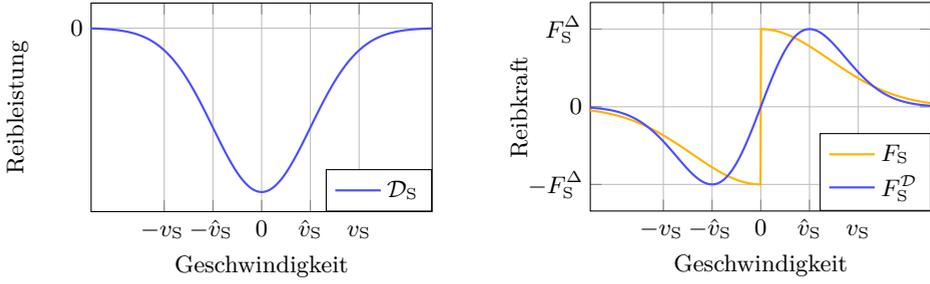
$$F_S(v) = \left(\hat{F}_S - \hat{F}_C \right) g(v) \operatorname{sign}(v) = (\mu_S - \mu_C) F_{\perp} g(v) \operatorname{sign}(v) \quad (2.7)$$

definiert werden. Der additive Term der Haftreibung ergibt sich aus der Differenz zwischen Stribeck-Amplitude \hat{F}_S und Coulomb-Amplitude \hat{F}_C , dem Vorzeichen der Geschwindigkeit sowie dem charakteristischen Abklingverhalten der Stribeck-Kurve, das durch die nichtlineare Funktion $g(v)$ definiert ist. Für die Definition von $g(v)$ wurden seit der erstmaligen Beschreibung durch Stribeck viele unterschiedliche Ansätze propagiert. Ein Überblick über die gängigsten Definitionen, wie z. B. exponentielles, verallgemeinert exponentielles, Gauß'sches, Lorentz'sches oder Popp-Stelzer-Verhalten, ist in [WSWK08] gegeben. Am häufigsten verwendet wird jedoch der Gauß'sche Ansatz, der durch die Glockenfunktion

$$g(v) = e^{-\left(\frac{v}{v_S}\right)^2} \quad (2.8)$$

beschrieben wird. Das Abklingverhalten hängt dabei nur von dem Parameter v_S ab, der auch als Stribeck-Geschwindigkeit bezeichnet wird. Eine Vorschrift für die Berechnung der Stribeck-Geschwindigkeit in Abhängigkeit des Materials, der Geschwindigkeit und der Temperatur existiert allerdings nicht. Somit muss v_S für jede Konfiguration mit Hilfe eines experimentellen Aufbaus empirisch ermittelt werden.

Das Gauß'sche Abklingverhalten findet auch in der kontinuierlich approximierten Stribeck-Reibung Anwendung, wird aber so angepasst, dass die Multiplikation mit der Signum-Funktion der Geschwindigkeit nicht mehr benötigt wird, da dies der



(a) Leistungsfunktion der Haftreibung

(b) Vergleich von F_S und F_S^D

Abbildung 2.3: Charakteristische Leistungsfunktion der Stribeck-Reibung und Vergleich der daraus resultierenden Haftreibung mit einer klassischen Haftreibungsnäherung

Voraussetzung einer stetig differenzierbaren Leistungsfunktion widerspricht. Daher wird hier als Leistungsfunktion für die Haftreibung

$$\mathcal{D}_S(v) = -F_S^\Delta \hat{v}_S e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\hat{v}_S} \right)^2} \quad (2.9)$$

mit

$$F_S^\Delta = \hat{F}_S - \hat{F}_C \tanh\left(\frac{\hat{v}_S}{v_C}\right) - d\hat{v}_S = \left(\mu_S - \mu_C \tanh\left(\frac{\hat{v}_S}{v_C}\right)\right) F_\perp - d\hat{v}_S \quad (2.10)$$

eingeführt. Die Geschwindigkeit \hat{v}_S unterscheidet sich dabei von der klassischen Definition der Stribeck-Geschwindigkeit. Wie in Abbildung 2.3 dargestellt, definiert sie den Geschwindigkeitswert, bei dem die Haftkraft maximal wird. Das Maximum fällt dabei aufgrund der kontinuierlichen Definition nicht mehr mit dem Stillstand zusammen, dadurch ändert sich auch die Berechnung der Amplitude der Haftkraft, d.h. F_S^Δ muss um die Coulomb-Reibung und die viskose Reibung bei $v = \hat{v}_S$ bereinigt werden. Vernachlässigt man in einzelnen Anwendungen des Reibungsmodells die viskose Reibung oder die Gleitreibung, so müssen die entsprechenden Terme in Gleichung (2.10) zu null gewählt werden.

Der resultierende Kraftverlauf des Stribeck-Effekts, der in Abbildung 2.3(b) dargestellt ist, ergibt sich wiederum durch die partielle Ableitung von Gleichung (2.9) nach v zu

$$F_S^D(v) = \frac{\partial \mathcal{D}_S(v)}{\partial v} = F_S^\Delta \frac{v}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\hat{v}_S} \right)^2} = F_S^\Delta g^D(v). \quad (2.11)$$

Betrachtet man nun das Abklingverhalten

$$g^{\mathcal{D}}(v) = \frac{v}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\hat{v}_S} \right)^2} \quad (2.12)$$

der Haftkraft, das auch schon den Vorzeichenwechsel beinhaltet, so ist die Ähnlichkeit zur Gaußglocke aus Gleichung (2.8) noch immer ersichtlich. Über den Parameter \hat{v}_S kann auch hier, vergleichbar zur Coulomb-Approximation, zwischen einem möglichst steilen Übergang der Haftkraft im Stillstand für ein realistisches Haftreibungsverhalten und einer flacheren Steigung für ein numerisch robusteres Verhalten gewählt werden. Muss im Hinblick auf die Robustheit des Modells \hat{v}_S jedoch sehr groß gewählt werden, so kann es vorteilhaft sein, den Stribeck-Effekt komplett zu vernachlässigen, da ansonsten Hafteffekte in Geschwindigkeitsbereichen auftreten, in denen lediglich viskose Reibung und Gleitreibung zu erwarten sind. Dies würde jedoch zu einem physikalisch falschen Verhalten und somit zu einer Verschlechterung des Reibungsmodells führen.

Statisches Reibungsmodell

Basierend auf den dissipativen Leistungsfunktionen für viskose, Coulomb- und Stribeck-Reibung lässt sich die Gesamtleistungsfunktion des statischen Reibungsmodells

$$\mathcal{D}_R(v) = \frac{1}{2} dv^2 + \hat{F}_C v_C \log \left(\cosh \left(\frac{v}{v_C} \right) \right) - F_S^\Delta \hat{v}_S e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\hat{v}_S} \right)^2} \quad (2.13)$$

über die additive Überlagerung der Gleichungen (2.2), (2.5) und (2.9) definieren. Analog dazu lässt sich die statische Gesamtreibungskraft

$$F_R^{\mathcal{D}}(v) = \frac{\partial \mathcal{D}_R(v)}{\partial v} = F_v^{\mathcal{D}}(v) + F_C^{\mathcal{D}}(v) + F_S^{\mathcal{D}}(v), \quad (2.14)$$

über die Summe der Gleichungen (2.1), (2.6) und (2.11) oder über die partielle Ableitung von \mathcal{D}_R nach v bestimmen. Die Gesamtdissipationsfunktion des Reibungsmodells ist in Abbildung 2.4(a) dargestellt, der Vergleich zwischen der approximierten Reibungskraft nach Gleichung (2.14) und der klassischen Reibungskraftdefinition

$$F_R(v) = F_v(v) + F_C(v) + F_S(v) \quad (2.15)$$

in Abbildung 2.4(b). Wählt man dabei das Verhältnis von Stribeckgeschwindigkeit v_S , Maximalkraftgeschwindigkeit \hat{v}_S und Coulomb-Geschwindigkeit v_C im Verhältnis

$$v_S = 2\hat{v}_S = 4v_C, \quad (2.16)$$

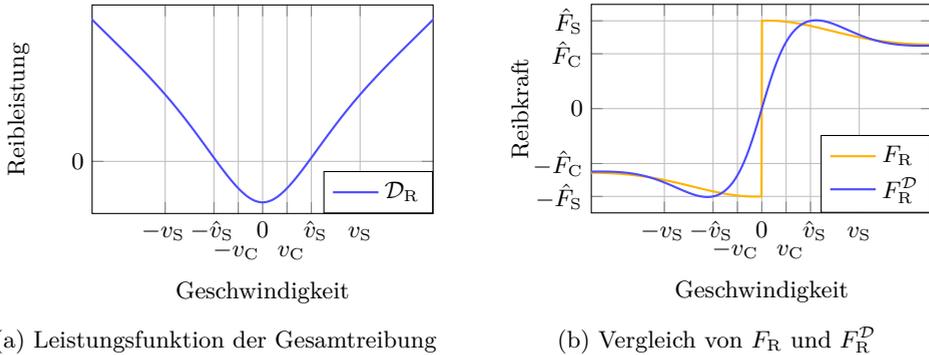


Abbildung 2.4: Leistungsfunktion des statischen Reibungsmodells und Vergleich der daraus resultierenden Krafttrajektorie mit einem klassischen Reibungskraftmodell

so erhält man den Verlauf aus Abbildung 2.4(b). Dabei ist zu erkennen, dass ab einer Geschwindigkeit von $v > \hat{v}_S$ die beiden Kurven von F_R und F_R^D nahezu identisch sind und dabei ein physikalisch plausibles Verhalten aufweisen. Bei $v < \hat{v}_S$ zeigen hingegen beide Funktionen unterschiedliche Probleme basierend auf der Art ihrer Definition. Während bei der klassischen Näherung der Sprung der Reibungskraft zu einem numerisch instabilen Modellverhalten führen kann, weist die kontinuierliche Approximation im Bereich um $v = 0$ keine bzw. kaum Reibungskraft auf, wodurch ein gravierender Unterschied zwischen dem Modell- und dem tatsächlichen Reibungsverhalten besteht. Wie jedoch in Abschnitt 2.2.3 noch gezeigt wird, kann durch die dynamische Erweiterung des kontinuierlichen Reibungskraftmodells die Problematik der Nullkraft im Stillstand kompensiert und gleichzeitig das robuste numerische Verhalten bewahrt werden. Vor der dynamischen Erweiterung soll jedoch zunächst die Verallgemeinerung des statischen Reibungsmodells im Lagrange-Formalismus erfolgen.

2.2.2 Verallgemeinerung statischer Reibungseffekte im Lagrange-Formalismus

Bisher wurde die Definition des statischen Reibungsmodells lediglich als skalarer Fall betrachtet. Nachfolgend soll nun aber auch die Wirkrichtung der Reibungskraft berücksichtigt werden, die im Allgemeinen entgegengesetzt zur Geschwindigkeit v definiert ist. Während die Berücksichtigung der Reibungskraft und ihrer Wirkrichtung in eindimensionalen Reibungsszenarien für alle gängigen Reibungsmodelle problemlos möglich ist, ist sie für mehrdimensionale Probleme mit vektorieller Beschreibung der

Reibungskraft alles andere als trivial. Wie nachfolgend gezeigt werden kann, ist dies mit dem neuen Reibungsmodell aber sehr einfach möglich. Um die Reibungskraft im Lagrange-Formalismus einbinden zu können, muss diese zunächst in die Wirkrichtung der verallgemeinerten Koordinaten transformiert werden. Dafür ist es ausreichend, die tangentielle Geschwindigkeit $v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ zwischen den interagierenden Objekten in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} sowie deren Zeitableitungen $\dot{\mathbf{q}}$ zu beschreiben. Für translatorische Reibungen, wie sie z. B. beim Ziehen eines Objekts über eine Fläche auftreten, kann hierfür zunächst der relative Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in kartesischen Koordinaten definiert werden. Berechnet man anschließend die Standardnorm für $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, so erhält man für die betragsmäßige tangentielle Geschwindigkeit

$$v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\| \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \epsilon \end{array} \right] \right\|_2 = \sqrt{v_x^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + v_y^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + v_z^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \epsilon^2}. \quad (2.17)$$

Der zusätzliche Term ϵ dient dabei der numerischen Stabilisierung des verallgemeinerten Reibungsmodells. Für einfache Fälle, bei denen die Bewegung nur in Richtung einer kartesischen Koordinate erfolgt und somit $v = v_i$ mit $i = x, y, z$ gilt, kann $\epsilon = 0$ gewählt werden. Für allgemeinere Fälle muss allerdings $\epsilon > 0$ sein, wie nachfolgend noch an praktischen Beispielen gezeigt wird. Der Stabilisierungsterm kann jedoch sehr klein gewählt werden, sodass ϵ keinen nennenswerten Einfluss auf die Gesamtdynamik aufweist. Das Vorgehen bei rotatorischer Reibung, wie sie z. B. bei Dreh- oder Kugelgelenken auftritt, ist dabei analog, jedoch wird anstelle des Angriffspunkts die Orientierung des Lagers in Abhängigkeit von \mathbf{q} definiert.

Setzt man $v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in die Dissipationsfunktion (2.13) des statischen Reibungsmodells ein, so erhält man die verallgemeinerte Leistungsfunktion

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} d_j v_j^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{F}_{C,j} v_{C,j} \log \left(\cosh \left(\frac{v_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{v_{C,j}} \right) \right) - F_{S,j}^{\Delta} \hat{v}_{S,j} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{v_{S,j}} \right)^2}. \quad (2.18)$$

Treten im System gleichzeitig m unterschiedliche Reibungspunkte auf, so können diese durch das Aufsummieren der Einzelfunktionen $\mathcal{D}_{R,j}$ zusammengefasst werden. Um aus der Dissipationsfunktion aus Gleichung (2.18) die generalisierten Reibungskräfte

$$\mathbf{Q}_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

zu erhalten, wird diese nicht mehr partiell nach v , sondern nach den n verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_i abgeleitet. Der generalisierte Reibungskraftvektor $\mathbf{Q}^{\mathcal{D}}$

kann dabei als direkte Erweiterung in die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q} = Q_i - Q_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.20)$$

eingebunden werden. Dies entspricht der Berücksichtigung der Rayleigh'schen Dissipationsfunktion, wie sie u.a. in [Kuy97] beschrieben ist. Der Ausdruck

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_k T_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \sum_l V_l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.21)$$

stellt dabei die Lagrange-Funktion dar, die sich aus der Differenz der Summen aller kinetischer Energien T_k und aller potenzieller Energien V_l im System berechnet. Darüber hinaus werden über die einzelnen Terme Q_i die generalisierten externen Kräfte in Richtung der verallgemeinerten Koordinaten berücksichtigt. Betrachtet man nun Gleichung (2.20), so lässt sich erklären, warum das Reibungsmodell bisher stets als statisch bezeichnet wurde, obwohl sich die Reibungskräfte in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten verändern. Das statische Reibungsmodell besitzt keine Eigendynamik und führt dadurch zu keiner zusätzlichen Differentialgleichung im Lagrange-Formalismus, sie führt lediglich zu einer Anpassung der vorhandenen Gleichungen.

Die Auswirkung der Verallgemeinerung auf die Verteilung der resultierenden Reibungskraft kann an einem zweidimensionalen Beispiel veranschaulicht werden. Geht man von einer Bewegung in der Ebene aus, bei der der kartesische Vektor der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$ zwischen den interagierenden Objekten in Abhängigkeit der beiden verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_1 und \dot{q}_2 definiert ist, so erhält man aus der Dissipationsfunktion

$$\mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} d (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2) + \hat{F}_C v_C \log \left(\cosh \left(\frac{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}}{v_C} \right) \right) - F_S^\Delta \hat{v}_S e^{\frac{1}{2} - \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}{2\hat{v}_S^2}} \quad (2.22)$$

durch partielles Ableiten nach \dot{q}_i mit $i = 1, 2$ die beiden generalisierten Reibungskräfte

$$Q_i^{\mathcal{D}}(\dot{\mathbf{q}}) = d \dot{q}_i + \hat{F}_C \tanh \left(\frac{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}}{v_C} \right) \frac{\dot{q}_i}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}} + F_S^\Delta \frac{q_i}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}{2\hat{v}_S^2}}, \quad (2.23)$$

die in diesem speziellen Fall nur vom Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{q}}$ abhängen. Im Term der Coulomb-Reibung lässt sich nun die Notwendigkeit von ϵ erkennen. Ohne den zusätzlichen Stabilisierungsterm würde im Falle eines Stillstands die Wurzel im Nenner der verallgemeinerten Coulombkräfte zu null. Dies kann in praktischen Implementierungen zu numerischen Instabilitäten führen, obwohl ϵ aus analytischer

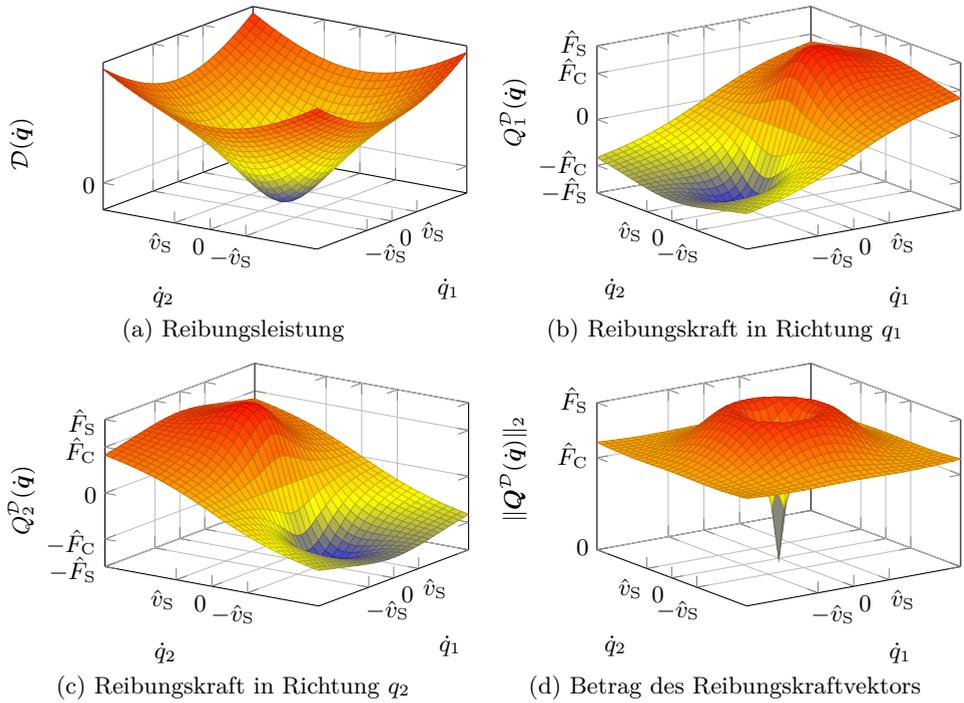


Abbildung 2.5: Dissipationsfunktion und resultierende Kraft einer zweidimensionalen Reibung in Abhängigkeit der verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_i

Sicht unnötig ist, da die Grenzwerte

$$\lim_{\dot{q}_i \rightarrow 0} \frac{\dot{q}_i}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \quad (2.24)$$

auch ohne Stabilisierungsterm gegen null streben. Die Wurzel kann nur für den Fall, dass die Geschwindigkeit von lediglich einer verallgemeinerten Geschwindigkeit abhängt und $\epsilon = 0$ ist, mit der Geschwindigkeit im Zähler gekürzt werden, wodurch der Term der Coulomb-Reibung in Gleichung (2.23) wiederum der Gleitreibungskraft in Gleichung (2.6) entspricht.

Die Verläufe der zweidimensionalen Leistungsfunktion aus Gleichung (2.22) und der resultierenden Reibungskräfte $Q_i^D(\dot{\mathbf{q}})$ nach Gleichung (2.23) sind in den Abbildungen 2.5(a)-2.5(c) dargestellt. Die Leistungsfunktion $\mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})$ bildet einen Kegel über die verallgemeinerten Geschwindigkeiten aus, der, abgesehen von den vertauschten Achsen, bei der Ableitung nach \dot{q}_1 und \dot{q}_2 die gleiche Charakteristik für $Q_1^D(\dot{\mathbf{q}})$ und

$Q_2^{\mathcal{D}}(\dot{\mathbf{q}})$ ergibt. Wird eine der beiden Geschwindigkeiten zu null gesetzt, weist das Verhalten der Reibungskraft in Richtung der anderen Koordinate ein identisches Verhalten wie in Abbildung 2.4(b) auf.

Sind jedoch \dot{q}_1 und \dot{q}_2 ungleich null, so erreichen die einzelnen Werte $Q_i^{\mathcal{D}}(\dot{\mathbf{q}})$ nicht mehr die maximale Reibungskraft \hat{F}_S . Dies liegt daran, dass die überlagerte Gesamtreibung beider Bewegungsrichtungen die Amplitude \hat{F}_S nicht überschreiten darf. Der Betrag der Gesamtreibung kann dabei über die Standardnorm des verallgemeinerten Reibungskraftvektors $\mathbf{Q}^{\mathcal{D}}(\dot{\mathbf{q}})$ berechnet werden und ist in Abbildung 2.5(d) dargestellt. Auch in dieser verallgemeinerten Form zeigt sich der Nachteil der kontinuierlichen Approximation im rein statischen Fall. Der Anstieg von $\|\mathbf{Q}^{\mathcal{D}}(\dot{\mathbf{q}})\|_2$ in Richtung Stillstand sollte eine durchgängige Kuppe ausbilden, fällt aber für kleine Geschwindigkeiten steil zu null ab. Um diesen Effekt zu kompensieren und um ein möglichst exaktes Reibungsmodell zu erhalten, ist es daher notwendig auch die dynamischen Effekte der Reibung zu berücksichtigen, die in Form von Hysterese und Reibungskraftgedächtnis auftreten. Dies kann durch eine Erweiterung des Lagrange-Formalismus mit zusätzlichen Differentialgleichungen erfolgen.

2.2.3 Dynamische Erweiterung der Lagrange-Gleichungen

Das dynamische Verhalten der Reibungskraft, das sich aufgrund von Hysterese und Reibungskraftgedächtnis ergibt, kann durch eine dynamische Erweiterung der Lagrange-Gleichungen abgebildet werden. Betrachtet man zunächst das Hysterese-Verhalten, so kann eine Verzögerung der statischen Reibungskräfte $Q_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ zur eingehenden Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}$ durch ein linear zeitinvariantes (engl.: linear time invariant, LTI) Filter erreicht werden. Folgt man dabei den Überlegungen anderer Ansätze, wie sie z. B. in [COÄL95] und [Dan99] beschrieben sind, sollte, um das Modell möglichst einfach zu halten, das dynamische Verhalten der Reibung mit einer Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben werden, was in diesem Fall einem Tiefpassfilter erster Ordnung entspricht. Da die Reibungsleistung $\mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in insgesamt n verallgemeinerte Reibungskräfte $Q_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ transformiert wird, erfolgt die Erweiterung des Lagrange-Formalismus um n Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zunächst werden hierfür die verallgemeinerten statischen Reibungskräfte $Q_i^{\mathcal{D}}$ in den Lagrange-Gleichungen (2.20) durch die dynamischen Kräfte $Q_{d,i}^{\mathcal{D}}$ ersetzt und die Differentialgleichungen um die Dynamik $\dot{Q}_{d,i}^{\mathcal{D}}$ der Tiefpassfilter erweitert. Dadurch

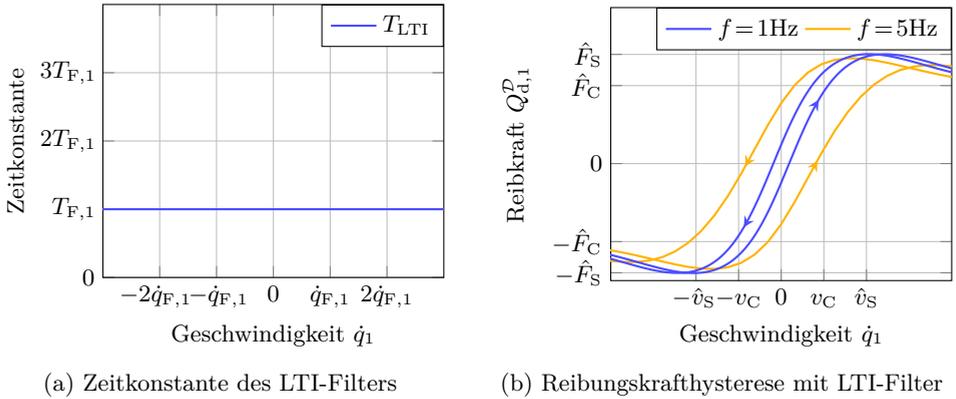


Abbildung 2.6: Hystereseverhalten der Reibungskraft $Q_{d,1}^D$ durch Modellerweiterung mit einem LTI-Tiefpassfilter bei sinusförmigem Filtereingang mit variierenden Frequenzen f

ergibt sich die erweiterte Lagrange-Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} + Q_{d,i}^D = Q_i, \quad (2.25a)$$

$$\dot{Q}_{d,i}^D = \frac{1}{T_{F,i}} \left(\frac{\partial \mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} - Q_{d,i}^D \right) \quad (2.25b)$$

mit $i = 1, \dots, n$ sowie den statischen Reibungskräften Q_i^D als Eingangsgrößen und $T_{F,i}$ als Zeitkonstanten der Tiefpassfilter. Die Filterung der verallgemeinerten Reibungskräfte hat dabei sowohl Vor- als auch Nachteile. Kommen in einem System m Reibungspunkte und n Koordinaten q_i vor, so erweitert man das System für $m < n$ um mehr Differentialgleichungen als zwingend notwendig wären. Im Gegensatz dazu bleibt die Erweiterung aber für $m \geq n$ auf n zusätzliche Differentialgleichungen begrenzt. Der größte Vorteil dieses Ansatzes ist jedoch, dass durch die feste Anzahl an Filtern ein immer gleichbleibendes Schema auf verschiedenste Systeme angewendet werden kann.

Um den Effekt der LTI-Filterung auf das Reibungsmodell zu verdeutlichen, wird wiederum der aus der Reibung in der Ebene resultierende Kraftverlauf aus Gleichung (2.23) betrachtet und als Eingang des Tiefpassfilters verwendet. Für den Eingang der statischen Reibungskraft wird für q_1 ein sinusförmiger Verlauf mit einer Amplitude von $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und variabler Frequenz f verwendet, während die zweite Geschwindigkeit q_2 aus Gründen der Anschaulichkeit gleich null gesetzt wird. Somit bleibt $Q_{d,2}^D = 0$ und die resultierende dynamische Reibungskraft $Q_{d,1}^D$, die aus der Filterung von Q_1^D mit der Zeitkonstanten $T_{F,1} = 3 \text{ ms}$ resultiert, verhält sich wie in Abbildung 2.6(b)

dargestellt. Dabei wird deutlich, dass das dynamische Verhalten der Reibungskraft ein stark frequenzabhängiges Verhalten aufweist. Dies ist zwar teilweise erwünscht, da z. B. die Stribeck-Amplitude mit wachsender Frequenz kleiner wird und dies auch ein in der Realität auftretender und in [COÁL95], [SAGP00] und [WSWK08] beschriebener Effekt ist, gleichzeitig führt es aber auch zu einem problematischen Verhalten im Hinblick auf die Breite der Hystereselücke. Für das gewählte Beispiel ist bei einer Frequenz von $f = 1$ Hz die Hystereselücke zu schmal und die Kraft im Nulldurchgang ist noch immer nahezu null, d.h. die Filterkonstante $T_{F,1} = 3$ ms ist für niedrigere Frequenzen zu klein. Bei einer Frequenz von $f = 5$ Hz wird die Hystereselücke zwar deutlich breiter, aber dafür wird die Flankensteilheit der Reibung im Übergang flacher. Für noch höhere Frequenzen würde der flache Übergang das Modellverhalten verfälschen, daher wäre für hohe Frequenzen eine kleinere Zeitkonstante von Vorteil.

Um ein einheitlich parametrisiertes Filter für alle Frequenzbereiche nutzen zu können, wird das LTI-Filter aus Gleichung (2.25b) mit konstanten Parametern $T_{F,i}$ durch ein lineares Filter mit variierenden Parametern (engl.: linear parameter-varying, LPV) ersetzt, das durch die Differentialgleichungen

$$\dot{Q}_{d,i}^{\mathcal{D}} = \frac{a_i(\dot{q}_i)}{T_{F,i}} \left(\frac{\partial \mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} - Q_{d,i}^{\mathcal{D}} \right) \quad (2.26a)$$

mit

$$a_i(\dot{q}_i) = 1 - e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{F,i}}\right)^2} \quad (2.26b)$$

definiert ist. Die Filterparameter werden nun über die Faktoren $a_i(\dot{q}_i)$ an die Geschwindigkeitszustände \dot{q}_i angepasst. Dafür werden sie, vergleichbar zur statischen Approximation der Stribeck-Reibung, in Form von Gaußglocken mit den Verteilungsfaktoren $\dot{q}_{F,i}$ definiert. Die Filterdynamik passt sich somit der Dynamik des modellierten Gesamtsystems an. Das Verhalten der variablen Zeitkonstanten $\frac{T_{F,i}}{a_i(\dot{q}_i)}$ über die Geschwindigkeit ist in Abbildung 2.7(a) dargestellt. Für Geschwindigkeiten $\dot{q}_i \gg \dot{q}_{F,i}$ ist die Filterverzögerung der Gleichungen (2.25b) und (2.26) nahezu identisch, da $a_i(\dot{q}_i \gg \dot{q}_{F,i}) \approx 1$ entspricht. Ab einer Geschwindigkeit von $\dot{q}_i = \dot{q}_{F,i}$ steigt die Zeitkonstante des Filters allerdings exponentiell an und strebt für $q_i \rightarrow 0$ in Richtung unendlich. Dies vereinfacht die Differentialgleichungen (2.26a) zu

$$\dot{Q}_{d,i}^{\mathcal{D}} = 0 \quad (2.27)$$

und führt somit im Falle eines Stillstands zu einem klassischen Integratorstörverhalten des Reibungsmodells. Wie in der praktischen Anwendung in Kapitel 5 noch gezeigt wird, ergibt sich daraus besonders im Hinblick auf die Verwendung des Modells mit einem Zustandsbeobachter ein sehr vorteilhaftes Verhalten.

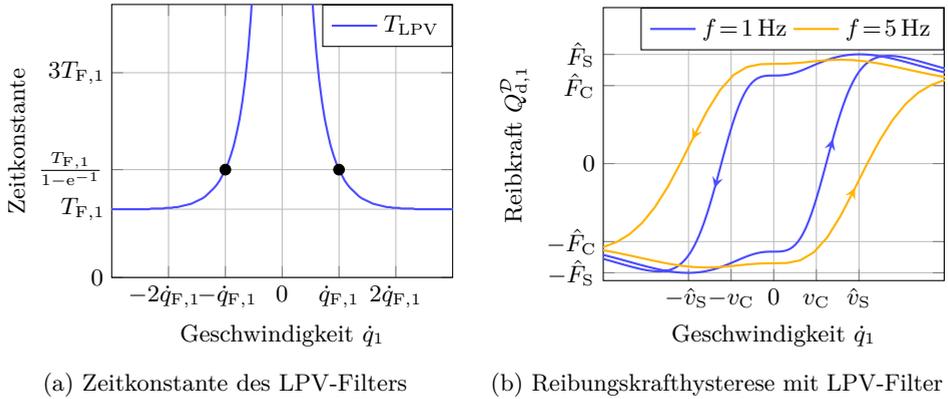


Abbildung 2.7: Hystereseverhalten der Reibungskraft $Q_{d,1}^D$ durch Modellerweiterung mit einem LPV-Tiefpassfilter mit $\dot{q}_{F,1} = \hat{v}_S$ bei sinusförmigem Filtereingang mit variierenden Frequenzen f

Betrachtet man nun die Hysteresekurve des LPV-Filters in Abbildung 2.7(b) mit $\dot{q}_{F,1} = \hat{v}_S$ im Vergleich zur Kurve des LTI-Filters in Abbildung 2.6(b) bei gleichem Testszenario, so lässt sich beim LPV-Filter eine deutlich breitere Hystereseleücke erkennen. Die Steilheit der Hysterese flanken bleibt dabei jedoch unverändert und auch die Reibungskraft im Stillstand liegt für beide Frequenzen zwischen der Stribeck- und der Coulomb-Amplitude. Dadurch lässt sich nun durch geeignete Wahl der Parameter $T_{F,i}$ und $\dot{q}_{F,i}$ eine breite Hystereseleücke mit einer steilen Flanke kombinieren. Eine Vorschrift für die Parametrierung kann hier jedoch nicht gegeben werden, da sie maßgeblich von den Randbedingungen der Simulation bzw. der Anwendung abhängt.

Bisher wurde die Bewertung der Einzelstufen, wie sie in Abbildung 2.8 nochmals vereinfacht als Blockschaltbild dargestellt sind, lediglich auf das Hystereseverhalten

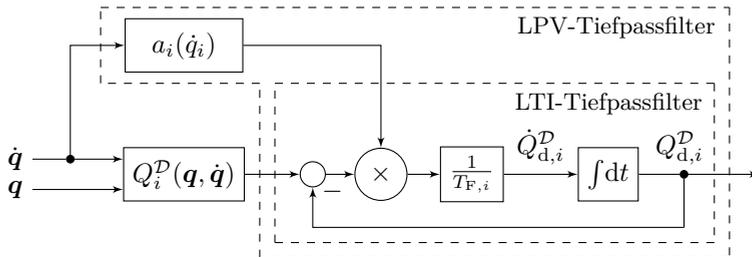


Abbildung 2.8: Blockschaltbild der stückweisen Erweiterung des statischen Reibungsmodells um ein LTI- bzw. LPV-Filter

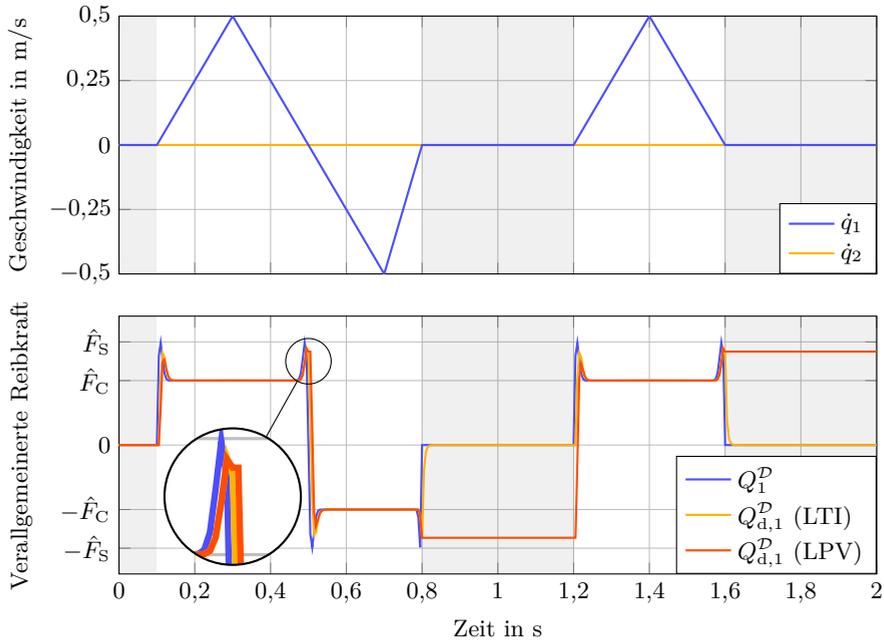


Abbildung 2.9: Vergleich von statischem Reibungsmodell und dynamischen Reibungsmodellen mit LTI- und LPV-Filter bei anhaltendem Stillstand

reduziert. Betrachtet man aber zusätzlich noch das statische Verhalten bei konstanter Geschwindigkeit, besonders bei langfristigen Stillständen, so wird die Notwendigkeit der Verwendung eines LPV-Filters im Hinblick auf das zuvor schon erwähnte Reibungskraftgedächtnis nochmals verdeutlicht. In Abbildung 2.9 ist die Anregung des Reibungsmodells mit zwei künstlichen Geschwindigkeitsverläufen für \dot{q}_1 und \dot{q}_2 dargestellt. Während die zweite verallgemeinerte Geschwindigkeit konstant null bleibt, wird anhand des Nulldurchgangs und längerer Stillstandszeiten von \dot{q}_1 das Verhalten der statischen Kraft Q_1^D und der dynamischen Reibungskraft $Q_{d,1}^D$ von LTI- und LPV-Filter untersucht.

In der initialen Stillstandsphase sind alle drei Kräfte gleich null. Dies liegt daran, dass das Reibungskraftgedächtnis von der Krafthistorie abhängt und zu diesem Zeitpunkt keine Information über die Vergangenheit vorliegt. Während der dynamischen Phase, in der sich \dot{q}_1 ändert, verhalten sich alle drei Kräfte nahezu identisch, sie unterscheiden sich lediglich beim Nulldurchgang durch die unterschiedlichen Verzögerungen der Hysteresekurve, die in der Vergrößerung zu erkennen sind. Bei der zweiten Stillstandsphase wird hingegen der Unterschied der einzelnen Modellstufen deutlich. Während

die statische Reibungskraft sofort und die LTI-gefilterte Reibungskraft nach kurzer Verzögerung zu null absinkt, wird die LPV-gefilterte Reibungskraft dauerhaft auf einem Wert knapp unterhalb der Stribeck-Amplitude gehalten. Da der Stillstand auf eine Phase negativer Geschwindigkeit folgt, zeigt auch die Reibungskraft ein negatives Vorzeichen. Im Vergleich dazu ist der Verlauf der Geschwindigkeit kurz vor der letzten Stillstandsphase positiv und somit auch die resultierende Stillstandskraft. Die Ursache für dieses Verhalten ist das Verschieben der Filterdynamik zu null, dadurch wirkt das LPV-Filter während des Stillstands wie ein Halteglied bzw. wie ein Gedächtnis und vervollständigt somit das dynamische Reibungsmodell.

2.3 Simulative Evaluation des robusten Reibungsmodells

Das in Abschnitt 2.2 hergeleitete leistungs-basierte Reibungsmodell wurde bisher auf seine Verallgemeinerbarkeit und auf die Eigenschaften der dynamischen Erweiterung untersucht. Um jedoch eine Aussage über das Verhalten und die Genauigkeit des Reibungsmodells in physikalischen Simulationen treffen zu können, wird es in diesem Abschnitt anhand eines Stick-Slip-Experiments mit einem der am weitest verbreiteten dynamischen Reibungsmodelle verglichen, dem LuGre-Modell.

2.3.1 Das LuGre-Modell

Das LuGre-Modell wurde von Olson, de Witt und Åström entwickelt und erstmalig in [COÄL93], [COÄL95] und [Ols96] beschrieben. Weitere Betrachtungen zum LuGre-Modell sowie die Unterschiede zu anderen dynamischen Reibungsmodellen, wie z. B. dem Dahl-Modell, sind in [WSWK08] zu finden. In diesem Abschnitt werden daher nur die wichtigsten Eigenschaften für das grundlegende Verständnis und die Anwendung des Modells im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt, für eine ausführliche Diskussion des LuGre-Modells sei auf die oben genannte Literatur verwiesen.

Das dynamische Verhalten des LuGre-Modells wird, ebenso wie beim leistungs-basierten Reibungsmodell, durch eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{z} = v - k_{\text{LG}} \frac{|v|}{f_1(v)} z \quad (2.28)$$

definiert, wobei z einem internen Reibungszustand in Form einer virtuellen Position, v der Relativgeschwindigkeit der Objekte und k_{LG} der Konstanten eines

mikroskopischen Federverhaltens entspricht. Über die Funktion

$$f_1(v) = \hat{F}_C + (\hat{F}_S - \hat{F}_C)g(v) \quad (2.29)$$

werden die Coulomb-Reibung und der Stribeck-Effekt in Gleichung (2.28) berücksichtigt. Das Abklingverhalten $g(v)$ der Haftreibung ist hierbei identisch zu Gleichung (2.8) gewählt. Das Stillstandsverhalten des Reibungsmodells wird über die virtuelle Position z und die Federkonstante k_{LG} abgebildet. Werden im Falle eines Stillstands die Reibungsobjekte gegeneinander ausgelenkt, so werden sie über das Federverhalten in die Ruhelage zurückgezogen. Die Rückstellkraft der Feder kann dabei den Wert der Stribeck-Reibung nicht überschreiten und sinkt für höhere Geschwindigkeiten v auf den Wert der Gleitreibung ab. Dieses Verhalten wird über den ersten Summanden der Gleichung

$$F_{LG} = k_{LG}z + d_{LG}\dot{z} + f_2(v) \quad (2.30)$$

abgebildet, die die Abhängigkeit der Reibungskraft F_{LG} von z , \dot{z} und v beschreibt. Der zweite Term der Reibungskraft entspricht der Dämpfung des mikroskopischen Federterms mit der viskosen Dämpfungskonstanten d_{LG} , während der letzte Funktionsterm die makroskopische Dämpfung abbildet und in der Regel als viskose Reibung

$$f_2(v) = dv \quad (2.31)$$

angenommen wird.

Im Vergleich zum verallgemeinerten Reibungsmodell aus Abschnitt 2.2 benötigt das LuGre-Modell somit zwei Parameter weniger, wobei der Einfluss der Parameter auf das Verhalten des Reibungsmodells ebenso leicht nachvollziehbar ist wie im leistungs-basierten Reibungsmodell. Zwar beinhalten die beiden Modelle die identischen Reibungseffekte, aber anhand der unterschiedlichen physikalischen Bedeutung der Parameter zeigt sich auch der grundlegende Unterschied in den Modellansätzen. Während das LuGre-Modell über ein Verhältnis von Kraft und virtueller Auslenkung definiert ist, wird das neue dynamische Reibungsmodell über das Verhältnis von Leistung und Geschwindigkeit beschrieben. Der Einfluss der Reibungsmodelle auf ein physikalisches System ist dabei jedoch vergleichbar, wie im nachfolgenden Abschnitt gezeigt wird.

2.3.2 1D-Stick-Slip-Szenario eines Masse-Feder-Elements

Eines der am häufigsten verwendeten Beispiele zur simulativen Evaluation von dynamischen Reibungsmodellen ist das eindimensionale Stick-Slip-Experiment, das

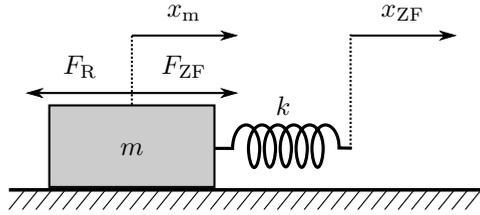


Abbildung 2.10: Benchmark-System für das Stick-Slip-Experiment: Ziehen einer Masse m über eine Feder mit konstanter Geschwindigkeit des Federendes x_{ZF}

in Abbildung 2.10 dargestellt ist. Dabei wird eine Masse m indirekt über eine Feder mit Federkonstante k und konstanter Geschwindigkeit \dot{x}_{ZF} des Federendes entlang einer waagrechten Fläche gezogen. Durch den Einfluss der Reibung zwischen der Masse und der Kontaktfläche kommt es dabei zum sogenannten Stick-Slip-Verhalten bei dem die Masse nicht der kontinuierlichen Bewegung der Feder folgt, sondern periodisch zwischen Phasen des Stillstands und der Bewegung hin und her wechselt.

Der Grund für dieses Verhalten liegt in der Haftkraft der Oberflächenreibung und der indirekten Kraftübertragung der Feder. Zu Beginn des Experiments ist die Kraft F_{ZF} , die die Feder auf die Masse ausübt, geringer als die Haftkraft und die Masse bleibt in ihrer ursprünglichen Position. Durch die weitere Ausdehnung der Feder steigt F_{ZF} kontinuierlich an, bis sie das Niveau der Haftkraft übersteigt und die Masse somit in eine Phase des Gleitens übergeht. Da in der Gleitphase die Spannung der Feder und somit auch F_{ZF} abnimmt, erreicht die Masse erneut eine Stillstandsposition und der beschriebene Vorgang beginnt von Neuem.

Für die Modellierung des Stick-Slip-Experiments wird zunächst die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}m\dot{x}_m^2 - \frac{1}{2}k(x_{ZF} - x_m - l_{ZF})^2 \quad (2.32)$$

nach Gleichung (2.21) unter Berücksichtigung der kinetischen Energie \mathcal{T} sowie der in der Feder gespeicherten potenziellen Energie \mathcal{V} aufgestellt. Die verwendeten Parameter für das Stick-Slip-Modell sind in Tabelle 2.1 aufgeführt und für beide

m in kg	k in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	l_{ZF} in m	\hat{F}_S in N	\hat{F}_C in N	d in $\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$
0,1	10	0,1	1,4	1	0,1

Tabelle 2.1: Allgemeine Simulationsparameter des Stick-Slip-Experiments

Modellierungsansätze identisch. Die Länge l_{ZF} beschreibt dabei die Differenz der Federendposition x_{ZF} und der Massenschwerpunktposition x_m , bei der $F_{ZF} = 0$ ist.

Die während des Experiments auftretende Reibung wird zunächst über den verallgemeinerten Ansatz der Dissipationsfunktion nach Gleichung (2.18) durch

$$\mathcal{D}(\dot{x}_m) = \frac{1}{2} d \dot{x}_m^2 + \hat{F}_C v_C \log \left(\cosh \left(\frac{\dot{x}_m}{v_C} \right) \right) - F_S^\Delta \hat{v}_S e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}_m}{\hat{v}_S} \right)^2} \quad (2.33)$$

abgebildet. Setzt man nun die Gleichungen (2.32) und (2.33) in die erweiterten Lagrange-Gleichungen aus (2.25a) mit dem LPV-Filterverhalten aus Gleichung (2.26) ein und verwendet man als verallgemeinerte Koordinate $q = x_m$ sowie $\dot{q} = \dot{x}_m$ für die verallgemeinerte Geschwindigkeit, so ergeben sich die Differentialgleichungen des Masse-Feder-Modells mit Reibung zu

$$\ddot{q} = \frac{k}{m} (x_{ZF} - q - l_{ZF}) - \frac{1}{m} Q_d^{\mathcal{D}}, \quad (2.34a)$$

$$\dot{Q}_d^{\mathcal{D}} = \frac{a(\dot{q})}{T_F} \left(d\dot{q} + \hat{F}_C \tanh \left(\frac{\dot{q}}{v_C} \right) + F_S^\Delta \frac{\dot{q}}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{q}}{\hat{v}_S} \right)^2} - Q_d^{\mathcal{D}} \right). \quad (2.34b)$$

Da in diesem Fall die verallgemeinerte Geschwindigkeit \dot{q} und die für die Reibung relevante Geschwindigkeit v_m identisch sind, kann der Stabilisierungsterm zu $\epsilon = 0$ gewählt werden.

Alternativ wird die Reibung des Stick-Slip-Szenarios mit Hilfe des LuGre-Modells berücksichtigt, das durch die Gleichungen (2.28)-(2.31) definiert ist. Für den eindimensionalen Fall kann dies sehr einfach durch Anpassung der Differentialgleichungen (2.34) erfolgen, indem man den Term $Q_d^{\mathcal{D}}$ in Gleichung (2.34a) durch die Reibungskraft aus Gleichung (2.30) und die Dynamik der Reibung in (2.34b) durch die Dynamik des LuGre-Modells nach Gleichung (2.28) ersetzt. Die daraus resultierende Gesamtdynamik des reibungsbehafteten Masse-Feder-Modells verändert sich dadurch zu

$$\ddot{q} = \frac{k}{m} (x_{ZF} - q - l_{ZF}) - \frac{1}{m} F_{LG} \quad \text{mit} \quad F_{LG} = k_{LG} z + d_{LG} \dot{z} + d\dot{q}, \quad (2.35a)$$

$$\dot{z} = \dot{q} - k_{LG} \frac{|\dot{q}|}{\hat{F}_C + (\hat{F}_S - \hat{F}_C)g(\dot{q})} z. \quad (2.35b)$$

Vergleicht man die beiden resultierenden Gesamtmodelle aus den Gleichungen (2.34) und (2.35), so fällt auf, dass für den einfachen eindimensionalen Fall das LuGre-Modell eine kompaktere Systembeschreibung ermöglicht. Durch den verallgemeinerten Ansatz der Reibungsmodellierung wird dieser Nachteil bei komplexeren Systemkonfiguration mehr als ausgeglichen, wie im nachfolgenden Abschnitt noch gezeigt wird.

Simuliert man nun beide Modelle in MATLAB unter Verwendung der Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung zur Lösung der Differentialgleichungen, so können die Modelle quantitativ und qualitativ miteinander verglichen werden. Beide Modelle durchlaufen das gleiche Simulationsszenario für unterschiedliche Abtastzeiten. Für kleine Abtastzeiten wird das Modellverhalten im Hinblick auf eine möglichst exakte Nachbildung des physikalischen Systemverhaltens untersucht, wohingegen für große Abtastzeiten zusätzliches Augenmerk auf die Robustheit gelegt und somit ein Abweichen der Systemdynamik in Kauf genommen werden muss.

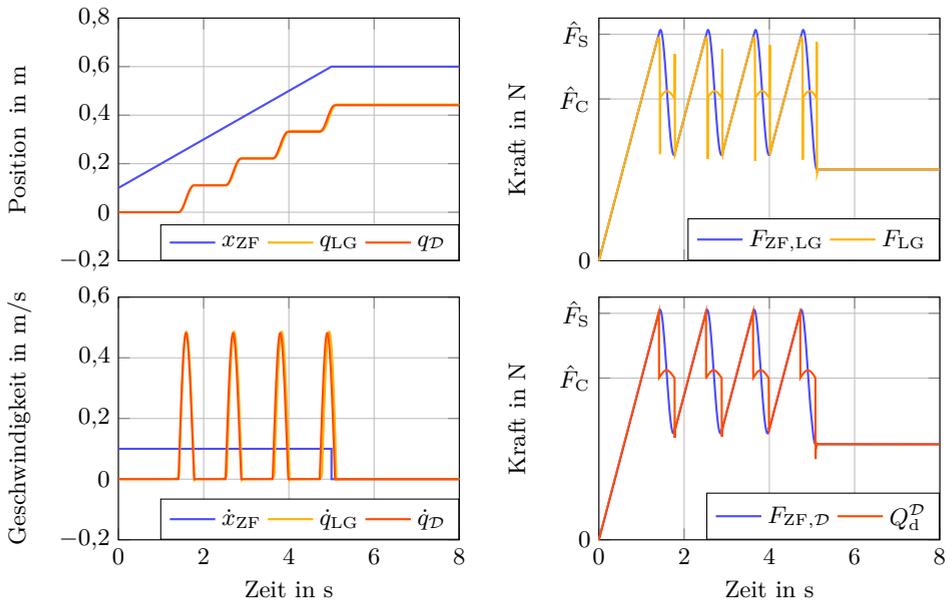
Modellverhalten bei kleinen Abtastzeiten

Um die mit den einzelnen Modellen erreichbare Approximationsgüte qualitativ zu evaluieren, wird die Abtastzeit für die Simulation zunächst zu $T = 0,1$ ms gewählt. Dabei wird angenommen, dass T deutlich kleiner ist als die Zeitkonstante der dynamischen Reibungseffekte und somit eine genaue Simulation der Vorgänge ermöglicht. Zwar konnte in der Literatur keine Angabe über die tatsächliche Größenordnung der Zeitkonstanten gefunden werden, da aber eine weitere Verkleinerung der Abtastzeit keine signifikante Veränderung in den Simulationsergebnissen der beiden Modelle bewirkt, erscheint diese Annahme durchaus gerechtfertigt. Die Simulationsparameter für das LuGre- und das verallgemeinerte Reibungsmodell sind in Tabelle 2.2 aufgelistet. Die jeweiligen Parameter wurden dabei empirisch bestimmt. Die Simulationsergebnisse der unterschiedlichen Ansätze sind in Abbildung 2.11 dargestellt.

Betrachtet man die kinematischen Simulationsergebnisse in Abbildung 2.11(a), so ist für das dynamische Systemverhalten auf Basis der beiden Modellierungsansätze kaum ein Unterschied zu erkennen. Die jeweiligen Positionstrajektorien und Geschwindigkeitsverläufe liegen nahezu deckungsgleich übereinander. Innerhalb der ersten fünf Sekunden, in denen sich das Federende mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt, bildet sich das charakteristische Stufenverhalten der Massenposition aus. Dabei ist während der Stillstandsphasen kein Driften der Massenpositionen zu erkennen und auch die Geschwindigkeiten während der Gleitphasen sind, abgesehen von einem minimalen Phasenversatz, identisch.

LuGre-Modell		Verallgemeinertes Reibungsmodell			
Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
k_{LG}	$10000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$	v_C	$0,00005 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	\dot{q}_F	$0,0001 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
d_{LG}	$100 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$	\hat{v}_S	$0,0001 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	T_F	$0,0003 \text{ s}$

Tabelle 2.2: Parametrierung der Reibungsmodelle für $T = 0,1$ ms



(a) Kinematischer Vergleich des Stick-Slip-Verhaltens mit verallgemeinertem Reibungsmodell und LuGre-Modell

(b) Vergleich der auftretenden Federkräfte $F_{ZF,i}$ und der zugehörigen Reibungskräfte F_{LG} und $Q_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}$

Abbildung 2.11: Simulationsergebnisse des Stick-Slip-Experiments für eine Abtastzeit von $T=0,1$ ms mit den Indizes ZF für Zugfeder, LG für LuGre-Modell und \mathcal{D} für Dissipationsfunktion

Einen signifikanten Unterschied erkennt man allerdings im kinetischen Systemverhalten, das durch die Trajektorien der Federkräfte $F_{ZF,i}$ und der Reibungskräfte F_{LG} und $Q_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}$ in Abbildung 2.11(b) veranschaulicht wird. Zunächst zeigen die Reibungskräfte beider Modelle während des Stillstands eine exakte Kompensation der Federkräfte, die bis zum Erreichen der Stribeck-Reibung anhält. Danach fallen, mit einsetzender Bewegung, beide Reibungskräfte auf den Wert der Coulomb-Reibung ab und zeigen mit ansteigender Geschwindigkeit eine leichte Erhöhung aufgrund der viskosen Reibungseffekte. Betrachtet man nun den Übergang zwischen den Stillstands- und Gleitphasen, so sind für das LuGre-Modell deutliche Ausreißer in den Reibungskräften zu erkennen. Am Ende des Stillstands sinkt die Reibungskraft für kurze Zeit unter das Niveau der Gleitreibung ab, wohingegen am Ende der Gleitphase ein zweiter Kraftausreißer in entgegengesetzter Richtung zu erkennen ist. Für beide Ausreißer gibt es keine physikalisch nachvollziehbare Erklärung. Ändert man die Parametrierung des LuGre-Modells, werden die Ausreißer zwar kleiner, jedoch kann dadurch auch die Kompensation der Federkraft nicht mehr bis zum Wert der

Stribeck-Reibung aufrechterhalten werden. Beim verallgemeinerten Reibungsmodell hingegen ist ein solches Verhalten zu keiner Zeit zu erkennen.

Das gleichförmige Ziehen an der Feder wird nach fünf Sekunden abrupt beendet und x_{ZF} im Anschluss daran konstant gehalten. Das Masseelement, das sich zu diesem Zeitpunkt noch in Bewegung befindet, geht daraufhin auch in den Stillstand über und es wird ein statisches Gleichgewicht der Feder- und Reibungskräfte erreicht. Beide Modelle zeigen dabei wiederum ein nahezu identisches Verhalten, wobei das verallgemeinerte Modell einen numerisch vernachlässigbaren Positionsdrift aufweist, der erst nach einem langen Zeitraum in den Positionswerten erkennbar wird. Das Modell mit LuGre-Reibung weist hingegen keinen Drift in der Position auf.

Somit stellen beide Modelle, abgesehen von kleineren systematischen Fehlern, eine sehr gute Approximation des realen Systemverhaltens dar.

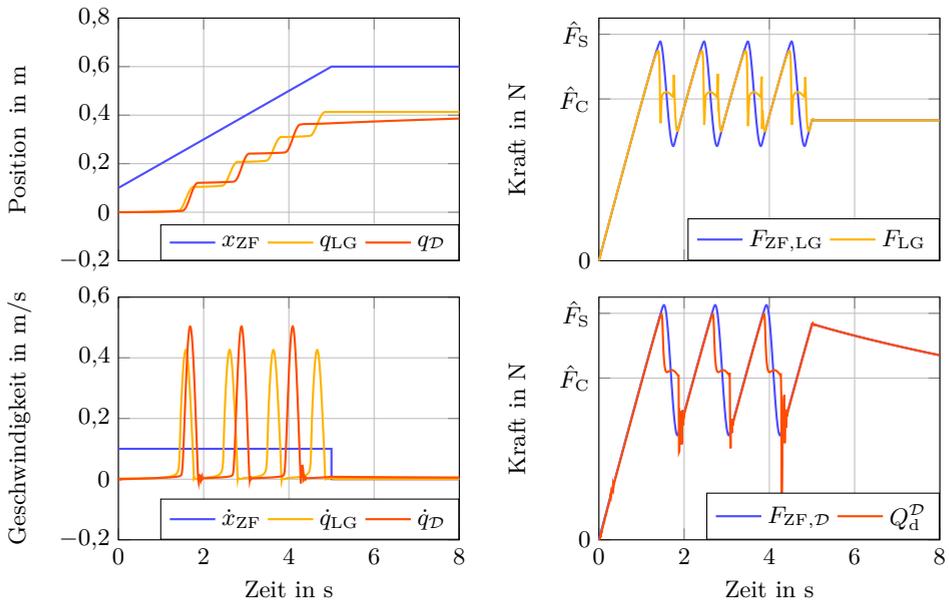
Modellverhalten bei großen Abtastzeiten

Die in den ersten Simulationen verwendete Abtastzeit von $T=0,1$ ms führt zwar zu einer sehr genauen Approximation der im System auftretenden Reibung, jedoch ist sie in praktischen Applikationen nur selten zu erreichen. Daher wird das identische Stick-Slip-Experiment mit einer Abtastzeit von $T=10$ ms wiederholt, die auch in Kapitel 5 für das Anwendungsbeispiel der Zustandsschätzung an einem Rehabilitationsroboter verwendet wird. Dabei müssen neben der Abtastzeit auch die spezifischen Parameter des LuGre-Modells und des verallgemeinerten Reibungsmodells angepasst werden. Die Einstellung der Parameter erfolgte wiederum für beide Modelle empirisch. Die resultierenden Parameter, die in Tabelle 2.3 dokumentiert sind, mussten dabei, aufgrund der mit der größeren Abtastzeit sinkenden Robustheit des Simulationsmodells, deutlich konservativer gewählt werden als die Parameter in Tabelle 2.2 für kleine Abtastzeiten.

Betrachtet man die Auswirkungen der konservativen Parameterwahl auf die Simulationsergebnisse in Abbildung 2.12, so erkennt man deutliche Unterschiede zu den

LuGre-Modell		Verallgemeinertes Reibungsmodell			
Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
k_{LG}	$600 \frac{\text{N}}{\text{m}}$	v_C	$0,005 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	\dot{q}_F	$0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
d_{LG}	$20 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$	\hat{v}_S	$0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	T_F	$0,03 \text{ s}$

Tabelle 2.3: Parametrierung der Reibungsmodelle für $T=10$ ms



(a) Kinematischer Vergleich des Stick-Slip-Verhaltens mit verallgemeinertem Reibungsmodell und LuGre-Modell

(b) Vergleich der auftretenden Federkräfte $F_{ZF,i}$ und der zugehörigen Reibungskräfte F_{LG} und $Q_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}$

Abbildung 2.12: Simulationsergebnisse des Stick-Slip-Experiments für eine Abtastzeit von $T=10\text{ms}$ mit den Indizes ZF für Zugfeder, LG für LuGre-Modell und \mathcal{D} für Dissipationsfunktion

Simulationsergebnissen aus Abbildung 2.11. Das charakteristische Stufenbild der Massenposition, das in Abbildung 2.11(a) während der ersten fünf Sekunden für beide Modelle korrekt nachgebildet wird, ist in Abbildung 2.12(a) durch einen Drift der Positionen während den Stillstandsphasen leicht verfälscht. Durch den Drift ändert sich auch die Frequenz des Stick-Slip-Verhaltens und dadurch der gesamte zeitliche Verlauf der Simulationsergebnisse. Dabei ist die Auswirkung auf das LuGre-Modell im Bereich der Stufen größer als auf das verallgemeinerte Reibungsmodell. Dies ist auch in den Geschwindigkeitsverläufen des Massenelements erkennbar. Die maximale Geschwindigkeit, die während der Simulation auftritt, sinkt für das LuGre-Modell deutlich ab, wohingegen das Geschwindigkeitsverhalten mit neuem Reibungsmodell vergleichbar zu den Ergebnissen mit kleiner Abtastzeit ist.

Der Grund hierfür ist in den kinematischen Ergebnissen in Abbildung 2.12(b) ersichtlich. Zwar können beide Reibungskräfte die Federkraft nicht mehr exakt kompensieren, jedoch erfolgt die Kompensation der Federkraft mit dem neuen Reibungsmodell

weiterhin bis zum Niveau der Stribeck-Reibung, während die Reibung des LuGre-Modells schon deutlich unterhalb von \hat{F}_S in die Gleitphase übergeht. Daher ist das verallgemeinerte Reibungsmodell dem LuGre-Modell im Hinblick auf die Nachbildung des dynamischen Verhaltens überlegen. Dies ändert sich jedoch für den statischen Teil gegen Ende der Simulation.

Betrachtet man das Verhalten der beiden Modelle in den letzten drei Sekunden der Simulation, in denen x_{ZF} in konstanter Position verbleibt, so führt das LuGre-Modell zu einer exakten Kompensation der Federkraft und somit zu einem dauerhaften Stillstand der Masse m . Mit dem verallgemeinerten Modell ist hingegen ein deutlicher Drift der Masse zu erkennen, der für kleine Abtastzeiten noch vernachlässigbar war. Somit ist das LuGre-Modell im Hinblick auf das statische Verhalten in der Simulation genauer als das neue Reibungsmodell. Für die praktische Anwendung mit einem Zustandsbeobachter, wie sie in Kapitel 5 beschrieben wird, ist dieses Verhalten jedoch nicht ausschlaggebend, da der Positionsdrift, der durch das Reibungsmodell nicht kompensiert werden kann, durch den Beobachter unterbunden wird, und somit die Vorteile des verallgemeinerten Modells im dynamischen Bereich überwiegen.

2.3.3 2D-Stick-Slip-Szenario eines Masse-Feder-Elements

Erweitert man das Stick-Slip-Experiment aus dem vorangegangenen Abschnitt um einen weiteren Freiheitsgrad, d.h. das Federende wird zusätzlich zur x -Richtung auch in y -Richtung bewegt, so ändert sich die Lagrange-Funktion aus Gleichung (2.32) durch die zusätzliche Koordinate zu

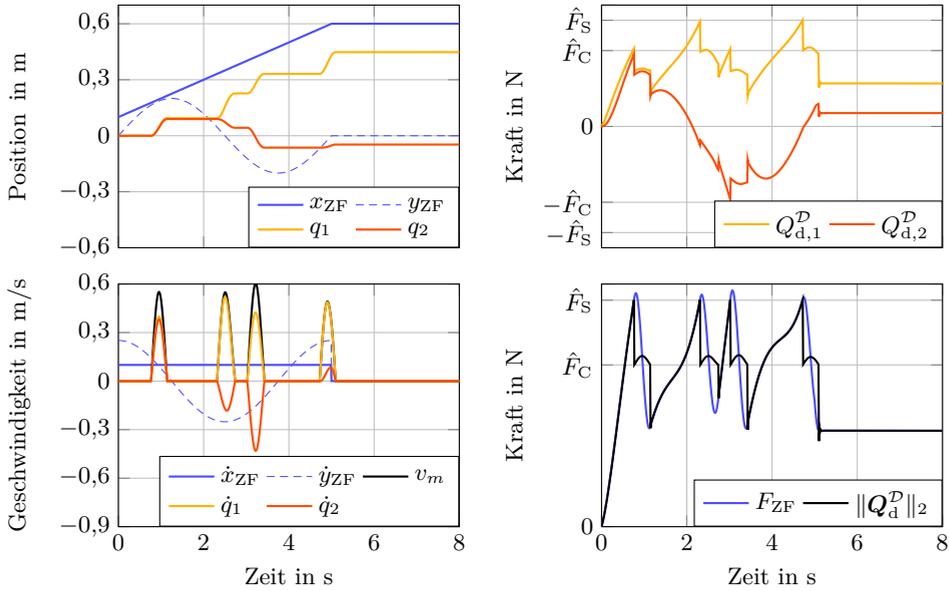
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x_{ZF} - x_m)^2 + (y_{ZF} - y_m)^2} - l_{ZF}\right)^2, \quad (2.36)$$

wobei lediglich die betragsmäßige Geschwindigkeit des Massenelements sowie die Länge der Federauslenkung neu berechnet werden müssen. Die Anpassung des verallgemeinerten Reibungsmodells erfolgt auf ähnlich einfache Weise. Zunächst bildet man den erweiterten Geschwindigkeitsterm

$$v_m = \sqrt{\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 + \epsilon^2} \quad (2.37a)$$

der Masse m nach Gleichung (2.17) und setzt diesen anschließend anstelle von \dot{x}_m in Gleichung (2.33) ein. Dadurch erhält man die Dissipationsfunktion

$$\mathcal{D}(v_m) = \frac{1}{2}dv_m^2 + \hat{F}_C v_C \log\left(\cosh\left(\frac{v_m}{v_C}\right)\right) - F_S^\Delta \hat{v}_S e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_m}{v_S}\right)^2}, \quad (2.37b)$$



(a) Simulationsergebnisse für die Koordinaten und Geschwindigkeiten der Masse

(b) Simulationsergebnisse für die verallgemeinerten Reibungskräfte

Abbildung 2.13: Kinematische und kinetische Simulationsergebnisse des 2D-Stick-Slip-Experiments mit verallgemeinertem Reibungsmodell für eine Abtastzeit von $T=0.1$ ms

die die Reibung in der x - y -Ebene beschreibt. Wendet man nun erneut die Gleichungen (2.25a) und (2.26) unter Berücksichtigung des neuen Koordinatenvektors $\mathbf{q} = [x_m \ y_m]^T$ auf die Gleichungen (2.36) und (2.37) an, so erhält man die Differentialgleichungen für das zweidimensionale Stick-Slip-Modell, die im Vergleich zu den Differentialgleichungen des eindimensionalen Modells deutlich umfangreicher sind und daher in Anhang A.1 zu finden sind. Auch wenn die Gleichungen mit jeder Dimension komplexer werden, bleibt der Ansatz für die Reibungsmodellierung stets überschaubar und somit einfach anwendbar.

Für die Simulation des zweidimensionalen Systems mit verallgemeinertem Reibungsmodell werden ebenfalls die Parameter aus Tabelle 2.1 verwendet. Die Abtastzeit für die Simulation beträgt $T=0,1$ ms, daher werden die reibungsmodellspezifischen Parameter sowohl für die q_1 - als auch für die q_2 -Richtung identisch zu den Werten in Tabelle 2.2 gewählt. Da die für die Reibung relevante Geschwindigkeit v_m nicht mehr mit einer der verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_i identisch ist, wird $\epsilon = 10^{-6}$ als Stabilisierungsterm verwendet. Darüber hinaus wird die bisherige, gleichförmige

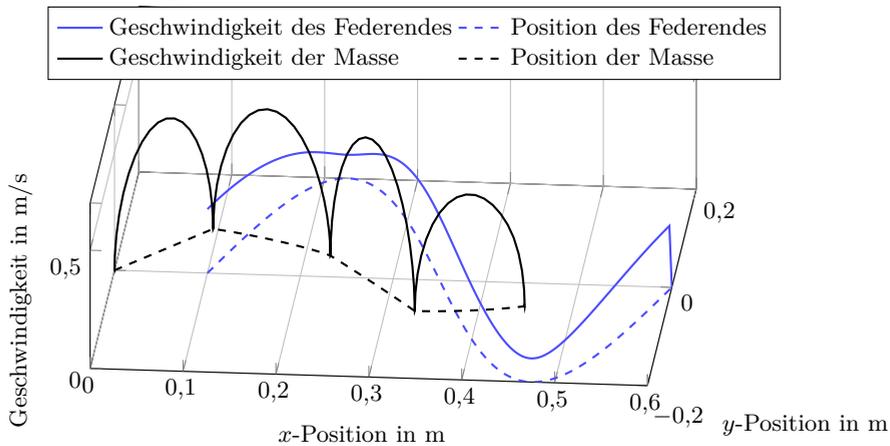


Abbildung 2.14: Vergleich der betragsmäßigen Geschwindigkeit des Massenschwerpunkts über den verallgemeinerten Koordinaten q_i und der Geschwindigkeit des Federendes über den Koordinaten x_{ZF} und y_{ZF}

Bewegung des Federendes in x -Richtung nun durch eine sinusförmige Positionsänderung in y -Richtung überlagert. Die kinematischen Simulationsergebnisse in x - y - bzw. q_1 - q_2 -Richtung sind in Abbildung 2.13(a) dargestellt.

Betrachtet man die Trajektorien von q_1 und q_2 , sind auch hier die bereits bekannten stufenförmigen Veränderungen der Massenpositionen erkennbar, die in ihren Richtungen den jeweiligen Solltrajektorien x_{ZF} und y_{ZF} folgen. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall ist die Höhe der einzelnen Positionstufen nicht mehr konstant, sondern ändert sich in Abhängigkeit der x - y -Konfiguration der Federauslenkung bzw. des daraus resultierenden Kraftvektors. Die Gleitphasen der Masse in Richtung q_1 und q_2 treten dabei, wie in den Geschwindigkeitstrajektorien zu erkennen ist, stets simultan auf und sind somit auch physikalisch plausibel. Um eine bessere Vorstellung des kinematischen Systemverhaltens zu erhalten, ist in Abbildung 2.14 zusätzlich der Verlauf der Geschwindigkeiten des Federendes und der Masse m über die jeweiligen Positionskoordinaten dargestellt. Dabei wird besonders der Unterschied zwischen der gleichförmigen Bewegung des Federendes und der ruckartigen Bewegung der Masse ersichtlich, die von einer Stillstandsposition zur nächsten springt.

Betrachtet man die in Richtung der Koordinaten transformierten, verallgemeinerten Reibungskräfte $Q_{d,1}^D$ und $Q_{d,2}^D$ in Abbildung 2.13(b), so fällt auf, dass die Kraft $Q_{d,2}^D$

stets unterhalb der Coulomb-Reibung bleibt und auch $Q_{d,1}^D$ das Niveau der Stribeck-Reibung nur zu zwei Zeitpunkten erreicht. Dennoch sind in den kinematischen Ergebnissen in Abbildung 2.13(a) insgesamt vier Gleitphasen zu erkennen, die ohne ein Überschreiten der reibungsbedingten Haftkraft \hat{F}_S nicht auftreten können. Betrachtet man jedoch die betragsmäßige Überlagerung von $Q_{d,1}^D$ und $Q_{d,2}^D$, die sich aus der Norm $\|Q_d^D\|_2$ des verallgemeinerten Kraftvektors ergibt, so erkennt man für den Vergleich von $\|Q_d^D\|_2$ mit der Federkraft F_{ZF} in Abbildung 2.13(b) ein äquivalentes Verhalten wie in den vorherigen Simulationen. Der Betrag der Kraft kompensiert die Federkraft bis zum Erreichen von \hat{F}_S und fällt dann mit einsetzender Bewegung bis auf \hat{F}_C ab. Nachdem die Masse erneut den Stillstand erreicht hat, fällt die Reibungskraft unter den Wert der Coulomb-Reibung, da nur noch die deutlich geringere Federkraft kompensiert werden muss. Somit zeigt auch das Verhalten der Stick-Slip-Simulation für den zweidimensionalen Fall ein physikalisch realistisches Verhalten und eine genaue Approximation der modellierten Reibung ohne dabei den Modellierungsaufwand signifikant zu erhöhen.

Versucht man hingegen das LuGre-Modell zur Modellierung des zweidimensionalen Stick-Slip-Experiments zu verwenden, so stößt man schnell an die Grenzen der praktischen Anwendbarkeit. Zwar kann über den Betrag der Massengeschwindigkeit v_m aus Gleichung (2.37a) auch auf den Betrag der auf die Masse wirkenden Reibungskraft F_{LG} geschlossen werden, eine automatische Transformation von F_{LG} auf die Wirkrichtung der generalisierten Kräfte steht jedoch nicht zur Verfügung. Somit muss der Einfluss der Reibung auf das Gesamtsystem zusätzlich manuell berücksichtigt und berechnet werden, was mit jeder zusätzlichen Dimension einen erheblichen Mehraufwand bedeutet und das Systemmodell zunehmend unübersichtlicher macht. Daher wird hier auf die Simulation des zweidimensionalen Stick-Slip-Experiments auf Basis des LuGre-Modells verzichtet.

2.4 Fazit

Das in Abschnitt 2.2 vorgestellte dynamische Reibungsmodell ist ein vielseitiges und effektives Werkzeug zur Berücksichtigung von Reibung in mechanischen und mechatronischen Systemen. Es beinhaltet alle fünf dominanten Reibungseffekte, die in Form von viskoser Reibung, Gleitreibung, Haftreibung, Hysterese und Reibungskraftgedächtnis auftreten, und ermöglicht dadurch eine präzise Approximation des Reibungsverhaltens dynamischer Systeme. Wie in Abschnitt 2.3.2 gezeigt wurde, ist die Genauigkeit mit dem dynamischen LuGre-Modell aus Abschnitt 2.3.1 vergleichbar, das zu den am weitest verbreiteten und genauesten Reibungsmodellen zählt. Das neue Reibungsmodell ist dabei zwar für Reibungskontakte in einfachen Einkörpersystemen minimal aufwändiger, dafür folgt es jedoch einem stets gleich

bleibenden Formalismus, der als Erweiterung zu den Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art angesehen werden kann. Dadurch wird selbst die Modellierung multipler Reibungskontakte in Mehrkörpersystemen möglich, ohne dass der Modellierungsaufwand merklich ansteigt. Die Verallgemeinerbarkeit der Reibung, die in Abschnitt 2.3.3 für ein 2D-Stick-Slip-Szenario gezeigt wurde, ist darüber hinaus bei den in der Literatur zu findenden Ansätzen bisher nur für stark vereinfachte Reibungsmodelle, wie z. B. der Rayleigh'schen Dissipationsfunktion, möglich und stellt daher einen außerordentlichen Vorteil gegenüber anderen dynamischen Reibungsmodellen dar.

Durch die Verwendung von stetig differenzierbaren Basisfunktionen kann neben der hochgenauen Approximation der Reibung für kleine Abtastzeiten auch ein äußerst robustes Modellverhalten für größere Abtastzeiten gewährleistet werden. Wie in Abschnitt 2.3.2 gezeigt wurde, verschlechtert sich die Modellgenauigkeit mit ansteigender Abtastzeit zwar ebenso wie beim LuGre- und anderen Modellen, jedoch bleibt das qualitative, dynamische Verhalten weitestgehend erhalten. Wie in Kapitel 5 gezeigt wird, kann der daraus resultierende, quantitative Fehler jedoch in der praktischen Anwendung durch einen Zustandsbeobachter korrigiert werden. Darüber hinaus führt die Kombination aus Beobachter und Reibungsmodell nicht nur zu einer verbesserten Schätzung der auftretenden Reibung, sondern auch zu einer deutlich exakteren Bestimmung aller geschätzten Werte.

Die praktischen Einsatzmöglichkeiten des Reibungsmodells wurden bereits bei der Zustandsschätzung an einem Rehabilitationsroboter nachgewiesen. Die in [SBD14b] vorgestellte Applikation ermöglicht dabei das parallele Schätzen und Separieren von kinematischen Zuständen, Reibung und Patientenaktivität, wohingegen in [SBD14c] eine kombinierte Zustands-, Reibungs- und Parameterschätzung präsentiert wurde. Beide Ansätze ermöglichten eine signifikante Verbesserung der geschätzten Zustände und Parameter und verdeutlichen dadurch die Signifikanz des Reibungsmodells über die simulative Anwendung hinaus. Ein weiteres Anwendungsbeispiel zur verbesserten Schätzung der kinematischen Zustände des Rehabilitationsroboters unter Verwendung des Reibungsmodells sowie eine ausführliche Beschreibung des verwendeten Prototyps folgen im Anwendungsteil in Kapitel 5.

Kapitel 3

Modellierung des Kontaktverhaltens reibungsfreier Objekte

In diesem Kapitel wird ein neuer und vielseitiger Ansatz zur Modellierung von Stößen und unilateralen Kontakten in mechanischen Systemen vorgestellt, der auf leistungs-basierten Restriktionsfunktionen beruht und daher ebenso wie das Reibungsmodell aus Kapitel 2 im Lagrange-Formalismus berücksichtigt werden kann. Bevor die theoretische Herleitung des Modellierungsansatzes erfolgt, werden in Abschnitt 3.1 zunächst die bestehenden Kontakttheorien vorgestellt und deren Vor- und Nachteile ausführlich diskutiert. Dabei wird die Notwendigkeit eines einfacheren und allgemeineren Kontaktmodells dargelegt. In Abschnitt 3.2 werden anschließend die einzelnen Terme des Kontaktmodells hergeleitet und zur verallgemeinerten Restriktionsfunktion zusammengefasst, die direkt in die Lagrange-Gleichungen zweiter Art eingebunden werden kann. Während der Herleitung wird dabei auf die physikalischen Eigenschaften und Zusammenhänge des leistungs-basierten Beschränkungsmodells eingegangen. Die simulative Evaluation der Kontakttheorie erfolgt in Abschnitt 3.3 anhand von unterschiedlichen Simulationsszenarien, deren Ergebnisse diskutiert und bewertet werden. Abschließend erfolgt in Abschnitt 3.4 eine Zusammenfassung, Einordnung und Bewertung des neuen, leistungs-basierten Kontaktmodells.

3.1 Grundlagen der Kontaktmodellierung

Unilaterale Kontakte treten in nahezu allen mechanischen Systemen auf. Sie beschreiben sowohl die Kollisionssdynamik zweier oder mehrerer Objekte, die mit relativer Geschwindigkeit aufeinanderprallen, als auch das statische Kräfteverhältnis bei dauerhaften Kontakten. Dabei reichen die unterschiedlichen Kontaktszenarien von

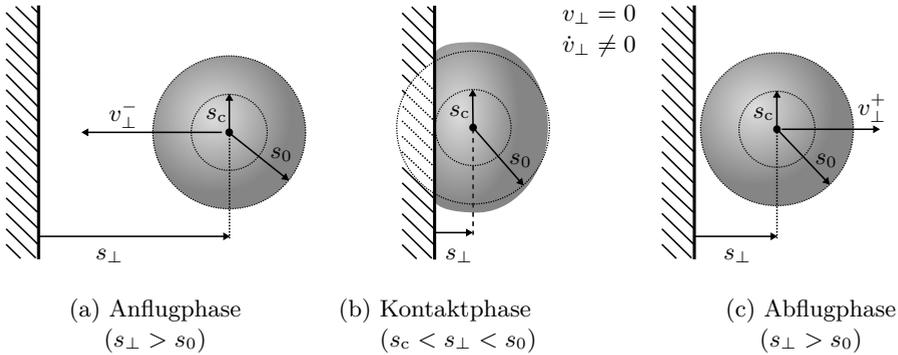


Abbildung 3.1: Aufprall einer elastischen Kugel mit Radius s_0 , Kompressionsradius s_c , Objektabstand s_{\perp} und relativer Geschwindigkeit v_{\perp} auf einer Ebene

einfachen Kollisionen glatter Einkörpersysteme bis hin zu komplexen Mehrkörpersystemen mit mehreren gleichzeitigen Kontakten und tangential zur Kontaktfläche auftretender Reibung. Obwohl solche Kontaktprobleme in vielen praktischen Applikationen auftreten, existiert nur eine begrenzte Anzahl an Modellierungsansätzen, die weitestgehend auf drei unterschiedlichen, mathematischen Formulierungen beruhen. Diese Formulierungen wurden ursprünglich für einfache Stöße von Einkörpersystemen entwickelt, wie z. B. dem in Abbildung 3.1 dargestellten Kontakt zwischen einer Kugel und einer Ebene.

Die ersten beiden ursprünglichen Formulierungen basieren auf den Beschreibungen der Kontakteigenschaften nach Newton und Poisson. Die Ansätze sind eng miteinander verwandt und werden z. B. in [Glo01; Glo04; PG96] ausführlich diskutiert. In beiden Beschreibungen wird dabei vorausgesetzt, dass die kollidierenden Objekte starr, glatt und kugelförmig sind, dadurch wird die Kontaktwirkung zwischen den Objekten auf ihre Normalkomponente reduziert. Die Beschreibung des Kontaktverhaltens der ideal starren Körper beruht dabei auf den Gesetzen der Impulserhaltung. Somit wird die Zeitspanne des Kontakts als infinitesimal angenommen, wodurch sich der Kontaktprozess in nur zwei Phasen aufteilt. Die erste Phase ist in Abbildung 3.1(a) dargestellt und beschreibt das Objektverhalten vor dem Kontakt, während die zweite Phase, dargestellt in Abbildung 3.1(c), das Verhalten nach dem Zusammenstoß beschreibt. Der Unterschied in den Ansätzen nach Newton und Poisson liegt in der Betrachtung des Kontakts zwischen den beiden Phasen. Während in der Definition nach Newton der infinitesimale Kontakt als ein einzelner Vorgang definiert ist, wird in der Kontaktbeschreibung nach Poisson der Moment des Kontakts in zwei Vorgänge aufgeteilt. Für die Beschreibung von einfachen Stößen in Einkörpersystemen sind aber beide Ansätze austauschbar. Daher gründet sich die Theorie der Starrkörperkontakte,

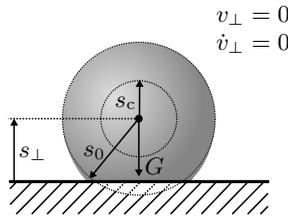


Abbildung 3.2: Statischer Kontakt zwischen einer Kugel mit Radius s_0 , Kompressionsradius s_c und Objektabstand s_{\perp} und einer Ebene unter Einfluss der Gewichtskraft G ($s_c < s_{\perp} < s_0$)

die auch als Stereomechanik bezeichnet und ausführlich in [Gol01] beschrieben wird, auf diesen beiden Formulierungen.

Da die Annahme starrer Körper jedoch keinen Rückschluss auf die während des Kontakts auftretenden Normalkräfte zulässt, ist die Stereomechanik nicht für anhaltende, statische Kontakte anwendbar, wie z. B. für das in Abbildung 3.2 dargestellte Szenario einer auf dem Boden liegenden Kugel. Möchte man neben den dynamischen Kontakten auch statische Fälle betrachten, so ist dies über den dritten ursprünglichen Ansatz möglich, der auf den Arbeiten von Hertz beruht und u. a. in [Gol01; Joh03; Pop10; Str04] beschrieben wird. Für diesen Modellierungsansatz werden die Objekte als elastisch und die Beschränkungen als starr angenommen, wodurch eine mathematische Beschreibung zwischen der Deformation der Körper und der Kontaktkräfte hergeleitet werden kann. Die Elastizität des Körpers wird dabei durch eine nichtlineare Feder approximiert, die auch als Hertz'sche Feder bezeichnet wird. Die Definition der Feder berücksichtigt alle physikalischen und geometrischen Eigenschaften der interagierenden Objekte. Zusammen mit den weniger etablierten Kontaktmodellen, die sich in der mathematischen Definition des Federverhaltens unterscheiden und die u. a. in [Joh03] aufgeführt sind, bildet der Hertz-Kontakt die Grundlage des zweiten großen Zweigs der Kontakttheorien. Dieser beinhaltet alle kontinuierlichen Kontaktmodelle, die auf dem Verhältnis von Kraft und Deformation basieren.

Beide großen Theoriezweige wurden im Rahmen nachfolgender Arbeiten stetig erweitert und angepasst, sodass mit den Modellierungsansätzen neben den bereits beschriebenen, einfachen auch komplexere Kontaktszenarien abgebildet werden können. Dabei wurden die Modelle zunächst um dissipative Eigenschaften erweitert, die die energetischen Verluste während des Stoßprozesses nachbilden. Für die Starrkörpertheorie wurde hierfür ein zusätzlicher Parameter eingeführt, der u. a. in [Str04] beschrieben wird. Der sogenannte Restitutionskoeffizient bezeichnet dabei das Ver-

hältnis zwischen der Objektgeschwindigkeit vor und nach dem Zusammenstoß. Bei den Modellierungsansätzen mit nachgiebigem Kontaktverhalten kann hingegen das dissipative Verhalten über eine Erweiterung der Hertz'schen Feder durch lineare oder nichtlineare Dämpfer berücksichtigt werden, wie sie z. B. in [HC75; MO99] vorgeschlagen werden.

Betrachtet man darüber hinaus das Verhalten von Mehrkörpersystemen mit multiplen und gleichzeitig auftretenden Kontakten, stellen sich die ursprünglichen Formulierungen aufgrund der entstehenden Komplexität als ungeeignet dar. Im Gegensatz zu Einkörpersystemen wirken die Kontaktmechanismen nicht nur auf das einzelne Segment, das dem Kontakt unterliegt, sondern zusätzliche auch auf jeden anderen Körper, der mit diesem Segment verbunden ist. Daher wurden weitere, anspruchsvollere Ansätze für die Erweiterung der stereomechanischen Kontakte unter Verwendung verallgemeinerter Impulserhaltungssätze entwickelt, die z. B. in [Bra91; Glo04; HM94; May07; Mor88; WKA92; ZA05] beschrieben sind.

Bei der Annahme elastischer Körper ist die Erweiterung der Modelle auf Mehrkörpersysteme einfacher als für starre Objekte, da die Kontaktkräfte auf das Gesamtsystem transformiert werden können. Jedoch führen auch hier die Erweiterungen der kontinuierlichen Kontaktmodelle, wie sie z. B. in [Kli99; LN94] vorgeschlagen werden, zu einem schnell anwachsenden Modellierungsaufwand. Eine weiterführende Übersicht über die beiden Theoriezweige und die zugehörigen Modelle kann [GS02; Khu13] entnommen werden. Für eine ausführliche Beschreibung der Modellierungsansätze sei hier auf die Standardwerke von Goldsmith [Gol01] und Stronge [Str04] verwiesen.

Unabhängig von der Betrachtung von Ein- oder Mehrkörpersystemen weisen beide Theoriezweige Probleme im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit und ihre Verallgemeinerbarkeit auf. Wie bereits erwähnt, ist der stereomechanische Ansatz nicht für statische Kontakte anwendbar, da er keine Informationen über die auftretenden Kontaktkräfte beinhaltet. Ist jedoch die Normalkraft nicht bekannt, ist es kaum möglich die während des Kontakts auftretenden, tangentialen Reibungseffekte zu berücksichtigen. Darüber hinaus kann die diskrete Beschreibung des Kontaktmodells zu numerischen Problemen in der Anwendung führen, die mit jedem zusätzlichen Körper und jedem weiteren Kontakt größer werden. Verwendet man hingegen Ansätze mit kontinuierlichem Kraftverlauf, benötigen diese aufgrund der stückweisen Definition der Basisfunktionen eine variable Modellstruktur. Steigt dabei die Anzahl der zu berücksichtigenden Kontakte an, vervielfacht sich die Anzahl der möglichen Kontaktkombinationen, wodurch der Modellierungsaufwand bei komplexen Mehrkörpersystemen mit einer Vielzahl an unilateralen Kontakten sehr stark anwächst und die Fehleranfälligkeit zunimmt.

Um eine robuste und einfache Modellierung von Kontaktvorgängen zu ermöglichen, die, unabhängig von der Systemkomplexität, einem immer gleichen, physikalisch inter-

pretierbaren Formalismus folgt, wird in diesem Kapitel ein neuer Modellierungsansatz vorgestellt, dessen grundlegende Idee bereits vorab in [SBD15b] veröffentlicht wurde. Der Ansatz basiert auf einer mathematischen Beschreibung der Beschränkungsleistung durch Restriktionsfunktionen und stellt daher einen neuen Theoriezweig in der Modellierung von mechanischen Kontakten dar. Dabei werden die charakteristischen Eigenschaften der Beschränkungen nicht über Impulserhaltung oder dem Verhältnis von Deformation und Kraft beschrieben, sondern über den Zusammenhang von Leistung und Geschwindigkeit definiert. Daher ist der Ansatz mit der Idee der Modellierung statischer Reibungseffekte auf Basis von Dissipationsfunktionen vergleichbar, die bereits in Abschnitt 2.2.1 vorgestellt wurde. Für die Gleichungen des Beschränkungsmodells werden ebenfalls ausschließlich kontinuierliche Basisfunktionen verwendet, die aufgrund ihrer stetigen Differenzierbarkeit numerisch robuster sind und darüber hinaus auch in den Lagrange-Gleichungen zweiter Art berücksichtigt werden können. Zusätzlich bietet die kontinuierliche Beschreibung die Möglichkeit, dass der Ansatz, wie in Kapitel 5 gezeigt wird, auch in Kombination mit einem Zustandsbeobachter eingesetzt werden kann. Diese Eigenschaften stellen im Hinblick auf die Einsatzmöglichkeiten und die Anwendbarkeit des Modells einen erheblichen Vorteil im Vergleich zu den zuvor beschriebenen Beschränkungstheorien aus der Literatur dar. Wie in [SBD13] erstmalig gezeigt werden konnte, ist der vorgestellte Modellierungsansatz sowohl auf Ein- als auch für Mehrkörpersysteme anwendbar, wobei der Aufwand für eine beliebige Anzahl an Kontakten unverändert bleibt. Dies kann dadurch gewährleistet werden, dass die charakteristischen Eigenschaften eines jeden Kontakts weiterhin über eine geringe Anzahl an physikalischen Parametern eingestellt werden kann. Somit bleibt das Kontaktmodell auch für komplexe Systeme handhabbar.

3.2 Kontaktmodellierung mit leistungsbasierten Restriktionsfunktionen

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Modellierungsansatz für unilaterale Kontakte basiert auf einer Restriktionsfunktion, die das energetische Verhalten kollidierender Objekte vor, während und nach einem Kontakt beeinflusst. Die Funktion setzt sich dabei aus den beiden Einzeltermen der Aktivierungsfunktion \mathcal{R}_a und der kontaktspezifischen Leistungsfunktion \mathcal{R}_p zusammen. Die Aktivierungsfunktion beschreibt den Grad der Interaktion zwischen dem Objekt und der Beschränkung in Abhängigkeit der Objektdistanz s_\perp . Dabei ist sowohl die Berücksichtigung starrer Körper als auch die Annahme elastischer Objekte möglich. Die Aufgabe der Leistungsfunktion besteht in der Beschreibung der charakteristischen Schrankeneigenschaften, die die Kontaktdauer, die Eindringtiefe bzw. Deformation und den Grad der Energiedissipation beinhalten. Multipliziert man die Leistungsfunktion \mathcal{R}_p mit der Aktivierungsfunk-

tion \mathcal{R}_a , so erhält man die Beschreibung des neuen Kontaktmodells in Form der Restriktions- bzw. Beschränkungsfunktion

$$\mathcal{R}(s_\perp, v_\perp) = \mathcal{R}_a(s_\perp)\mathcal{R}_p(v_\perp). \quad (3.1)$$

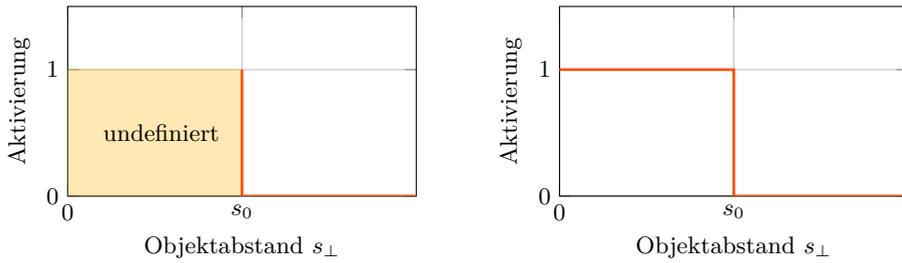
Eine ausführliche Beschreibung der einzelnen Terme und ihrer jeweiligen Aufgaben ist in den nachfolgenden Abschnitten zu finden.

3.2.1 Aktivierungsfunktion

Für die Simulation eines Stoß- oder Kontaktszenarios muss zunächst überprüft werden, ob eine Berührung zwischen zwei Objekten vorliegt und wie stark die Interaktion zwischen den Objekten ist. Unabhängig vom gewählten Modellierungsansatz muss hierfür zunächst eine Funktion für die Kollisionsdetektion definiert werden, über die kontinuierlich bestimmt wird, ob eine Beschränkung aktiv ist oder nicht. Die charakteristischen Eigenschaften der unterschiedlichen Aktivierungsfunktionen hängen dabei vom physikalischen Ansatz der jeweiligen Kontakttheorie ab.

Für die auf Impulserhaltung basierenden Kontaktmodelle starrer Körper kann die Kollisionsdetektion über eine Abstandsfunktion $g(s_\perp)$ erfolgen, wie sie in [Glo01; PG96] vorgeschlagen wird. Für den Fall des Stoßszenarios aus Abbildung 3.1 wird die Abstandsfunktion beispielsweise über die Gleichung $g(s_\perp) = s_\perp - s_0$ repräsentiert, die den Abstand zwischen der Kugel und der Ebene beschreibt. In Abhängigkeit von $g(s_\perp)$ kann anschließend zwischen drei diskreten Szenarios unterschieden werden: Ist $g(s_\perp) > 0$, sind Objekt und Beschränkung eindeutig voneinander getrennt und es gibt keine Interaktion zwischen den beiden. Ist hingegen $g(s_\perp) = 0$, berühren sich Kugel und Ebene in einem beliebigen Punkt, dabei tritt eine sprungförmige Änderung der Geschwindigkeit auf, die den Gesetzen der Impulserhaltung folgt. Im dritten und letzten Fall für $g(s_\perp) < 0$ würden sich Objekt und Beschränkung überlappen. Da dies jedoch die Annahme starrer Körper verletzen würde, stellt dieser Fall einen undefinierten Zustand dar. Basierend auf diesen drei Annahmen lässt sich ein Stoßszenario starrer Körper über die Ungleichung $s_\perp \geq s_0$ definieren, das für $s_\perp = s_0$ eine Neuberechnung des Impulsgleichgewichts erfordert. Die Aktivierungsfunktion weist somit ein diskretes Umschaltverhalten auf, wie es in Abbildung 3.3(a) dargestellt ist.

Für die kraftbasierten Modelle der Hertztheorie, die auf der Annahme elastischer Körper basieren, ist, wie in [Gol01; Khu13; Pop10] beschrieben, der Zustand sich überlappender Objekte zwingend notwendig. Nur so kann ein mathematischer Zusammenhang zwischen Kompression und Kontaktkraft etabliert werden, der über das Verhalten einer Hertz'schen Feder mit stückweise definierten Kraftfunktionen



(a) Diskrete Aktivierungsfunktion stereo-mechanischer Kontakte

(b) Diskrete Aktivierungsfunktion elastischer Kontakte

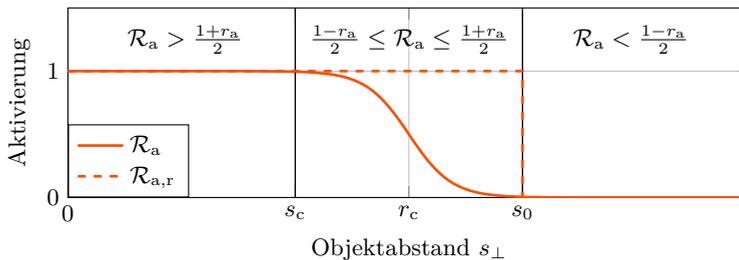
(c) Kontinuierliche Aktivierungsfunktion \mathcal{R}_a der leistungsbasierten Kontaktmodellierung.

Abbildung 3.3: Vergleich der unterschiedlichen Aktivierungsfunktionen für impulsbasierte, kraftbasierte und leistungsbasierte Kontaktmodelle.

beschrieben wird. Für $s_{\perp} \leq s_0$ wird über die Feder eine positive Kraft aufgebracht, die ihrer Auslenkung entgegen wirkt. Ist hingegen $s_{\perp} > s_0$, wird die Federkraft konstant zu null gesetzt, um dadurch eine Wechselwirkung zwischen den Körpern zu unterbinden. Daher wird für die Hertztheorie mit stückweise definiertem, elastischem Kontakt eine diskrete Aktivierungsfunktion verwendet, wie sie in Abbildung 3.3(b) dargestellt ist.

Betrachtet man das Verhalten der unterschiedlichen Aktivierungsfunktionen in Abbildung 3.3, so erkennt man die bereits erwähnten Schwächen der etablierten Theoriezweige hinsichtlich der Verallgemeinerbarkeit der Modelle oder deren Anwendbarkeit bei komplexen Mehrkörpersystemen. Durch die Annahme starrer Körper und dem daraus resultierenden, sprunghaften Impulsverhalten in Abbildung 3.3(a) ist die Stereomechanik nicht für anhaltende, statische Kontaktsszenarios geeignet. Die kraftbasierten Ansätze können diese zwar sehr gut abbilden, sind jedoch unpraktikabel für Mehrkörpersysteme mit Mehrfachkontakt, da aufgrund der stückweise definierten Funktion der Hertz'schen Feder und der daraus resultierenden Aktivie-

rungsfunktion nach Abbildung 3.3(b) ein permanentes Umschalten zwischen vielen unterschiedlichen Modellen stattfindet. In praktischen Anwendungen führt dies zum Einsatz aufwändiger Zustandsautomaten, die, zusätzlich zu den Einzelkontakten, alle Kombinationen der einzelnen Aktivierungsfunktionen berücksichtigen müssen.

Der neue Modellierungsansatz wurde hingegen sowohl für die Berücksichtigung dynamischer Stöße als auch für die Beschreibung statischer Kontakte entwickelt, ohne dabei ein diskretes Umschalten der Modellstruktur zu benötigen. Die Schranken-detektion der leistungs-basierten Kontakttheorie erfolgt über eine kontinuierliche Aktivierungsfunktion

$$\mathcal{R}_a(s_\perp) = \frac{1 - \tanh(r_t(s_\perp - r_c))}{2}, \quad (3.2)$$

die auf einer Sigmoidfunktion in Form eines hyperbolischen Tangens basiert. Die diskreten Kollisionsdetektionen aus den Abbildungen 3.3(a) und 3.3(b) werden dabei durch die kontinuierliche Approximation in Abbildung 3.3(c) ersetzt, wobei $\mathcal{R}_a(s_\perp) \in (0, 1) \forall s_\perp \in \mathbb{R}$ gilt. Das Intervall der Aktivierungsfunktion bildet den Grad der Interaktion zwischen der Beschränkung und dem Objekt ab, wobei für $\mathcal{R}_a \rightarrow 0$ keine Wechselwirkung stattfindet und für $\mathcal{R}_a \rightarrow 1$ ihr Maximum erreicht wird. Hinsichtlich des stetigen Übergangsverhaltens der Aktivierungsfunktion lassen sich zwei charakteristische Parameter definieren: der Transitionskoeffizient

$$r_t = \frac{2}{s_0 - s_c} \operatorname{artanh}(r_a) \quad (3.3)$$

und der Schrankenoffset

$$r_c = \frac{s_0 + s_c}{2}, \quad (3.4)$$

wobei s_0 durch die Objektgeometrie vorgegeben ist und $s_c \leq s_0$ als Adaptionparameter angesehen werden kann.

Betrachtet man den initialen Kontaktfall mit $s_\perp = s_0$, so ist die Annahme eines kontinuierlichen Übergangs durchaus schlüssig, da für einen infinitesimalen Kontakt zwischen einem elastischen Körper und seiner Beschränkung eine verschwindend geringe Interaktion zu erwarten ist. Der Grad der Wechselwirkung für $s_\perp = s_0$ kann dabei über den Zusammenhang $\mathcal{R}_a(s_0) = \frac{1-r_a}{2}$ festgelegt werden. Mit zunehmender Kompression des elastischen Körpers über das Intervall $s_c < s_\perp < s_0$ steigt auch der Grad der Interaktion bis zu einem Wert von $\mathcal{R}_a(s_c) = \frac{1+r_a}{2}$ an. Der Approximationsparameter $r_a \in (0.5, 1)$ beschreibt somit das Interaktionsniveau für $s_\perp = s_c$. Für noch stärkere Kompressionen im Bereich $s_\perp < s_c$ bleibt der hohe Grad der Wechselwirkung hingegen nahezu unverändert. Der einzige Nachteil der kontinuierlichen Approximation der Aktivierungsfunktion ist ein verbleibender Einfluss der Beschrän-

kung im Bereich $s_{\perp} > s_0$, in dem kein Kontakt zwischen Objekt und Beschränkung vorliegt. Wird jedoch $r_a \rightarrow 1$ gewählt, ist dieser Einfluss vernachlässigbar gering, da $\mathcal{R}_a(s_{\perp})$ für $s_{\perp} > s_0$ gegen null geht. Da r_a nur ein Approximationsparameter für die Aktivierungsfunktion darstellt, der ansonsten keinen Einfluss auf das physikalische Kontaktverhalten aufweist, wird der Parameter für alle nachfolgenden Simulationen und Anwendungen zu $r_a = 0,99$ gewählt.

Obwohl die Aktivierungsfunktion in der angegebenen Form nur für elastische Körper definiert ist, ist es auch möglich durch $s_c \rightarrow s_0$ den Fall eines starren Körpers nachzubilden. Dabei vereinfacht sich die Aktivierungsfunktion zu

$$\mathcal{R}_{a,r}(s_{\perp}) = \lim_{s_c \rightarrow s_0} \mathcal{R}_a(s_{\perp}) = \frac{1 - \text{sign}(s_{\perp} - s_0)}{2}. \quad (3.5)$$

Dadurch wird schon im Falle eines infinitesimalen Kontakts eine maximale Wechselwirkung zwischen Objekt und Beschränkung erzielt. Der Spezialfall der Aktivierungsfunktion für starre Körper, der durch Gleichung (3.5) definiert ist, kann ebenso für den leistungsbasierten Ansatz verwendet werden wie die kontinuierliche Funktion aus Gleichung (3.2), allerdings resultieren daraus die gleichen Probleme, die auch in der Stereomechanik auftreten. Während die Modellierung dynamischer Kontaktprozesse auf Basis der Aktivierungsfunktion starrer Körper problemlos möglich ist, können dadurch, wie nachfolgend in Abschnitt 3.3 noch gezeigt wird, keine statischen Kontakte abgebildet werden. Daher wird für alle praktischen Anwendungen nachdrücklich eine Parametrierung der Aktivierungsfunktion mit $s_c < s_0$ empfohlen.

3.2.2 Schrankenspezifische Leistungsfunktion

Der schrankenspezifische Term der Restriktionsfunktion definiert die physikalischen Kontakteigenschaften der Beschränkung und ist mit der Idee der Energiedissipation vergleichbar, die auch der Modellierung von Reibung in mechanischen Systemen zugrunde liegt. Wie in Kapitel 2 schon ausführlich erläutert wurde, wird dabei die Energieabfuhr des Systems während einer infinitesimalen Zeitspanne über eine geschwindigkeitsabhängige Leistungsfunktion definiert. Die grundlegenden energetischen Vorgänge, die während der Kompressionsphase eines Stoßes stattfinden, werden dabei in Abbildung 3.4(a) verdeutlicht. Zunächst wird in Abhängigkeit der Restriktionsfunktion \mathcal{R} die gesamte kinetische Energie abgeführt, die aus der Relativgeschwindigkeit v_{\perp} zwischen Objekt und Beschränkung resultiert. Anders als bei Reibungseffekten wird dem System jedoch nur ein Teil ΔT_c der kinetischen Energie dauerhaft entzogen. Die verbleibende Energie T_s wird von einem virtuellen Speicher aufgenommen und anschließend während der Restitutionsphase als kinetische Energie an das Objekt zurückgegeben. Dabei treten, wie in Abbildung 3.4(b) dargestellt, weitere dauerhafte Energieverluste ΔT_r auf.

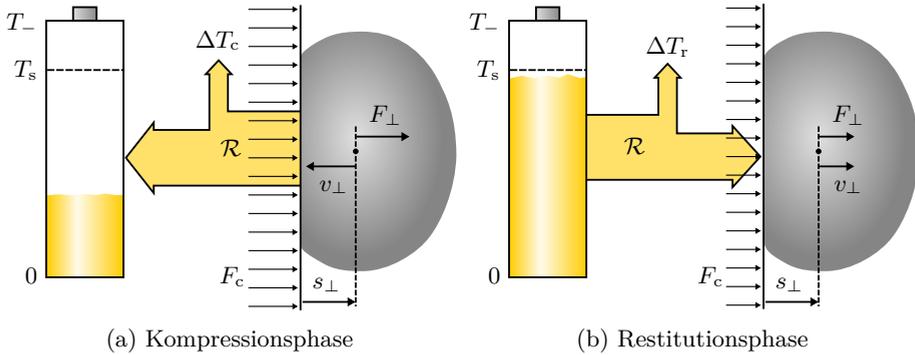


Abbildung 3.4: Energetisches Kontaktverhalten auf Basis der schrankenspezifischen Leistungsfunktion

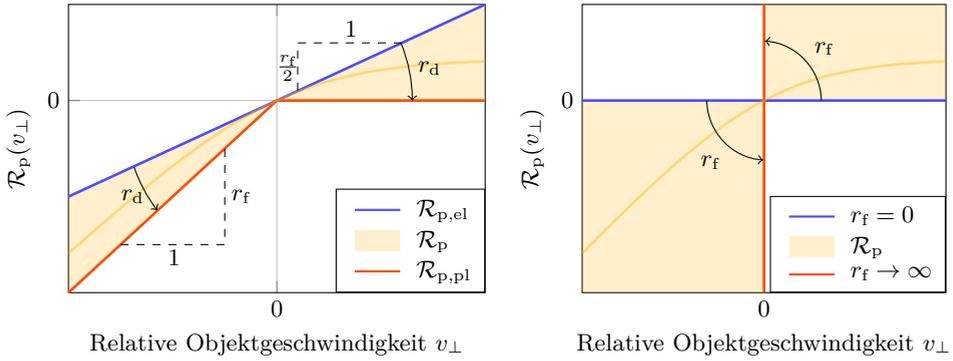
Die Eigenschaften der schrankenspezifischen Leistungsfunktion unterscheiden sich daher grundlegend von den Eigenschaften der Dissipationsfunktionen aus Kapitel 2, da sich mit dem Vorzeichen der Geschwindigkeit auch das Vorzeichen der Leistungsfunktion ändert. Für Geschwindigkeiten $v_{\perp} < 0$, d.h. während der Kompressionsphase, ist die Leistungsfunktion negativ und dem betrachteten System wird Energie entzogen. Ist hingegen $v_{\perp} > 0$, so ist die Leistung positiv und die gespeicherte Energie fließt in das System zurück. Dabei muss sichergestellt werden, dass die Energie, die in das System zurückfließt, stets kleiner oder gleich der kinetischen Energie ist, die dem System zuvor entzogen wurde, da nur so das Einhalten der physikalischen Kontaktgesetze gewährleistet werden kann.

Eine Funktion, die all diese Voraussetzungen erfüllt und daher die Grundlage für den vorgestellten Modellierungsansatz darstellt, ist die hier eingeführte schrankenspezifische Leistungsfunktion

$$\mathcal{R}_p(v_{\perp}) = \left(\frac{v_{\perp}}{2} - \frac{\log(\cosh(r_d v_{\perp}))}{2r_d} \right) r_f, \quad (3.6)$$

die von der Relativgeschwindigkeit v_{\perp} abhängt. Die physikalische Parametrierung der Leistungsfunktion erfolgt dabei über den Dissipationskoeffizienten r_d und den Kraftkoeffizienten r_f .

Der Parameter $r_d \in (0, \infty)$ definiert den Grad der energetischen Verluste während des Stoßes und ist daher vergleichbar mit einem klassischen Dämpfungsparameter. Der Adaptionsbereich der Leistungsfunktion reicht dabei von elastischen Stößen mit



(a) Abhängigkeit von r_d mit den Extremfällen für plastische und elastische Stöße (b) Abhängigkeit von r_f mit den Extremfällen für starre und keine Schranken

Abbildung 3.5: Kontaktspezifische Leistungsfunktion in Abhängigkeit der Geschwindigkeit in Normalenrichtung v_\perp

vollständiger Energieerhaltung für

$$\mathcal{R}_{p,el}(v_\perp) = \lim_{r_d \rightarrow 0} \mathcal{R}_p(v_\perp) = \frac{v_\perp}{2} r_f \quad (3.7)$$

bis hin zu plastischen Stößen mit einer vollständigen Absorption der kinetischen Energie für

$$\mathcal{R}_{p,pl}(v_\perp) = \lim_{r_d \rightarrow \infty} \mathcal{R}_p(v_\perp) = \frac{v_\perp - |v_\perp|}{2} r_f = \begin{cases} v_\perp r_f & \text{für } v_\perp < 0, \\ 0 & \text{für } v_\perp \geq 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Bei elastischen Stößen wird das Leistungsverhalten der Beschränkung über eine Gerade durch den Ursprung mit einer Steigung von $\frac{r_f}{2}$ nachgebildet. Die Symmetrie der Leistungsfunktion garantiert dabei die vollständige Erhaltung der kinetischen Energie, da für die Beschleunigung des Objekts während der Restitutionsphase die gleiche Leistung zur Verfügung steht wie für das Abbremsen des Objekts in der Kompressionsphase. Im Falle eines plastischen Stoßes verdoppelt sich für $v_\perp < 0$ die Bremsleistung aufgrund der zusätzlichen Energiedissipation, die aus der dauerhaften Verformung des Objekts resultiert. Gleichzeitig sinkt die für die Beschleunigung des Objekts zur Verfügung gestellte Leistung auf null ab. Daher verliert das kollidierende Objekt während des Stoßes die gesamte von v_\perp abhängige Energie und bleibt im Punkt maximaler Kompression stecken. Betrachtet man reale Kontaktprozesse und Stoßszenarien, so weisen diese ein durchgängig viskoelastisches Verhalten auf, d.h. es wird nur ein Teil der kinetischen Energie abgeführt. Dabei liegt die in Abbildung 3.5(a) dargestellte Leistungsfunktion \mathcal{R}_p zwischen den beiden Extremfällen für plastische

und elastische Stöße, wobei die Restitutionsleistung betragsmäßig stets kleiner ist als die Bremsleistung während der Kompressionsphase.

Die maximale Leistung der Beschränkung hängt von der Aufprallgeschwindigkeit v_{\perp}^{-} und dem Kraftkoeffizienten r_f ab. Der Parameter $r_f \in [0, \infty)$ stellt dabei ein Maß für die Steifigkeit der mechanischen Schranke dar und definiert gleichzeitig die maximale Normalkraft, die während der Kompression von der Beschränkung aufgebracht werden kann. Diese beträgt r_f für plastische Stöße, $\frac{r_f}{2}$ für elastische Stöße und einen festen Wert dazwischen für viskoelastische Kontakte. Für den Fall, dass $r_f = 0$ gewählt wird, ist somit die maximale Restriktionsleistung für alle Geschwindigkeiten gleich null und die Beschränkung verschwindet. Betrachtet man den anderen Extremfall für $r_f \rightarrow \infty$, so ist die Leistung während des Kontakts unendlich groß, wodurch die Kontaktdauer infinitesimal wird und die Beschränkung ein stereomechanisches Verhalten aufweist. Beide Extremfälle sowie der Einfluss des Kraftkoeffizienten auf die Leistungsfunktion sind in Abbildung 3.5(b) dargestellt. Somit bietet der neue, leistungsorientierte Modellierungsansatz die Möglichkeit, eine Vielzahl unterschiedlicher Kontaktszenarien nachzubilden, wobei lediglich die Kollision eines starren Objekts mit einer starren Beschränkung nicht berücksichtigt werden kann. Da aber eine mechanische Beschränkung mit unendlicher Restriktionsleistung in praktischen Applikationen nicht vorkommen kann, ist dies kein nennenswerter Nachteil der leistungsorientierten Kontakttheorie.

Zusammenfassend kann die schrankenspezifische Leistungsfunktion als ein System bestehend aus einem virtuellen Antrieb und einem Energiespeicher angesehen werden. Der Kraftkoeffizient bestimmt dabei die maximale Leistung des Antriebs, wohingegen der Dissipationskoeffizient dessen Wirkungsgrad bei der Energietransformation während der Kompressions- und der Restitutionsphase spezifiziert. Da der virtuelle Antrieb das System aber nur im Falle eines Stoßes oder Kontakts beeinflusst, muss die Leistungsfunktion, wie im nachfolgenden Abschnitt beschrieben, noch mit der Aktivierungsfunktion aus Abschnitt 3.2.1 kombiniert werden.

3.2.3 Formulierung der Restriktionsfunktion

Die Kombination der Aktivierungsfunktion $\mathcal{R}_a(s_{\perp})$ aus Abschnitt 3.2.1 mit der Leistungsfunktion $\mathcal{R}_p(v_{\perp})$ aus Abschnitt 3.2.2 erfolgt über die Multiplikation der Gleichungen (3.2) und (3.6). Aus dem Produkt der beiden Funktionen erhält man die Restriktionsfunktion

$$\mathcal{R}(s_{\perp}, v_{\perp}) = \left(\frac{1 - \tanh(r_t(s_{\perp} - r_c))}{2} \right) \left(\frac{v_{\perp}}{2} - \frac{\log(\cosh(r_d v_{\perp}))}{2r_d} \right) r_f, \quad (3.9)$$

die vom Objektabstand s_{\perp} und der zugehörigen relativen Geschwindigkeit v_{\perp} abhängt und die Gesamtbeschreibung der Beschränkung darstellt. Die Kontakteigenschaften der Restriktionsfunktion werden über die vier bereits eingeführten Koeffizienten r_i definiert. Die Parameter der Aktivierungsfunktion r_t und r_c können als Steifigkeit und Geometrie des Objekts angesehen werden, wohingegen die Parameter der Leistungsfunktion r_f und r_d die Widerstandskraft und das Dämpfungsverhalten der Beschränkung beschreiben. Durch die geringe Anzahl an Koeffizienten mit eindeutiger physikalischer Bedeutung bleibt der Ansatz somit stets einfach zu handhaben.

Durch die Restriktionsgleichung (3.9) werden alle viskoelastischen Kontaktszenarien im Bereich $\mathcal{R}_{\text{pl}} < \mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{el}}$ repräsentiert, die von den beiden Extremfällen für plastische Kontakte

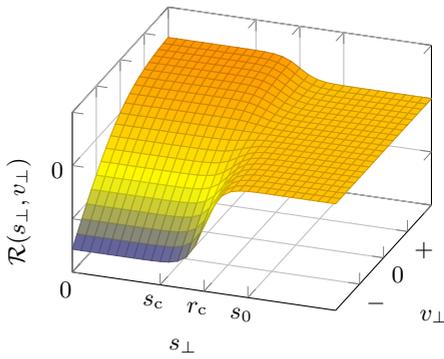
$$\mathcal{R}_{\text{pl}}(s_{\perp}, v_{\perp}) = \begin{cases} \mathcal{R}_a(s_{\perp})v_{\perp}r_f & \text{für } v_{\perp} < 0, \\ 0 & \text{für } v_{\perp} \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

und für elastische Stöße

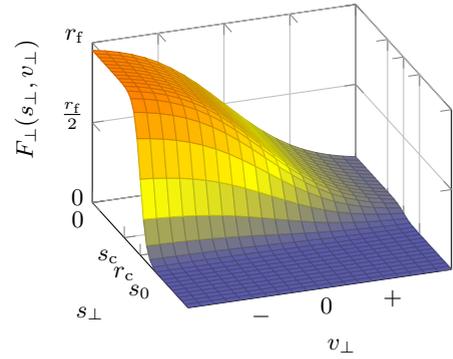
$$\mathcal{R}_{\text{el}}(s_{\perp}, v_{\perp}) = \mathcal{R}_a(s_{\perp})\frac{v_{\perp}}{2}r_f. \quad (3.11)$$

eingeschlossen werden. Die von den Restriktionsfunktionen $\mathcal{R}(s_{\perp}, v_{\perp})$, $\mathcal{R}_{\text{pl}}(s_{\perp}, v_{\perp})$ und $\mathcal{R}_{\text{el}}(s_{\perp}, v_{\perp})$ aufgespannten Leistungsflächen über dem Objektabstand s_{\perp} und der Geschwindigkeit v_{\perp} sind in den Abbildungen 3.6(a)-3.6(c) dargestellt. Im Bereich der maximalen Interaktion $s_{\perp} < s_c$ zeigt sich ein nahezu konstantes Leistungsverhalten über s_{\perp} , wohingegen deutliche Veränderungen der charakteristischen Leistung über der Geschwindigkeit v_{\perp} zu erkennen sind. Diese entsprechen in ihrer Form dem Funktionsverlauf aus Abbildung 3.5(a) mit einem nichtlinearen, asymmetrischen Verhalten für viskoelastische Stöße, einem stückweise definierten, linearen Verhalten für plastische Kollisionen und einem linearen, symmetrischen Funktionsverlauf für elastische Kontaktszenarios. Über den Bereich $s_c < s_{\perp} < s_0$ erfolgt ein stetig differenzierbarer Übergang zwischen dem Bereich der maximalen Wechselwirkung und dem kontaktfreien Bereich $s_{\perp} > s_0$, in dem nur eine vernachlässigbar geringe Interaktion auftritt.

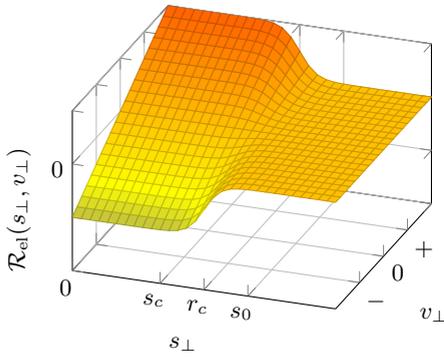
Im Vergleich zur Stereomechanik oder den Hertz'schen Kontaktmodellen sind die Restriktionsgleichungen \mathcal{R} und \mathcal{R}_{el} für elastische und viskoelastischen Stöße stetig differenzierbar für alle $s_{\perp}, v_{\perp} \in \mathbb{R}$. Dies stellt einen signifikanten Vorteil in der praktischen Anwendung der Kontakttheorie dar, da dadurch eine Reinitialisierung der Modellzustände bei Impulserhaltung bzw. ein Umschalten zwischen einzelnen Modellgleichungen mit Hertz'scher Feder überflüssig wird. Lediglich der plastische Fall, der über die stückweise definierte Funktion \mathcal{R}_{pl} abgebildet wird, zeigt in der praktischen Anwendung ein unerwünschtes Sprungverhalten und dadurch ein ähnlich problematisches Verhalten im Hinblick auf die numerische Robustheit des Ansatzes wie bei



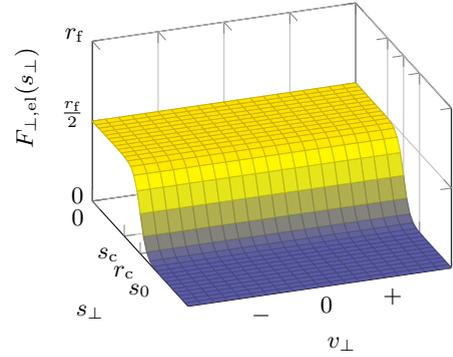
(a) Viskoelastische Restriktionsleistung



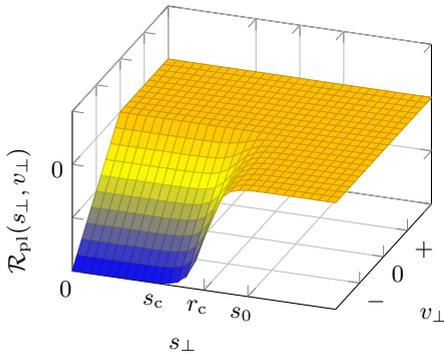
(d) Viskoelastische Kontaktkraft



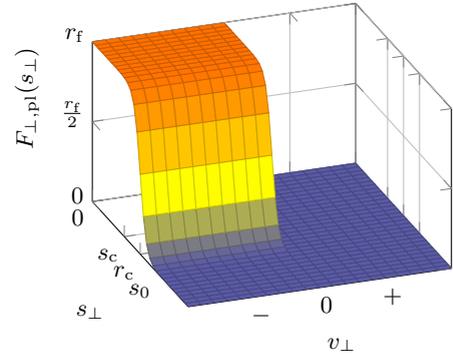
(b) Elastische Restriktionsleistung



(e) Elastische Kontaktkraft



(c) Plastische Restriktionsleistung



(f) Plastische Kontaktkraft

Abbildung 3.6: Vergleich von Restriktionsleistungen und Kontaktkräften für viskoelastische, elastische und plastische Kontakte

anderen Kontakttheorien. Da jedoch plastische Kontakte näherungsweise durch einen viskoelastischen Stoß mit sehr starker Dämpfung approximiert werden können, stellt dies keine signifikante Einschränkung für praktische Modellierungsaufgaben dar.

3.2.4 Reaktionskräfte, Kontaktverluste und Impulsverhalten

Da die Beschreibung der Kontaktdynamik in anderen Modellierungsansätzen über die Kontaktkräfte, die Energiedissipation und/oder die Änderung des Impulsverhaltens erfolgt, wird in diesem Abschnitt der Zusammenhang zwischen diesen Eigenschaften und der leistungsbasierten Restriktionstheorie hergeleitet. Dadurch wird ein direkter Vergleich der unterschiedlichen Modellierungsansätze möglich, der weitere Untersuchungen hinsichtlich der physikalischen Plausibilität des neuen Kontaktmodells erlaubt.

Der Zusammenhang zwischen der während des Kontakts auftretenden Normalkraft und der Restriktionsfunktion kann analytisch über die partielle Ableitung von Gleichung (3.9) nach der relativen Geschwindigkeit v_\perp bestimmt werden. Die Kontaktkräfte bei viskoelastischen Kollisionen werden dabei durch die Funktion

$$F_\perp(s_\perp, v_\perp) = \frac{\partial \mathcal{R}(s_\perp, v_\perp)}{\partial v_\perp} = \mathcal{R}_a(s_\perp) \left(\frac{1 - \tanh(r_d v_\perp)}{2} \right) r_f = \mathcal{R}_a(s_\perp) F_c(v_\perp), \quad (3.12)$$

bei plastischen Kontakten durch die Funktion

$$F_{\perp, \text{pl}}(s_\perp) = \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{pl}}(s_\perp, v_\perp)}{\partial v_\perp} = \begin{cases} \mathcal{R}_a(s_\perp) r_f & \text{für } v_\perp < 0, \\ 0 & \text{für } v_\perp \geq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

und bei elastischen Stößen durch

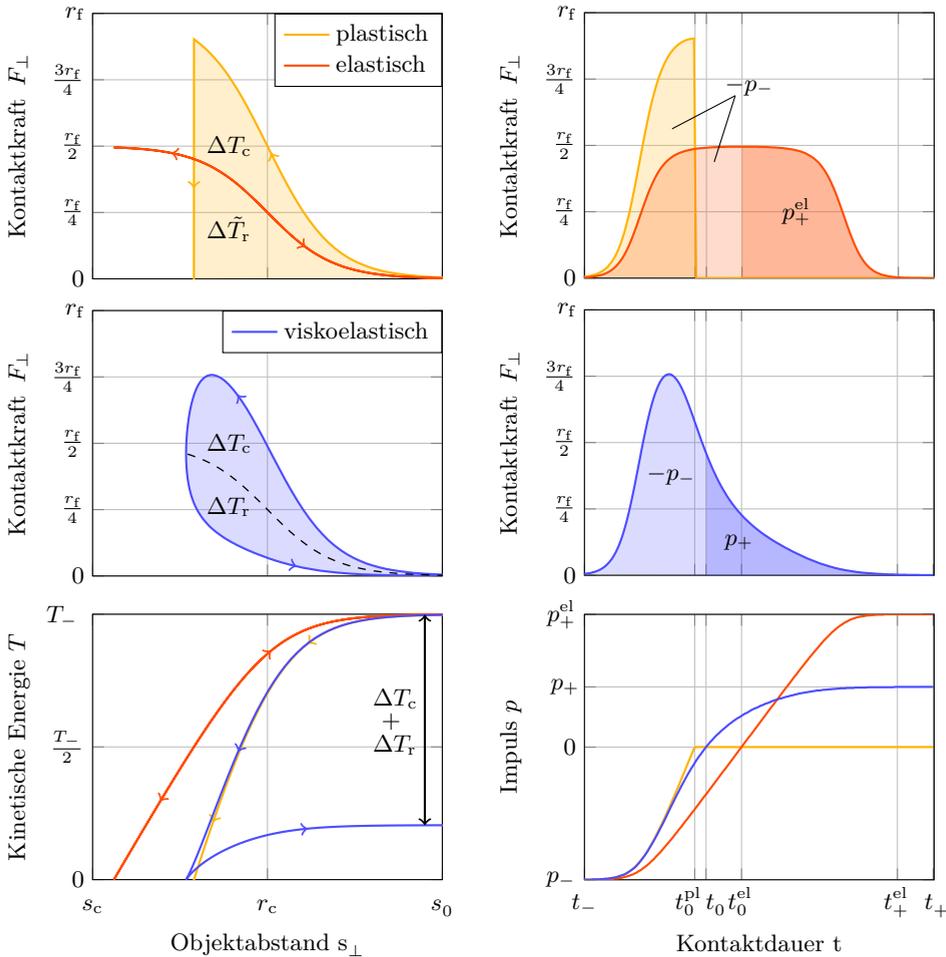
$$F_{\perp, \text{el}}(s_\perp) = \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{el}}(s_\perp, v_\perp)}{\partial v_\perp} = \mathcal{R}_a(s_\perp) \frac{r_f}{2} \quad (3.14)$$

beschrieben. Dabei vereinfacht sich der schrankenspezifische Leistungsterm $\mathcal{R}_p(v_\perp)$ der Restriktionsfunktion zu einer Sigmoidfunktion in Form eines hyperbolischen Tangens, der im viskoelastischen Fall die Geschwindigkeit v_\perp auf das Kraftintervall $F_c(v_\perp) \in (0, r_f)$ abbildet. Für die beiden Extremfälle plastischer und elastischer Kontakte nimmt der Kraftterm jeweils einen konstanten Wert an, wobei die Kraft für elastische Kontakte über den gesamten Geschwindigkeitsbereich $F_{c, \text{el}} = \frac{r_f}{2}$ und die Kraft bei plastischen Kontakten für negative Geschwindigkeiten $F_{c, \text{pl}} = r_f$ bzw. null für $v_\perp \geq 0$ ist. Da die maximal auftretende Kontaktkraft durch den Kraftkoeffizienten r_f beschränkt ist, kann dieser physikalisch als maximale Widerstandskraft des für

die Beschränkung verwendeten Materials angesehen werden. Die Annahme, dass ein mechanischer Anschlag nur eine begrenzte Gegenkraft aufbringen kann, ist dabei deutlich plausibler als die Annahme eines unbeschränkten Kraftanstiegs, wie sie bei Ansätzen mit einer gedämpften Hertz'schen Feder getroffen wird. Als positiver Nebeneffekt der weichen Beschränkung wird nicht nur das Simulationsverhalten des Kontaktmodells robuster, es eröffnet sich darüber hinaus auch die Möglichkeit ein Durchbrechen der Beschränkung zu simulieren. Die dafür benötigte Anpassung der Restriktionsfunktion wird ausführlich in Abschnitt 3.2.5 beschrieben.

Wie in Abbildung 3.4 veranschaulicht wird, hat die von der mechanischen Beschränkung aufgebrachte Kraft F_c keinen direkten Einfluss auf das dynamische Verhalten des aufprallenden Objekts. Um dennoch das kinematische Verhalten nachbilden zu können, muss zunächst die Normalkraft $F_\perp = \mathcal{R}_a F_c$ bestimmt werden, die auf den Schwerpunkt des anfliegenden Körpers wirkt. Die charakteristischen Eigenschaften der daraus resultierenden Kontaktkräfte F_\perp , $F_{\perp,pl}$ und $F_{\perp,el}$ sind in den Abbildungen 3.6(d)-3.6(f) dargestellt. Die aufgespannten Flächen der Kontaktkraft sind dabei über die Gleichungen (3.12)-(3.14) direkt mit den Leistungsverläufen in den Abbildungen 3.6(a)-3.6(c) korreliert. Für den Fall eines elastischen Stoßes ist das Kontaktverhalten unabhängig von der relativen Geschwindigkeit v_\perp , wodurch sich die Gleichung der Normalkraft zu einer rein positionsabhängigen Funktion vereinfacht. Die vereinfachte Funktion ist dabei mit der Beschreibung einer nichtlinearen Feder mit beschränkter Maximalkraft vergleichbar. Bei plastischen Kollisionen tritt hingegen ein sprungförmiges Verhalten der Kontaktkraft im nulldurchgang der Geschwindigkeit auf, der aus der stückweise stetigen Definition der Leistungsfunktion resultiert. Dadurch wird für diesen Fall eine deutlich aufwändigere Kontaktbeschreibung mit einer diskret schaltenden Modellstruktur benötigt. Dies kann jedoch in praktischen Anwendungen zu numerischen Problemen führen, vor allem dann, wenn das Kontaktmodell mit einem Zustandsbeobachter kombiniert werden soll. Für den standardmäßigen Fall viskoelastischer Stöße zeigt der Verlauf der Kontaktkraft ein unverwechselbares Verhalten, das in seiner charakteristischen Form nicht mit dem Verhalten linearer oder nichtlinearer Feder-Dämpfer-Modelle vergleichbar ist, da der resultierende Kraftverlauf sowohl über dem Objektabstand s_\perp als auch über die Geschwindigkeit v_\perp ein nichtlineares Verhalten aufweist. Dabei bleibt die Normalkraft auch für sehr kleine Aufprallgeschwindigkeiten positiv, wodurch ein Haftverhalten des Kontakts ausgeschlossen werden kann. Dieses Verhalten ist bei kraftbasierten Modellierungsansätzen nicht selbstverständlich, wie bei der Untersuchung des in [HC75] beschriebenen linearen Kelvin-Voigt-Modells und des nichtlinearen Feder-Dämpfer-Modells aus [MO99] festgestellt werden kann.

Der Zusammenhang von Krafttrajektorie und Energiedissipation wird offensichtlich, wenn man die Normalkraft entsprechend Abbildung 3.7(a) über dem Objektabstand s_\perp aufträgt. Der eingeschlossene Bereich der Krafttrajektorie entspricht dabei der Menge an kinetischer Energie ΔT , die dem System während des Kontakts dau-



(a) Kontaktkräfte und Energieverlauf in Abhängigkeit des Objektabstands

(b) Kontaktkräfte und Impulsverhalten im zeitlichen Bezug zu den Kontaktphasen

Abbildung 3.7: Charakteristisches Verhalten der Kontaktkraft, der kinetischen Energie und des Impulses für viskoelastische, elastische und plastische Kontaktszenarien.

erhaft entzogen wird. Für elastische Stöße mit einem symmetrischen Verlauf der Kontaktkraft F_{\perp} resultiert daraus ein kongruentes Verhalten der verzögernden Kraft während der Kompression und der beschleunigenden Kraft in der Restitutionsphase. Da die Trajektorien der beiden Phasen deckungsgleich sind, ergeben sich für den elastischen Stoß somit keine energetischen Verluste. Der Betrag der kinetischen

Energie T während des Kontakts ist dabei über die Gleichung

$$\begin{aligned} T &= T_- - \int_{s_{\perp,\text{el}}}^{s_{\perp,0}} F_{\perp,\text{el}}(s_{\perp}) ds_{\perp} = T_- - \int_{s_{\perp,\text{el}}}^{s_{\perp,0}} r_{\text{f}} \frac{1 - \tanh(r_{\text{t}}(s_{\perp} - r_{\text{c}}))}{4} ds_{\perp} \\ &\approx T_- - \int_{s_{\perp,\text{el}}}^{\infty} r_{\text{f}} \frac{1 - \tanh(r_{\text{t}}(s_{\perp} - r_{\text{c}}))}{4} ds_{\perp} \end{aligned} \quad (3.15)$$

mit der Objektdeformation verknüpft. Diese hängt neben s_{\perp} zusätzlich von der initialen kinetischen Energie T_- und dem ursprünglichen Abstand $s_{\perp,0}$ ab. Um die Integration von $F_{\perp,\text{el}}$ zu vereinfachen, kann die obere Integrationsgrenze $s_{\perp,0}$ ins Unendliche verschoben werden, da die Interaktion zwischen Objekt und Beschränkung für $s_{\perp,0} > s_0$ infinitesimal klein und dadurch auch die in diesem Bereich von der Krafttrajektorie eingeschlossene Fläche vernachlässigbar ist. Ist hingegen $s_{\perp,0} < s_0$, d.h. die initiale Position befindet sich bereits im aktiven Beschränkungsbereich, führt die Auswertung des vereinfachten Integrals zu einem verfälschten Ergebnis, daher muss für diesen Fall zwingend das exakte Integral gelöst werden. Der minimale Abstand zwischen Körper und Schranke bzw. die maximal auftretende Objektdeformation kann auf Basis des vereinfachten Integrals über die Näherung

$$\hat{s}_{\perp,\text{el}} \approx r_{\text{c}} - \frac{1}{2r_{\text{t}}} \log \left(e^{4r_{\text{t}} \frac{T_-}{r_{\text{f}}}} - 1 \right) \quad (3.16)$$

berechnet werden, in dem die kinetische Energie zu $T = 0$ gesetzt wird.

Die Berechnung des energetischen Verhaltens und der maximalen Kompression bei plastischen Stößen ist mit dem Vorgehen für elastische Kontakte identisch, da sich beide Extremfälle nur durch den konstanten Maximalwert der Kontaktkraft unterscheiden. Berechnet man den minimalen Abstand im Stillstandspunkt der plastischen Kollision, so erhält man den Zusammenhang

$$\hat{s}_{\perp,\text{pl}} \approx r_{\text{c}} - \frac{1}{2r_{\text{t}}} \log \left(e^{2r_{\text{t}} \frac{T_-}{r_{\text{f}}}} - 1 \right). \quad (3.17)$$

Da für diesen Fall der in Abbildung 3.7(a) dargestellte energetische Zusammenhang $\Delta T = \Delta T_{\text{c}} + \Delta \tilde{T}_{\text{r}} = T_-$ gilt, wird die gesamte kinetische Energie des Objekts während des Stoßes dissipiert. Die Kompressionsverluste ΔT_{c} sind dabei mit der von der plastischen und elastischen Kontaktkraft eingeschlossenen Fläche identisch. Beim Erreichen des Stillstands wird die verbleibende Energie $T_{\text{s}} = \Delta \tilde{T}_{\text{r}}$, die während der Kompressionsphase zwischengespeichert wurde, dem System instantan entzogen, da durch das Verschwinden der Kontaktkraft die dissipierte Energie $\Delta \tilde{T}_{\text{r}}$ aus der eingeschlossenen Fläche der elastischen Kontaktkraft und der Abszisse resultiert. Das Objekt verbleibt dabei dauerhaft im Umkehrpunkt bei minimaler Distanz $\hat{s}_{\perp,\text{pl}}$, da keine Restitutionsphase stattfindet.

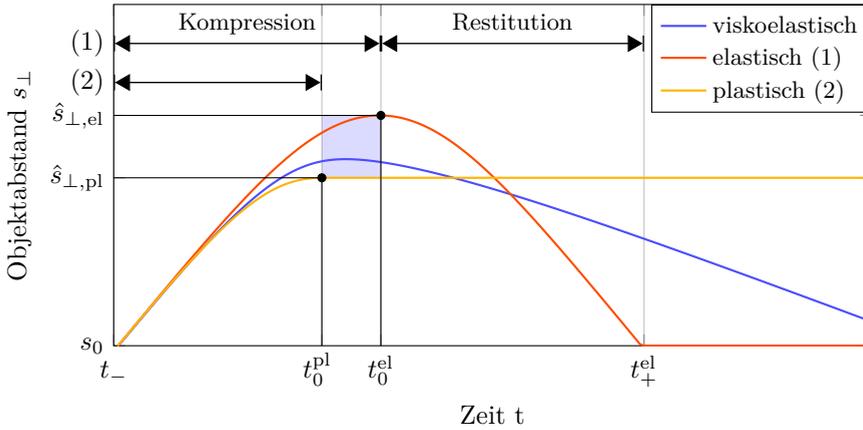


Abbildung 3.8: Objektdeformation und Kontaktphasendauer bei elastischen, viskoelastischen und plastischen Kontakten in Abhängigkeit der energetischen Verluste

Die Herleitung allgemeiner Lösungen für \hat{s}_{\perp} und den Zusammenhang von Position und Energie ist bei viskoelastischen Kontakten nicht möglich, da

$$T = T_- - \int_{s_{\perp, \text{el}}}^{\infty} \left(\frac{1 - \tanh(r_d v_{\perp})}{2} \right) r_f \frac{1 - \tanh(r_t (s_{\perp} - r_c))}{2} ds_{\perp} \quad (3.18)$$

zusätzlich von der relativen Geschwindigkeit v_{\perp} abhängt. Durch die Wechselwirkung von Kraft, Position und Geschwindigkeit, die über eine nichtlineare Differentialgleichung beschrieben wird, erhält man daher für zwei Objekte mit gleicher initialer Energie, aber variierender Aufprallgeschwindigkeit, unterschiedliche Eindringtiefen. Diese resultieren aus der Veränderung des Abstands zwischen der viskoelastischen und der elastischen Krafttrajektorie, die in Abbildung 3.7(a) dargestellt sind. Dadurch variieren die von den beiden Trajektorien eingeschlossenen Flächen und somit auch die energetischen Verluste ΔT_c und ΔT_r während der Kompressions- bzw. der Restitutionsphase. Der Restitutionskoeffizient besitzt somit ein von der Geschwindigkeit des Aufpralls abhängiges Verhalten, das in seiner charakteristischen Form auch in realen Applikationen auftritt und in Abschnitt 3.3.1 ausführlich diskutiert wird. Wie in Abbildung 3.8 veranschaulicht wird, ist aber eine grundsätzliche Eingrenzung der minimalen Objektdistanz auf das Intervall $\hat{s}_{\perp, \text{el}} < \hat{s}_{\perp} < \hat{s}_{\perp, \text{pl}}$ möglich, das sich aus den beiden Fällen für plastische und elastische Kontakte ergibt.

Die Beziehung zwischen dem Impuls p und dem Objektabstand s_{\perp} kann aus dem Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie T und s_{\perp} abgeleitet werden, der

durch Gleichung (3.18) definiert ist. Mit bekannter Masse m ist das Impulsverhalten

$$p = \sqrt{2mT} \operatorname{sign}(v) \quad (3.19)$$

direkt an das Verhalten der kinetischen Energie T gekoppelt. Dadurch ergeben sich für die Beschreibung des Impulsverhaltens viskoelastischer Kontakte die gleichen Randbedingungen wie für das Energieverhalten.

Eine aussagekräftigere Beschreibung des Impulsverhaltens erhält man aus der zeitabhängigen Gleichung

$$p = p_- + \int_{t_-}^t F_{\perp}(s_{\perp}(\tau), v_{\perp}(\tau)) d\tau \approx p_- + \int_{\infty}^t F_{\perp}(s_{\perp}(\tau), v_{\perp}(\tau)) d\tau. \quad (3.20)$$

Da aber auch hier die Normalkraft F_{\perp} , der Objektabstand s_{\perp} und die Geschwindigkeit v_{\perp} über eine nichtlineare Differentialgleichung voneinander abhängig sind, ist die Berechnung des Impulsverhaltens nur über eine numerische Lösung bei bekannten Randbedingungen und Objekteigenschaften möglich.

Allerdings können das qualitative Verhalten der Kontaktkraft über der Zeit und die daraus resultierende Impulsänderung, die in Abbildung 3.7(b) dargestellt sind, auf physikalische Plausibilität untersucht werden. Beginnend mit dem Startzeitpunkt des Kontakts t_- bei $s_{\perp} = s_0$ ist zunächst bei allen Stoßszenarien ein kontinuierlicher Anstieg der Kontaktkraft zu erkennen, dessen Steigung vom Dämpfungskoeffizienten r_d abhängt. Die Normalkraft F_{\perp} steigt dabei für plastische und elastische Kontakte monoton an und erreicht im Moment des Stillstands bei t_0^i ihr Maximum. Betrachtet man die Dauer der unterschiedlichen Kompressionsphasen $t_c^i = t_0^i - t_-$ für $i \in \{\text{pl}, \text{el}\}$ und vergleicht diese mit dem Verhalten aus Abbildung 3.8, so wird deutlich, dass die Kompressionsphase plastischer Stöße stets kürzer ist als die Dauer der Kompression bei elastischen Kontakten. Dies liegt vor allem daran, dass bei plastischen Kollisionen höhere Normalkräfte auftreten, wodurch das Objekt schneller abgebremst wird.

Im direkten Anschluss an den Stillstand zeigt sich in der Restitutionsphase des elastischen Stoßes ein zeitlich symmetrischer Kraftverlauf. Dadurch ist die Dauer der Restitutionsphase, die mit der Trennung von Objekt und Beschränkung bei t_+^{el} endet, mit der Dauer der Kompressionsphase identisch. Integriert man den gespiegelten Kraftverlauf über die Dauer der beiden Phasen, so bleibt das symmetrische Verhalten auch für die Impulstrajektorie erhalten und es gilt $p_+^{\text{el}} = -p_-$, d.h. der Betrag des Impulses ist vor und nach der Kollision gleich. Im Gegensatz dazu zeigt sich für den plastischen Kraftverlauf ein asymmetrisches Verhalten über der Zeit. Im Moment des Stillstands kommt es zu einem sofortigen Verschwinden der Normalkraft und der Impuls bleibt dauerhaft gleich null. Dadurch gibt es keine Restitutionsphase und es findet keine Trennung von Objekt und Beschränkung statt.

Der zeitliche Verlauf viskoelastischer Stöße, der exemplarisch in Abbildung 3.8 dargestellt ist, liegt wiederum zwischen dem plastischen und dem elastischen Extremfall. Dabei verkürzt sich die Kompressionsphase mit größer werdendem Dissipationskoeffizienten, wohingegen die Dauer der Restitutionsphase und damit auch die Gesamtdauer des Kontakts ansteigt. Betrachtet man das Verhalten der aus dem elastischen Kontakt resultierenden Normalkraft in Abbildung 3.7(b), so erkennt man eine Verschiebung des Maximums in die Phase der Kompression, wodurch die Zeitpunkte maximaler Kraft und maximaler Deformation nicht mehr übereinstimmen. Diese charakteristische Eigenschaft der Krafttrajektorie zeigt sich auch in Messwerten viskoelastischer Kontaktversuche, wie sie z. B. in [Cro52; Mas49] zu finden sind. Dies ist daher ein weiteres Indiz für die physikalische Plausibilität des neuen Kontaktmodells. Da sich dabei neben der zeitlichen Verschiebung von maximaler Deformation zu maximaler Kraft auch der Gesamtverlauf der Kraft verändert, ergibt sich aus der zeitlichen Integration eine Verringerung des Gesamtimpulses während des Kontakts, der mit der bereits zuvor beschriebenen Energiedissipation vergleichbar ist.

3.2.5 Modellierung von Schrankendurchbrüchen

Bisher wurde bei der Definition der Restriktionsfunktion stets davon ausgegangen, dass die Beschränkung zwar eine begrenzte Leistung besitzt, die Schranke an sich aber unendlich ausgedehnt ist, wodurch es für elastische und viskoelastische Kontakte nach einer endlichen Zeit immer zu einer Phase der Restitution und damit zu einem Zurückprallen des Objekts kommen muss. Dieses Verhalten spiegelt sich auch in der kontinuierlichen Aktivierungsfunktion aus Abbildung 3.3(c) wider, da für alle $s_{\perp} < s_c$ die Beschränkung aktiv bleibt und das Objekt somit aus der Beschränkung hinaus beschleunigt wird. In praktischen Anwendungen sind Beschränkungen jedoch nicht unendlich ausgedehnt, sondern haben, wie in Abbildung 3.9 dargestellt, eine endliche

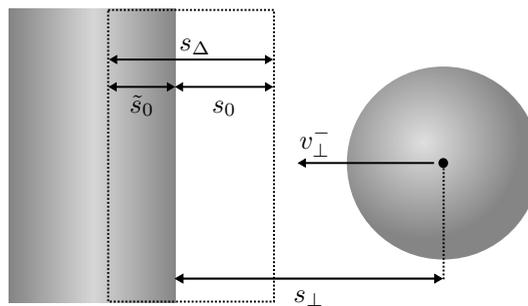


Abbildung 3.9: Kollision einer Kugel mit einer endlich ausgedehnten Beschränkung der Breite s_{Δ}

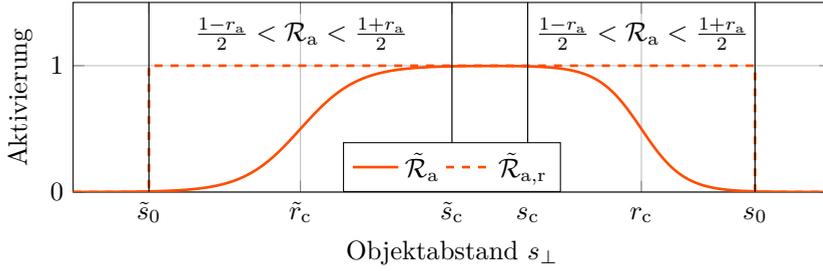


Abbildung 3.10: Angepasste Aktivierungsfunktion für endlich ausgedehnte Beschränkungen

Breite s_Δ . Für den Fall, dass ein anfliegendes Objekt mehr kinetische Energie besitzt als über die Beschränkungsleistung im Bereich der Schranke abgeführt werden kann, kommt es daher zu einem Durchbrechen der Beschränkung.

Die Nachbildung eines solchen Verhaltens konnte im Rahmen der Literaturrecherche für keine der etablierten Kontakttheorien gefunden werden, allerdings ist sie unter Verwendung des leistungsbasierten Beschränkungsmodells durchaus möglich. Hierfür muss die Aktivierungsfunktion aus Gleichung (3.2) lediglich von einer zweiten, verschobenen und gespiegelten Aktivierungsfunktion subtrahiert werden. Daraus resultiert die in Abbildung 3.10 dargestellte, adaptierte Aktivierungsfunktion

$$\tilde{\mathcal{R}}_a(s_\perp) = \frac{1 - \tanh(r_t(s_\perp - r_c))}{2} - \frac{1 - \tanh(\tilde{r}_t(s_\perp - \tilde{r}_c))}{2} \quad (3.21)$$

mit den zusätzlichen Parametern \tilde{r}_c und \tilde{r}_t , die das Austrittsverhalten des Objekts bei einem Schrankendurchbruch beschreiben. Der Übergangskoeffizient \tilde{r}_t und die Position des mittleren Aktivierungslevels \tilde{r}_c können über die Parametergleichungen

$$\tilde{r}_t = -\frac{2}{\tilde{s}_0 - \tilde{s}_c} \operatorname{artanh}(r_a) \quad (3.22)$$

und

$$\tilde{r}_c = \frac{\tilde{s}_0 + \tilde{s}_c}{2} \quad (3.23)$$

bestimmt werden. Dabei wird $\tilde{s}_0 = s_0 - s_\Delta$ entsprechend Abbildung 3.9 über den Anfang der Beschränkung s_0 und die Breite der Schranke s_Δ berechnet und \tilde{s}_c wiederum als Adaptionfaktor angesehen. Die Parameter r_c und r_t , die die Aktivierung beim Eintritt des Objekts in die Beschränkung definieren, können weiterhin über die Gleichungen (3.3) und (3.4) für unendlich ausgedehnte Schranken berechnet werden.

Dringt also ein Objekt mit hoher kinetischer Energie in die Beschränkung ein und erreicht dabei den Bereich für $s_{\perp} < \tilde{s}_c$, dann nimmt die Interaktion zwischen Beschränkung und Objekt und damit auch die Widerstandskraft der Schranke kontinuierlich ab und verschwindet für $s_{\perp} < \tilde{s}_0$ nahezu vollständig. Dadurch erreicht das Objekt den unbeschränkten Bereich jenseits der Schranke und setzt die Bewegung ab diesem Punkt wieder ungehindert fort. Die kinetische Energie des Objekts ist nach Durchbrechen der Schranke jedoch geringer, da beim Durchqueren des beschränkten Bereichs kontinuierlich Energie abgeführt wird. Für die Berücksichtigung einer endlichen Schranke innerhalb der Restriktionsgleichung (3.9) muss lediglich die ursprüngliche Beschreibung der Aktivierungsfunktion \mathcal{R}_a aus Gleichung (3.2) durch die adaptierte Beschreibung $\tilde{\mathcal{R}}_a$ aus Gleichung (3.21) ersetzt werden. Dadurch erhält man die Restriktionsfunktion für begrenzte Schranken

$$\tilde{\mathcal{R}}(s_{\perp}, v_{\perp}) = \frac{\tanh(\tilde{r}_t(s_{\perp} - \tilde{r}_c)) - \tanh(r_t(s_{\perp} - r_c))}{2} \left(\frac{v_{\perp}}{2} - \frac{\log(\cosh(r_d v_{\perp}))}{2r_d} \right) r_f. \quad (3.24)$$

Eine Änderung des Formalismus ist dabei nicht notwendig, wodurch auch dieses Szenario ohne zusätzlichen Aufwand durch das leistungsbasierte Kontaktmodell abgebildet werden kann.

Betrachtet man auch hier den Extremfall mit $s_c \rightarrow s_0$ und $\tilde{s}_c \rightarrow \tilde{s}_0$, so erhält man über

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_{a,r}(s_{\perp}) &= \lim_{s_c \rightarrow s_0} \frac{1 - \tanh(r_t(s_{\perp} - r_c))}{2} - \lim_{\tilde{s}_c \rightarrow \tilde{s}_0} \frac{1 - \tanh(\tilde{r}_t(s_{\perp} - \tilde{r}_c))}{2} \\ &= \frac{\text{sign}(\tilde{s}_{\perp} - \tilde{s}_0) - \text{sign}(s_{\perp} - s_0)}{2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

einen sprungförmigen Aktivierungsbereich, der ebenfalls in Abbildung 3.10 dargestellt ist und in seiner Form der Interaktion eines starren Körpers mit einer Beschränkung entspricht. Darüber hinaus besteht jedoch auch die Möglichkeit beliebige Kombinationen des starren und elastischen Ein-/Austrittsverhaltens sowie andere mathematische Basisfunktionen für die Beschreibung der Aktivierung zu verwenden. Für alle nachfolgenden Betrachtungen, wie sie z. B. im Simulationsbeispiel für einen Schrankendurchbruch in Abschnitt 3.3.1 erfolgen, wird jedoch der Fokus auf die elastische Beschreibung aus Gleichung (3.21) gelegt.

3.2.6 Berücksichtigung der Beschränkungsfunktion im Lagrange-Formalismus

Die herausragende Eigenschaft des neuen, leistungsorientierten Modellierungsansatzes ist dessen einfache Anwendbarkeit. Neben der physikalisch interpretierbaren Parametrierung des Objekt- und Schrankenverhaltens über nur vier Koeffizienten, die bereits ausführlich in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 beschrieben wurden, kann dies vor allem durch die Berücksichtigung der Restriktionsfunktion im Rahmen der Lagrange-Gleichungen zweiter Art gewährleistet werden. Der Lagrange-Formalismus ist einer der gängigsten Modellierungsansätze für mechanische und mechatronische Systeme und besticht dabei durch seine einfache Handhabung. Eine Berücksichtigung unilateraler Kontakte auf Basis vorhandener Kontaktmodelle war bisher jedoch nicht möglich. Für die Anwendung der Lagrange-Gleichungen wird zunächst jedem der n Freiheitsgrade des Systems eine verallgemeinerte Koordinate q_i mit $i = 1, \dots, n$ zugeordnet. Auf Basis der verallgemeinerten Koordinaten q_i und den zugehörigen Geschwindigkeiten \dot{q}_i können die Gleichungen aller im System vorhandenen kinetischen und potentiellen Energien $T_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ bzw. $V_k(\mathbf{q})$ aufgestellt werden. Summiert man anschließend alle kinetischen Energien auf und zieht die potentiellen Energien ab, so erhält man die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \sum_j T_j - \sum_k V_k. \quad (3.26)$$

Wirken zusätzlich auch externe, nicht konservative Kräfte oder Momente auf das System ein, können diese über den zusätzlichen Vektor der generalisierten Kräfte $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ im Formalismus berücksichtigt werden. Darüber hinaus kann durch eine dynamische Erweiterung der Lagrange-Gleichungen auch die Modellierung von Reibungseffekten erfolgen. Da das entsprechende Vorgehen bereits in Abschnitt 2.2.3 ausführlich beschrieben wurde und der Zusammenhang zwischen Kontakt und Reibung in Kapitel 4 hergeleitet wird, soll hier auf eine Berücksichtigung von Reibung verzichtet werden. Dadurch ergibt sich für die Lagrange-Gleichungen zweiter Art der Zusammenhang

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.27)$$

Da die leistungsorientierte Definition der Restriktionsfunktion \mathcal{R} mit der Beschreibung der Dissipationsfunktion \mathcal{D} des statischen Reibungsmodells aus Abschnitt 2.2.1 vergleichbar ist, kann diese auch auf die gleiche Art und Weise im Lagrange-Formalismus eingebettet werden. Hierfür werden zunächst der Objektabstand $s_\perp(\mathbf{q})$ und die relative Geschwindigkeit $v_\perp(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ zwischen Objekt und Beschränkung in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} und der zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ definiert. Der verallgemeinerte Objektabstand und die Geschwindigkeit können anschließend

in die Aktivierungsfunktion $\mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q})$ und die schrankenspezifische Leistungsfunktion $\mathcal{R}_{p,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ der m -ten Beschränkung eingesetzt werden. Dies kann dabei für eine beliebige Anzahl an Beschränkungen erfolgen, wodurch auch die Berücksichtigung von mehreren, unabhängig parametrierbaren Kontakten möglich wird. Multipliziert man nun die jeweiligen Aktivierungs- und Leistungsfunktionen, so erhält man die Restriktionsfunktionen der Einzelkontakte $\mathcal{R}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, die zur Gesamtrestriktionsfunktion

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_m \left(\frac{1 - \tanh(r_{t,m}(s_{\perp,m}(\mathbf{q}) - r_{c,m}))}{2} \right) \cdot \left(\frac{v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{2} - \frac{\log(\cosh(r_{d,m}v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})))}{2r_{d,m}} \right) r_{f,m} \quad (3.28)$$

aufsummiert werden können. Die Transformation der senkrecht zur Kontaktfläche wirkenden Normalkräfte in Wirkrichtung der generalisierten Kräfte Q_i erfolgt ebenso wie beim Reibungsmodell aus Kapitel 2 über die partielle Ableitung der Restriktionsfunktion $\mathcal{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ aus Gleichung (3.28) nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_i . Dadurch erhält man den verallgemeinerten Kontaktkräftevektor $\mathbf{Q}^{\mathcal{R}}$, der sich aus den Termen

$$Q_i^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.29)$$

zusammensetzt. Werden die verallgemeinerten Kontaktkräfte $Q_i^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ im Lagrange-Formalismus berücksichtigt, so erweitern sich die Lagrange-Gleichungen aus (3.27) zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.30)$$

Neben der Transformation der Kontaktkräfte in Wirkrichtung von \mathbf{Q} ist es auch weiterhin möglich die Normalkräfte

$$F_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{R}_m(\mathbf{q}, v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))}{\partial v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} = \mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q}) \frac{\partial \left(\frac{v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{2} - \frac{\log(\cosh(r_{d,m}v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})))}{2r_{d,m}} \right)}{\partial v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \quad (3.31)$$

der einzelnen Kontakte analytisch zu bestimmen. Hierfür muss lediglich die Restriktionsfunktion $\mathcal{R}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ des jeweiligen Kontakts partiell nach der relativen Geschwindigkeit $v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ abgeleitet werden. Die Kenntnis der Normalkräfte ist vor allem dann notwendig, wenn, wie in Kapitel 4 gezeigt wird, zusätzlich zur senkrechten Kontaktkraft auch tangentiale Reibungskräfte berücksichtigt werden sollen.

3.3 Simulative Evaluation des leistungs-basierten Kontaktmodells

Die Vielseitigkeit der leistungs-basierten Restriktionsfunktion soll in diesem Abschnitt anhand von vier Simulationsszenarien mit unterschiedlichen Anwendungsschwerpunkten demonstriert werden. In Abschnitt 3.3.1 wird zunächst ein einfaches Stoßszenario zwischen einer Kugel und einer Ebene bei unterschiedlichen Schranken- und Objektkonfigurationen betrachtet. Dabei werden die statischen und dynamischen Kontakteigenschaften in Abhängigkeit der Aufprallgeschwindigkeit und des Dissipationskoeffizienten sowie unter dem Einfluss externer Kräfte untersucht. Ist die Beschränkungleistung zu gering um die kinetische Energie des anfliegenden Körpers abzubauen, kommt es zu einem Durchbrechen der Schranke. Dieses Verhalten wird ebenfalls in Abschnitt 3.3.1 anhand eines Simulationsszenarios untersucht, in dem eine Kugel mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten auf eine endliche Beschränkung aufschlägt. In Abschnitt 3.3.2 folgt anschließend ein deutlich komplexeres Beispiel, in dem die Beschränkung eines Mehrkörpersystems in Form eines inversen Doppelpendels mit zwei teilweise gleichzeitig auftretenden Kontakten betrachtet wird. Dabei steht neben dem physikalischen Verhalten vor allem die Verallgemeinerbarkeit im Rahmen des Lagrange-Formalismus im Fokus. In Abschnitt 3.3.3 wird darüber hinaus gezeigt, dass der Ansatz unter Verwendung finiter Elemente auch für die Simulation ausgedehnter dreidimensionaler Objekte anwendbar ist. Hierfür wird das Aufprallverhalten eines Würfels auf einer Ebene simuliert und ausgewertet.

Alle nachfolgend vorgestellten Szenarios wurden in MATLAB implementiert und simuliert. Für die numerische Lösung der Differentialgleichungen wurde dabei das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung mit fester Abtastzeit verwendet.

3.3.1 Einfache Stöße und Kontakte in Einkörpersystemen

Ein klassisches Kontaktproblem, das in nahezu allen Standardwerken beschrieben wird, z. B. in [Gol01; PG96; Pop10; Str04], ist der Aufprall einer glatten Kugel auf eine unendlich ausgedehnte Ebene. Dieses äußerst simple Szenario, das auch in Abbildung 3.1 dargestellt ist, wird dabei häufig für die Analyse und den Vergleich der Kontaktdynamik unterschiedlicher Modellierungsansätze verwendet, da dieser Fall im Gegensatz zu komplexeren Kontakten von allen Theorien abgedeckt wird. Darüber hinaus kann das Szenario unter geringem Aufwand als Laborexperiment aufgebaut werden, wodurch eine große Anzahl an praktischen Messergebnissen existiert, die zur Bewertung der Kontaktmodelle herangezogen werden können. Ein ausführlicher Überblick über die unterschiedlichen Laboraufbauten und die daraus resultierenden

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
m	0,05	kg	m	0,05	kg
s_0	10,00	mm	s_0	10,00	mm
s_c	9,00	mm	s_c	9,50	mm
r_f	200,00	N	r_f	20,00	N
			r_d	5,90	s/m

(a) Horizontaler Kontakt ohne externe Kräfte

(b) Vertikaler Kontakt unter Einfluss der Schwerkraft

Tabelle 3.1: Simulationsparameter für den Aufprall einer glatten Kugel auf einer unendlich breiten Ebene bei einer Abtastzeit von 0,01ms

Messergebnisse ist in [Bra91; Gol01] zu finden. In diesem Abschnitt soll lediglich eine qualitative Einordnung der Simulationsergebnisse auf Basis der Restriktionsfunktion im Vergleich zu den charakteristischen Eigenschaften der Messdaten erfolgen, um so die physikalische Plausibilität des neuen Modellierungsansatzes zu überprüfen. Die Diskussion und Beurteilung des physikalischen Verhaltens wird dabei auf Basis einer horizontalen und einer vertikalen Kontaktkonfiguration durchgeführt, bei denen zusätzlich die Objektparameter und die Schrankeneigenschaften variiert werden.

Horizontaler Kontakt ohne externe Kräfte

Im ersten Beispiel, das dem Kontaktszenario in Abbildung 3.1 nachempfunden ist, wird das dynamische Kontaktverhalten einer elastischen Kugel untersucht, die mit einer unendlich ausgedehnten Ebene kollidiert. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Änderungen des Restitutionskoeffizienten, der Kontaktdauer, der auftretenden Maximalkraft und der maximalen Deformation des Objekts gelegt, die aus den Variationen des Dissipationskoeffizienten r_d und der Aufprallgeschwindigkeit v_{\perp}^- resultieren. Die übrigen Parameter r_i , die Masse m und die Objekteigenschaften, die durch s_0 und s_c definiert werden, entsprechen dabei den Werten aus Tabelle 3.1(a) und bleiben über alle Simulationen unverändert.

Werden die Simulationsergebnisse der charakteristischen Eigenschaften über r_d und v_{\perp}^- abgebildet, so erhält man die in Abbildung 3.11 dargestellten Flächenverläufe. Der Restitutionskoeffizient $e_r = -v_{\perp}^-/v_{\perp}^+ \in [0, 1]$ ist für diesen Fall in seiner kinematischen Form definiert, die das Verhältnis der relativen Objektgeschwindigkeit vor und nach dem Stoß beschreibt. Eine zusätzliche Betrachtung der kinetischen oder energetischen Definitionen des Restitutionskoeffizienten, die z. B. in [Str04] beschrieben sind, ist

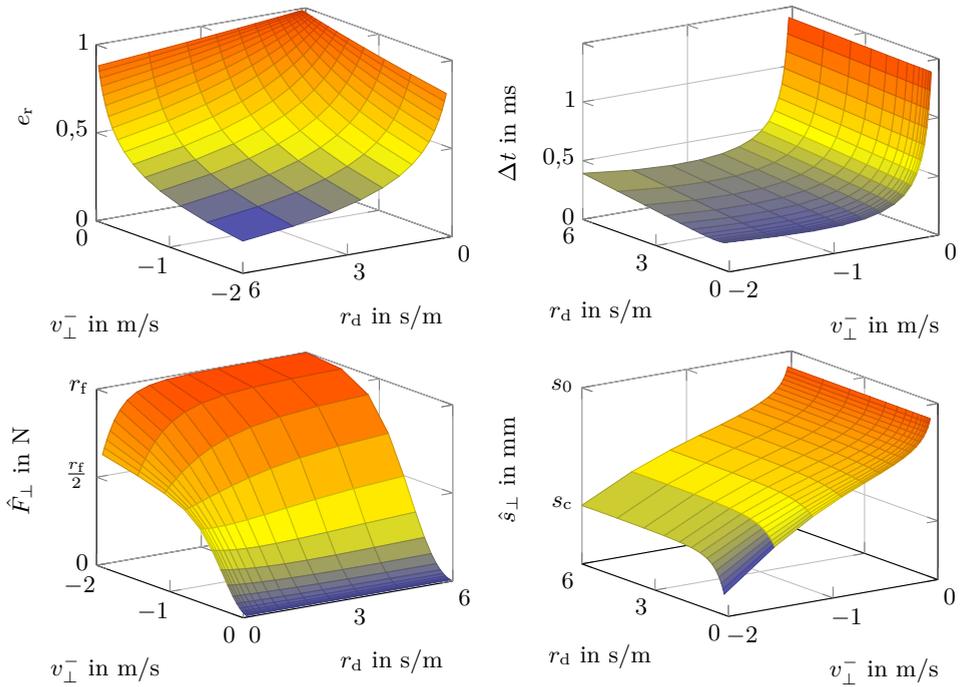


Abbildung 3.11: Restitutionskoeffizient e_r , Kontaktdauer Δt , Maximalkraft \hat{F}_{\perp} und Deformation \hat{s}_{\perp} in Abhängigkeit der Aufprallgeschwindigkeit v_{\perp}^{-} und des Dissipationskoeffizienten r_d

hier nicht notwendig, da sie für einfache Kontakte glatter Einkörpersysteme identisch zum kinematischen Restitutionskoeffizienten sind.

Wie in Abbildung 3.11 zu erkennen ist, zeigt e_r über die Aufprallgeschwindigkeit und den Dissipationskoeffizienten ein nahezu identisches Verhalten. Während der streng monotone Abfall des Restitutionskoeffizienten bei ansteigendem Dämpfungsparameter aus den bisherigen Betrachtungen zu erwarten ist und in einer vergleichbaren Form auch bei allen anderen Modellierungsansätzen auftritt, so ist die Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten e_r vom Betrag der Aufprallgeschwindigkeit bei anderen Modellen keine Selbstverständlichkeit. Wird die Aufprallgeschwindigkeit betragsmäßig kleiner, nehmen auch die energetischen Verluste ab und der Restitutionskoeffizient steigt stetig an, bis er im Falle eines dauerhaften Stillstands $e_r = 1$ erreicht. Für den Fall eines statischen Kontakts tritt somit keine Energiedissipation auf. Aus physikalischen Gesichtspunkten ist dieses Verhalten realistisch, da die geschwindigkeitsabhängige Charakteristik von e_r mit den Beobachtungen der praktischen Kontaktexperimente in [Bra91; Gol01] und dem Verhalten anderer Kontaktmodelle

in [GS02; MO99] übereinstimmt. Die Abhängigkeit von der Aufprallgeschwindigkeit resultiert dabei aus der nichtlinearen Definition der leistungs-basierten Restriktionsfunktion und kann als implizite Eigenschaft angesehen werden. Wird diese Eigenschaft in den etablierten Ansätzen der Stereomechanik oder der Hertz-Kontakte berücksichtigt, so erfordert die Approximation des Restitutionskoeffizienten dort eine Erweiterung der Modellgleichungen.

Die Dauer des Kontakts Δt wird weitestgehend von der Aufprallgeschwindigkeit bestimmt. Dabei steigt die Kontaktdauer für betragsmäßig kleiner werdende Geschwindigkeiten stetig an und strebt immer weiter gegen den Fall eines dauerhaften, statischen Kontakts, bei dem die Kontaktdauer unendlich wird. Nimmt der Betrag von v_{\perp}^{-} hingegen zu, wird Δt zunächst so lange kleiner, bis die Kontaktdauer ihr Minimum erreicht. Ausgehend vom Minimum wird Δt jedoch erneut größer, da für noch höhere Geschwindigkeiten die energetischen Kontaktverluste ansteigen und sich der Kontakt zunehmend plastisch verhält. Die Simulationsergebnisse für die Kontaktdauer stimmen im Bereich zwischen Stillstand und Minimum qualitativ mit dem charakteristischen Verhalten der Messergebnisse aus [And30; Gol01] überein, der erneute Anstieg von Δt wird in den Labordaten hingegen nicht ersichtlich. Da jedoch nur Messungen für verhältnismäßig kleine Aufprallgeschwindigkeiten vorliegen, wird dieses Verhalten aber auch nicht widerlegt. Im Gegensatz zur Abhängigkeit von der Geschwindigkeit zeigt die Variation von r_d nur eine geringfügige Veränderung in Bezug auf Δt , da aus einer Erhöhung des Dissipationskoeffizienten lediglich ein minimaler Anstieg der Kontaktdauer resultiert.

Nimmt der Betrag der Aufprallgeschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie des anfliegenden Objekts zu, steigt die maximale Kontaktkraft \hat{F}_{\perp} zunächst stetig an, bis sie mit $\hat{F}_{\perp} \rightarrow r_f$ ihre Sättigung erreicht. Ein vergleichbares Verhalten mit einer über der Geschwindigkeit zunehmenden Kontaktkraft ist auch in [Gol01] dokumentiert. Da in den Messdaten jedoch keine Fälle enthalten sind, bei denen die Widerstandskraft des Schrankenmaterials überschritten wird, ist keine qualitativ vergleichende Aussage über dieses Schrankenverhalten möglich. Allerdings ist es unter physikalischen Gesichtspunkten offensichtlich, dass eine mechanische Beschränkung lediglich eine begrenzte Gegenkraft aufbringen kann. Daher ist das charakteristische Verhalten der simulierten Gegenkraft durchaus als plausibel einzustufen.

Eine spezielle Eigenschaft des neuen Modells wird bei der Betrachtung des minimalen Objektabstands bzw. der maximalen Deformation ersichtlich. Ist die kinetische Energie des anfliegenden Objekts höher als die Energie, die während der Kompressionsphase gespeichert werden kann, so resultiert daraus ein zusätzliches Eindringen des Objekts in die Beschränkung mit einem minimalen Abstand, der mit $\hat{s}_{\perp} < s_c$ über den Adaptionfaktor der Objektsteifigkeit hinaus geht. Durch dieses Alleinstellungsmerkmal eröffnet sich die Möglichkeit neben dem Zurückprallen des Körpers auch ein Durchbrechen der Schranke zu simulieren, wie später noch gezeigt wird.

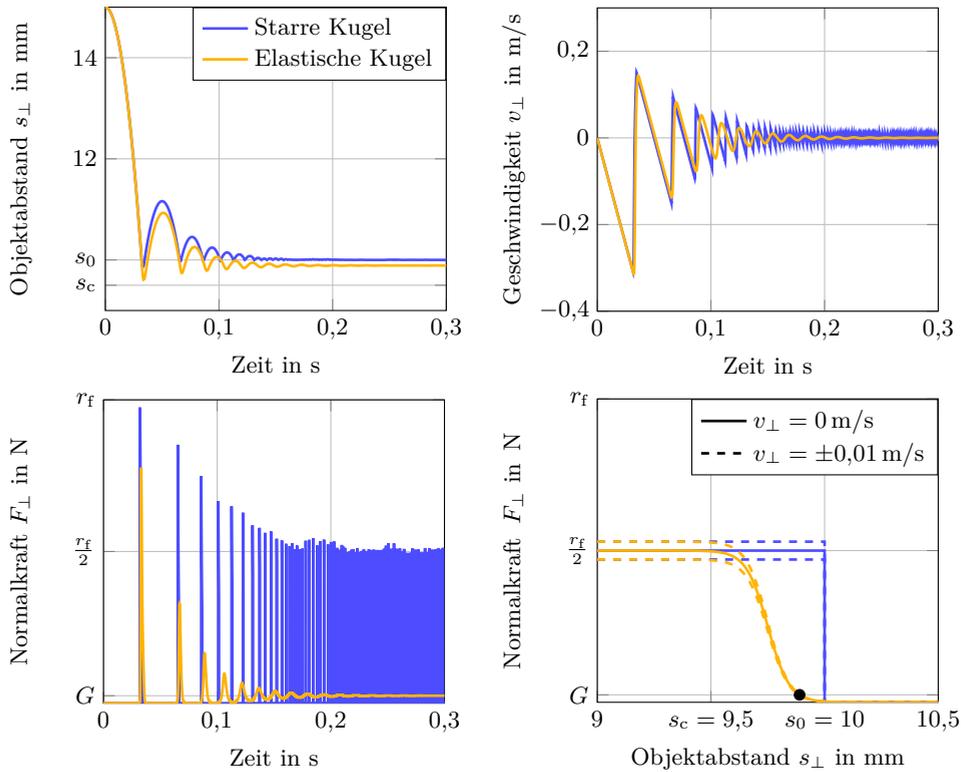


Abbildung 3.12: Übergang zwischen Stoßszenario und dauerhaftem Kontakt für starre und elastische Körper

Vertikaler Kontakt unter Berücksichtigung der Schwerkraft

Die zweite Konfiguration des Einkörperkontakts erfolgt in vertikaler Richtung. Dabei wird eine Kugel aus ihrer Ruhelage in Höhe $s_{\perp,0}$ losgelassen und durch die Schwerkraft in Richtung des Bodens beschleunigt. Während die Kugel zunächst mehrmals auf der Oberfläche aufschlägt und abprallt, verliert sie mit jedem Kontakt einen Teil ihrer kinetischen Energie und es kommt zu dem in Abbildung 3.2 dargestellten statischen Kontakt mit einer dauerhaften Objektdeformation. Die für die Simulation verwendeten Parameter sind in Tabelle 3.1(b) aufgelistet und die daraus resultierenden Simulationsergebnisse für die Objektkinematik und die Normalkräfte werden über der Zeit in Abbildung 3.12 präsentiert. Darüber hinaus wird dort in einer zusätzlichen Grafik der Verlauf der Kontaktkraft über dem Objektabstand dargestellt, um dadurch das Stillstandsverhalten des Kontaktszenarios zu verdeutlichen. Um die

Kollisionscharakteristik der elastischen Kugel mit den Kontakteigenschaften eines starren Körpers vergleichen zu können, werden zusätzlich die Simulationsergebnisse für ein identisches Szenario mit gleicher Parametrierung, jedoch unter Verwendung der Aktivierungsfunktion aus Gleichung (3.5) dargestellt. Dadurch kann zum einen gezeigt werden, dass der leistungsbasierte Modellierungsansatz auch für starre Körper mit begrenzter Widerstandskraft der Beschränkung eingesetzt werden kann, andererseits aber, wie in der Stereomechanik, keine sinnvolle Approximation dauerhafter Kontakte mehr möglich ist.

Werden die kinematischen Ergebnisse der unterschiedlichen Szenarien mit starrer und elastischer Kugel zunächst in der Kollisionsphase bei hoher Aufprallgeschwindigkeit verglichen, so zeigen die Trajektorien des Objektabstands und der relativen Geschwindigkeit ein sehr ähnliches Verhalten, das sich lediglich durch eine kleine Positionsdifferenz auszeichnet. Diese wird durch die Kompression des elastischen Körpers und der daraus resultierenden kleineren Normalkraft hervorgerufen, da die starre Kugel mit größerer Kontaktkraft schneller abgebremst werden kann. Das minimale Eindringen des starren Körpers in die Beschränkung, das in der Abstandstrajektorie zu erkennen ist, wird dabei von der Leistungsbegrenzung der Ebene hervorgerufen. Für kleinere Eindringtiefen bis hin zu einem perfekt stereomechanischen Stoß müsste hingegen der Kraftkoeffizient sehr groß bzw. unendlich werden. Da dieser Effekt für den dargestellten Vergleich allerdings nur eine untergeordnete Rolle spielt, soll hier auf eine Anpassung von r_f verzichtet werden. Betrachtet man das weitere Geschwindigkeitsverhalten der Kugel, so erkennt man mit jedem weiteren, verlustbehafteten Kontakt eine Abnahme der Aufprallgeschwindigkeit und dadurch auch ein deutlich unterschiedliches Verhalten von starrem und elastischem Objekt. Während die elastische Kugel nach und nach vom anfänglichen Stoßszenario zu einem statischen Kontakt mit konstanter Normalkraft übergeht, bleibt das impulsförmige Kontaktverhalten der starren Kugel erhalten. Dies wird vor allem durch das sprungförmige Verhalten der Kontaktkraft F_{\perp} über den Abstand s_{\perp} hervorgerufen. Entweder ist F_{\perp} während der freien Bewegung gleich null und somit kleiner als die Gewichtskraft G , dann wird die Kugel zur Ebene hin beschleunigt, oder die Kraft nimmt im Kontaktfall den Wert $F_{\perp} = \frac{r_f}{2} G$ an und ist somit größer als G , wodurch die Kugel von der Beschränkung weg beschleunigt wird. Da sich dabei kein Gleichgewicht zwischen Gewichts- und Kontaktkraft etablieren kann, erhält man ein dauerhaft oszillierendes Verhalten, das vor allem in der Geschwindigkeitstrajektorie ersichtlich wird. Die Krafttrajektorie des elastischen Körpers weist hingegen einen glatten und stetigen Verlauf auf, wodurch die von der Beschränkung aufgebrachte Kraft die Gewichtskraft im Bereich $G \in [0, \frac{r_f}{2} G]$ exakt kompensieren kann. Daher sollte für die Anwendbarkeit der leistungsbasierten Restriktionsfunktion auf statische Kontakte stets die Annahme eines zumindest minimal elastischen Körpers getroffen werden.

Eine weitere interessante Eigenschaft des neuen Kontaktmodells ist die Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten e_r von der Schwerkraft und anderen externen Kräften.

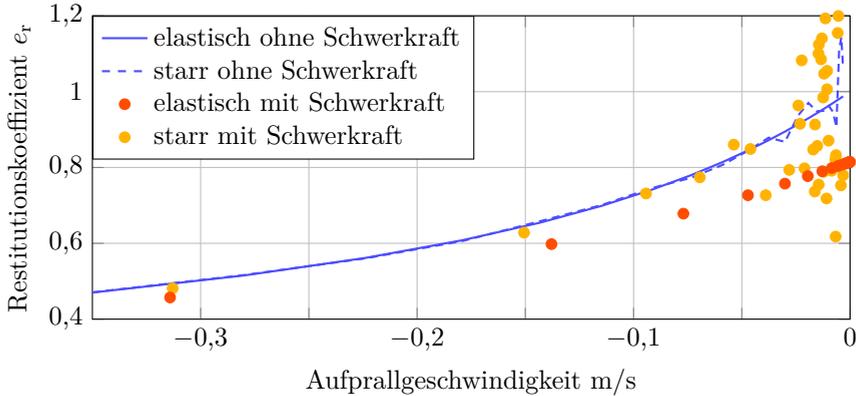


Abbildung 3.13: Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten e_r von externen Kräften für die Annahme starrer und elastischer Körper

Der Einfluss äußerer Kräfte wird dabei für kleiner werdende Aufprallgeschwindigkeiten immer größer und erreicht im Übergang von Stoß zu statischem Kontakt sein Maximum. Je langsamer die Geschwindigkeit ist, desto stärker weicht der Restitutionskoeffizient von dem in Abbildung 3.11 dargestellten Verhalten bei einem horizontalen Stoß ohne äußere Kräfte ab. Drückt die externe Kraft das Objekt in die Beschränkung hinein, steigen dadurch die energetischen Verluste an und e_r wird kleiner. Durch die Zunahme der dissipierten Energie kommt es zu einem schnelleren Abklingen der Aufprallgeschwindigkeit und somit auch zu einem schnelleren Übergang vom Stoßverhalten zu einem statischen Kontakt. Dieses charakteristische Verhalten des Restitutionskoeffizienten, das in Abbildung 3.13 dargestellt ist, tritt aber nicht nur in den Simulationsergebnissen auf, sondern ist in seiner grundlegenden Form auch in den Messdaten enthalten, die in [Gol01] abgebildet sind. Das variable Verhalten von e_r basiert dabei größtenteils auf der Elastizität des Objekts und hat für Starrkörperkontakte somit nur einen vernachlässigbar kleinen Einfluss. Allerdings nimmt das Rauschverhalten von e_r bei starren Körpern und kleiner werdenden Geschwindigkeiten stark zu. Das Rauschen entsteht dabei aufgrund numerischer Fehler, die aus dem sprungförmigen Verhalten der Kontaktkraft in Kombination mit einer endlich kleinen Abtastzeit resultieren.

Durchbrechen von Schranken mit endlicher Ausdehnung

In den beiden zuvor vorgestellten Kontaktsimulationen wurde für die Beschränkung stets eine Schranke mit unendlicher Ausdehnung angenommen. Wie jedoch in Abschnitt 3.2.5 bereits erörtert wurde, ist diese Annahme für reale Beschränkungen

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
s_0	0,10	m	m	0,05	kg
s_c	0,08	m	s_Δ	0,20	m
r_f	10	kN	\tilde{s}_0	-0,10	m
r_d	0,05	s/m	\tilde{s}_c	-0,05	m

Tabelle 3.2: Simulationsparameter für den Kontakt einer Kugel mit einer begrenzten Schranke bei einer Abtastzeit von 0,01 ms

in mechanischen Systemen nicht zutreffend. Daher soll nachfolgend ein weiteres Simulationsszenario für ein Einkörpersystem betrachtet werden, das der Kollision einer Kugel mit einer Schranke der Dicke s_Δ aus Abbildung 3.9 entspricht. Für eine übersichtlichere Darstellung wird in diesem Beispiel der Einfluss der Gravitation vernachlässigt und lediglich ein eindimensionales Kontaktproblem in horizontaler Richtung simuliert. Somit kann für das Simulationsmodell direkt die Restriktionsfunktion für endlich ausgedehnte Schranken $\tilde{\mathcal{R}}$ aus Gleichung (3.24) verwendet werden. Leitet man diese partiell nach v_\perp ab und teilt die daraus resultierende Kontaktkraft durch die Masse der Kugel m , so erhält man die Differentialgleichung des dynamischen Objektverhaltens

$$\dot{v}_\perp = \frac{r_f}{4m} (\tanh(\tilde{r}_t(s_\perp - \tilde{r}_c)) - \tanh(r_t(s_\perp - r_c))) (1 - \tanh(r_d v_\perp)). \quad (3.32)$$

Die Koeffizienten der Gleichung (3.32) können anhand der Werte in Tabelle 3.2 über die Parametergleichungen (3.3), (3.4), (3.22) und (3.23) berechnet werden. Die Werte sind dabei in ihrer Größenordnung solchen Werten nachempfunden, wie sie auch beim Beschuss einer Mauer durch eine Kanone praktisch vorkommen könnten. Simuliert man nun bei gleichbleibender Startposition $s_{\perp,0} = 0,2\text{m}$ den Beschuss der Schranke für die beiden Initialwerte $v_\perp^- = -200\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_\perp^- = -270\frac{\text{m}}{\text{s}}$ der Objektgeschwindigkeit, so ändert sich auch die kinetische Energie der Kugel und es ergeben sich signifikante Abweichungen in den Simulationsergebnissen, die in den Abbildungen 3.14 und 3.15 dargestellt sind.

Betrachtet man zunächst die Ergebnisse für die kinematischen Größen in Abbildung 3.14, so fällt besonders die Divergenz der Trajektorien des Objektabstands s_\perp auf. Während der Abstand für $v_\perp^- = -200\frac{\text{m}}{\text{s}}$ innerhalb der Beschränkung ein Minimum erreicht und anschließend wieder zunimmt, ist das Verhalten der Trajektorie bei höherer Initialgeschwindigkeit monoton fallend. Somit kommt es bei der Kugel mit niedriger kinetischer Energie T zu einer klassischen Kollision mit Zurückprallen, wohingegen bei hoher kinetischer Energie die Kugel die Beschränkung durchbricht. Eine Beschleunigung der Kugel findet dabei lediglich im Bereich der Beschränkung statt, wodurch die Geschwindigkeit vor und nach dem Kontakt konstant ist. Dabei

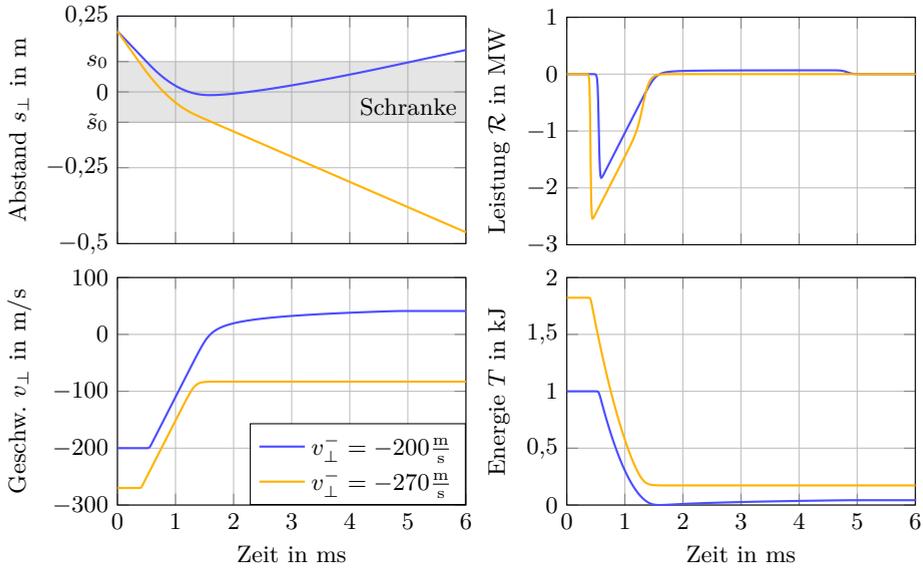


Abbildung 3.14: Vergleich des kinematischen Verhaltens, der Beschränkungsleistung und der kinetischen Energie für Simulationen mit unterschiedlichen Initialgeschwindigkeiten v_{\perp}^{-}

wird für $v_{\perp}^{-} = -270 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ das Objekt lediglich abgebremst und die Geschwindigkeit bleibt über die gesamte Zeit negativ. Bei $v_{\perp}^{-} = -200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ folgt hingegen auf die Phase der Verzögerung zusätzlich eine Phase der Beschleunigung, in der die Geschwindigkeit das Vorzeichen wechselt. Dieses Verhalten spiegelt sich auch in den Trajektorien der kinetischen Energie wider, da für eine hohe Initialgeschwindigkeit stets $T > 0$ ist, die kinetische Energie bei kleiner Aufprallgeschwindigkeit zwischenzeitlich aber zu null abfällt, obwohl die Beschränkungsleistung für schnelle Objekte während der Kontaktphase einen betragsmäßig höheren Wert annimmt.

Die unterschiedlichen Ergebnisse der beiden Objektkollisionen können anhand des Verlaufs der Kontaktkraft F_{\perp} in Abbildung 3.15 anschaulich erläutert werden. Dringt die Kugel in die Beschränkung ein, so steigt zunächst für beide Szenarien die Kontaktkraft sehr schnell an und erreicht dabei den Bereich der maximalen Interaktion, der durch die Kraftebene über s_{\perp} und v_{\perp} innerhalb der Beschränkung abgebildet wird. Die maximale Normalkraft ist dabei auf den Wert von $r_f = 10 \text{ kN}$ begrenzt, dadurch resultiert aus dem Zusammenhang $\dot{v}_{\perp} = F_{\perp}/m$ für beide Kollisionen eine identische Verzögerung der Kugel, wobei die Restriktionsleistung bei gleicher Kraft, aber höherer Geschwindigkeit zunimmt. Darüber hinaus benötigt das Objekt bei höherer Geschwindigkeit eine längere Zeitdauer und Strecke, um vollständig abgebremst zu

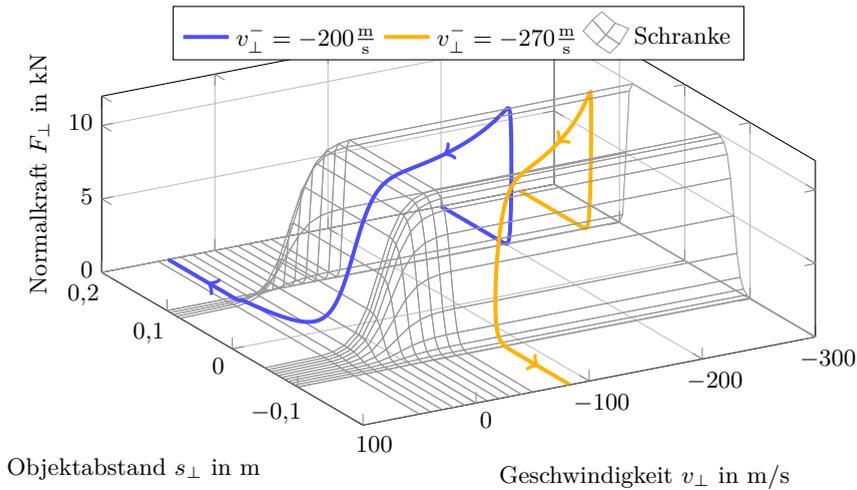


Abbildung 3.15: Vergleich der Kontaktkrafttrajektorien für ein an der Schranke zurückprallendes und ein die Schranke durchbrechendes Objekt mit unterschiedlichen Initialgeschwindigkeiten v_{\perp}^{-}

werden. Für $v_{\perp}^{-} = -200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist die Strecke bzw. in diesem Fall die Breite der Schranke ausreichend, um das Objekt zu stoppen. Mit abnehmender Geschwindigkeit reduziert sich dabei die Normalkraft der Beschränkung und das Objekt wird anschließend mit kleinerer Kraft aus der Beschränkung heraus beschleunigt. Die Beschleunigung der Kugel bei viskoelastischen Kontakten ist dabei stets geringer als die Verzögerung, wodurch das Objekt die Beschränkung mit kleinerer Geschwindigkeit verlässt. Für höhere Geschwindigkeiten, wie z. B. $v_{\perp}^{-} = -270 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, reicht hingegen die Breite der Schranke nicht für ein vollständiges Abbremsen der Kugel aus. Somit fällt die Normalkraft nicht über die Geschwindigkeit, sondern über den Abstand s_{\perp} ab, da die Aktivierungsfunktion der Beschränkung zu null wird. An diesem Punkt durchbricht das Objekt die Beschränkung und fliegt anschließend ungehindert mit konstanter, aber kleinerer Geschwindigkeit weiter. Soll nun die Beschränkung dahingehend angepasst werden, dass die Schranke auch durch ein Objekt mit höherer Energie nicht mehr durchbrochen werden kann, hat man die gleichen Möglichkeiten, wie sie auch für die Verstärkung einer Mauer bestehen. Entweder man verbreitert die Mauer, was in diesem Fall einer Vergrößerung der Breite s_{Δ} entspricht, oder man verwendet ein Material mit höherer Widerstandskraft. Die Anpassung der Widerstandskraft erfolgt im Falle der leistungs-basierten Restriktionsfunktion über den Kraftkoeffizienten r_f , daher kann dieser als direkter Materialparameter interpretiert werden. Somit zeigt sich auch bei der Simulation des Schrankendurchbruchs die einfache, physikalisch interpretierbare Parametrierung des leistungs-basierten Kontaktmodells.

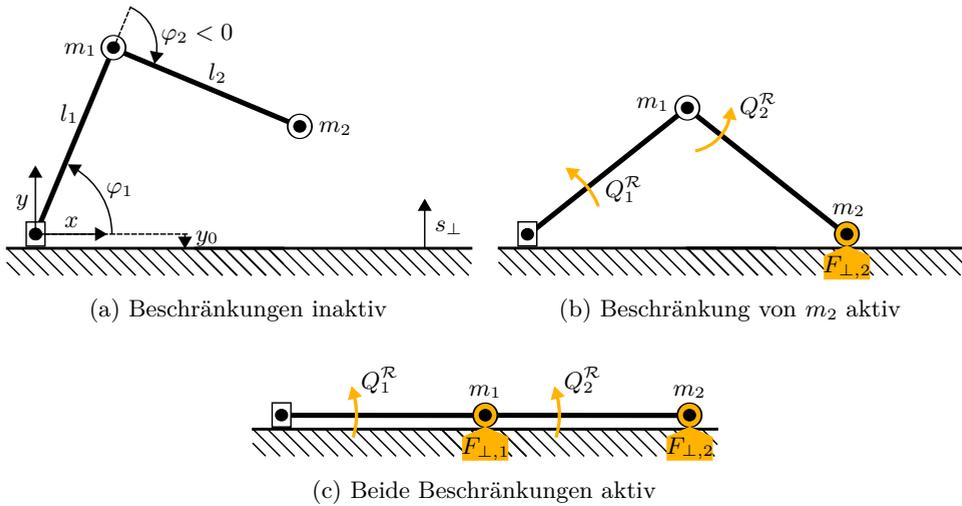


Abbildung 3.16: Inverses Doppelpendel mit zwei unilateralen Kontakten

3.3.2 Mehrkörpersysteme unter Einfluss mehrerer, paralleler Kontakte

Um die einfache Anwendbarkeit und das robuste Verhalten des neuen Modellierungsansatzes zu verdeutlichen, wird im nachfolgenden Szenario das Kontaktverhalten eines Mehrkörpersystems mit mehrfachen Beschränkungen untersucht. Das Auftreten paralleler Kontakte in Mehrkörpersystemen ist mit den etablierten Kontaktmodellen nur bedingt möglich und führt zu unübersichtlichen Modellbeschreibungen, die in ihrer Komplexität nur noch durch Modelle mit kontaktbedingten, tangentialen Reibungskräften übertroffen werden. Für den neuen Modellierungsansatz stellen solche Szenarios hingegen kein Problem dar, da durch den gleichbleibenden Formalismus und die unabhängige Parametrierung der Einzelkontakte stets eine einfache Ansatzfunktion für das Modellierungsproblem aufgestellt werden kann. Die daraus resultierenden Systemgleichungen können dabei zwar ebenfalls sehr umfassend sein, allerdings können sie automatisiert unter Verwendung eines Computer-Algebra-Programms aufgestellt werden, wodurch die Fehlerrate bei der Modellierung deutlich abnimmt.

Als konkretes Anwendungsbeispiel soll hier das inverse Doppelpendel aus Abbildung 3.16 betrachtet werden, dessen Bewegungsbereich durch den Boden eingeschränkt ist und bei dem es zu zwei gleichzeitig auftretenden Kontakten zwischen den Massen m_i und der Beschränkung kommen kann. Die Verbindung der Massen und Gelenke erfolgt dabei durch ideal starre Stäbe, die keine eigene Masse aufweisen.

Darüber hinaus wirken neben der Schwerkraft keine weiteren externen oder dissipativen Kräfte auf das System. Dies führt dazu, dass sich die Gesamtenergie des Systems nur durch die energetischen Verluste während der Kollisionen verändern kann. Wie in Abbildung 3.16(a) dargestellt ist, werden die verallgemeinerten Koordinaten bei der Initialisierung des Simulationsbeispiels zu $\varphi_{1,0} = \frac{3\pi}{8}$ und $\varphi_{2,0} = -\frac{\pi}{2}$ gewählt, wobei sich das Pendel zu Beginn im Stillstand befindet.

In der Phase der freien Bewegung werden beide Segmente aufgrund der Schwerkraft zunächst so lange in Richtung des Bodens beschleunigt, bis die Masse m_2 mehrfach auf dem Boden auf- und zurückprallt. Während den einzelnen Kollisionen wird dem System ein Teil der kinetischen Energie entzogen und es bildet sich ein dauerhafter Kontakt zwischen m_2 und dem Boden aus. Die Masse m_2 gleitet dabei entsprechend Abbildung 3.16(b) entlang der Beschränkung, bis die Masse m_1 ebenfalls auf dem Boden aufschlägt. Durch mehrfaches Zurückprallen von m_1 wird dem System nach und nach die verbleibende kinetische Energie entzogen und das Pendel erreicht die in Abbildung 3.16(c) dargestellte Ruhelage.

Die Modellgleichungen des inversen Doppelpendels mit Beschränkung werden über die erweiterten Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.33)$$

ohne die Terme externer und dissipativer Kräfte hergeleitet. Hierfür werden zunächst die verallgemeinerten Koordinaten zu $\mathbf{q} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$ gewählt und daraus die zugehörigen verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2]^T$ abgeleitet. Auf Basis von \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ werden anschließend die Beschreibungen der potentiellen und kinetischen Energien des Pendels aufgestellt, die durch die Gleichungen

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad (3.34a)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left((l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_2)) \dot{\varphi}_1^2 + 2l_2 (l_2 + l_1 \cos(\varphi_2)) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \right), \quad (3.34b)$$

$$V_1 = m_1 g \sin(\varphi_1) l_1, \quad (3.34c)$$

$$V_2 = m_2 g \left(\sin(\varphi_1) l_1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) l_2 \right) \quad (3.34d)$$

definiert sind. Addiert man die Terme der kinetischen Energien T_i und zieht davon die Terme der potentiellen Energien V_i ab, so erhält man die Lagrange-Funktion \mathcal{L} nach Gleichung (3.26). Die Differentialgleichungen des unbeschränkten Pendels können durch Einsetzen von \mathcal{L} in die linke Seite der Gleichung (3.33) hergeleitet werden. Auf eine Darstellung der Differentialgleichungen des Doppelpendels wird an dieser Stelle jedoch verzichtet, da sie für das Verständnis des Kontaktmodells

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
m_1	0,10	kg	<u>Schranke 1:</u>			<u>Schranke 2:</u>		
m_2	0,10	kg	$s_{0,1}$	10	mm	$s_{0,2}$	10	mm
l_1	0,10	m	$s_{c,1}$	6	mm	$s_{c,2}$	6	mm
l_2	0,10	m	$r_{f,1}$	400	N	$r_{f,2}$	400	N
x_0	0,01	m	$r_{d,1}$	4	s/m	$r_{d,2}$	4	s/m

Tabelle 3.3: Simulationsparameter des beschränkten Doppelpendels bei einer Abtastzeit von 0,1ms

eine untergeordnete Rolle spielen. Sie können aber in Anhang A.2 oder in [RS84] nachgeschlagen werden.

Die Restriktionsfunktion \mathcal{R} des Simulationsbeispiels besteht aus zwei Termen, die das Beschränkungsverhalten der beiden Massen m_1 und m_2 beschreiben. Der erste Beschränkungsterm hängt dabei vom vertikalen Abstand und der relativen Geschwindigkeit zwischen der Masse m_1 und dem Boden ab, die durch die Gleichungen

$$s_{\perp,1} = y_0 + \sin(\varphi_1)l_1, \quad (3.35a)$$

$$v_{\perp,1} = \cos(\varphi_1)l_1\dot{\varphi}_1 \quad (3.35b)$$

definiert sind. Für den zweiten Term werden die entsprechenden Gleichungen

$$s_{\perp,2} = y_0 + \sin(\varphi_1)l_1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)l_2, \quad (3.36a)$$

$$v_{\perp,2} = \cos(\varphi_1)l_1\dot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)l_2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \quad (3.36b)$$

für den Zusammenhang zwischen der Masse m_2 und der Beschränkung aufgestellt. Werden die Gleichungen (3.35) und (3.36) in die verallgemeinerte Restriktionsfunktion aus Gleichung (3.28) eingesetzt, so erhält man die Gesamtbeschreibung der Beschränkung nach Gleichung (A.3), die aufgrund ihrer umfangreichen Terme in Anhang A.2 zu finden ist und deren Parameter für die Simulation entsprechend Tabelle 3.3 gewählt wurden. Der generalisierte Aktivierungsterm aus Gleichung (A.3) transformiert die durch den Boden definierte Beschränkung in die Ebene der verallgemeinerten Koordinaten φ_1 und φ_2 , wodurch man den in Abbildung 3.17 dargestellten Bewegungsbereich erhält. Die erste Koordinate φ_1 ist dabei auf das Intervall zwischen 0 und π beschränkt, wohingegen φ_2 unbeschränkt ist, sofern das erste Segment des Pendels für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ senkrecht steht, da nur in dieser Position das zweite Segment des Pendels frei rotieren kann. Wie in der Trajektorie der Aktivierungsfunktion in Abbildung 3.17 zu erkennen ist, tritt der Fall einer freien Rotation des zweiten Pendelsegments in der betrachteten Simulation nicht auf, da dies durch die Wahl der initialen Pendelwinkel ausgeschlossen wurde.

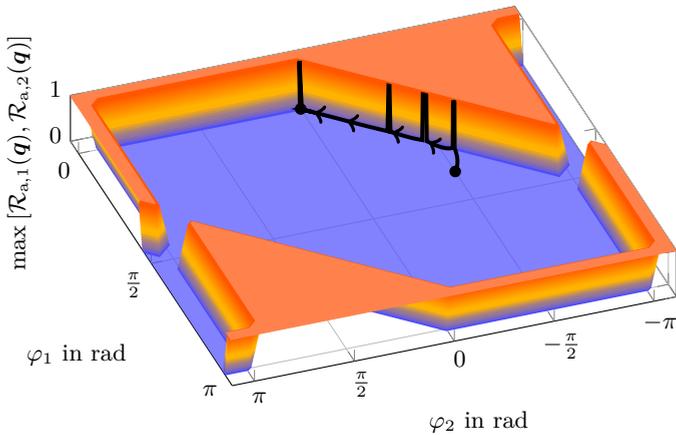


Abbildung 3.17: Verallgemeinerter Beschränkungsbereich des Doppelpendels über φ_1 und φ_2 und Verlauf der Aktivierungsfunktion für das Simulationsszenario

Die Normalkräfte zwischen den Massen und der Beschränkung werden durch das Einsetzen von Gleichung (A.3) in Gleichung (3.29) in Wirkrichtung der Winkel φ_1 und φ_2 transformiert. Somit treten die verallgemeinerten Kontaktkräfte $Q_i^{\mathcal{R}}$ für dieses Szenario in Form eines Moments auf. Die beiden Momente können über die Gleichungen (A.4a) und (A.4b) berechnet werden und sind, anders als bei Kontakten von Einkörpersystemen, nicht mehr ausschließlich durch die Multiplikation zweier Sigmoid-Funktionen definiert, sondern weisen darüber hinaus noch jeweils einen zusätzlichen Faktor auf. Diese Faktoren, die von den Geschwindigkeiten $v_{\perp,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ abhängen, teilen dabei die Kontaktkräfte auf die generalisierten Kontaktmomente im Vektor $\mathbf{Q}^{\mathcal{R}}$ auf.

Die Simulationsergebnisse für die Trajektorien der verallgemeinerten Momente $\mathbf{Q}^{\mathcal{R}}$, der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und der zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ sind in Abbildung 3.18 ebenso dargestellt wie die Summen der potentiellen und kinetischen Energien $E_{\Sigma,i} = T_i + V_i$, $i = 1, 2$, der Massen m_i und die daraus resultierende Gesamtenergie des Systems $E_{\Sigma} = E_{\Sigma,1} + E_{\Sigma,2}$. Nachdem das Pendel aus seiner initialen Ruhelage losgelassen wird, nehmen die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ zunächst betragsmäßig zu, bis nach $t \approx 0,1$ s ein erster Kontakt zwischen der Masse m_2 und dem Boden auftritt. In den Trajektorien der verallgemeinerten Momente $Q_i^{\mathcal{R}}$ wird dabei ein gleichzeitiger Einfluss des Kontakts auf beide Freiheitsgrade des Systems deutlich, der innerhalb einer kurzen Zeitspanne einen großen Teil der Systemenergie dissipiert. Auf den ersten Kontakt des Pendels mit dem Boden folgt eine Phase weiterer Kollisionen, die besonders in den Trajektorien der Momente und Geschwindigkeiten

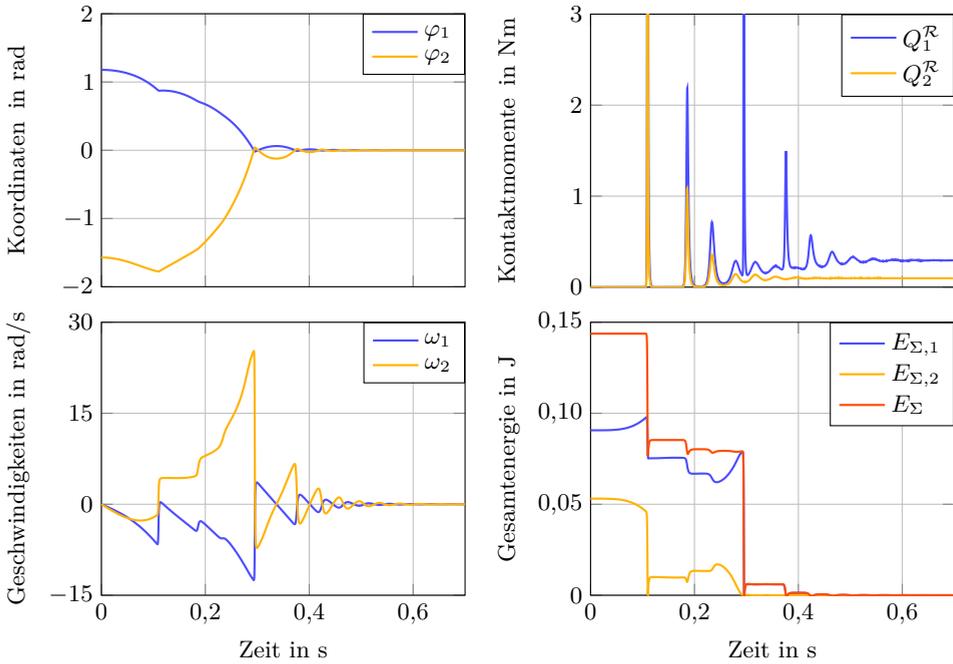


Abbildung 3.18: Trajektorien der Koordinaten \mathbf{q} , Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ und Kontaktkräfte $\mathbf{Q}^{\mathcal{R}}$ des Doppelpendels sowie der Energien $E_{\Sigma,i}$ der Massen m_i und des Gesamtsystems E_{Σ}

deutlich werden. Die Intensität des Aufpralls nimmt dabei mit jedem Kontakt ab, da sich durch die energetischen Verluste, die mit jedem Stoß einhergehen, auch die Aufprallgeschwindigkeit der nächsten Kollision reduziert. Nachdem das stoßförmige Kontaktverhalten zwischen Beschränkung und Masse m_2 immer mehr zu einem anhaltenden, unilateralen Kontaktverhalten übergeht, wechselt m_2 in eine Phase des Gleitens, bei der lediglich ein minimaler Energieverlust auftritt. Dabei wird die verbleibende potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt und die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ steigen stetig an. Mit dem Aufprall der Masse m_1 auf dem Boden bei $t \approx 0,3\text{s}$ wird die Gleitphase des Pendels abrupt gestoppt und es tritt ein zweiter signifikanter Energieverlust auf. Wie dabei in den Trajektorien der Momente und der Energien zu erkennen ist, wirkt sich die aus dem Aufprall von m_1 resultierende Kraft lediglich auf das verallgemeinerte Moment $Q_1^{\mathcal{R}}$ und die Energie $E_{\Sigma,1}$ aus. Dieses Verhalten ist dabei keineswegs überraschend, da die Definition der Restriktionsfunktion \mathcal{R}_1 für die Masse m_1 unabhängig von φ_2 und $\dot{\varphi}_2$ erfolgt und eine Krafteinwirkung in Richtung der zweiten generalisierten Koordinate somit nicht erfolgen kann. Durch die Kopplung der beiden Pendelsegmente wirkt sich das in

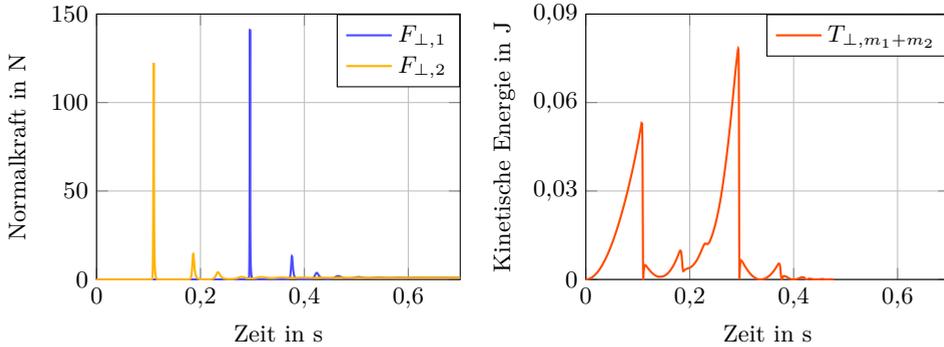


Abbildung 3.19: Normalkräfte $F_{\perp,i}(v_{\perp,i})$ und kinetische Energie $T_{\perp}(\mathbf{v}_{\perp})$ für den Kontakt der Massen m_i mit der Beschränkung

Richtung von φ_1 angreifende Moment jedoch auf alle kinematischen Größen \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ aus. Vergleichbar zum Kontaktverhalten von m_2 folgt auf den ersten Aufprall von m_1 eine Serie weiterer Stöße, bei denen dem Pendel die restliche Energie entzogen wird, wodurch das System seine endgültige Ruhelage erreicht. Die verallgemeinerten Kontaktmomente, die während des statischen Kontakts auftreten, entsprechen dabei exakt denjenigen Momenten, die zwei in den Drehgelenken positionierte Antriebe aufbringen müssten, um das unbeschränkte Pendel in seiner horizontalen Position zu halten.

Vergleicht man die Trajektorien der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ bzw. der verallgemeinerten Momente $\mathbf{Q}^{\mathcal{R}}$ mit dem Verlauf der Trajektorie der Gesamtenergie, so lässt sich kein direkter Zusammenhang erkennen, wie er beim Aufprall einer Kugel auf einer Ebene gegeben war. Daher soll darüber hinaus auch der Zusammenhang zwischen den Kontaktkräften in Normalenrichtung $F_{\perp,i}$ mit $i = 1, 2$, die aus dem Einsetzen der Gleichung (A.3) in Gleichung (3.31) resultieren, und der kinetischen Energie

$$T_{\perp} = \frac{1}{2}m_1 (l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2 (l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2))^2 \quad (3.37)$$

in Abhängigkeit der relativen Geschwindigkeiten $v_{\perp,i}$ untersucht werden. Die Gleichungen (A.5a) und (A.5b), die das Verhalten von $F_{\perp,i}$ beschreiben, sind vergleichbar mit den Beschreibungen der Kollisionskräfte in einem Einkörpersystem. Die daraus resultierenden Trajektorien für das Simulationsszenario des Doppelpendels sind in Abbildung 3.19 dargestellt. Die Höhe der maximalen Normalkräfte hängt maßgeblich von der kinetischen Energie in Normalenrichtung ab, die das System beim initialen Aufprall besitzt. Umso höher T_{\perp} ist, desto größer werden die auftretenden Normalkräfte. Vergleicht man nun $F_{\perp,i}$ und T_{\perp} mit dem dissipativen Verhalten der Gesamtenergie in Abbildung 3.18, so erkennt man einen starken Zusammenhang zwi-

schen den Trajektorien, wie er auch bei einfachen Kontakten von Einkörpersystemen auftritt.

Darüber hinaus eröffnet die Berechnung der Normalkraft die Möglichkeit, das Kontaktverhalten zwischen Pendel und Beschränkung um tangential auftretende Reibungseffekte zu erweitern, die während der Gleitphase der Masse m_2 auftreten. Die Erweiterung des Simulationsszenarios um Reibungseffekte wird in Kapitel 4 vorgestellt und diskutiert, dabei wird das beschränkte Pendelmodell mit dem dynamischen Reibungsmodell aus Kapitel 2 kombiniert.

3.3.3 Beschränkung dreidimensionaler Objekte

In den bisherigen Simulationsszenarios wurde stets die Annahme getroffen, dass das kollidierende Objekt eine kugelförmige Geometrie aufweist. Bei praktischen Anwendungen ist diese Annahme jedoch nur selten zutreffend, da besonders bei mechanischen Systemen viele Bauteile fertigungsbedingt Strukturen mit Kanten und Ecken aufweisen. Allerdings bietet die leistungsorientierte Restriktionsfunktion auch hierfür eine Lösung. Folgt man der Idee der finiten Elemente, so kann die Form eines jeden beliebigen Objekts durch eine Vielzahl kleiner Kugeln nachgebildet werden.

Ein einfaches Beispiel für dieses Vorgehen ist in Abbildung 3.20 für den Kontakt eines Würfels mit einer Ebene dargestellt. Hierzu ist es ausreichend den Würfel über Kontaktsphären in den Eckpunkten zu approximieren, da über diese Punkte alle möglichen Szenarien für den Kontakt einer Ecke, einer Kante oder einer Fläche des Würfels mit der Ebene abgebildet werden können. Betrachtet man anstelle des Kontakts mit einer Ebene den Kontakt eines Würfels mit einer nicht glatten

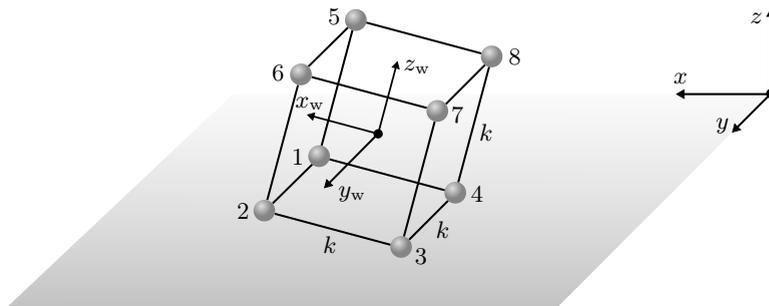


Abbildung 3.20: Kollisionssimulation eines Würfels mit einer Ebene unter Verwendung finiter Kontaktelemente

Oberfläche, so können die Kontaktsphären auch auf den Seiten des Würfels verteilt werden. Dabei bleibt das nachfolgend vorgestellte Vorgehen für das einfache Szenario aus Abbildung 3.20 unverändert, lediglich der Rechenaufwand steigt mit der zunehmenden Anzahl an Elementen stetig an.

Für die Modellierung des Würfels werden zunächst über die Kantenlänge k die Positionen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,w} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{k}{2}, \quad \mathbf{P}_{2,w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{k}{2}, \quad \mathbf{P}_{3,w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{k}{2}, \quad \mathbf{P}_{4,w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{k}{2}, \\ \mathbf{P}_{5,w} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{k}{2}, \quad \mathbf{P}_{6,w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{k}{2}, \quad \mathbf{P}_{7,w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{k}{2}, \quad \mathbf{P}_{8,w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{k}{2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

der acht Eckpunkte im Würfelkoordinatensystem bestimmt, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Würfels $\mathbf{P}_{SP} = [x_{SP} \ y_{SP} \ z_{SP}]^T$ liegt. Die Orientierung des Würfels im Inertialsystem wird dabei durch die Winkel α , β und γ bestimmt. Für die Transformation der Koordinaten $\mathbf{P}_{i,w}$ vom körperfesten in das Inertialsystem wird hier die xyz -Konvention aus [DH07; GPS06] verwendet, die hauptsächlich in der Fahrzeug- und Luftfahrttechnik eingesetzt wird. Dabei wird das Inertialsystem zunächst mit der Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

um den Gierwinkel γ um die Hoch- bzw. z -Achse gedreht, gefolgt von einer zweiten Drehung um die intermediäre y' -Achse mit der Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_{y'}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

um den Nickwinkel β und einer abschließenden Drehung mit der Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_{x''}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

um den Rollwinkel α um die endgültige x'' -Achse. Die Gesamttrotation vom Inertialsystem ins körperfeste System erfolgt somit über die Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_{x''y'z}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_{x''}(\alpha) \mathbf{R}_{y'}(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma), \quad (3.42)$$

die sich aus der Multiplikation der Matrizen (3.39)-(3.41) ergibt. Entsprechend dazu kann über die transponierte Rotationsmatrix $R'_{x''y''z}(\alpha, \beta, \gamma)$ die Transformationen aus dem körperfesten in das inertielle Koordinatensystem erfolgen.

Führt man nun die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q} = [x_{\text{SP}} \ y_{\text{SP}} \ z_{\text{SP}} \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ für die drei translatorischen und die drei rotatorischen Freiheitsgrade ein, so lassen sich die Positionen \mathbf{P}_i der Kontaktpunkte in globalen Koordinaten über die Gleichung

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_i(\mathbf{q}) \\ y_i(\mathbf{q}) \\ z_i(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = R'_{x''y''z}(q_4, q_5, q_6) \mathbf{P}_{i,w} + \mathbf{P}_{\text{SP}}(q_1, q_2, q_3) \quad (3.43)$$

berechnen. Die Positionen $\mathbf{P}_{i,w}$ der Kontaktsphären in körperfesten Koordinaten werden also zunächst über $R'_{x''y''z}$ in ein zum Inertialsystem paralleles System transformiert und anschließend um die Schwerpunktposition \mathbf{P}_{SP} des Würfels verschoben.

Für den Kontakt mit der x/y -Ebene können nun die vertikalen Positionen $z_i(\mathbf{q})$ der Eckpunkte $\mathbf{P}_i(\mathbf{q})$ sowie deren zeitliche Ableitungen $\dot{z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{grad}(z_i(\mathbf{q}))\dot{\mathbf{q}}$ in die Gleichung (3.28) der Restriktionsfunktion eingesetzt werden, wobei $s_{\perp,i}(\mathbf{q}) = z_i(\mathbf{q})$ und $v_{\perp,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ entspricht. Somit erhält man für die Beschreibung der Kontakte aller acht Eckpunkte des Würfels die verallgemeinerte Restriktionsfunktion

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^8 \left(\frac{1 - \tanh(r_{t,i}(z_i(\mathbf{q}) - r_{c,i}))}{2} \right) \left(\frac{\dot{z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{2} - \frac{\log(\cosh(r_{d,i}\dot{z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})))}{2r_{d,i}} \right) r_{f,i}. \quad (3.44)$$

Darüber hinaus wird die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_t(\dot{\mathbf{q}}) + T_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) \quad (3.45)$$

des Würfels aufgestellt, die sich aus drei Termen zusammensetzt. Die potentielle Energie

$$V(\mathbf{q}) = mgq_3 \quad (3.46)$$

hängt dabei lediglich von der vertikalen Position $q_3 = z_{\text{SP}}$ des Schwerpunkts, der Würfelmasse m und der Erdbeschleunigung g ab. Des Weiteren erhält man die translatorische kinetische Energie

$$T_t(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \quad (3.47)$$

aus der Geschwindigkeit des Würfelschwerpunkts und der Masse m . Für die rotatori-

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
k	100	mm	m	0,1	kg
$s_{0,i}$	2	mm	$r_{f,i}$	400	N
$s_{c,i}$	1	mm	$r_{d,i}$	0,3	s/m

Tabelle 3.4: Simulationsparameter für den Kontakt eines Würfels mit einer Ebene auf Basis finiter Elemente bei einer Abtastzeit von 0,1 ms

sche kinetische Energie

$$T_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.48)$$

mit dem Trägheitstensor $\mathbf{J} = \frac{1}{6} m k^2 \mathbf{I}$ für die Drehung eines Würfels um seine drei Hauptträgheitsachsen muss zunächst der Geschwindigkeitsvektor

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \cos(q_5) \cos(q_6) - \dot{q}_5 \sin(q_6) \\ \dot{q}_4 \cos(q_5) \sin(q_6) - \dot{q}_5 \cos(q_6) \\ \dot{q}_6 - \dot{q}_4 \sin(q_5) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

nach [GPS06] berechnet werden, der die Rotationsgeschwindigkeiten hinsichtlich der raumfesten Achsen beschreibt.

Setzt man die Gleichungen (3.44) und (3.45) in die Lagrange-Gleichungen (3.30) ein, wobei keine externen Kräfte einwirken und somit $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ist, so erhält man die Differentialgleichungen für das Kontaktszenario zwischen Würfel und Ebene. Die aus der Lagrange-Funktion resultierenden Differentialgleichungen (A.6) des unbeschränkten Würfels sind in Anhang A.3 dargestellt. Auf die Darstellung der resultierenden Gleichungen für die Kontaktkräfte $F_{\perp,i}$ senkrecht zur Ebene und die verallgemeinerten Kontaktkräfte Q_i^R sei hier jedoch verzichtet, da die Gleichungen mehrere Seiten umfassen würden. Die Kräftegleichungen können jedoch unter Verwendung eines Computer-Algebra-Programms mit geringem Aufwand aus den in den Gleichungen (3.38)-(3.44) beschriebenen Ansatzfunktionen abgeleitet werden.

Für die Simulation des Kontaktverhaltens werden die Koeffizienten der Differentialgleichung auf Basis der Parameter in Tabelle 3.4 berechnet und die Initialwerte für die verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten zu

$$\mathbf{q}_0 = [0 \text{ m} \quad 0 \text{ m} \quad 1 \text{ m} \quad 0 \text{ rad} \quad 0 \text{ rad} \quad 0 \text{ rad}]^T \quad (3.50a)$$

und

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \left[2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^T \quad (3.50b)$$

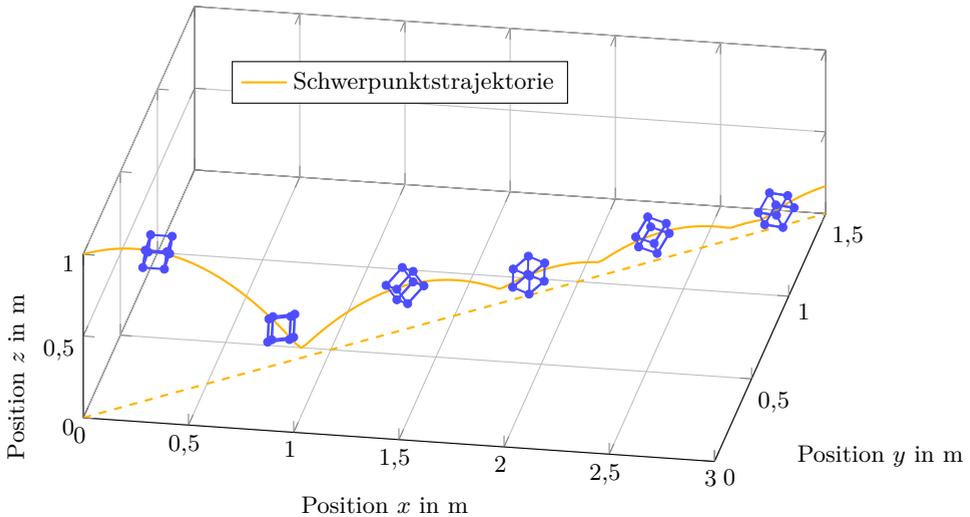


Abbildung 3.21: Schwerpunktstrajektorie mit Projektion auf die x/y -Ebene für den Kontakt eines Würfels mit einer Ebene

gewählt. Die daraus resultierenden Simulationsergebnisse für die Position und Orientierung des Würfels sind in Abbildung 3.21 dargestellt und die Trajektorien der verallgemeinerten Geschwindigkeiten und Kontaktkräfte in Abbildung 3.22. Da diese Ergebnisse für eine grundlegende Erläuterung der Kontaktprozesse ausreichen, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine zusätzliche Betrachtung der kinematischen Trajektorien und Kontaktkräfte der einzelnen Kontaktsphären verzichtet.

Betrachtet man die Schwerpunktstrajektorie des Würfels und deren Projektion auf die x/y -Ebene in Abbildung 3.21, so erkennt man, dass sich der Schwerpunkt des Würfels in x - und y -Richtung gleichmäßig weiterbewegt. Die Geschwindigkeiten \dot{x}_{SP} und \dot{y}_{SP} , die in Abbildung 3.22 dargestellt sind, bleiben dabei unverändert auf dem Wert der jeweiligen Startgeschwindigkeiten $\dot{x}_{\text{SP},0} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\dot{y}_{\text{SP},0} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die gleichförmige Bewegung bleibt deshalb ungestört, weil die Kontaktkräfte zwischen den einzelnen Kontaktsphären und der x/y -Ebene exakt senkrecht zur Ebene stehen und dadurch auch nach der Transformation der Kräfte in Wirkrichtung der verallgemeinerten Koordinaten x_{SP} und y_{SP} keine Kontaktkräfte $Q_x^{\mathcal{R}}$ und $Q_y^{\mathcal{R}}$ auftreten. Aus dem gleichen Grund gilt auch für das verallgemeinerte Kontaktmoment $Q_\gamma^{\mathcal{R}} = 0$. Da für die Rotation des Würfels die xyz -Konvention verwendet wird, erfolgt die erste Drehung stets um die vertikale z -Achse, die senkrecht auf der Kontaktebene steht. Somit kann aus dem Kontakt kein Drehmoment um die Hochachse resultieren, wodurch auch die Rotationsgeschwindigkeit um die z -Achse unverändert bei $\omega_z = 0$ bleibt.

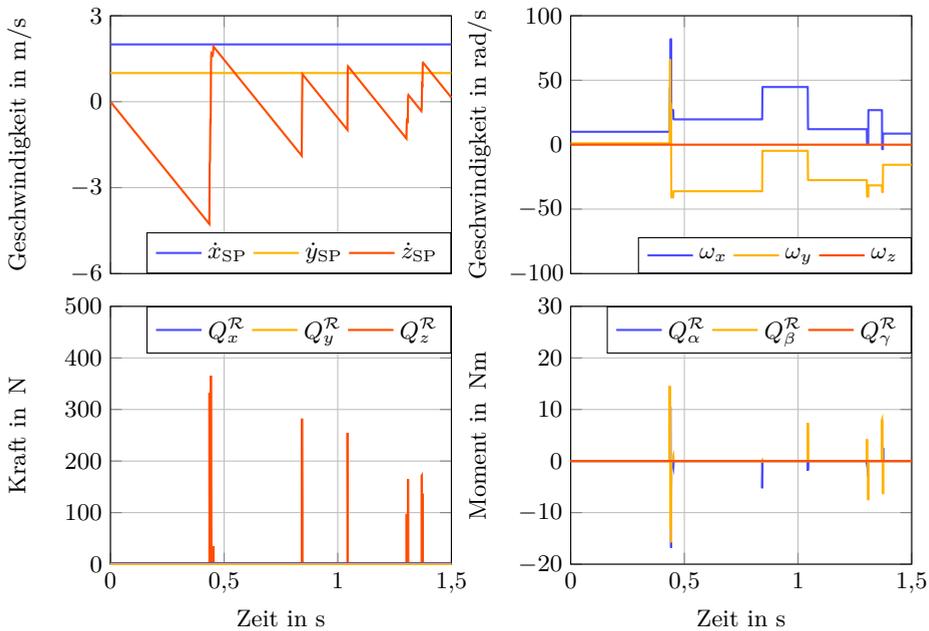


Abbildung 3.22: Verallgemeinerte Geschwindigkeiten \dot{q}_i und generalisierte Kontaktkräfte Q_i^R für das Simulationsszenario eines Würfels auf einer Ebene

Da die Normalkraft während des Kontakts nicht zwingend zentral unterhalb des Schwerpunkts angreift, führt der Kontakt über den entsprechenden Hebel zu einem Anstieg der beiden Momente Q_α^R und Q_β^R um die verbleibenden Rotationsachsen des Würfels, wobei die Verteilung der Momente von der Ausrichtung des Würfels zum Zeitpunkt des Kontakts abhängt. Durch das Auftreten der Rotationsmomente ändern sich auch die globalen Winkelgeschwindigkeiten ω_x und ω_y , da ein Teil der kinetischen Energie in z -Richtung in Rotationsenergie umgewandelt wird. Dies wird vor allem bei genauerer Betrachtung der Geschwindigkeitstrajektorien des Würfelschwerpunkts ersichtlich. Vergleicht man die Trajektorie der Geschwindigkeit \dot{z}_{SP} des Würfels in Abbildung 3.22 mit der Geschwindigkeitstrajektorie des Kontakts zwischen einer Kugel und einer Ebene aus Abbildung 3.12, so fällt auf, dass die Geschwindigkeit der Kugel mit jedem Kontakt monoton abnimmt, wohingegen die Geschwindigkeit \dot{z}_{SP} des Würfels mit dem Kontakt auch zunehmen kann. Dies liegt daran, dass während des Kontakts die translatorische Energie in z -Richtung und die rotatorische Energie bidirektional umgewandelt werden. Ist der von \dot{z}_{SP} abhängige Teil der kinetischen Energie zwischenzeitlich sehr klein, kommt es zu dem in Abbildung 3.21 dargestellten Verhalten, bei dem die Sprunghöhe des Würfels zunächst klein wird und anschließend

wieder deutlich ansteigt. Die Gesamtenergie des Würfels ist aber auch in diesem Fall monoton fallend. Das Verhalten des simulierten Kontakts zwischen Würfel und Ebene ist daher bei qualitativ physikalischer Betrachtung durchgehend plausibel.

3.4 Fazit

Der in diesem Kapitel vorgestellte Modellierungsansatz für unilaterale Kontakte basiert auf Restriktionsfunktionen, die einen stetig differenzierbaren Zusammenhang zwischen der Schrankenleistung und der Objektgeschwindigkeit definieren. Somit stellt diese Art der Schrankenmodellierung einen neuen, dritten Theoriezweig zur dynamischen Kontaktmodellierung dar, der sich deutlich von den etablierten Ansätzen der Stereomechanik und der federbasierten Kontaktmodellierung unterscheidet. Die Restriktionsfunktionen können dabei in den Lagrange-Formalismus eingebunden werden, der zu den am weitest verbreiteten Modellierungsansätzen in der klassischen Mechanik und der Mechatronik zählt. Durch die Einbindung in die Lagrange-Gleichungen zweiter Art kann das leistungsbasierte Kontaktmodell sowohl für einfache Einkörperkontakte als auch für komplexe Mehrkörpersysteme mit mehrfachen, gleichzeitig auftretenden Kontakten angewendet werden. Diese Eigenschaft ist in dieser Form für keinen anderen Modellierungsansatz gegeben und stellt somit einen einzigartigen Vorteil gegenüber den etablierten Theorien dar.

Der Fokus des Kontaktmodells liegt dabei vor allem in der makroskopischen Beschreibung der Dynamik des Gesamtsystems und berücksichtigt nebenbei auch die begrenzte Widerstandskraft von Schranken und das geschwindigkeitsabhängige Verhalten des Restitutionskoeffizienten. Über die Restriktionsfunktionen können, mit Ausnahme des Kontakts zweier Starrkörper, alle möglichen Objekt- und Konfigurationsarten nachgebildet werden, die von einer elastischen bis hin zu einer nahezu perfekt plastischen Stoßdynamik reichen und darüber hinaus auch statische Kontakte abdecken. Da in praktischen Anwendungen keine ideal starren oder plastischen Stöße auftreten können, führt der Ausschluss dieser Kontakte zu keinem nennenswerten Nachteil des neuen Beschränkungsmodells. Diese Einschränkungen des Modellierungsansatzes, die aus der stetig differenzierbaren Definition der Restriktionsfunktion resultieren, führen im Gegenzug zu einem vorteilhaften Verhalten im Hinblick auf die Robustheit bei der Kontaktsimulation. Ein weiterer Vorteil des hier vorgestellten Ansatzes ist die einfache Anwendbarkeit der Restriktionsfunktionen, da sich die einzelnen Beschränkungen über nur vier physikalisch interpretierbare Parameter anpassen lassen und somit die Handhabbarkeit des Ansatzes selbst für komplexe Kontaktszenarien mit einer Vielzahl an Beschränkungen gegeben bleibt. Somit kann der Ansatz unter Verwendung finiter Elemente auch für die Modellierung des Kontaktverhaltens beliebig geformter Körper eingesetzt werden.

Darüber hinaus ermöglichen die spezifischen Eigenschaften des leistungsbasierten Kontaktmodells auch die Erweiterung des Modells um weitere Randbedingungen, die in anderen Ansätzen nur unter großem Aufwand abgebildet werden können. Dazu zählt vor allem die Berücksichtigung von tangentialer Reibung, die während des Kontakts rauer Oberflächen auftreten kann. Da die Leistungsfunktion auch eine Ableitung der Normalkräfte zulässt, kann das Kontaktmodell mit dem Reibungsmodell aus Kapitel 2 kombiniert werden. Dabei bleibt, wie anschließend in Kapitel 4 gezeigt wird, auch der einfache Anwendungsformalismus erhalten, wodurch auch hier die Modellierung von Kontakten in Ein- und Mehrkörpersystemen möglich ist.

Zusammenfassend kann daher gesagt werden, dass die leistungsbasierte Restriktionsfunktion ein vielseitiges, robustes und leistungsfähiges Werkzeug für die Modellierung unterschiedlichster unilateraler Kontakte darstellt, das den etablierten Kontakttheorien in vielerlei Hinsicht überlegen ist.

Kapitel 4

Dynamisches Kontaktverhalten mit tangentialer Reibung

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die leistungsbasierte Modellierung von Reibungseffekten und unilateralen Kontakten vorgestellt. Dabei wurde für das Reibungsmodell von einer konstanten Normalkraft und für das Beschränkungsmodell von einem Kontakt glatter Körper ausgegangen. In praktischen Anwendungen treten beide Effekte aber meist in Kombination auf, daher wird in diesem Kapitel das Reibungsmodell aus Kapitel 2 mit dem Kontaktmodell aus Kapitel 3 zu einem Gesamtansatz zusammengefasst. Hierfür erfolgt in Abschnitt 4.1 zunächst ein Überblick über bestehende Ansätze und eine Abgrenzung des neuen Modellierungsansatzes, bevor in Abschnitt 4.2 die Modellgleichungen für den Gesamtansatz hergeleitet werden. Das kombinierte Modell wird anschließend in Abschnitt 4.3 simulativ evaluiert und in Abschnitt 4.4 bewertet und eingeordnet.

4.1 Grundlagen der Modellierung reibungsbehafteter Kontakte

Wie bereits in Kapitel 1 ausführlich erläutert wurde, existieren Reibungs- und Kontaktprozesse in nahezu allen mechanischen Systemen. Daher haben sich über die Jahre auch mehrere Modellierungsansätze für Reibung und Beschränkungen etabliert, die bereits in den Abschnitten 2.1 und 3.1 diskutiert wurden. Bei der Betrachtung der unterschiedlichen Ansätze wurde dabei deutlich, dass allein die Modellierung eines einzelnen dieser Effekte ein erhebliches Problem im Hinblick auf die Anwendbarkeit, die Verallgemeinerbarkeit und die numerische Robustheit darstellen kann. Im Allgemeinen treten Reibungen und unilaterale Kontakte aber in Kombination auf, da die Reibungskraft eines bewegten Objekts maßgeblich von der

Normalkraft zwischen dem Objekt und seiner Beschränkung abhängt. Betrachtet man daher die Schwierigkeiten bei der Modellierung der Spezialfälle von Reibung mit konstanter Normalkraft oder von Kontakten zwischen glatten Objekten, die in den Kapiteln 2 und 3 dargelegt wurden, so erhält man bereits einen ersten Eindruck, wie komplex die Modellierung eines kombinierten Kontakts auf Basis der etablierten Reibungs- und Kontaktmodelle sein kann.

Für den reibungsbehafteten Kontakt von Einkörpersystemen existieren sowohl Erweiterungen für stereomechanische als auch für kraftbasierte Kontaktmodelle. Folgt man den Erläuterungen in [Gol01; Str04], so werden für die impulsbasierten Modelle starrer Körper die Reibungsverluste in Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten e_r und der Reibungskoeffizienten μ_C und μ_S beschrieben. Allerdings kann über diesen Ansatz lediglich eine grobe Näherung der tatsächlichen Reibungsvorgänge erreicht werden. Dabei ist der Ansatz, ebenso wie bei reibungsfreien Kontakten, auf die Verluste bei einem Stoß zwischen Objekt und Hindernis beschränkt, wodurch auch hier weiterhin der Stoß im Mittelpunkt steht. Legt man jedoch den Fokus auf die Modellierung der Reibung bei persistenten Kontakten, bei denen sich die Normalkraft zwischen Objekt und Beschränkung durch äußere Einflüsse zwar verändert, aber dabei stets größer null ist, so kann auf Basis der Impulserhaltung keine Aussage über das dynamische Reibungsverhalten gemacht werden. Dies ist lediglich unter Verwendung der Kontakttheorien möglich, die auf dem Verhältnis von Deformation und Kraft definiert sind. Da hier die Normalkräfte über die Auslenkung der Hertz'schen Feder direkt berechnet werden können, kann die Normalkraft als Eingang für ein zusätzliches Reibungsmodell verwendet werden. Betrachtet man hierbei einen zweidimensionalen Kontakt mit einem Freiheitsgrad senkrecht und einem parallel zur Kontaktebene, so lässt sich das kraftbasierte Kontaktmodell mit einem etablierten Reibungsmodell wie z. B. dem LuGre-Modell kombinieren. Hat man hingegen einen dreidimensionalen Kontakt mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad parallel zur Kontaktfläche, so treten dieselben Probleme hinsichtlich der Verallgemeinerbarkeit auf, wie sie schon zuvor in Abschnitt 2.3.3 für das LuGre-Reibungsmodell dargelegt wurden. Daher ist es auch hier von Vorteil, das leistungsorientierte Reibungsmodell aus Kapitel 2 zu verwenden, bei dem eine automatische Transformation der Reibungskräfte in Richtung der beiden Freiheitsgrade parallel zur Kontaktfläche erfolgt.

Sollen darüber hinaus reibungsbehaftete Kontakte von Mehrkörpersystemen abgebildet werden, so wird die ohnehin schon aufwändige Modellierung von Kontakten glatter Körper nochmals deutlich umfangreicher. Da die stückweise definierten Kontaktgleichungen der Hertz'schen Federn mit jeder weiteren Beschränkung zu einem exponentiellen Ansteigen der Anzahl an benötigten Modellen führen und die Reibung für jedes dieser Modelle separat angepasst werden muss, wächst der Aufwand sehr schnell an und ist praktisch kaum handhabbar. Daher sind auch in der Literatur nur wenige Beispiele, wie z. B. in [FMM92], für Mehrkörpersysteme mit reibungsbehafteten Kontakten zu finden.

Mit den leistungsbasierten Reibungs- und Kontaktmodellen aus den Kapiteln 2 und 3 stehen allerdings zwei Ansätze zur Verfügung, die für sich selbst gesehen eine deutliche Vereinfachung und Verallgemeinerung der Modellierung der einzelnen Effekte ermöglichen. Wie darüber hinaus erstmalig in [SBD15a] gezeigt wurde, können die beiden Modellierungsansätze zu einem Gesamtmodell zusammengefasst werden, das Kontakte mit Reibung in Ein- und Mehrkörpersystemen abbilden kann. Dabei wird nachfolgend gezeigt, dass die Vorteile der beiden Einzelmodelle erhalten bleiben, da auch hier ein gleichbleibender Formalismus angewendet werden kann, der einfach zu parametrieren ist und zu einem Modell ohne Schaltbedingungen führt.

4.2 Modellierung unilateraler Kontakte mit tangentialer Reibung

Die Kombination von Kontaktmodell und Reibungsmodell erfolgt unidirektional, d.h. die aus den Restriktionsfunktionen resultierenden Normalkräfte zwischen Objekt und Beschränkung beeinflussen das Verhalten der Reibung, wohingegen die Reibungskräfte keinen Einfluss auf die Kontaktkräfte in Normalenrichtung haben. Daher werden beim kombinierten Modellierungsansatz zunächst die Beschränkungen auf Basis der Gleichungen (3.28) und (3.30) des reibungsfreien Kontaktmodells eingeführt und nach Gleichung (3.31) die Normalkräfte der einzelnen Kontaktpunkte hergeleitet. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass die Gleichungen für die Normalkräfte

$$\begin{aligned} F_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q}) \frac{\partial \left(\frac{v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{2} - \frac{\log(\cosh(r_{d,m} v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})))}{2r_{d,m}} \right)}{\partial v_{\perp,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \\ &= \mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q}) F_{c,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

in ihre Faktoren für die Schrankenaktivierungen $\mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q})$ und für die Widerstandskräfte der Beschränkung $F_{c,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ unterteilt werden.

Da die Reibung an einem Punkt m nur im Fall eines aktiven Kontakts einen Einfluss auf das System aufweist, wird zunächst die einheitslose Aktivierungsfunktion aus Gleichung (4.1) mit den einzelnen Summanden der Dissipationsfunktion aus Gleichung (2.18) für viskose Reibung, Coulomb-Reibung und Stribeck-Reibung multipliziert. Das Produkt des viskosen Reibungsterms und $\mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q})$ ergibt somit die kontaktbedingte viskose Dissipationsfunktion

$$\mathcal{D}_{v,m}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q}) \frac{1}{2} d_m v_{\parallel,m}^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (4.2)$$

wobei $v_{\parallel,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ die tangentiale Geschwindigkeit zwischen Objekt und Kontaktpunkt

beschreibt. Des Weiteren erhält man die kontaktbedingten Dissipationsfunktionen für die Coulomb-Reibung

$$\mathcal{D}_{C,m}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q}) \tilde{F}_{\perp,m} v_{C,m} \mu_{C,m} \log \left(\cosh \left(\frac{v_{||,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{v_{C,m}} \right) \right) \quad (4.3)$$

und für die Stribeck-Reibung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{S,m}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & -\mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q}) \tilde{F}_{\perp,m} \left(\mu_{S,m} - \mu_{C,m} \tanh \left(\frac{\hat{v}_{S,m}}{v_{C,m}} \right) \right) \hat{v}_{S,m} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{||,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\hat{v}_{S,m}} \right)^2} \\ & + \mathcal{R}_{a,m} d_m \hat{v}_{S,m}^2 e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{||,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\hat{v}_{S,m}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Das weitere Vorgehen ist nun mit den einzelnen Modellierungsschritten aus Kapitel 2 für das Reibungsmodell mit konstanter Normalkraft identisch. Zunächst werden die einzelnen Reibungseffekte, die durch die Gleichungen (4.2)-(4.4) definiert sind, für alle m Kontakte mit Reibung aufsummiert. Dadurch erhält man die kontaktbedingte Dissipationsfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \sum_m \left(\tilde{F}_{\perp,m} \left(\mu_{C,m} v_{C,m} \log \left(\cosh \left(\frac{v_{||,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{v_{C,m}} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\mu_{S,m} - \mu_{C,m} \tanh \left(\frac{\hat{v}_{S,m}}{v_{C,m}} \right) \right) \hat{v}_{S,m} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{||,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\hat{v}_{S,m}} \right)^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} d_m v_{||,m}^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + d_m \hat{v}_{S,m}^2 e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{||,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\hat{v}_{S,m}} \right)^2} \right) \mathcal{R}_{a,m}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

für das statische Reibungsmodell, die sich im Vergleich zur Dissipationsfunktion aus Gleichung (2.18) zwar deutlich umfangreicher und komplexer darstellt, bei stückweiser Herleitung über die Gleichungen (4.2)-(4.4) aber weiterhin übersichtlich und handhabbar bleibt.

Wird die Dissipationsfunktion aus Gleichung (4.5) nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ abgeleitet, erhält man die Gleichungen für die verallgemeinerten Kräfte, die aber noch von den konstanten Normalkräften $\tilde{F}_{\perp,m}$ abhängen. Ersetzt man nun die Kräfte $\tilde{F}_{\perp,m}$ durch die variablen Widerstandskräfte $F_{c,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ der einzelnen Kontaktpunkte aus Gleichung (4.1), ist die Abhängigkeit der kontaktbedingten statischen Reibung von \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ vollständig beschrieben. Die statischen Reibungskräfte können nun in das LPV-Filter nach Gleichung (2.26) eingesetzt werden, wodurch man die Differentialgleichungen für die kontaktbedingten dynamischen

Reibungskräfte $Q_{\mathcal{R},i}^{\mathcal{D}}$ erhält. Somit ergeben sich für den kombinierten Modellierungsansatz mit unilateralen Kontakten und tangentialer Reibung die erweiterten Lagrange-Gleichungen zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} + Q_{\mathcal{R},i}^{\mathcal{D}} - Q_i^{\mathcal{R}} = Q_i, \quad (4.6a)$$

$$\dot{Q}_{\mathcal{R},i}^{\mathcal{D}} = \frac{1 - e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{F,i}}\right)^2}}{T_{F,i}} \left(\left. \frac{\partial \mathcal{D}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\tilde{F}_{\perp,m} = F_{c,m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} - Q_{\mathcal{R},i}^{\mathcal{D}} \right). \quad (4.6b)$$

Vergleicht man die erweiterten Lagrange-Gleichungen des Gesamtansatzes mit den Gleichungen (2.25a) und (2.26) des reinen Reibungsmodells bzw. der Gleichung (3.30) des Kontaktmodells, so fällt auf, dass die Lagrange-Gleichungen nun sowohl von den verallgemeinerten Kontaktkräften als auch von den dynamischen Reibungskräften abhängen, wobei sich, mit Ausnahme der Abhängigkeit der Dissipationsfunktion von den Normalkräften, keine nennenswerte Änderung des Modellierungsansatzes ergibt. Daher bleiben auch die grundlegenden Eigenschaften des Reibungs- und des Kontaktmodells hinsichtlich Robustheit, Dynamik und Verallgemeinerbarkeit erhalten, die bereits in den Kapiteln 2 und 3 ausführlich diskutiert wurden. Die Evaluation des Gesamtansatzes erfolgt im nachfolgenden Abschnitt anhand von zwei unterschiedlichen Simulationsszenarien für reibungsbehaftete Kontaktprozesse.

4.3 Simulative Evaluation des Kontaktmodells mit Reibung

Die Evaluation der erweiterten Lagrange-Gleichungen für die Modellierung von unilateralen Kontakten mit tangentialer Reibung erfolgt anhand von zwei Simulationsszenarien, die bereits in Abschnitt 3.3 zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens reibungsfreier Kontakte verwendet wurden. In der ersten Simulation in Abschnitt 4.3.1 wird die Anwendbarkeit und das Kontaktverhalten des kombinierten Modells für Mehrkörpersysteme untersucht. Hierfür wird das inverse Doppelpendel um Reibungseffekte erweitert, die während der Gleitphase in Abbildung 3.16 auftreten. In Abschnitt 4.3.2 wird anschließend anhand eines zweiten Szenarios der Einfluss von Reibung auf das dynamische Kontaktverhalten eines dreidimensionalen Objekts mit verteilter Masse evaluiert. Dabei wird erneut das vereinfachte Würfelmodell aus Abbildung 3.21 betrachtet. Die Simulationen der Modelle wurden wiederum in MATLAB unter Verwendung des Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung zur Lösung der Differentialgleichungen durchgeführt. Auf das Simulationsbeispiel für

den Kontakt einer Kugel mit einer Ebene wird nachfolgend verzichtet, da durch die Evaluation des Modellierungsansatzes für verteilte Objekte und Mehrkörpersysteme auch auf die Anwendbarkeit des Ansatzes für Einkörpersysteme geschlossen werden kann.

4.3.1 Mehrkörpersysteme unter Einfluss mehrerer, paralleler Kontakte mit tangentialer Reibung

Für den Nachweis der einfachen Anwendbarkeit und der physikalischen Plausibilität des kombinierten Modellierungsansatzes auf Basis der Restriktions- und Dissipationsfunktionen wird das Modell des inversen Pendels aus Abschnitt 3.3.2 um kontaktbedingte Reibungseffekte erweitert, die aus der relativen Bewegung in x -Richtung zwischen der Masse m_2 des Doppelpendels und dem Boden resultieren. Dadurch wirkt dem Pendel in der Gleitphase von m_2 eine Reibungskraft $F_{R,2}$ entgegen, die das System entsprechend Abbildung 4.1 beeinflusst. Die Reibungseffekte für den Kontakt von m_1 werden hierbei vernachlässigt, da aufgrund der Pendelgeometrie lediglich eine infinitesimale Relativgeschwindigkeit $v_{n,1}$ zwischen der Masse m_1 und der Beschränkung auftreten kann und somit auch die Reibungseffekte keinen nennenswerten Einfluss auf das Systemverhalten aufweisen. Ein erster Modellierungsansatz dieses Szenarios wurde bereits vorab in [SBD15a] veröffentlicht. Dabei wurde das Reibungsmodell jedoch speziell auf das Szenario angepasst, da zum Zeitpunkt der Veröffentlichung noch keine verallgemeinerte Form des kombinierten Ansatzes zur Verfügung stand. Für das nachfolgend vorgestellte Modell wird jedoch der allgemeine Ansatz aus Abschnitt 4.2 verwendet.

Als Ausgangspunkt des Pendelmodells können weiterhin die Gleichungen (3.34) für die kinetischen und potentiellen Energien sowie die Gleichungen (3.35) und (3.36) für die Beschränkung der Massen m_1 und m_2 des reibungsfreien Pendels verwendet werden. Leitet man die daraus resultierende Restriktionsfunktion (A.3) partiell nach

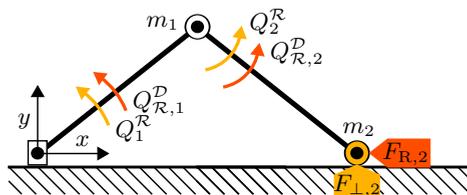


Abbildung 4.1: Inverses Pendel mit kontaktbedingter Reibung

$v_{\perp,2}$ ab, so erhält man Gleichung (A.5b), die die Kontaktkraft $F_{\perp,2} = \mathcal{R}_{a,2}F_{c,2}$ zwischen der Masse m_2 und der Beschränkung beschreibt und deren Faktoren in das statische Reibungsmodell eingesetzt werden können. Als weitere Eingangsgröße in das Reibungsmodell wird zusätzlich die tangentiale Geschwindigkeit

$$v_{\parallel,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\sin(\varphi_1)l_1\dot{\varphi}_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)l_2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \quad (4.7)$$

der Masse m_2 entlang des Bodens hergeleitet. Auf Basis der Aktivierungsfunktion der Kontaktkraft und der tangentialen Geschwindigkeit kann nun die Dissipationsfunktion für den reibungsbehafteten Kontakt aufgestellt werden. Dabei wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die Dämpfungskonstante der viskosen Reibung zu $d = 0$ angenommen. Dies führt zu einer vereinfachten Dissipationsfunktion

$$\mathcal{D}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{R}_{a,2}(\mathbf{q})\tilde{F}_{\perp,2} \left(\mu_C v_C \log \left(\cosh \left(\frac{v_{\parallel,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{v_C} \right) \right) - \left(\mu_S - \mu_C \tanh \left(\frac{\hat{v}_S}{v_C} \right) \right) \hat{v}_S e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\parallel,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\hat{v}_S} \right)^2} \right) \quad (4.8)$$

der im System auftretenden Reibungseffekte. Die vereinfachte Form des kombinierten Modellierungsansatzes ist für solche Anwendungen sinnvoll, bei denen nur geringe Relativgeschwindigkeiten auftreten oder bei denen die Dämpfungskonstante sehr klein ist, da dadurch der Modellierungs- und Rechenaufwand minimiert werden kann. Die hier getroffene Annahme stellt jedoch keine Beschränkung des Ansatzes dar, da das weitere Vorgehen auch für $d \neq 0$ in gleicher Weise erfolgt. Zunächst wird die Gleichung (4.8) partiell nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ abgeleitet, wobei auch hier weiterhin $\mathbf{q} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$ gilt. Anschließend wird die konstante Normalkraft $\tilde{F}_{\perp,2}$ durch die variable Widerstandskraft $F_{c,2}$ aus Gleichung (A.5b) ersetzt und die daraus resultierenden, statischen Reibungskräfte in die Dynamikgleichung (2.26) des LPV-Tiefpassfilters eingesetzt. Dadurch erhält man die Gleichungen (A.7a) und (A.7b) der kontaktbedingten, verallgemeinerten Reibungskräfte $Q_{\mathcal{R},i}^{\mathcal{D}}$, die aufgrund ihres Umfangs in Anhang A.4 zu finden sind.

Darüber hinaus besteht hier auch die Möglichkeit der Berechnung der statischen Reibungskraft $F_{\parallel,2}$ entgegen der tangentialen Geschwindigkeit $v_{\parallel,2}$, die vergleichbar zur Berechnung der Normalkraft bei unilateralen Kontakten ist. Hierfür muss lediglich die Dissipationsfunktion aus Gleichung (4.8) partiell nach $v_{\parallel,2}$ abgeleitet werden, wodurch man die parallel zur Kontaktfläche auftretende, statische Reibungskraft nach Gleichung (A.8) erhält. Diese ist besonders bei der Bewertung der Simulationsergebnisse von Vorteil, da $F_{\parallel,2}$ über die Reibungskoeffizienten mit der Normalkraft $F_{\perp,2}$ korreliert ist und somit direkt bewertet werden kann. Der Zusammenhang zwischen der Normalkraft und den verallgemeinerten Reibungskräften $Q_{\mathcal{R},i}^{\mathcal{D}}$ ist hingegen nicht zwangsläufig offensichtlich.

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
<u>Pendel:</u>			<u>Reibung:</u>		
m_1, m_2	0,10	kg	v_C	0,10	mm/s
l_1, l_2	0,10	m	\hat{v}_S	0,10	mm/s
y_0	0,01	m	v_0	0,01	mm/s
<u>Schranken:</u>			T_1	0,50	ms
$s_{0,1}, s_{0,2}$	10	mm	d	0	Ns/m
$s_{c,1}, s_{c,2}$	6	mm	μ_C	{0;0,18;0,36}	-
$r_{f,1}, r_{f,2}$	400	N	μ_S	{0;0,20;0,40}	-
$r_{d,1}, r_{d,2}$	4	s/m			

Tabelle 4.1: Simulationsparameter des beschränkten Doppelpendels mit Reibung bei einer Abtastzeit von 0,1 ms

Simuliert man nun das Kontaktszenario des reibungsbehafteten Pendels bei gleichbleibenden Startbedingungen $\varphi_{1,0} = \frac{3}{8}\pi$, $\varphi_{2,0} = -\frac{5}{8}\pi$ und $\dot{\varphi}_i = 0$ mit den Parametern aus Tabelle 4.1 und variiert dabei die Reibungskoeffizienten, so erhält man die Ergebnisse, die in Abbildung 4.2 dargestellt sind. Darin erkennt man signifikante Unterschiede in den Trajektorienverläufen, die sich für einen reibungsfreien Kontakt ($\mu_C = 0,0$, $\mu_S = 0,0$), einen Kontakt mit mittlerer Reibung ($\mu_C = 0,18$, $\mu_S = 0,2$) und einen Kontakt mit großer Reibung ($\mu_C = 0,36$, $\mu_S = 0,4$) ergeben. Die Reibungskoeffizienten für mittlere und hohe Reibung sind dabei in der gleichen Größenordnung gewählt, wie sie auch beim Kontakt unterschiedlicher Metalle auftreten können. Die Trajektorien des ersten Szenarios ohne Reibung sind mit den Simulationsergebnissen aus Abschnitt 3.3.2 identisch und werden daher nicht mehr ausführlich diskutiert. Allerdings lassen sich an ihnen die Unterschiede zu den Simulationsergebnissen mit Reibung anschaulich erläutern.

Betrachtet man das Verhalten des Kontakts bei mittlerer Reibung, so sind die Trajektorien für die ersten knapp 0,1 s identisch, da der Einfluss der Reibung erst mit dem Kontakt zwischen der Masse m_2 und dem Boden wirksam wird. Daher sind die Kontaktkräfte $F_{\perp,2}$ während des ersten Aufpralls noch nahezu identisch. Zusätzlich tritt nun allerdings auch eine Reibungskraft $F_{\parallel,2} \approx \mu_C F_{\perp,2}$ auf, die in etwa dem Produkt aus der Normalkraft $F_{\perp,2}$ und dem Gleitreibungskoeffizienten μ_C entspricht und der gleitenden Bewegung auf der Oberfläche entgegenwirkt. Dadurch nimmt während der Gleitphase die Gesamtenergie E_Σ des Systems stetig ab und die Bewegung des Pendels entlang der Koordinaten φ_i wird verlangsamt. Dies führt dazu, dass der Kontakt zwischen m_1 und dem Boden nun zu einem deutlich späteren Zeitpunkt stattfindet als bei einem reibungsfreien Pendel, wodurch auch der Anstieg der Kontaktkraft $F_{\perp,1}$ verzögert erfolgt. Durch das Zurückprallen von m_1 während des Kontakts kommt es zu einem Vorzeichenwechsel bei $v_{i,2}$ und dadurch auch zu einem

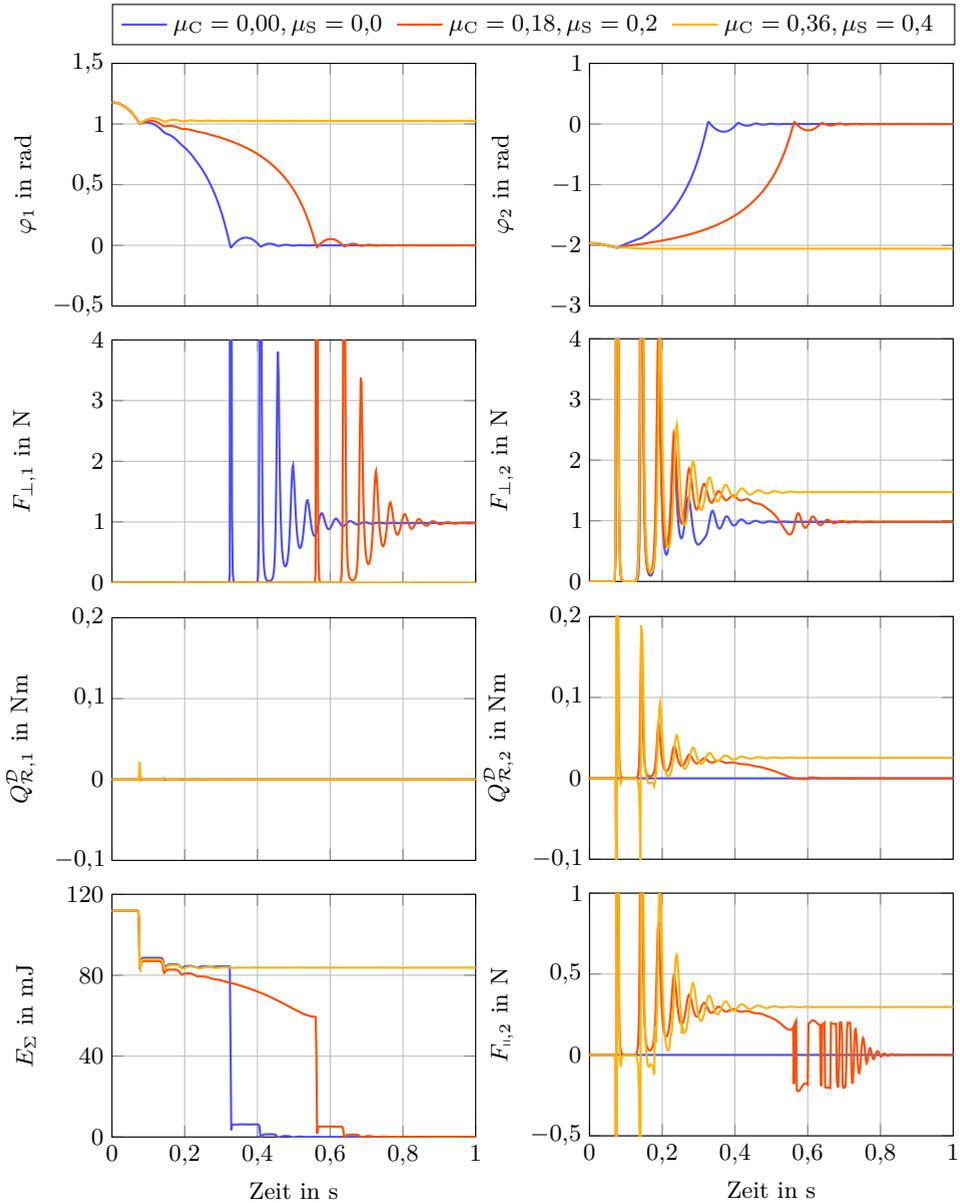


Abbildung 4.2: Simulationsergebnisse des Doppelpendels mit unterschiedlicher Reibung für die Koordinaten φ_i , die Normalkräfte $F_{\perp,i}$, die verallgemeinerten Reibungsmomente $Q_{\mathcal{R},i}^D$, die Gesamtenergie E_{Σ} und die statische Reibungskraft $F_{i,2}$

Vorzeichenwechsel der Reibungskraft. Betrachtet man dabei die verallgemeinerten Reibungskräfte $Q_{\mathcal{R},i}^D$, so scheint es zunächst überraschend, dass sich die Reibung nahezu ausschließlich auf das Moment um die zweite verallgemeinerte Koordinate φ_2 beschränkt. Allerdings lässt sich dies dadurch erklären, dass bei einem Pendel, das sich entsprechend Abbildung 4.1 bewegt, ein identisches kinematisches Verhalten durch eine variable Reibung im Drehgelenk der Masse m_1 erreicht werden kann und φ_2 die Bewegung um ebendieses Gelenk beschreibt. Nachdem das Pendel nach mehreren Stößen zwischen m_1 und der Beschränkung in einen dauerhaften, statischen Kontakt übergeht, erreicht das Pendel mit mittlerer Reibung die gleiche Ruhelage wie das reibungsfreie Pendel.

Betrachtet man nun das gleiche Szenario bei hoher Reibung, so ist das Trajektorienverhalten nur in der initialen Phase der freien Bewegung und während der ersten Stöße zwischen m_2 und dem Boden mit den Ergebnissen der beiden ersten Szenarien vergleichbar. Mit dem Ansteigen der Kontaktkraft $F_{\perp,2}$ tritt auch hier eine Reibungskraft $F_{||,2} \ll \mu_C F_{\perp,2}$ auf, die jedoch deutlich unter dem Produkt aus der Normalkraft und dem Gleitreibungskoeffizienten liegt. Dies ist darin begründet, dass die Kraft $F_{||,2}$, die benötigt wird um ein Gleiten des Pendels entlang der Oberfläche zu verhindern, kleiner ist als die maximale Gleitreibungskraft $\mu_C F_{\perp,2}$. Würde sich die tatsächlich anliegende Reibungskraft nicht auf diesen niedrigeren Wert einpendeln, dann würde die Masse m_2 in ein entgegengesetztes Gleiten übergehen, was jedoch physikalisch nicht zu begründen wäre. Durch das Auftreten der nun statischen Reibungskraft $F_{||,2}$ erreicht das Pendel schon nach ca. 0,2s eine neue Ruhelage, bei der die Masse m_1 dauerhaft in der Luft gehalten wird. Daraus resultiert eine verbleibende, rein potentielle Gesamtenergie E_Σ und die Normalkraft $F_{\perp,1}$ verschwindet. Die Normalkraft $F_{\perp,2}$ ist nun allerdings höher, da neben des Gewichts der Masse m_2 auch ein Teil des Gewichts der Masse m_1 kompensiert werden muss. Der verbleibende Teil der Gewichtskraft wird dabei durch das Lager im Koordinatenursprung aufgenommen.

Fasst man die unterschiedlichen Reibungsszenarien des inversen Doppelpendels zusammen, so konnten für das kombinierte Gesamtmodell bestehend aus verallgemeinerten Restriktions- und Dissipationsfunktionen stets physikalisch plausible Ergebnisse verzeichnet werden, die aufgrund des robusten Modellverhaltens für beliebige Parametrierungen reproduziert werden konnten. Wie am Beispiel des Doppelpendels gezeigt werden konnte, ist der Modellierungsaufwand für Mehrkörpersysteme dabei weiterhin überschaubar, während gleichzeitig viele unterschiedliche interne Kräfte und Momente ermittelt werden können, die zu einem deutlich besseren Verständnis der Kontaktvorgänge beitragen.

4.3.2 Beschränkung dreidimensionaler Objekte mit kontaktbedingter Reibung

In Abschnitt 4.3.1 wurde bereits ein erstes Simulationsbeispiel für den reibungsbehafteten Kontakt eines Mehrkörpersystems mit einer Beschränkung vorgestellt. Allerdings war dabei der Kraftvektor der Reibung stets gleichbleibend entlang der x -Koordinate ausgerichtet. Dadurch kann anstelle des verallgemeinerten Reibungsmodells auch ein alternativer Ansatz wie in [SBD15a] oder auf Basis des LuGre-Modells gewählt werden, da eine Verallgemeinerung der Reibungskräfte nicht zwingend notwendig ist. Im nachfolgenden Simulationsbeispiel wird jedoch erneut das Modell des Würfels aus Abschnitt 3.3.3 betrachtet und um Reibungseffekte in allen acht Ecken des Würfels erweitert. Da sich der Würfel dabei chaotisch über die Ebene bewegt, verändert sich auch die Orientierung der acht Reibungskraftvektoren, wodurch die Anwendung des verallgemeinerten Reibungsmodells aus Kapitel 2 für die Modellierung des Kontaktszenarios notwendig wird. Dabei können auch hier als Ausgangspunkt die Funktionen und Gleichungen des beschränkten Würfels ohne Reibung aus Abschnitt 3.3.3 verwendet werden. Wie bereits beim reibungsbehafteten Kontakt des Doppelpendels wird auch hier aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Einfluss der viskosen Reibung verzichtet und der Dämpfungsterm für alle Eckpunkte zu $d = 0$ gewählt.

Für die Berücksichtigung der Reibung wird zunächst die Restriktionsgleichung (3.44) partiell nach den relativen Geschwindigkeiten $\dot{z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ senkrecht zur Kontaktebene abgeleitet. Dadurch erhält man für die Kontaktkräfte der einzelnen Eckpunkte die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_{\perp,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{R}_{a,i}(\mathbf{q}) F_{c,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \left(\frac{1 - \tanh(r_{t,i}(z_i(\mathbf{q}) - r_{c,i}))}{2} \right) \left(\frac{1 - \tanh(r_{d,i}\dot{z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))}{2} \right) r_{f,i}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Zusätzlich zu den Faktoren der Normalkräfte werden auch die Geschwindigkeiten der einzelnen Kontaktpunkte in der x/y -Ebene benötigt. Diese lassen sich direkt aus den Gleichungen (3.43) der Eckpunkte $\mathbf{P}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ ableiten, wodurch man die zweidimensionalen Geschwindigkeitsvektoren

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} v_{x,i} \\ v_{y,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad}(x_i(\mathbf{q}))\dot{\mathbf{q}} \\ \text{grad}(y_i(\mathbf{q}))\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

erhält. Bildet man nun für die Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v}_i die Standardnorm nach Gleichung (2.17) unter Berücksichtigung des Stabilisierungsterms ϵ , so erhält man für die tangentialen Geschwindigkeiten der Eckpunkte über dem Boden den

Zusammenhang

$$v_{11,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \epsilon \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{v_{x,i}^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + v_{y,i}^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \epsilon^2}. \quad (4.11)$$

Die Geschwindigkeiten $v_{11,i}$ können anschließend zusammen mit den Aktivierungsfunktionen $\mathcal{R}_{a,i}$ aus Gleichung (4.9) in die kontaktbedingte Dissipationsfunktion (4.5) eingesetzt werden. Die daraus resultierende Würfeldissipationsfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^8 \mathcal{R}_{a,i}(\mathbf{q}) \tilde{F}_{\perp,i} \left(\mu_{C,i} v_{C,i} \log \left(\cosh \left(\frac{v_{11,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{v_{C,i}} \right) \right) \right. \\ \left. - \left(\mu_{S,i} - \mu_{C,i} \tanh \left(\frac{\hat{v}_{S,i}}{v_{C,i}} \right) \right) \hat{v}_{S,i} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{11,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\hat{v}_{S,i}} \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

wird nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ abgeleitet und anschließend die konstanten Normalkräfte $\tilde{F}_{\perp,i}$ durch die variablen Widerstandskräfte $F_{c,i}$ aus Gleichung (4.9) ersetzt. Dadurch erhält man die verallgemeinerten, statischen Kontaktkräfte, die abschließend in das LPV-Tiefpassfilter nach Gleichung (2.26) eingesetzt werden, wodurch man die Differentialgleichungen der Reibungen

$$\dot{Q}_{\mathcal{R},j}^{\mathcal{D}} = \frac{1 - e^{-\left(\frac{\dot{q}_j}{\dot{q}_{F,j}}\right)^2}}{T_{F,j}} \left(\left. \frac{\partial \mathcal{D}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} \right|_{\tilde{F}_{\perp,i}=F_{c,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} - Q_{\mathcal{R},j}^{\mathcal{D}} \right) \quad (4.13)$$

in Richtung der verallgemeinerten Koordinaten q_j erhält. Mit der Dynamikgleichung der Reibung (4.13) sowie der Restriktionsgleichung (3.44) und der Lagrange-Funktion (3.45) des Würfels ohne Reibung kann nun nach Gleichung (4.6) das Gesamtmodell des reibungsbehafteten Würfels ohne externe Kräfte \mathbf{Q} aufgestellt werden. Die resultierenden Gleichungen sind auch hier aufgrund der Rotation der Würfecken und der Abhängigkeit der Reibung von den Normalkräften der Kontakte zu umfangreich um noch in adäquater Weise dargestellt werden zu können, sie

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
$\mu_{C,i}$	0,25	-	$v_{C,i}$	0,05	mm/s
$\mu_{S,i}$	0,30	-	$\hat{v}_{S,i}$	0,10	mm/s
d_i	0	Ns/m	$T_{F,j}$	0,1	ms
ϵ	10^{-6}	m/s	$\dot{q}_{F,j}$	0,1	mm/s mrad/s

Tabelle 4.2: Reibungsparameter für den Kontakt eines Würfels mit einer Ebene auf Basis finiter Elemente bei einer Abtastzeit von 0,1 ms

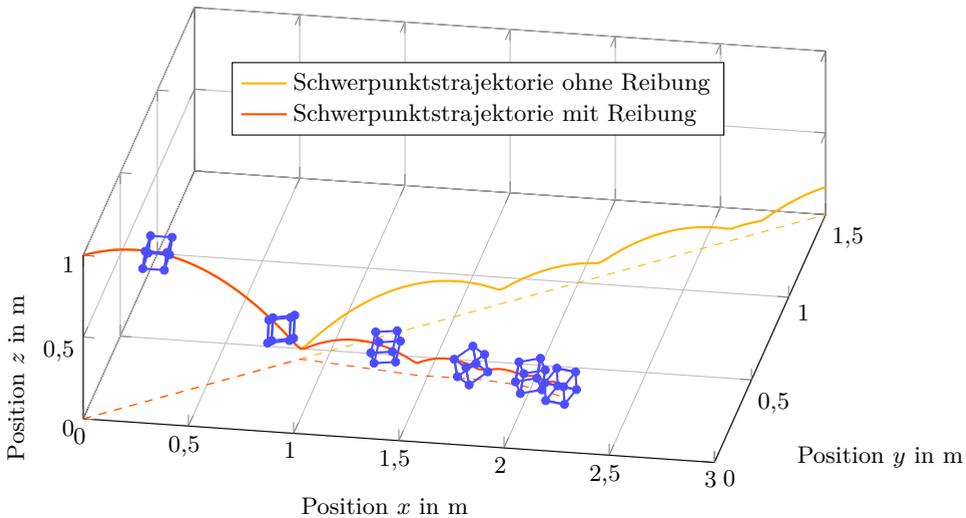


Abbildung 4.3: Vergleich der Schwerpunktstrajektorien und der zugehörigen Projektionen auf die x/y -Ebene für den Kontakt eines Würfels mit und ohne Reibung

können jedoch auf Basis der gegebenen Ansatzfunktionen nachträglich mit Hilfe eines Computer-Algebra-Programms erzeugt werden.

Simuliert man nun das Gesamtmodell mit den Kontakt- bzw. Würfelparametern aus Tabelle 3.4 für den reibungsfreien Kontakt zwischen Würfel und Ebene und den Reibungsparametern aus Tabelle 4.2, so erhält man die Simulationsergebnisse, die in den Abbildungen 4.3 und 4.4 dargestellt sind. Als Anfangsbedingung für die Position des Würfels und dessen Orientierung werden weiterhin die Initialwerte aus Gleichung (3.50a) und für die Geschwindigkeiten die Startwerte aus Gleichung (3.50b) verwendet. Für die Zustände der Reibung werden die Initialwerte zu

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{R},0}^D = [0 \text{ N} \quad 0 \text{ N} \quad 0 \text{ N} \quad 0 \text{ Nm} \quad 0 \text{ Nm} \quad 0,001 \text{ Nm}]^T \quad (4.14)$$

gesetzt. Der letzte Wert wird dabei ungleich null gewählt, da es für den Fall, dass sowohl die Startgeschwindigkeit als auch die initiale Reibung zu null gesetzt werden, zu numerischen Initialisierungsproblemen kommen kann. Diese werden dadurch hervorgerufen, dass aufgrund der fehlenden Reibung keine Änderung der Geschwindigkeit erfolgt und aufgrund der fehlenden Geschwindigkeit keine Änderung der Reibung, da die Werte gegenseitig voneinander abhängen. Für die z -Komponente der translatorischen Geschwindigkeit ist dies nicht notwendig, da hier die Erdbeschleunigung zu einer direkten Veränderung der Geschwindigkeit und somit zu einer Initialisierung des Reibungsmodells führt.

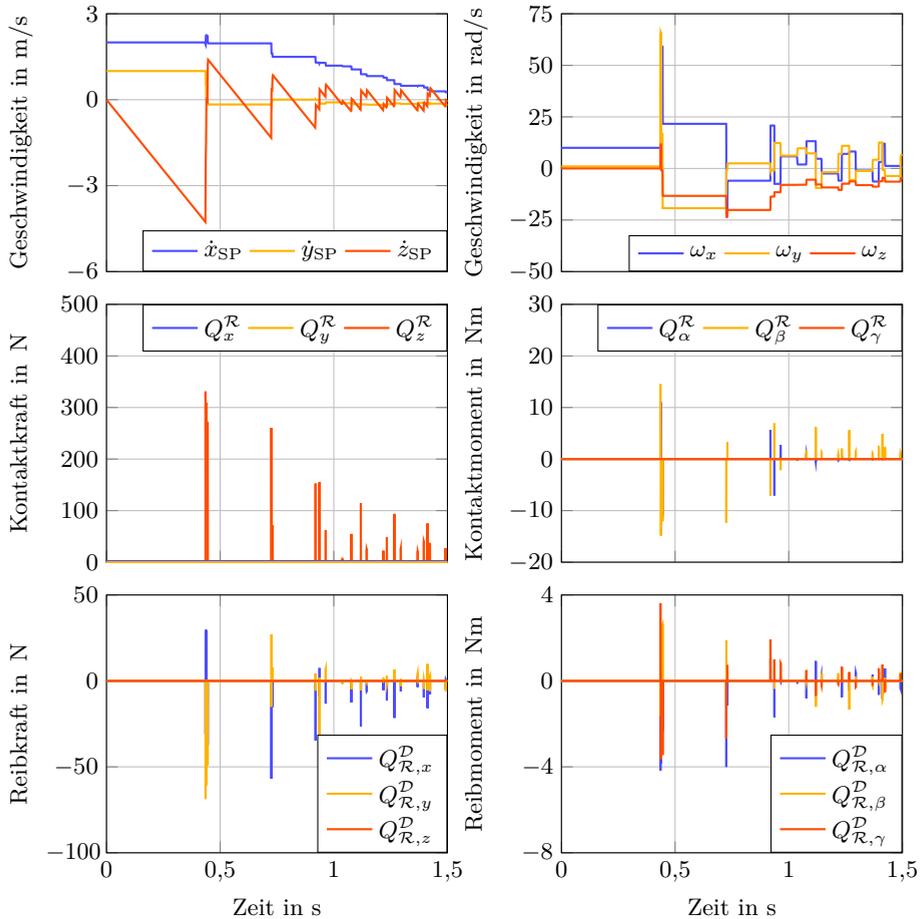


Abbildung 4.4: Verallgemeinerte Geschwindigkeiten \dot{q}_i , Kontaktkräfte Q_i^R und Reibungskräfte Q_i^D für das Simulationsszenario eines Würfels auf einer Ebene

Betrachtet man nun zunächst die Schwerpunkstrajektorie des Würfels in Abbildung 4.3 sowie deren Projektion auf die x/y -Ebene, so wird direkt der Einfluss der Reibung auf die Flugbahn des Würfels ersichtlich. Da die Kontaktkraft nur eine Komponente senkrecht zur Ebene besitzt, bewegt sich der Würfel ohne Reibung mit konstanter Geschwindigkeit in x - und y -Richtung fort, während der Würfel mit Reibung beim ersten Kontakt von seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt wird. Wie in Abbildung 4.4 zu erkennen ist, erfolgt die seitliche Ablenkung auch hier nicht durch die verallgemeinerten Kontaktkräfte Q_x^R bzw. Q_y^R , da diese weiterhin durchgängig

gleich null sind, sondern durch die verallgemeinerten Reibungskräfte $Q_{\mathcal{R},x}^{\mathcal{D}}$ und $Q_{\mathcal{R},y}^{\mathcal{D}}$. Dabei wird ebenfalls deutlich, dass die Reibung in der Ebene keinen Einfluss auf die z -Komponente des Würfels besitzt, da $Q_{\mathcal{R},z}^{\mathcal{D}} \equiv 0$ ist.

Durch die Reibung, die nun während des Kontakts auf den Würfel einwirkt, werden aber nicht nur die tangentialen Geschwindigkeiten \dot{x}_{SP} und \dot{y}_{SP} sukzessive abgebaut und dadurch die zurückgelegte Strecke verringert, sondern es wird auch zusätzlich rotatorische Energie dissipiert. Dies führt einerseits dazu, dass sich die Rotationsgeschwindigkeiten ω_x , ω_y und ω_z durch die Reibung schneller verringern als bei einem Würfel ohne Reibung, andererseits kann dadurch aber auch die Rotationsgeschwindigkeit um die Hochachse durch den bilateralen Energieaustausch zwischen translatorischer und rotatorischer Bewegung kurzzeitig auf Kosten der Sprunghöhe des Würfels ansteigen.

Führt man das gleiche Simulationsszenario mit nur minimal veränderten Startbedingungen \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ oder $Q_{\mathcal{R},0}^{\mathcal{D}}$ durch, so erhält man zum Teil stark abweichende Ergebnisse, da das Würfelmodell mit Beschränkung und Reibung wie ein hochgradig chaotisches System darstellt. Dabei kann es auch zum Fall einer kardanischen Blockade kommen, die in Anhang A.3 für den Fall eines unbeschränkten Würfels ohne Reibung beschrieben wird, hier jedoch nicht weiter diskutiert werden soll. Abgesehen von der kardanischen Blockade erhält man aber auch hier für alle Startbedingungen physikalisch plausible Simulationsergebnisse, die für eine realitätsnahe Approximation der Reibungs- und Kontaktprozesse auf Basis der hier vorgestellten Modelle sprechen.

4.4 Fazit

Wie in diesem Kapitel gezeigt werden konnte, lassen sich die einzelnen Ansätze aus Kapitel 2 zur Modellierung von Reibung bei konstanter Normalkraft und aus Kapitel 3 zur Modellierung reibungsfreier, unilateraler Kontakte unter geringem Aufwand zu einem leistungsorientierten Gesamtansatz zur Modellierung von Kontakten mit Reibung vereinen. Die positiven Eigenschaften hinsichtlich der Robustheit des resultierenden Modells bleiben dabei weiterhin erhalten, da auch das Gesamtmodell lediglich aus stetig differenzierbaren Funktionen besteht. Dadurch kann auch der Gesamtansatz weiterhin im Lagrange-Formalismus verallgemeinert werden, wobei nur wenige zusätzliche Schritte bei der Kombination und Ableitung der Funktionen zu berücksichtigen sind. Diese folgen aber auch hier einem genau vorgeschriebenen Ablauf, wodurch der Modellierungsaufwand für die Ansatzfunktionen weiterhin überschaubar bleibt, wie am Beispiel des reibungsbehafteten Doppelpendels in Abschnitt 4.3.1 für Mehrkörpersysteme und am Beispiel des dreidimensionalen Würfels in Abschnitt 4.3.2 gezeigt werden konnte.

Die resultierenden Differentialgleichungen der Gesamtmodelle sind dabei zwar so umfangreich, dass sie hier nicht mehr sinnvoll dargestellt werden können, es ist jedoch ausreichend die entsprechenden Ansatzfunktionen aufzustellen und daraus mit Hilfe eines Computer-Algebra-Programms die Modellgleichungen ableiten zu lassen. Dadurch bleibt selbst bei der Erstellung komplexester Kontaktmodelle die Fehleranfälligkeit der leistungsbasierten Modellierungsansätze gering. Vergleicht man dies mit dem Vorgehen für Modellierungsansätze auf Basis einer Hertz'schen Feder, bei der jeder reibungsbehaftete Kontakt manuell angepasst werden muss, ist dies ein deutlicher Vorteil des hier vorgestellten Ansatzes.

Die simulierten Ergebnisse, die auf Grundlage der resultierenden Differentialgleichungen erzielt werden konnten, weisen dabei zu jedem Zeitpunkt ein physikalisch plausibles Verhalten auf, sodass von einer guten Approximation der realen Kontaktverhältnisse ausgegangen werden kann. Darüber hinaus kann nicht nur eine Aussage über die verallgemeinerten Kontakt- und Reibungskräfte des Gesamtsystems, sondern auch über die in jedem einzelnen Kontaktpunkt auftretenden Reibungs- und Kontaktkräfte tangential bzw. senkrecht zur Beschränkung getroffen werden. Daher kann abschließend gesagt werden, dass das leistungsbasierte Gesamtmodell für Kontakte mit Reibung als vielseitiges und robustes Werkzeug für die Modellierung von mechanischen Kontaktvorgängen eingesetzt werden kann, das einfach anzuwenden ist und das für die Beschreibung der meisten real auftretenden Anwendungsfälle eine ausreichend genaue Approximation darstellen sollte.

Kapitel 5

Leistungsbasierte Modellierung in der praktischen Anwendung

Die Leistungsfähigkeit der in den Kapiteln 2 bis 4 vorgestellten Ansätze zur Modellierung von Reibung und unilateralen Kontakten wurde bisher nur simulativ untersucht. Die treibende Kraft hinter der Entwicklung der leistungsbasierten und verallgemeinerbaren Kontakt- bzw. Reibungstheorien lag jedoch in einem praktischen Anwendungsfall, der in diesem Kapitel vorgestellt werden soll. Dabei handelt es sich um den Bewegungstrainer MoreGait II, der zur Gangrehabilitation von inkomplett Querschnittgelähmten und Schlaganfallpatienten eingesetzt wird und dessen Dynamik von dominanten Reibungseffekten und mechanischen Beschränkungen zum Schutz des Patienten beeinflusst wird. Der Einfluss auf das kinematische Verhalten des Bewegungstrainers ist dabei so groß, dass die Genauigkeit der zur Regelung benötigten Zustandsschätzung nur unzureichend ist, sofern diese Effekte nicht bereits in der Phase der Modellierung berücksichtigt werden. Um dieses Problem zu lösen, werden die in dieser Arbeit vorgestellten, leistungsbasierten Modellierungsansätze hier erstmalig praktisch angewendet.

Zunächst sollen jedoch in Abschnitt 5.1 der therapeutische Hintergrund sowie der Aufbau und die Funktionsweise des Rehabilitationsroboters erläutert werden. Dabei werden auch die für die Zustandsschätzung problematischen Reibungen und Beschränkungen vorgestellt. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 ein mathematisches Modell des Trainingsgeräts hergeleitet, das sowohl Reibung mit konstanter Kontaktkraft als auch unilaterale Kontakte mit und ohne Reibung beinhaltet. Die unterschiedlichen Ausbaustufen des Modells werden in Abschnitt 5.3 mit einem nichtlinearen Zustandsbeobachter in Form eines Zentralfilterns kombiniert. Die Vor- und Nachteile der jeweiligen Kontakt- und Reibungsmodelle werden anhand von Schätzergebnissen aus der Applikation an einem Labormuster des Gangtrainers vorgestellt und diskutiert, bevor in Abschnitt 5.4 eine abschließende Bewertung der leistungsbasierten Ansätze in der praktischen Anwendung erfolgt.

5.1 Der Bewegungstrainer MoreGait II

Robotergestützte Gangrehabilitation ist ein essentieller Bestandteil bei der therapeutischen Behandlung von Patienten mit neuromuskulären Funktionsstörungen. Folgt man den Ausführungen in [KRL06], liegt dies vor allem daran, dass nur durch ein intensives Training mit einer hohen Anzahl an zyklischen Wiederholungen des Gangmusters eine Verbesserung der Gehfähigkeit erzielt werden kann. Da eine manuelle Unterstützung des Gangtrainings durch physiotherapeutisches Fachpersonal eine äußerst belastende Tätigkeit mit hohem Personalaufwand darstellt, kann eine ausreichende Intensität des Trainings nur bedingt gewährleistet werden. Daher werden Physiotherapeuten in ihrer alltäglichen Arbeit zunehmend durch automatisierte Trainingsgeräte unterstützt, wodurch dem Patienten deutlich längere Trainingseinheiten ermöglicht werden. Dadurch wird sowohl das Personal entlastet als auch die notwendige Trainingsintensität erreicht. In der stationären Rehabilitation der Patienten werden für diesen Zweck meist Großgeräte eingesetzt, die zwar groß, schwer und teuer sind, aber auch einen äußerst positiven Einfluss auf die Regeneration der Gehfähigkeit der Patienten haben. Die Effektivität dieses robotergestützten Gangtrainings konnte auch in Studien, z. B. in [WZR⁺05], nachgewiesen werden.

Im Anschluss an die stationäre Behandlung folgt jedoch meist eine äußerst kritische Phase in der Lokomotionstherapie, da es dem Patienten oft nicht möglich ist, das umfangreiche und intensive Trainingsprogramm ohne maschinelle Unterstützung weiter fortzuführen. Dadurch können die bereits durch das stationäre Training erzielten Fortschritte stagnieren oder im schlimmsten Fall sogar wieder verloren gehen. Daher ist es naheliegend, das maschinell assistierte Gangtraining auf die häusliche Rehabilitationsphase auszuweiten und kompakte, leichte und günstige Rehabilitationsroboter zu entwickeln. Ein erster Ansatz für solch ein kompaktes Heimgerät wurde am Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik der Universität Ulm in Zusammenarbeit mit dem Universitätsklinikum Heidelberg konzipiert und umgesetzt. Anhand einer ersten Kleinserie von Prototypen wurde das in [Kne10] beschriebene Trainingsgerät im Rahmen einer klinischen Studie am Universitätsklinikum Heidelberg auf seine therapeutische Wirksamkeit getestet. Die Studienergebnisse, die in [RPS⁺11] vorgestellt wurden, zeigten dabei, dass die robotergestützte Rehabilitation im Heimbereich bei chronischen Patienten zu einer signifikanten Verbesserung der Gehfähigkeit im Hinblick auf die Ausdauer und die Ganggeschwindigkeit führen kann.

Aufgrund dieser vielversprechenden Ergebnisse wurde ein Nachfolgeprojekt ins Leben gerufen und das Konzept des Bewegungstrainers technisch und ergonomisch überarbeitet. Die für den Antrieb ursprünglich verwendeten pneumatischen Muskeln wurden durch Elektromotoren ersetzt, da diese eine einfachere Handhabung und Wartung ermöglichen. Darüber hinaus wurde auf Patientenwunsch die Kinematik des Trainingsgeräts angepasst, wodurch beim neuen Gerät ein realistischeres Gangbild

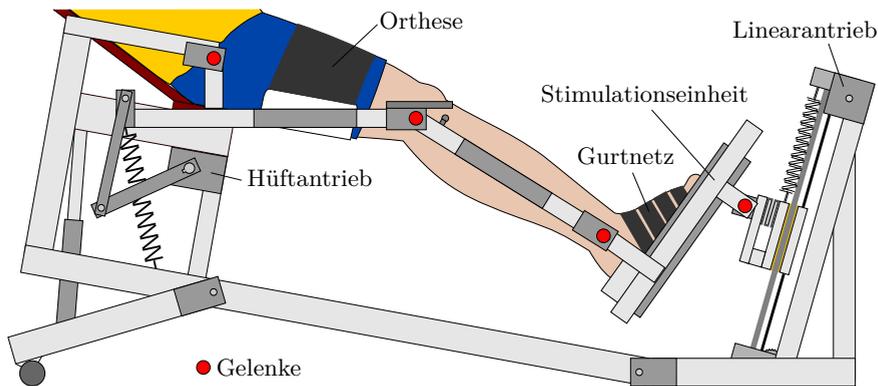


Abbildung 5.1: Skizze des überarbeiteten Bewegungstrainers MoreGait II mit Patient in der Seitenansicht

mit einem raumgreifenden Schritt nachgebildet werden kann. Dadurch hat sich der Aufbau des neuen Trainingsgeräts, der in Abbildung 5.1 skizziert ist, im Vergleich zu den ersten Prototypen aus [Kne10] deutlich verändert. Aus Sicherheitsgründen verbleibt der Patient im Gerät weiterhin in einer halbliegenden Position. Die Beine des Patienten sind dabei über Orthesen und Gurtnetze mit dem Exoskelett des Trainingsgeräts verbunden. Durch die innovative Anordnung der Robotergelenke mit einem zusätzlichen Drehgelenk unterhalb der Fußsohle ist es möglich, mit nur zwei Freiheitsgraden, die durch den Hüftwinkel und die Position des Schlittens auf der Linearführung definiert sind, nahezu natürliche Gelenkwinkeltrajektorien an Hüfte, Knie und Sprunggelenk nachzubilden. Hierfür werden über die elektrischen Antriebe an der Hüfte und der Linearführung vorgegebene Trajektorien abgefahren, die auf Basis von Ganglabordaten für den Bewegungstrainer optimiert wurden. Um dabei kleine und leichte Antriebe verwenden zu können, wird ein Teil der Gewichtskräfte von Exoskelett und Patientenbein durch zusätzliche Spiralfedern kompensiert, wodurch die Antriebe entlastet werden.

Da eine gute Approximation der natürlichen Gangtrajektorien nicht ausreichend ist, um eine ausreichende Anregung der Lokomotionszentren im zentralen Nervensystem zu erzeugen, muss für das motorische Lernen zusätzlich der Druck beim Abrollen des Fußes simuliert werden, der beim Gehen nativ durch die Gewichtskraft auftritt. Durch die halbliegende Position des Patienten kann nur so ein motorisches Lernen auf Basis der Neuroplastizität des Nervensystems erfolgen. Daher besitzt der Bewegungstrainer unterhalb der Fußsohle eine elektromechanische Stimulationseinheit in Form einer Klaviatur, die in [Kne10] auch als Stimulativer Schuh bezeichnet wird. Ein auf diesem Konzept basierendes Labormuster des Bewegungstrainers wird aktuell am Universitätsklinikum Heidelberg anhand von Probandentests auf seine therapeutische Wirksamkeit getestet.

Für die Nachbildung der Gangtrajektorien auf dem Bewegungstrainer wurden im Rahmen des Projekts unterschiedliche Verfahren zur Trajektorienregelung untersucht, die in [Har14; Opp14; SBD14d] beschrieben sind und einen guten Kompromiss zwischen Regelgüte, Robustheit und Patientenkomfort darstellen. Allerdings bildet eine gute Trajektorienregelung in Kombination mit der Simulation des Abrollens des Fußes nur die Basis für eine erfolgreiche Rehabilitation. Da der Patient meist nicht nur motorische, sondern auch sensorische Defizite aufweist und das Heimtraining, anders als die klinische Rehabilitation, nicht von einem Physiotherapeuten überwacht wird, ist eine automatisierte Bewertung der Trainingsleistung und deren Rückmeldung vom Gerät an den Patienten notwendig. Hierfür wurden während des Projekts unterschiedliche Ansätze zur Schätzung der Patientenaktivität und zur Schätzung der Massen der einzelnen Beinsegmente des Patienten untersucht, die in [SBD14b; SBD14c; Zie14] beschrieben sind und als Basis für eine Feedbackmodalität verwendet werden können.

Nachfolgend wird der Bewegungstrainer jedoch lediglich als Anwendungsbeispiel für die in den vorherigen Kapiteln vorgestellten Kontakt- und Reibungsmodelle herangezogen. Erste Ergebnisse für die Verwendung des Reibungsmodells aus Kapitel 2 im Rahmen einer Zustandsschätzung wurden bereits in [SBD14b; SBD14c] vorab veröffentlicht. In Abschnitt 5.3 folgen weitere Ergebnisse für die Zustandsschätzung mit Reibungsmodell und erstmalig auch Ergebnisse für die Verwendung des Kontaktmodells aus Kapitel 3 in Kombination mit einem Zentralfilter, das in Abschnitt 5.3.1 vorgestellt wird. Das dabei verwendete Modell, das im nachfolgenden Abschnitt hergeleitet wird, wird in dieser oder ähnlicher Form auch für alle anderen Anwendungen zur Regelung oder Parameterschätzung am Rehabilitationsroboter MoreGait II verwendet.

5.2 Modellierung des Rehabilitationsroboters

Am mechanischen Aufbau des Bewegungstrainers treten alle in den Kapiteln 2 bis 4 behandelten Kontakt- und Reibungsprozesse auf. Daher wird in diesem Abschnitt schrittweise ein vereinfachtes Gesamtmodell des Rehabilitationsroboters hergeleitet, das sowohl für die Simulation als auch für die Zustandsschätzung verwendet werden kann und dessen erste Ansätze bereits in [SBD13] vorgestellt wurden. Die einzelnen Modellierungsschritte werden dabei exemplarisch für ein Bein des Rehabilitationsroboters durchgeführt, da beide Seiten des Bewegungstrainers baugleich sind und sich die beiden Beine nicht gegenseitig beeinflussen können. Zunächst wird in Abschnitt 5.2.1 unter Verwendung der Lagrange-Gleichungen zweiter Art ein reibungs- und kontaktfreies Basismodell des Rehabilitationsroboters hergeleitet, das anschließend in Abschnitt 5.2.1 um zwei dominante Reibungseffekte, in

Abschnitt 5.2.3 um drei reibungsfreie Kontakte und abschließend in Abschnitt 5.2.4 um einen reibungsbehafteten Kontakt erweitert wird.

5.2.1 Reibungs- und kontaktfreies Basismodell

Das reibungs- und kontaktfreie Basismodell besitzt in der ausführlichsten Darstellung und unter Berücksichtigung des Patienten sechs Freiheitsgrade und eine Vielzahl an Parametern. Entsprechend Abbildung 5.1 sind die Freiheitsgrade durch den Hüftwinkel des Exoskeletts, die Position des Schlittens auf der Linearführung, die Auslenkung des Kraftmessprofils unterhalb der Stimulationseinheit und die drei Gelenkwinkel des Patienten an Hüft-, Knie- und Sprunggelenk definiert. Die Kopplung zwischen Exoskelett und Patientenbein erfolgt hierbei über Feder-Dämpfer-Elemente.

Wie sich jedoch gezeigt hat, kann das vollständige Modell bei Einhaltung ausreichender Genauigkeit im Hinblick auf seine Freiheitsgrade und Parameter deutlich vereinfacht werden. Nimmt man anstelle der Feder-Dämpfer-Kopplungen zwischen Exoskelett und Bein eine steife Kopplung an, so reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei und die Massenparameter der einzelnen Bein- und Exoskelettsegmente können zusammengefasst werden. Aufgrund der geringen Winkelgeschwindigkeiten werden die Trägheitsmomente der einzelnen Segmente vernachlässigt und die verteilten Massen als Punktmassen angenommen. Diese werden anschließend in die Gelenke des Bewegungstrainers verschoben. Somit verbleiben für das Modell des Bewegungstrainers lediglich die drei in Abbildung 5.2 dargestellten, konzentrierten Teilmassen: die Kniegelenkmasse m_{KG} enthält einen Teil der Massen von Ober- und Unterschenkel, die Sprunggelenkmasse m_{SG} einen Teil des Unterschenkels und der Stimulationseinheit bzw. des Fußes und die dritte Masse m_{SL} setzt sich aus der Schlittenmasse und der restlichen Masse der Stimulationseinheit und des Fußes zusammen. Der verbleibende Teil der Oberschenkelmasse, der nicht in m_{KG} eingeht, wird dem Hüftgelenk zugeordnet. Da die Punktmasse im Hüftgelenk jedoch keine translatorische Bewegung aufweist, hat sie keinen Einfluss auf das System und wird daher nicht weiter berücksichtigt. Dieses Vorgehen spart nicht nur weitere Parameter zur Bestimmung der Schwerpunktposition ein, sondern hat auch Vorteile hinsichtlich der Robustheit der Massenschätzung am Bewegungstrainer. Wie bereits in [SBD14c] erläutert wurde, wirkt sich eine ungenaue Schwerpunktposition, wie sie aufgrund der unbekanntenen Physiologie des Patienten zu erwarten ist, nachteiliger auf die Parameterschätzung aus als die Annahme der Schwerpunkte in den Gelenken.

Da die Kraftmessung unterhalb der Stimulationseinheit nur für die Parameterschätzung benötigt wird, diese aber hier nicht weiter betrachtet werden soll, kann auch das Kraftmessprofil als ideal steif angenommen werden, wodurch sich die Anzahl der Freiheitsgrade nochmals reduziert. Unter Berücksichtigung aller vereinfachenden An-

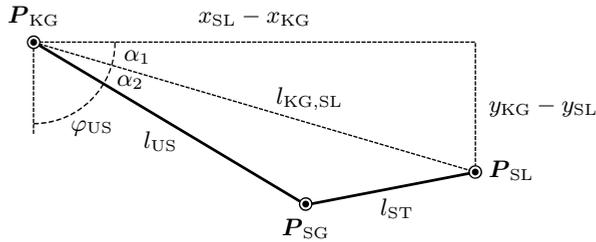


Abbildung 5.3: Berechnung der Sprunggelenkposition \mathbf{P}_{SG} in Abhängigkeit der Positionen von Kniegelenk \mathbf{P}_{KG} und Schlitten \mathbf{P}_{SL}

der Schlittenmasse m_{SL} hängt nur von einer Koordinate ab, da sich der Schlitten lediglich entlang der Linearführung bewegen kann. Sie berechnet sich aus der Steigung δ_{LA} der Linearführung und der Position des Schlittendrehgelenks $\mathbf{P}_{SL,0} = [x_{SL,0}, y_{SL,0}]^T$ im unteren Anschlagpunkt. Die Kopplung der verallgemeinerten Koordinaten erfolgt über die Sprunggelenkmasse m_{SG} . Wie in Abbildung 5.2 ersichtlich ist, besteht hierbei jedoch das Problem, dass mit den vorhandenen Positionen \mathbf{P}_{KG} und \mathbf{P}_{SL} sowie den Längen des Unterschenkels l_{US} und der Stimulationseinheit l_{ST} keine eindeutige Lösung für die Sprunggelenkposition \mathbf{P}_{SG} existiert, da die Schnittpunktberechnungen für die beiden Kreise um \mathbf{P}_{KG} und \mathbf{P}_{SL} stets zwei Lösungen ergeben, die nur in einem Punkt zusammenfallen können.

Da aber aufgrund der mechanischen Beschränkungen des Systems, die nachfolgend in Abschnitt 5.2.3 im Modell berücksichtigt werden, nur eine eindeutige Lösung übrig bleibt, vereinfacht sich die Berechnung von \mathbf{P}_{SG} entsprechend Abbildung 5.3. Hierfür wird zunächst unter Verwendung des Arkustangens der Hilfswinkel

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{y_{KG} - y_{SL}}{x_{SL} - x_{KG}}\right) \quad (5.4)$$

berechnet. Für die Bestimmung des zweiten Hilfswinkels

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{l_{US}^2 + l_{KG,SL}^2 - l_{ST}^2}{2l_{US}l_{KG,SL}}\right) \quad (5.5)$$

wird der Kosinussatz auf die Längen des Unterschenkels l_{US} , der Stimulationseinheit l_{ST} und auf den Abstand

$$l_{KG,SL} = \sqrt{(x_{KG} - x_{SL})^2 + (y_{KG} - y_{SL})^2} \quad (5.6)$$

zwischen Schlitten und Kniegelenk angewendet. Aus den beiden Hilfswinkeln kann

anschließend der Lotwinkel

$$\varphi_{\text{US}} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (5.7)$$

des Unterschenkelprofils ermittelt und somit die Position des Sprunggelenks

$$\mathbf{P}_{\text{SG}} = \begin{bmatrix} x_{\text{SG}} \\ y_{\text{SG}} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{\text{KG}} + \begin{bmatrix} \sin(\varphi_{\text{US}})l_{\text{US}} \\ -\cos(\varphi_{\text{US}})l_{\text{US}} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

berechnet werden. Zusätzlich zu den Massenpositionen werden für die Anwendung des Lagrange-Formalismus auf den Bewegungstrainer auch die Endpositionen der im System verbauten Federn benötigt. Für das Ende der Feder an der Linearführung kann ebenfalls die Position \mathbf{P}_{SL} des Schlittens verwendet werden, da sich diese nur um einen konstanten Offset vom tatsächlichen Angriffspunkt der Feder unterscheidet. Dieser kann direkt in der Schlittenposition $s_{\text{LF},0}$ berücksichtigt werden, an der die Feder entspannt und somit die auf den Bewegungstrainer wirkende Kraft gleich null ist. Die Endposition der Hüftfeder

$$\mathbf{P}_{\text{HF}} = \begin{bmatrix} x_{\text{HF}} \\ y_{\text{HF}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi - \delta_{\text{HF}})l_{\text{HF}} \\ -\cos(\varphi - \delta_{\text{HF}})l_{\text{HF}} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

kann in Abhängigkeit des Hebelarms l_{HF} sowie des Offset-Winkels δ_{HF} berechnet werden.

Basierend auf den Positionen \mathbf{P}_i kann nun der Lagrange-Formalismus auf den Bewegungstrainer angewendet werden. Hierbei wird jedoch nicht der vollständige Formalismus verwendet, sondern lediglich eine vereinfachte Variante ohne Zentrifugal- und Coriolisterme. Der Einfluss dieser Terme auf das System hängt ebenso wie der Einfluss der Trägheitsmomente vor allem von den rotatorischen Geschwindigkeiten des Systems ab. Da diese jedoch sehr gering sind, ist das Vernachlässigen der Terme eine konsequente Weiterführung der vereinfachenden Annahmen, die auch schon zur Reduktion der Parameter getroffen wurden. Somit bleiben lediglich die Vektoren der Potenzialkräfte und die Massenmatrix im Basismodell übrig.

Die Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{q}} \otimes \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{q}}^{\text{T}} m_i + \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{q}} \otimes \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{q}}^{\text{T}} m_i, \quad i \in \{\text{KG}, \text{SG}, \text{SL}\} \quad (5.10)$$

ergibt sich aus dem Kronecker-Produkt \otimes der partiellen Ableitungen der Massenpositionen $\mathbf{P}_i = [x_i, y_i]^{\text{T}}$ nach den verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} multipliziert mit den zugehörigen Massen m_i . Der Potenzialkräftevektor $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_{\text{M}}(\mathbf{q}) + \mathbf{g}_{\text{F}}(\mathbf{q})$ setzt

sich aus zwei Teilen zusammen, dabei beschreibt

$$\mathbf{g}_M(\mathbf{q}) = \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{q}} m_i g \quad (5.11)$$

den Einfluss der Erdbeschleunigung g auf die Massen des Bewegungstrainers und

$$\mathbf{g}_F(\mathbf{q}) = \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{q}}, \quad j \in \{\text{HF}, \text{LF}\} \quad (5.12)$$

den Einfluss der in den Federn gespeicherten potentiellen Energien

$$\begin{aligned} V_{\text{HF}} &= \frac{k_{\text{HF}}}{2} (\|\mathbf{P}_{\text{HF}} - \mathbf{P}_{\text{HF},0}\|_2 - l_{\text{HF},0})^2 \\ &= \frac{k_{\text{HF}}}{2} \left(\sqrt{(x_{\text{HF}} - x_{\text{HF},0})^2 + (y_{\text{HF}} - y_{\text{HF},0})^2} - l_{\text{HF},0} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\text{und } V_{\text{LF}} = \frac{k_{\text{LF}}}{2} (\|\mathbf{P}_{\text{SL}} - \mathbf{P}_{\text{LF},0}\|_2 - l_{\text{LF},0})^2 = \frac{k_{\text{LF}}}{2} (s - s_{\text{LF},0})^2, \quad (5.14)$$

die von den Federkonstanten k_j , den Abständen zwischen den beweglichen Enden der Federn \mathbf{P}_j und den festen Enden $\mathbf{P}_{j,0}$ sowie der Länge $l_{\text{HF},0}$ bzw. der Position $s_{\text{LF},0}$ der ungespannten Federn abhängen. Zusätzlich zu den internen, potentiellen Kräften wirken noch zwei weitere, externe Kräfte auf den Bewegungstrainer ein. Diese werden von den beiden elektrischen Antrieben in Form eines Drehmoments M an der Hüfte und als Kraft F an der Linearführung aufgebracht. Die beiden Antriebskräfte beeinflussen das System exakt in der gleichen Richtung, in der auch die beiden verallgemeinerten Koordinaten definiert sind, somit entsprechen sie den verallgemeinerten Kräften

$$\mathbf{Q} = [M \ F]^T. \quad (5.15)$$

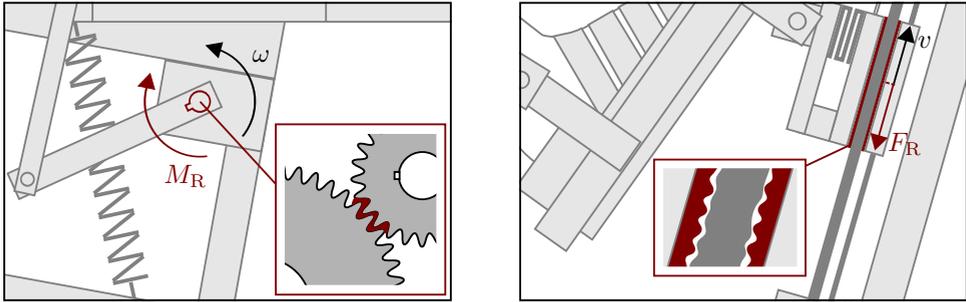
Basierend auf den Termen (5.10)-(5.12) und (5.15) ergibt sich das Computed-Torque-Modell

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}, \quad (5.16)$$

des Rehabilitationsroboters. Dieses kann in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{S0}} = \mathbf{f}_{\text{S0}}(\mathbf{x}_{\text{S0}}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{Q} - \mathbf{g}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

überführt werden, welches die Zustandsraumdarstellung des Basismodells mit den Zuständen $\mathbf{x}_{\text{S0}} = [\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$, den Systemeingängen $\mathbf{u} = \mathbf{Q}$ und den messbaren Ausgängen $\mathbf{y} = \mathbf{q}$ darstellt.



(a) Getriebereibung des Hüftantriebs.

(b) Gleitlagerreibung der Linearführung.

Abbildung 5.4: Dominante Reibungseffekte des Rehabilitationsroboters.

5.2.2 Berücksichtigung dominanter Reibungseffekte

Im Basismodell aus Abschnitt 5.2.1 sind die im System auftretenden Reibungen noch nicht berücksichtigt. Da diese jedoch einen erheblichen Einfluss auf das dynamische Verhalten des Bewegungstrainers aufweisen, wird das Systemmodell S_0 aus Gleichung (5.17) in diesem Abschnitt um die beiden in Abbildung 5.4 dargestellten, dominanten Reibungseffekte der Antriebe erweitert. Das Getriebe des Hüftantriebs und vor allem die Gleitlagerung der Linearführung weisen hohe Reibungen auf, die zum Teil die Kräfte und Momente übersteigen, die notwendig sind, um die Massen des Bewegungstrainers bei den gegebenen Solltrajektorien zu beschleunigen. Die kugelgelagerten Gelenke an Hüfte, Knie, Sprunggelenk und Stimulationseinheit haben hingegen keinen nennenswerten Effekt auf das Systemverhalten und können daher vernachlässigt werden. Wie in den Abbildungen 5.4(a) und 5.4(b) dargestellt wird, hängen die beiden dominanten Reibungseffekte jeweils von nur einer verallgemeinerten Geschwindigkeit ab. Das Reibungsmoment des Getriebes M_R wirkt entgegen der Hüftwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$ und die Reibungskraft an der Linearführung F_R entgegen der Schlittengeschwindigkeit $\dot{s} = v$.

Um die Vorteile des dynamischen Reibungsmodells gegenüber dem statischen Reibungsmodell ohne Tiefpassfilter in der nachfolgenden Zustandsschätzung in Abschnitt 5.3 verdeutlichen zu können, wird das Basismodell zunächst lediglich entsprechend Gleichung (2.20) um die verallgemeinerten, statischen Reibungskräfte erweitert. Dadurch erweitert sich das Computed-Torque-Modell aus Gleichung (5.16) zu

$$M(q)\ddot{q} + g(q) + Q^D(q, \dot{q}) = Q \quad (5.18)$$

mit

$$Q_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i}, \quad (5.19)$$

wobei $\mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ und $Q_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ durch die Gleichungen (A.9) und (A.10) in Anhang A.5 definiert sind. Transformiert man das erweiterte Computed-Torque-Modell aus Gleichung (5.18) in die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}_{S1} = \mathbf{f}_{S1}(\mathbf{x}_{S1}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

mit den Zuständen $\mathbf{x}_{S1} = [\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$, so erhält man die erste Ausbaustufe (S1) des Modells. Die Zustandsgleichungen (5.20) können in Abschnitt 5.3 direkt mit dem Zentralfilter kombiniert werden. Dabei bleiben die Ein- und Ausgänge des Systems zum Basismodell identisch.

Für die nächste Erweiterungsstufe (S2) des Robotermodells müssen lediglich die statischen Reibungskräfte aus Gleichung (A.10) in das LPV-Tiefpassfilter nach Gleichung (2.26) eingesetzt werden, wodurch man die zusätzlichen Differentialgleichungen

$$\dot{Q}_{d,i}^{\mathcal{D}} = \frac{1 - e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{F,i}}\right)^2}}{T_{F,i}} \left(Q_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - Q_{d,i}^{\mathcal{D}} \right) \quad (5.21)$$

für das dynamische Verhalten der Reibungskräfte erhält. Erweitert man nun den Zustandsvektor um die beiden Reibungszustände $Q_{d,i}^{\mathcal{D}}$ zu $\mathbf{x}_{S2} = [\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T \ Q_{d,1}^{\mathcal{D}} \ Q_{d,2}^{\mathcal{D}}]^T$ und ersetzt $\mathbf{Q}^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in Gleichung (5.18) durch den Reibungskraftvektor $\mathbf{Q}_d^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ mit den Dynamikgleichungen (5.21), so kann auch dieses Modell als ein System aus Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_{S2} = \mathbf{f}_{S2}(\mathbf{x}_{S2}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_d^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right) \\ \dot{Q}_d^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

dargestellt werden, wobei auch hier die Ein- und Ausgänge des Systems unverändert bleiben. Somit sind mit den beiden Ausbaustufen S1 und S2 nun zwei Modelle vorhanden, die eine Approximation des realen Trainingsgeräts mit Reibung darstellen und mit einem nichtlinearen Zustandsbeobachter kombiniert werden können. Anhand eines Vergleichs der beiden Modelle werden in Abschnitt 5.3 nochmals die besonderen, positiven Eigenschaften des LPV-gefilterten Reibungsmodells in Kombination mit einem Zustandsbeobachter verdeutlicht, die das statische Reibungsmodell in dieser

Form nicht besitzt. Beide Modelle stellen aber nur dann eine gute Approximation des Geräts dar, wenn das Exoskelett keiner mechanischen Beschränkung unterliegt. Um aber auch diesen Fall abbilden zu können, wird das Modell des Bewegungstrainers mit dynamischer Reibung aus Gleichung (5.22) im nachfolgenden Abschnitt um das Kontaktmodell aus Kapitel 3 erweitert.

5.2.3 Berücksichtigung mechanischer Beschränkungen

In den bisherigen Betrachtungen wurde stets davon ausgegangen, dass sich der Bewegungstrainer innerhalb seiner beiden Freiheitsgrade unbeschränkt bewegen kann. Wie aber bereits in den vorangegangenen Abschnitten erwähnt wurde, ist diese Annahme am Prototypen nicht zutreffend. Am Gerät existieren drei unilaterale Kontakte in Form von mechanischen Anschlägen, bei denen aufgrund der Gerätekinematik keine tangentialen Geschwindigkeiten auftreten. Daher werden diese Kontakte nachfolgend als reibungsfrei angenommen und auf Basis der Restriktionsfunktionen aus Kapitel 3 in das Modell des Bewegungstrainers aufgenommen. Als Alternative für das hier vorgestellte Kontaktmodell wurde in [Peu12] auch die Modellierung der Anschläge anhand eines Zustandsautomaten mit mehreren Modellen untersucht. Dieser Ansatz soll hier jedoch nicht weiter diskutiert werden, da sich ein Umschalten von Modellen mit unterschiedlicher Ordnung nicht oder nur sehr schlecht mit einem Zustandsbeobachter kombinieren lässt.

Der erste mechanische Anschlag des Trainingsgeräts ist in Abbildung 5.5(a) dargestellt. Dieser schützt das Kniegelenk des Patienten während des Trainings vor einer Überstreckung, d.h. einem Abknicken des Kniegelenks entgegen der natürlichen Bewegungsrichtung. Der Knieanschlag ist auch der Grund dafür, dass die Berechnung der Sprunggelenksposition in Abschnitt 5.2.1 von zwei Lösungen auf eine reduziert werden kann. Während des Patiententrainings ist diese Beschränkung auch im Hinblick auf die Modellierung von besonderer Bedeutung, da das Knie während des Trainings nahezu vollständig gestreckt wird. Dies führt in Kombination mit einer nachgiebigen Regelung, wie sie in [SBD14d] vorgestellt wurde, dazu, dass schon durch geringe Störeinflüsse seitens des Patienten der mechanische Anschlag aktiv wird und sich somit auch die Gerätekinematik signifikant verändert. Daher wird bei der praktischen Anwendung in Abschnitt 5.3 besonderes Augenmerk auf diese Beschränkung gelegt.

Um die Restriktionsfunktion für den Knieanschlag aufstellen zu können, muss hier jedoch keine translatorische Bewegung einer Kugel beschrieben werden. Anstelle des Abstands s_{\perp} zwischen Objekt und Beschränkung kann in diesem Fall die Beschränkung in rotatorischen Koordinaten definiert werden. Hierfür wird die Differenz $\Delta\varphi(\mathbf{q}) = \varphi - \varphi_{\text{US}}(\mathbf{q})$ zwischen dem Lotwinkel am Hüftgelenk φ und dem Lotwin-

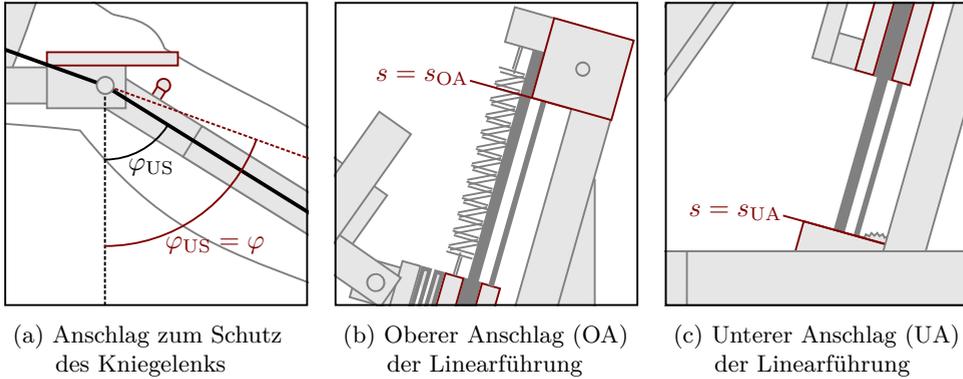


Abbildung 5.5: Mechanische Beschränkungen am Kniegelenk und an der Linearführung des Rehabilitationsroboters

kel des Unterschenkels φ_{US} aufgestellt, der durch Gleichung (5.7) definiert ist. Ist $\varphi > \varphi_{US}(\mathbf{q})$, so befindet sich das Kniegelenk im erlaubten Bewegungsbereich und das Exoskelett unterliegt der Dynamik des unbeschränkten Modells. Zusammen mit der zeitlichen Ableitung der Winkeldifferenz $\Delta\dot{\varphi} = \text{grad}(\Delta\varphi)\dot{\mathbf{q}}$ erhält man somit die Restriktionsfunktion

$$\mathcal{R}_{KA}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left(\frac{1 - \tanh(r_{t,KA}(\Delta\varphi(\mathbf{q}) - r_{c,KA}))}{2} \right) \cdot \left(\frac{\Delta\dot{\varphi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{2} - \frac{\log(\cosh(r_{d,KA}\Delta\dot{\varphi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})))}{2r_{d,KA}} \right) r_{f,KA} \quad (5.23)$$

für den mechanischen Knieanschlag (KA). Die ausführliche Darstellung des Differenzwinkels $\Delta\varphi$ ist durch Gleichung (A.11) in Anhang A.5 gegeben. Da dieser Term bereits sehr groß ist und der Umfang bei der Berechnung der Geschwindigkeit $\Delta\dot{\varphi}$ und der anschließenden Berechnung der verallgemeinerten Kräfte durch die verketteten Ableitungen nochmals deutlich ansteigt, sei hier auf die vollständige Darstellung der Restriktionsfunktion und aller daraus resultierenden Gleichungen verzichtet.

Der zweite mechanische Anschlag ist in Abbildung 5.5(b) und der dritte in Abbildung 5.5(c) dargestellt. Sie definieren das obere bzw. untere Ende der Linearführung und legen somit den Bewegungsraum des Schlittens fest. Da die Reglerdynamik am Schlitten deutlich höher ist als am Hüftgelenk und der Patient entlang der Linearführung weniger Störkräfte aufbringen kann, spielen diese beiden Anschläge in der praktischen Anwendung aber nur eine untergeordnete Rolle. Da beide Beschränkungen nur von der Schlittenkoordinate s und der verallgemeinerten Geschwindigkeit

$v = \dot{s}$ abhängen, ist die daraus resultierende Restriktionsfunktion der Linearführung

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{LF}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1 - \tanh(r_{\text{t,UA}}((s - s_{\text{UA}}) - r_{\text{c,UA}}))}{2} \left(\frac{v}{2} - \frac{\log(\cosh(r_{\text{d,UA}}v))}{2r_{\text{d,UA}}} \right) r_{\text{f,UA}} \\ & + \frac{1 - \tanh(r_{\text{t,OA}}((s_{\text{OA}} - s) - r_{\text{c,OA}}))}{2} \left(-\frac{v}{2} - \frac{\log(\cosh(-r_{\text{d,OA}}v))}{2r_{\text{d,OA}}} \right) r_{\text{f,OA}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

von überschaubarem Umfang. Die zusätzlichen Parameter s_{UA} und s_{OA} in der Aktivierungsfunktion stellen dabei einen zusätzlichen Offset für den unteren bzw. den oberen Anschlag dar, da nach der Definition aus Abschnitt 3.2.1 der Bezugspunkt für den Objektabstand s_{\perp} in der Beschränkungsebene liegen muss. Darüber hinaus gilt es zu beachten, dass die Objektdistanz zum oberen mechanischen Anschlag in entgegengesetzter Richtung zur verallgemeinerten Koordinate definiert ist, daher muss sowohl für den Abstand in der Aktivierungsfunktion als auch für die Geschwindigkeit in der Leistungsfunktion das Vorzeichen gedreht werden.

Summiert man nun die Restriktionsfunktionen des Knieanschlages und der Linearführung auf und leitet die resultierende Gesamtrestriktionsfunktion $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{KA}} + \mathcal{R}_{\text{LF}}$ nach den Geschwindigkeiten \dot{q}_i ab, so erhält man auch hier die verallgemeinerten Kontaktkräfte $Q_i^{\mathcal{R}}$, die zu einer erneuten Erweiterung des Computed-Torque-Modells aus Gleichung (5.18) in der Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_d^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{Q}^{\mathcal{R}} = \mathbf{Q} \quad (5.25)$$

führen. Dadurch verändert sich die Zustandsraumdarstellung des Modells zu

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{S3}} = \mathbf{f}_{\text{S3}}(\mathbf{x}_{\text{S3}}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{Q}_d^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right) \\ \dot{\mathbf{Q}}_d^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

und man erhält die dritte Ausbaustufe des Modells (S3), wobei die Zustände, Eingänge und Ausgänge zur vorherigen Modellstufe S2 unverändert bleiben. Da mit der Berücksichtigung der Restriktionsfunktionen nun auch die mechanischen Beschränkungen im Modell abgebildet werden, resultiert aus dem Kontakt des Exoskeletts mit den Beschränkungen kein Modellfehler mehr, wodurch sich die in Abschnitt 5.3 vorgestellte Zustandsschätzung in diesen Arbeitspunkten deutlich verbessern sollte. Eine weitere Beschränkung des Bewegungstrainers wurde aber bisher noch nicht berücksichtigt, da diese auch zu tangentialer Reibung führt und daher im nachfolgenden Abschnitt gesondert behandelt wird.

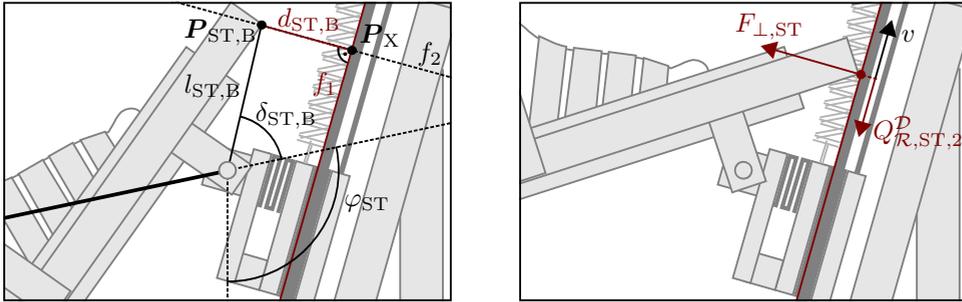


Abbildung 5.6: Mechanische Beschränkung der Stimulationseinheit (ST) mit senkrechter Kontaktkraft $F_{\perp,ST}$ und tangential auftretender Reibung $Q_{R,ST,2}^D$

5.2.4 Modellierung des reibungsbehafteten Kontakts zwischen Stimulationseinheit und Linearführung

Die abschließende Erweiterung des Gesamtmodells umfasst den Sonderfall eines Kontakts mit Reibung nach Abbildung 5.6. Bewegt sich das Knie des Exoskeletts nach oben und der Schlitten wird in seiner aktuellen Position gehalten, so kippt die Spitze der Stimulationseinheit (ST) über das Gelenk unterhalb der Fußsohle in Richtung der Linearführung ab. Dabei kann es zu einem Kontakt zwischen der Stimulationseinheit und der Linearführung kommen. Wird nun der Schlitten auf der Linearführung bewegt, so bewegt sich der Kontaktpunkt der Stimulationseinheit entlang der Linearführung und es entsteht Reibung zwischen den beiden Bauteilen. Dieser Fall soll durch den reibungsbehafteten Kontakt aus Kapitel 4 im Modell berücksichtigt werden. Im ersten Schritt werden daher die Kontaktkräfte zwischen der Linearführung und dem Schuhmodul hergeleitet. Hierfür wird zunächst der Kontaktpunkt P_{ST} der Stimulationseinheit definiert, der in Abhängigkeit der Schlittenposition P_{SL} aus Gleichung (5.3) und der Sprunggelenksposition P_{SG} aus Gleichung (5.8) hergeleitet werden kann. Hierfür wird zunächst der Lotwinkel der Stimulationseinheit

$$\varphi_{ST} = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y_{SL} - y_{SG}}{x_{SL} - x_{SG}}\right) \quad (5.27)$$

berechnet. Zusammen mit dem Offsetwinkel $\delta_{ST,B}$ und der Länge $l_{ST,B}$ erhält man die Koordinaten

$$P_{ST,B} = \begin{bmatrix} x_{ST,B} \\ y_{ST,B} \end{bmatrix} = P_{SL} + \begin{bmatrix} \sin(\varphi_{ST} + \delta_{ST,B}) \\ -\cos(\varphi_{ST} + \delta_{ST,B}) \end{bmatrix} l_{ST,B} \quad (5.28)$$

des beschränkten Kontaktpunkts. Nun muss der Abstand $d_{\text{ST},\text{B}}$ zwischen dem Kontaktpunkt und der Linearführung, die durch die Gerade

$$y = f_1(x) = \tan(\delta_{\text{LF}})x + y_{\text{LF},0} - \tan(\delta_{\text{LF}})x_{\text{LF},0} \quad (5.29)$$

dargestellt wird, berechnet werden, wobei δ_{LF} den Aufstellwinkel und $x_{\text{LF},0}$ bzw. $y_{\text{LF},0}$ den Startpunkt der Linearführung nach Abbildung 5.2 beschreibt. Im nächsten Schritt wird eine zweite Gerade

$$y = f_2(x) = -\frac{1}{\tan(\delta_{\text{LF}})}x + y_{\text{ST},\text{B}} + \frac{x_{\text{ST},\text{B}}}{\tan(\delta_{\text{LF}})} \quad (5.30)$$

senkrecht zur Linearführung definiert, die durch den Kontaktpunkt $\mathbf{P}_{\text{ST},\text{B}}$ verläuft. Aus dem in Abbildung 5.6 dargestellten Schnittpunkt

$$\mathbf{P}_{\text{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\tan(\delta_{\text{LF}})}{1+\tan(\delta_{\text{LF}})} \left(y_{\text{ST},\text{B}} + \frac{x_{\text{ST},\text{B}}}{\tan(\delta_{\text{LF}})} - y_{\text{LF},0} + \tan(\delta_{\text{LF}})x_{\text{LF},0} \right) \\ \frac{\tan^2(\delta_{\text{LF}})}{1+\tan^2(\delta_{\text{LF}})} \left(y_{\text{ST},\text{B}} + \frac{x_{\text{ST},\text{B}}}{\tan(\delta_{\text{LF}})} - y_{\text{LF},0} + \tan(\delta_{\text{LF}})x_{\text{LF},0} \right) + y_{\text{LF},0} - \tan(\delta_{\text{LF}})x_{\text{LF},0} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

der beiden Geraden aus den Gleichungen (5.29) und (5.30) erhält man nun über die Standardnorm der Differenz zwischen dem Kontaktpunkt aus Gleichung (5.28) und dem Schnittpunkt aus Gleichung (5.31) den Abstand

$$d_{\text{ST},\text{B}} = \|\mathbf{P}_{\text{ST},\text{B}} - \mathbf{P}_{\text{X}}\| \quad (5.32)$$

der als Objektabstand $s_{\perp} = d_{\text{ST},\text{B}}$ in die Restriktionsgleichung (3.9) eingesetzt werden kann.

Somit ergibt sich zusammen mit der relativen Geschwindigkeit $v_{\perp,\text{ST}} = \text{grad}(d_{\text{ST},\text{B}})\dot{\mathbf{q}}$ die Leistungsfunktion

$$\mathcal{R}_{\text{ST}} = \left(\frac{1 - \tanh(r_{\text{t,ST}}(d_{\text{ST},\text{B}} - r_{\text{c,ST}}))}{2} \right) \cdot \left(\frac{\text{grad}(d_{\text{ST},\text{B}})\dot{\mathbf{q}}}{2} - \frac{\log(\cosh(r_{\text{d,ST}}\text{grad}(d_{\text{ST},\text{B}})\dot{\mathbf{q}}))}{2r_{\text{d,ST}}} \right) r_{\text{f,ST}} \quad (5.33)$$

für den Kontakt der Stimulationseinheit mit der Linearführung. Hier gilt es jedoch zu beachten, dass der betragsmäßige Abstand zwischen dem Kontaktpunkt und der Linearführung in die Restriktionsfunktion eingeht. Daher müssen die Kontaktparameter hinsichtlich Steifigkeit und Beschränkungsleistung so gewählt werden, dass der Kontaktpunkt die Linearführung nicht überschreitet, da ansonsten ein Vorzeichensprung bei der Geschwindigkeit erfolgt und die Restriktionsfunktion nicht mehr gültig ist. Die Berechnung der verallgemeinerten Kontaktkräfte $\mathbf{Q}_{\text{ST}}^{\mathcal{R}}$ und der

Kontaktkräfte $F_{\perp,ST}$ senkrecht zur Linearführung kann wie bisher über das partielle Ableiten von \mathcal{R}_{ST} nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_i bzw. der relativen Geschwindigkeit $v_{\perp,ST}$ erfolgen. Auf eine Darstellung der vollständigen Gleichungen sei aber auch hier aufgrund deren Umfangs verzichtet.

Da die Normalkraft $F_{\perp,ST}$ am Kontaktpunkt nun bekannt ist und die tangential Kontaktgeschwindigkeit der zweiten verallgemeinerten Geschwindigkeit v entspricht, ist das Aufstellen der Dissipationsfunktion für die Reibung ohne großen Aufwand möglich. Auch hier wird auf eine Berücksichtigung der viskosen Reibung verzichtet, wodurch das weitere Vorgehen mit den einzelnen Schritten bei der Modellierung des Pendels und des Würfels in Kapitel 4 identisch ist. Leitet man die kontaktbedingte Dissipationsfunktion

$$\begin{aligned} D_{ST}^{\mathcal{R}} = & \mathcal{R}_{a,ST} \tilde{F}_{\perp,ST} \left(\mu_{C,ST} v_{C,ST} \log \left(\cosh \left(\frac{v}{v_{C,ST}} \right) \right) \right. \\ & \left. - \left(\mu_{S,ST} - \mu_{C,ST} \tanh \left(\frac{\hat{v}_{S,ST}}{v_{C,ST}} \right) \right) \hat{v}_{S,ST} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_{S,ST}} \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

partiell nach \dot{q}_i ab und ersetzt die konstante Normalkraft $\tilde{F}_{\perp,ST}$ durch die variable Widerstandskraft der Beschränkung $F_{c,ST}$, so erhält man für die statischen Reibungskräfte

$$Q_{\mathcal{R},ST,1}^{\mathcal{D}} = 0, \quad (5.35a)$$

da keine Abhängigkeit von ω besteht, und

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{R},ST,2}^{\mathcal{D}} = & F_{\perp,ST} \left(\mu_{C,ST} \tanh \left(\frac{v}{v_{C,ST}} \right) \right. \\ & \left. + \left(\mu_{S,ST} - \mu_{C,ST} \tanh \left(\frac{\hat{v}_{S,ST}}{v_{C,ST}} \right) \right) \frac{v}{\hat{v}_{S,ST}} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_{S,ST}} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.35b)$$

Der statische Reibungskraftvektor $\mathbf{Q}_{\mathcal{R},ST}^{\mathcal{D}}$ beeinträchtigt die Dynamik des Gesamtmodells in gleicher Weise wie die statischen Reibungskräfte $\mathbf{Q}_i^{\mathcal{D}}$ mit konstanter Normalkraft, wodurch sich die Differentialgleichungen (5.21) des Reibungsmodells zu

$$\dot{Q}_{d,\mathcal{R},i}^{\mathcal{D}} = \frac{1 - e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{F,i}}\right)^2}}{T_{F,i}} \left(Q_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + Q_{\mathcal{R},ST,i}^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - Q_{d,i}^{\mathcal{D}} \right) \quad (5.36)$$

erweitern. Berücksichtigt man neben den angepassten Reibungskräften auch die zusätzlichen Kontaktkräfte in den Modellgleichungen, so erhält man für die mathe-

matische Darstellung des Trainingsgeräts das vollständige Computed-Torque-Modell

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_{d,\mathcal{R}}^D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{Q}^{\mathcal{R}} - \mathbf{Q}_{ST}^{\mathcal{R}} = \mathbf{Q} \quad (5.37)$$

und die daraus resultierende Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}_{S4} = \mathbf{f}_{S4}(\mathbf{x}_{S4}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Q}_{ST}^{\mathcal{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{Q}_{d,\mathcal{R}}^D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{d,\mathcal{R}}^D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

für die vollständige Modellausbaustufe (S4) mit weiterhin unveränderten Zuständen und Ein-/Ausgängen im Vergleich zur Modellstufe S3.

Die Modellstufe S4 berücksichtigt alle signifikanten Einflüsse, die die Gerätedynamik während des Trainingsbetriebs beeinflussen können, wobei alle in den Kapiteln 2 bis 4 vorgestellten Kontaktprozesse eine praktische Relevanz besitzen. Daher ist dieses Modell besonders als Referenz für die simulative Evaluation unterschiedlicher Regelungsansätze, z. B. [Har14; Opp14; SBD14d], und Parameterschätzalgorithmen, z. B. [SBD14c; Ziel14], geeignet, da hierbei die Robustheit und Schätzgüte bei aktiven Beschränkungen und hochgradig nichtlinearen Reibungseinflüssen vorab getestet werden kann. Auf eine simulative Auswertung des in diesem Abschnitt vorgestellten Modells und dessen einzelner Erweiterungsstufen wird hier jedoch verzichtet, da die Leistungsfähigkeit der leistungsbasierten Kontakt- und Reibungsmodelle bereits in den Kapiteln 2 bis 4 ausgiebig gezeigt wurde und die Simulationsergebnisse keinen zusätzlichen Informationsgewinn liefern. Alternativ werden im nachfolgenden Abschnitt aber die Erweiterungsstufen S1 bis S3 des Modells am realen Prototyp in Kombination mit einem nichtlinearen Zustandsbeobachter getestet. Das vollständige Modell aus Gleichung (5.38) kann dabei jedoch nicht evaluiert werden, da der Kontakt zwischen dem Metallgehäuse der Stimulationseinheit und den Gleitschienen der Linearführung zu einer dauerhaften Beschädigung der Gleitlager führen würde.

5.3 Zustandsschätzung am Rehabilitationsroboter

Die Leistungsfähigkeit und Vielseitigkeit der neuen Modellierungsansätze für Reibungs- und Kontaktprozesse wurde für Simulationszwecke bereits ausführlich in den jeweiligen Kapiteln demonstriert, daher steht in diesem Abschnitt der praktische Nutzen der leistungsbasierten Modellierungsverfahren im Vordergrund. Hierfür werden sukzessive die Ergebnisse der Zustandsschätzung aus der Applikation der unterschiedlichen Modellstufen S1 bis S3 mit einem nichtlinearen Beobachter vorgestellt, die an dem in



Abbildung 5.7: Prototyp des Rehabilitationsroboters MoreGait II

Abbildung 5.7 dargestellten Labormuster des Bewegungstrainers durchgeführt wurde. Zunächst werden die Ergebnisse unter Verwendung des statischen Reibungsmodells mit den Ergebnissen auf Basis des dynamischen Reibungsmodells verglichen und die jeweiligen Vorteile herausgearbeitet. Anschließend wird die Verbesserung der Zustandsschätzung bei zusätzlicher Berücksichtigung der mechanischen Kontaktmodelle verdeutlicht. Auf eine Zustandsschätzung unter Verwendung des Basismodells S_0 und des Gesamtmodells wird hierbei verzichtet, da einerseits aufgrund der sehr hohen Reibungskräfte die Diskrepanz zwischen dem Basismodell und dem realen System zu groß ist, um sinnvolle Schätzwerte zu erhalten und andererseits ein Kontakt zwischen der Stimulationseinheit und der Linearführung zu Schäden am Gerät führen kann.

Bevor jedoch in den Abschnitten 5.3.2 und 5.3.3 der Versuchsaufbau und die resultierenden Ergebnisse beschrieben und bewertet werden, wird im folgenden Abschnitt zunächst das Zentralfilter (engl.: central difference Kalman filter, CDKF) vorgestellt, das auf Basis der Modelle S_1 bis S_3 aus dem gemessenen Hüftwinkel und der Schlittenposition die zugehörigen Geschwindigkeiten und Reibungen im Zustandsvektor schätzt.

5.3.1 Das Zentralfilter

Für die Zustandsschätzung am Bewegungstrainer wird ein Zentralfilter verwendet, das zur Klasse der Sigma-Punkt-Kalman-Filter (SPKF) gehört. Anders als beim Erweiterten Kalman-Filter (EKF) ist für die Zustandsschätzung mit einem SPKF keine partielle Ableitung der Systemfunktionen erforderlich, da für die Schätzung neben dem Erwartungswert der Zustände auch Stichproben um den Arbeitspunkt herum ausgewertet werden. Dabei folgt der Ablauf der klassischen Prädiktor-Korrektor-Struktur des Kalman-Filters, allerdings mit dem Unterschied, dass die endgültige Schätzung über den gewichteten Mittelwert der einzelnen Stichproben erfolgt. Die Menge aller Stichproben inklusive des Erwartungswerts werden entsprechend dem Symbol für die Standardabweichung auch als Sigma-Punkte bezeichnet. Die Verwendung eines Sigma-Punkt-Filters ist hier besonders im Hinblick auf die umfangreichen Modellgleichungen des Bewegungstrainers von Vorteil, da die Kontakt- und Reibungsmodelle sehr steife Systemeigenschaften darstellen, die bei einer partiellen Ableitung zu numerischen Problemen führen können. Die Verwendung eines EKF wäre aber aufgrund der für das Modell verwendeten, stetig differenzierbaren Leistungsfunktionen prinzipiell möglich. Folgt man den Ausführungen in [Fox07], erreicht man darüber hinaus mit SPKF eine genauere Schätzung von Mittelwert und Kovarianz der Zustände als bei der Verwendung eines EKF erster Ordnung. Der Rechenaufwand der beiden Ansätze ist dabei in etwa gleich groß.

Das bekannteste Filter unter den SPKF ist das Unscented-Kalman-Filter (UKF), das erstmalig in [JUD95] vorgestellt wurde. Die Verteilung der $2n+1$ Sigma-Punkte erfolgt beim UKF nach stochastischen Gesichtspunkten, wobei die Stichproben symmetrisch um den Erwartungswert der n zu schätzenden Zustände gelegt werden. Die Streuung der Punkte erfolgt dabei in Abhängigkeit der gewichteten Kovarianz. Dadurch liegen alle Sigma-Punkte auf einem skalierten Ellipsoid um den Erwartungswert. Durch die Unscented-Transformation (engl.: unscented transform) können in jedem Abtastschritt die Änderungen des Erwartungswerts und der Kovarianz der stochastischen Variablen x geschätzt werden, obwohl diese einer nichtlinearen Transformation durch die Modellgleichungen unterliegen. Für eine ausführliche Erläuterung des UKF inklusive der Beschreibung unterschiedlicher Implementierungsformen sei hier jedoch auf die weiterführende Literatur verwiesen, insbesondere auf [Fox07; Mer04]. Das UKF wurde ebenfalls an einem Labormuster des Rehabilitationsroboters implementiert und getestet und zur Zustandsschätzung für eine iterativ lernende Regelung verwendet. Sowohl die Implementierung des Filters als auch die Regelung werden in [Opp14] erläutert. Für die meisten praktischen Anwendungen am Bewegungstrainer, die u.a. in [SBD14b; SBD14c; SBD14d] beschrieben sind, wird allerdings das im Folgenden vorgestellte CDKF verwendet. Zwar ist die Genauigkeit der Schätzergebnisse von UKF und CDKF am Trainingsgerät nahezu identisch, was auch den Beobachtungen bei anderen praktischen Anwendungen entspricht, die z. B. in [Pie10; SRH⁺07]

beschrieben werden, allerdings ist die Parameteranzahl beim CDKF geringer und die Verteilung der Sigmapunkte im Gegensatz zum UKF physikalisch begründet, wodurch die Wahl für die hier beschriebene Anwendung auf das CDKF fiel.

Das Zentralfilter wurde nahezu zeitgleich von zwei unterschiedlichen Forschergruppen in [IX00] und [NPR00] propagiert. Der strukturelle Aufbau des CDKF ist nahezu identisch zum UKF und unterscheidet sich im Wesentlichen nur durch die Verteilung der Sigmapunkte. Zwar existieren für das UKF Vorgaben zur Parametrierung, die eine geeignete Wahl der Gewichte für die Skalierung der Kovarianzen ermöglichen und die auch zu einem sehr guten Ergebnis bei der Schätzung der Zustände führen, folgt man allerdings den Ausführungen in [Fox07], so ist es äußerst schwierig zu begründen, dass die Verteilung der Sigmapunkte sinnvoll ist. Beim CDKF stellt sich diese Frage hingegen nicht, da die Lage der Sigmapunkte schon bei der Herleitung des Ansatzes physikalisch begründet wird. Die Idee des CDKF besteht darin, dass die Ableitungen der Modellgleichungen durch einen Differenzenquotienten mit endlichem Intervall h approximiert werden können. Der Differenzenquotient wird dabei, ähnlich der Wahl der Sigmapunkte beim UKF, symmetrisch um den Arbeitspunkt gewählt. Somit erhält man für die Näherung einen Zentralfilterquotienten, aus dem auch der Name des Filters hervorgeht. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Modellgleichungen auf Basis von Polynomen der Ordnung $2n$ ausreichend genau approximiert werden können. Im Filteralgorithmus nach [NPR00] wird für die Polynominterpolation der Taylorreihe die Formel nach Stirling verwendet und für mehrdimensionale Fälle erweitert. Das CDKF folgt also bei der Verteilung der Sigmapunkte der Idee des EKF, allerdings wird die analytische Ableitung durch eine numerische Ableitung der Modellgleichungen ersetzt. Geht man dabei von einem Filterproblem mit Gauß-Verteilung aus, so kann gezeigt werden, dass die Approximationsgenauigkeit durch die Stirling-Interpolation höher ist als bei der Verwendung des linearen Glieds der Taylor-Reihe, wie es beim EKF der Fall ist. Darüber hinaus wird in [Fox07] beschrieben, dass bei einer Gauß-Verteilung und entsprechender Wahl der Gewichte des UKF die Mittelwertberechnung des UKF und des CDKF ein identisches Ergebnis liefern. Für die exakten mathematischen Erläuterungen und Beweise der einzelnen Aussagen sei aber auch hier auf das Standardwerk [Mer04] oder auf [Fox07] verwiesen, in denen auch die unterschiedlichen Implementierungsformen für die Zustandsschätzung und die Parameterbestimmung dargelegt werden.

Der Algorithmus des verwendeten Zentralfilters entspricht der Wurzelimplementierung nach [Mer04]. Lediglich der letzte Teil des Korrekturschritts ist dem Algorithmus nach [Fox07] entnommen. Im Gegensatz zur Standardform hat die Wurzelimplementierung des CDKF den Vorteil, dass die Berechnung der Zustandskovarianz direkt in der Cholesky-zerlegten Form stattfinden kann. Diese ist aus numerischer und programmieretechnischer Sicht besser zu implementieren und führt daher sowohl zu einem geringeren Rechenaufwand als auch zu einem robusteren Algorithmus, wobei die Genauigkeit nur unmerklich kleiner wird. Gemäß den Ausführungen in [Mer04] ist

die Wurzelform daher stets der Standardform vorzuziehen. Da die Implementierung des CDKF auf einer diskreten Beschreibung des Systemverhaltens beruht, wurde der Algorithmus um ein Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung ergänzt, wodurch das Filter auch in Kombination mit den kontinuierlichen Modellgleichungen aus Abschnitt 5.2 verwendet werden kann. Die einzelnen Prädiktions- und Korrekturschritte des Algorithmus samt Sigmoidpunkt-Berechnung und Runge-Kutta-Verfahren des hier verwendeten Zentralfilterns sind in Anhang B dargestellt und wurden in dieser Form auch für alle nachfolgenden Zustandsschätzungen verwendet.

5.3.2 Implementierung und Versuchsaufbau

Für die Zustandsschätzung am Rehabilitationsroboter MoreGait II muss zunächst das nichtlineare Zentralfilter aus Abschnitt 5.3.1 auf der Regler-Hardware des in Abbildung 5.7 dargestellten Labormusters implementiert werden. Diese besteht aus einem Industrie-PC (IPC) mit x86-Architektur und einer Taktfrequenz von 500 MHz. Als Betriebssystem wird für den Rechner ein Echtzeit-Linux mit preempt-Kernel verwendet, der eine Abtastzeit von 10 ms aufweist. Der Rechner kommuniziert über zwei unabhängige CAN-Schnittstellen für das linke und das rechte Bein mit je zwei unterlagerten Steuerungen. Diese messen einerseits die aktuellen Winkel bzw. Positionen an Hüfte und Linearführung und regeln andererseits die Momente bzw. Kräfte an den elektrischen Antrieben ein, die in den Modellen des Trainingsgeräts als Ein- und Ausgänge verwendet werden. Die Einregelzeiten für die Antriebsmomente sind dabei deutlich kleiner als die Abtastzeit des Echtzeitbetriebssystems, wodurch die Stellglieder als ideal angenommen werden können.

Für die Implementierung der unterschiedlichen Varianten des Zustandsschätzers auf der gegebenen Hardware werden die Modellgleichungen (5.20), (5.22) und (5.26) aus Abschnitt 5.2 mit dem CDKF kombiniert. Die Vorhersage der Zustände im Prädiktionsschritt erfolgt dabei auf Basis des Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung. Die Modellstufe S1 mit statischer Reibung besitzt zwar mit $n = 4$ eine kleinere Systemordnung als die Modelle mit dynamischer Reibung S2 und S3, für die $n = 6$ gilt, allerdings stellt dies für die Anwendung des Zentralfilterns keine Einschränkung dar, da die generische Implementierung des CDKF für beliebige Systemordnungen verwendet werden kann. Die notwendigen Berechnungen der QR- und Cholesky-Zerlegungen zur Aktualisierung der Kovarianzen erfolgen unter Verwendung der GNU Scientific Library (GSL). Die GSL ist eine frei verfügbare und plattformunabhängige Bibliothek für numerische Funktionen und ermöglicht aufgrund der effizienten Berechnungsverfahren eine schnelle Ausführung der notwendigen Zerlegungen. Dadurch bleibt selbst bei Zustandsschätzungen auf Basis der Modelle sechster Ordnung die Rechenlast stets kleiner zehn Prozent.

Da die Modelle für die Zustandsschätzung unterschiedliche Systemordnungen aufweisen, müssen die Kovarianzmatrizen des Prozessrauschens ebenfalls entsprechend angepasst werden. Als Ausgangspunkt für die Wahl der Kovarianzen des Modellrauschens wurde hier das Prozessrauschen für konstante Geschwindigkeiten

$$\mathbf{Q}_P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{2}T^3 \\ \frac{1}{2}T^3 & T^2 \end{bmatrix} \sigma^2 \quad (5.39)$$

verwendet, da die Abtastzeit T der Hardware deutlich kleiner ist als die Zeitkonstanten des Modells und sich dadurch die Geschwindigkeiten zwischen zwei Abtastschritten nur wenig verändern. Bei direkter Verwendung von \mathbf{Q}_P kann es jedoch bei der Cholesky-Zerlegung im CDKF zu Problemen kommen, da \mathbf{Q}_P positiv semidefinit ist und bei der numerischen Berechnung der Matrixeigenwerte durch Rundungsfehler einer der beiden Werte anstelle von null einen sehr kleinen Wert annimmt, der negativ sein kann. Dies führt zu einem fehlerhaften Verhalten bei der durch die GSL zur Verfügung gestellten Cholesky-Zerlegung. Daher wird für die Anwendung auf die Kopplungsterme zwischen den Zuständen verzichtet, wodurch sich für das Modell mit statischer Reibung das Prozessrauschen zu

$$\mathbf{Q}_{P,\text{st}} = \text{diag} \left(\frac{1}{4}T^4\sigma_1^2, \quad T^2\sigma_1^2, \quad \frac{1}{4}T^4\sigma_2^2, \quad T^2\sigma_2^2 \right) \quad (5.40)$$

und für das Modell mit dynamischer Reibung zu

$$\mathbf{Q}_{P,\text{d}} = \text{diag} \left(\frac{1}{4}T^4\sigma_1^2, \quad T^2\sigma_1^2, \quad \frac{1}{4}T^4\sigma_2^2, \quad T^2\sigma_2^2, \quad 1 \text{ Nm}^2, \quad 100 \text{ N}^2 \right) \quad (5.41)$$

ergibt. Der Parameter σ aus Gleichung (5.39) wurde dabei in beiden Fällen zu $\sigma_1 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ bzw. $\sigma_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gewählt. Diese Wahl entspricht der jeweiligen Größenordnung der maximal auftretenden Beschleunigung an der Hüfte bzw. an der Linearführung. Die beiden zusätzlichen Terme für die Kovarianzen der dynamischen Reibungsprozesse wurden anschließend empirisch bestimmt.

Ebenso wie bei $\mathbf{Q}_{P,i}$ muss auch die Initialisierung der Zustandskovarianz angepasst werden. Hierfür werden für die beiden Modellordnungen die Diagonalmatrizen

$$\mathbf{P}_{0,\text{st}} = 10^{-6} \text{diag} \left(1 \text{ rad}^2, \quad 1 \text{ rad}^2/\text{s}^2, \quad 1 \text{ m}^2, \quad 1 \text{ m}^2/\text{s}^2 \right), \quad (5.42)$$

$$\mathbf{P}_{0,\text{d}} = 10^{-6} \text{diag} \left(1 \text{ rad}^2, \quad 1 \text{ rad}^2/\text{s}^2, \quad 1 \text{ m}^2, \quad 1 \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad 1 \text{ Nm}^2, \quad 1 \text{ N}^2 \right) \quad (5.43)$$

verwendet, wobei das Modell mit dynamischer Reibung entsprechend zwei Einträge mehr besitzt. Im Gegensatz zu den Zuständen bleiben die gemessenen Systemausgänge aber unverändert und es kann für alle Modelle

$$\mathbf{R}_M = 10^{-6} \text{diag} \left(15 \text{ rad}^2, \quad 4 \text{ m}^2 \right) \quad (5.44)$$

gewählt werden.

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
<u>Basismodell:</u>			$x_{SL,0}$	0,840	m	\hat{M}_C	4,0	Nm
l_{OS}	0,414	m	$y_{SL,0}$	-0,530	m	ω_C	0,1	rad/s
l_{US}	0,390	m	δ_{SL}	1,222	rad	d_ω	0,0	Nms/rad
l_{ST}	0,260	m	$s_{LF,0}$	0,522	m	$\dot{q}_{F,1}$	0,1	rad/s
m_{KG}	2,000	kg	k_{LF}	183,0	N/m	$T_{F,1}$	0,2	s
m_{SG}	5,700	kg	<u>Reibungsmodell:</u>			$\dot{q}_{F,2}$	0,1	m/s
m_{SL}	6,400	kg	\hat{F}_S	45,0	N	$T_{F,2}$	0,2	s
$x_{HF,0}$	-0,161	m	\hat{v}_S	0,2	m/s	<u>Knieanschlag:</u>		
$y_{HF,0}$	-0,442	m	\hat{F}_C	35,0	N	$r_{t,KA}$	100,0	1/rad
l_{HF}	0,255	m	v_C	0,1	m/s	$r_{c,KA}$	-9,6	mrad
$l_{HF,0}$	0,162	m	d_v	0,0	Ns/m	$r_{d,KA}$	1,5	s/rad
δ_{HF}	2,050	rad	\hat{M}_S	5,0	Nm	$r_{f,KA}$	50,0	Nm
k_{HF}	354,0	N/m	$\hat{\omega}_S$	0,2	rad/s			

Tabelle 5.1: Modellparameter zur Schätzung der Geschwindigkeiten und Reibungskräfte am Bewegungstrainer

Im letzten Schritt der Implementierung wurden die unterschiedlichen Systemmodelle im Zentralfilter entsprechend Tabelle 5.1 parametrisiert. Dabei wurde die Geometrie des Trainingsgeräts vermessen und die Massen der Einzelsegmente gewogen und auf die Gelenke aufgeteilt. Die Reibungsparameter wurden auf Basis der Schätzergebnisse aus [Har14; Zie14] gewählt. Da die mechanischen Beschränkungen an der Linearführung in keinem der nachfolgenden Szenarien angefahren wurden, wurden die zugehörigen Parameter der Widerstandskraft zu $r_{f,OA} = 0$ und $r_{f,UA} = 0$ gewählt, wodurch die Beschränkungen im Modell inaktiv sind. Die Parameter für den Knieanschlag wurden teilweise experimentell ermittelt und die verbleibenden Parameter anschließend empirisch angepasst.

Um die Modellparameter für die Restriktionsgleichung (5.23) bestimmen zu können, wurde die Kniebeschränkung vor Beginn der Schätzszenarien aktiv angefahren und die auf den Anschlag wirkende Kraft variiert. Der zeitliche Verlauf des gemessenen Kniewinkels ist in Abbildung 5.8 dargestellt, wobei Zeitachse und Winkelachse vertauscht wurden. Da das Exoskelett kein ideal starres System darstellt, sind dabei Abweichungen des Kniewinkels trotz eines dauerhaften Schrankenkontakts zu erkennen. Daher wurde für den Schrankenoffset $r_{c,KA}$ das Minimum der Kniewinkeltrajektorie verwendet und der Transitionskoeffizient $r_{t,KA}$ so gewählt, dass bei minimalem Kontakt die Aktivierungsfunktion nahezu null ist. Der Verlauf der daraus resultierenden Schrankenaktivierung ist ebenfalls in Abbildung 5.8 dargestellt. Die Parameter für den Dämpfungsparameter $r_{d,KA}$ und den Kraftfaktor $r_{f,KA}$ können hingegen nicht experimentell ermittelt werden und wurden daher während der Schätzung so angepasst, dass ein bestmögliches Schätzergebnis erreicht wurde.

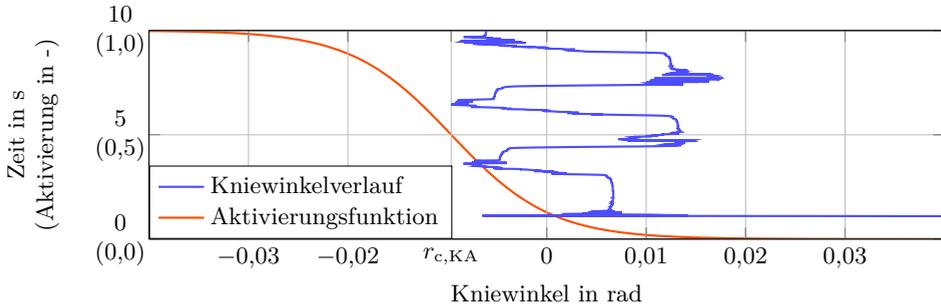


Abbildung 5.8: Experimentelle Bestimmung der Parameter der Aktivierungsfunktion für den Knieanschlag

Um die Schätzergebnisse abschließend bewerten zu können, wurden nachträglich Referenzgrößen aus den Messwerten erzeugt. Hierfür wurden zunächst die diskreten Messwerte für den Hüftwinkel φ_k und die Schlittenposition s_k mit einem gleitenden Mittelwert

$$\bar{\varphi}_k = \sum_{i=-2}^2 \frac{1}{5} \varphi_{k+i} \quad \text{und} \quad \bar{s}_k = \sum_{i=-2}^2 \frac{1}{5} s_{k+i} \quad (5.45)$$

über die vergangenen und zukünftigen Messwerte gefiltert und anschließend über einen zentralen Differenzenquotienten zweifach abgeleitet, wodurch man die zugehörigen Geschwindigkeiten

$$\bar{\omega}_k = \frac{\bar{\varphi}_{k+1} - \bar{\varphi}_{k-1}}{2T_A} \quad \text{und} \quad \bar{v}_k = \frac{\bar{s}_{k+1} - \bar{s}_{k-1}}{2T_A} \quad (5.46)$$

und Beschleunigungen

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\bar{\omega}_{k+1} - \bar{\omega}_{k-1}}{2T_A} \quad \text{und} \quad \bar{a}_k = \frac{\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_{k-1}}{2T_A} \quad (5.47)$$

an Hüfte und Linearführung erhält. Da in den gemessenen Positionen die Informationen über Reibung und Kontakte indirekt enthalten sind, können durch Einsetzen der gefilterten Messwerte aus Gleichung (5.45) und der Ableitungen aus den Gleichungen (5.46) und (5.47) in das Basismodell S0 aus Gleichung (5.16) die Stellgrößen

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_k \\ \bar{F}_k \end{bmatrix} = \mathbf{M}(\bar{\varphi}_k, \bar{s}_k) \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_k \\ \bar{a}_k \end{bmatrix} + \mathbf{g}(\bar{\varphi}_k, \bar{s}_k) \quad (5.48)$$

berechnet werden, die ohne Reibung und Kontakt notwendig wären, um das entsprechende kinematische Systemverhalten hervorzurufen. Die gefilterten Stellgrößen

an der Hüfte \bar{M} und der Linearführung \bar{F} können dann mit der Differenz aus den tatsächlichen Stellgrößen M und F und den durch das Filter geschätzten Störungen verglichen werden. Dadurch erhält man eine weitere Bewertungsmöglichkeit für die Güte der Zustandsschätzung, bei der zusätzlich auch Informationen aus der Beschleunigung eingehen. Die Berechnung der Massenmatrix \mathbf{M} aus Gleichung (5.10) und der Potenzialkräftevektoren \mathbf{g}_i aus den Gleichung (5.11) und (5.12) erfolgt dabei ebenfalls auf Basis der Systemparameter aus Tabelle 5.1.

Um bei der Verwendung unterschiedlicher Modellvarianten vergleichbare Ergebnisse für die nicht messbaren Geschwindigkeiten und im Falle der Modelle sechster Ordnung auch für die dynamischen Reibungen zu erhalten, erfolgte die Anregung des Bewegungstrainers stets anhand vorgegebener Steuertrajektorien für das Hüftmoment und die Kraft an der Linearführung. Dadurch können Rückkopplungen der geschätzten Zustandsgrößen über den Regler ausgeschlossen werden. Für die Zustandsschätzung im laufenden Betrieb wurde lediglich das umfangreichste Modell mit dynamischer Reibung und unilateralen Kontakten verwendet, da dadurch die maximale Prozessorlast des IPC abgeschätzt werden konnte. Die Stellgrößen und gemessenen Systemausgänge wurden dabei mit einer Abtastzeit von 10 ms aufgezeichnet. Dadurch konnten nachträglich die Schätzungen für das Modell mit statischer Reibung und mit dynamischer Reibung ohne Kontakt bei identischen Ein- und Ausgängen generiert werden. Dabei blieben sowohl der Algorithmus der Zustandsschätzung als auch die Parametrierung der Modelle und die Kovarianzmatrizen unverändert. Die daraus resultierenden Ergebnisse sind im nachfolgenden Abschnitt für zwei unterschiedliche Szenarien dargestellt.

5.3.3 Versuchsergebnisse

Für die Evaluation der Reibungs- und Kontaktmodelle im Rahmen der Zustandsschätzung werden in diesem Abschnitt anhand von zwei Testszenarien die Schätzergebnisse für drei unterschiedliche Modelle vorgestellt. Im ersten Szenario werden die geschätzten Zustände auf Basis der Modelle mit statischer Reibung (S1) nach Gleichung (5.20) und mit dynamischer Reibung (S2) nach Gleichung (5.22) mit den Referenzgrößen verglichen. Wie dabei in Abbildung 5.9 zu erkennen ist, erfolgte während des ersten Szenarios kein Kontakt mit dem mechanischen Anschlag am Kniegelenk. Im Gegensatz dazu wurde der Knieanschlag im zweiten Szenario aktiv angefahren und dauerhaft in der Beschränkung gehalten. Daher wurden anhand des zweiten Szenarios die Schätzergebnisse für die Modelle S2 und S3 mit dynamischer Reibung und ohne bzw. mit Beschränkungen verglichen, die durch die Systemgleichungen (5.22) und (5.26) im Zustandsschätzer berücksichtigt werden. Anhand der beiden Testszenarien können sukzessive die Vorteile der einzelnen Modellstufen S1 bis S3 herausgearbeitet und die praktische Relevanz der in dieser Arbeit vorgestellten Modellierungsansätze hervorgehoben werden.

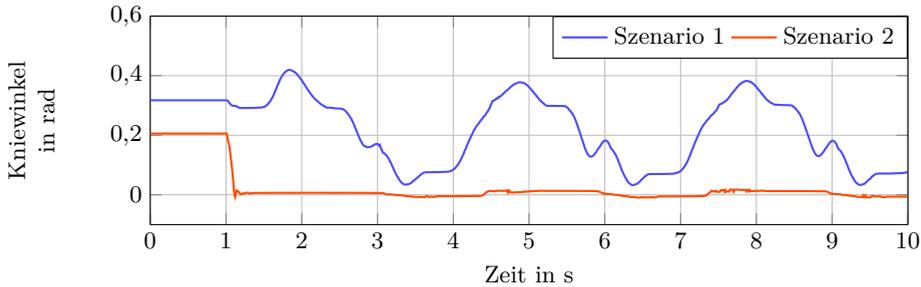


Abbildung 5.9: Gemessene Kniewinkelverläufe für die Schätzszenarios mit aktiver und inaktiver Beschränkung

Zustandsschätzung mit statischem und dynamischem Reibungsmodell

Im ersten Teil der Versuchsdurchführung wurden zunächst die Systemmodelle mit statischer und mit dynamischer Reibung verglichen. Für die Erzeugung der Schätzergebnisse wurden dabei sowohl am Hüft- als auch am Linearantrieb des Bewegungstrainers Steuertrajektorien vorgegeben. Nach einer ersten Phase der Initialisierung des Zustandsschätzers in der Ruhelage des Bewegungstrainers, die sich bei einem Hüftmoment von $M = 0$ und einer Linearkraft von $F = 0$ ergibt, wurde anschließend ein phasengleicher Sinusverlauf für M und F aufgeschaltet.

Die daraus resultierenden Trajektorien sind für die Hüfte in Abbildung 5.10 und für die Linearführung in Abbildung 5.11 dargestellt. Das Aufschalten der Sinusfunktionen mit unterschiedlichen Offsets und Amplituden erfolgt dabei nach exakt einer Sekunde. Da die dominanten Reibungseffekte des Bewegungstrainers die gleiche Wirkrichtung wie die Stellgrößen haben, sind neben den Stellgrößenverläufen sowohl die Schätzergebnisse für die statischen Reibungskräfte $\hat{Q}_{i,S1}^D$ als auch für die dynamischen Reibungskräfte $\hat{Q}_{d,i,S2}^D$ abgebildet. Vergleicht man dabei die Amplituden der Stellgrößen und der periodisch verlaufenden Reibungskräfte, erkennt man den signifikanten Einfluss der Systemreibung, da die Reibungskräfte die gleichen Größenordnungen aufweisen wie die Kräfte, die bei den gegebenen Solltrajektorien zur Beschleunigung des Bewegungstrainers aufgebracht werden. Die Phasen der Reibungskraftverläufe sind dabei zu den Phasen der Stellgrößen verschoben, da diese proportional zur Geschwindigkeit und nicht zur Beschleunigung sind.

Betrachtet man die Unterschiede zwischen den statischen und den dynamischen Reibungskräften und -momenten, so sehen die Trajektorien auf den ersten Blick sehr ähnlich aus. Sie unterscheiden sich jedoch in einigen wichtigen Punkten voneinander. Da bei der statischen Reibungskraft eine direkte Kopplung zwischen den geschätzten

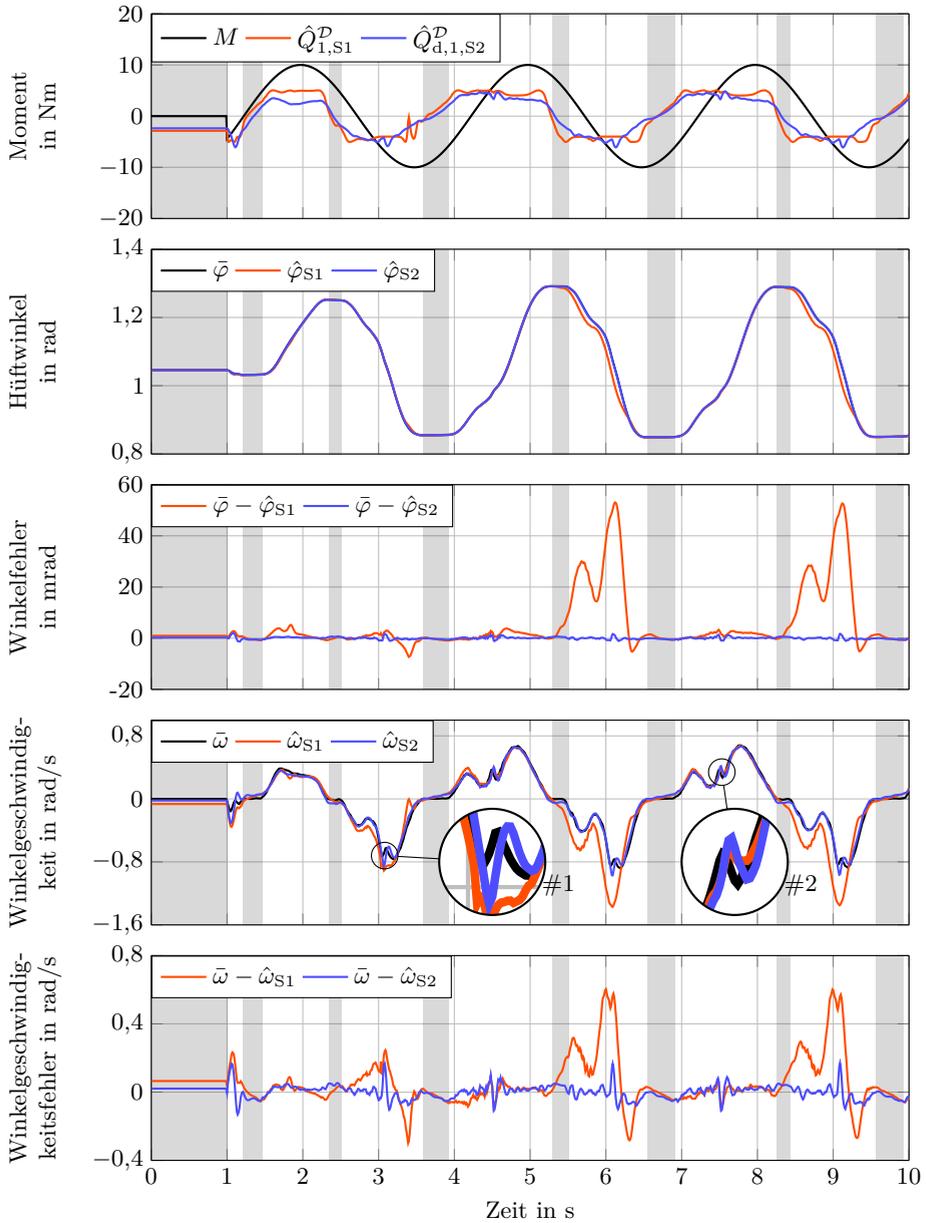


Abbildung 5.10: Stellgrößen und Schätzergebnisse für die Reibungsmomente und die kinematischen Zustände am Hüftgelenk

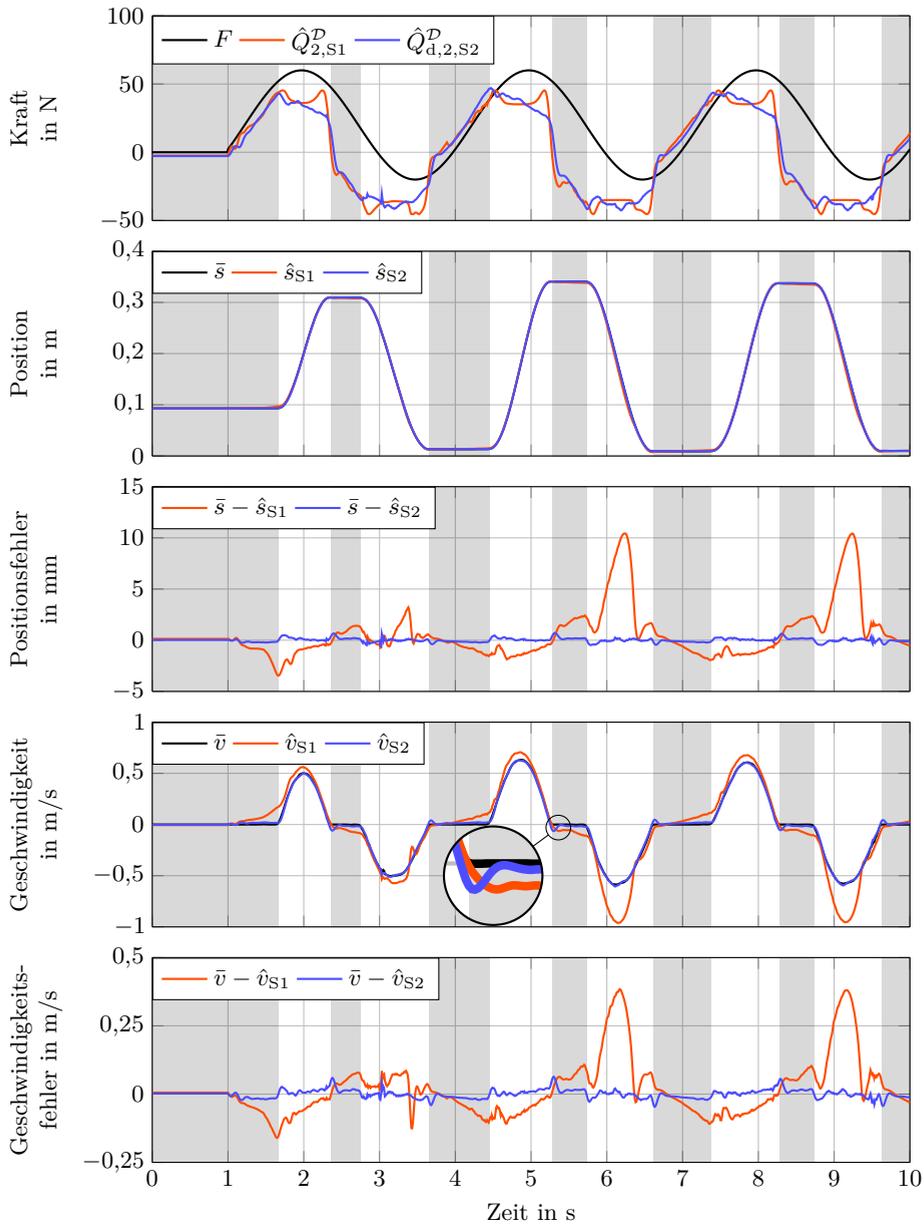


Abbildung 5.11: Stellgrößen und Schätzergebnisse für die Reibungskräfte und die kinematischen Zustände an der Linearführung

Geschwindigkeiten $\hat{\omega}$ an der Hüfte und \hat{v} an der Linearführung besteht, weisen das statische Reibungsmoment $\hat{Q}_{1,S1}^D$ und die Reibungskraft $\hat{Q}_{2,S1}^D$ sowohl im Übergang von Stillstand zu Bewegung als auch im Übergang von Bewegung zu Stillstand einen deutlich erkennbaren Stribeck-Effekt auf. Die Stillstandsperioden an Hüfte und Linearführung sind dabei zur besseren Übersicht grau hinterlegt. Betrachtet man hingegen die Trajektorien der dynamischen Reibung, so ist in der Trajektorie der geschätzten Hüftreibung $\hat{Q}_{d,1,S2}^D$ kaum ein Einfluss der Haftreibung zu erkennen, während die Reibungskrafttrajektorie an der Linearführung $\hat{Q}_{d,2,S2}^D$ ebenfalls einen deutlichen Stribeck-Effekt aufweist, allerdings nur im Übergang aus dem Stillstand in die Bewegung.

Auch während der Phase der Bewegung sind besonders an der Linearführung entscheidende Unterschiede zu erkennen. Während die statische Reibung aufgrund der Coulomb-Reibung ein gleichförmiges Plateau ausbildet, kann die dynamische Reibungskraft sowohl zu als auch abnehmen. Der Grund für dieses abweichende Verhalten ist, dass durch die zusätzliche Dynamik des Reibungsmodells ein weiterer Freiheitsgrad bei der Zustandsschätzung zur Verfügung steht. Dabei entfällt die feste Kopplung zwischen der Geschwindigkeit und der Reibungskraft, wodurch die jeweiligen Schätzungen innerhalb eines gewissen Rahmens individuell angepasst werden können. Dies ist besonders bei realen Systemen von Vorteil, da eine ideal gleichbleibende Coulomb- oder Stribeck-Reibung über den gesamten Arbeitsbereich nur selten gegeben ist. So konnte in [Zie14] gezeigt werden, dass die Reibung am Bewegungstrainer sowohl über die Position als auch über die Zeit stark variiert.

Die dynamische Kopplung von Geschwindigkeit und Reibung wirkt sich dabei natürlich nicht nur auf die Reibungskräfte aus, sondern auch auf die Schätzung der Positionen und Geschwindigkeiten. Da die Störung durch die Reibung im Modell mit statischer Energiedissipation nicht exakt korrigiert werden kann, sind die in das Modell eingehenden Kräfte, die zu einer Beschleunigung des Bewegungstrainers führen, verfälscht. Dadurch kommt es zu deutlichen Abweichungen zwischen den Referenzgrößen $\bar{\varphi}$, \bar{s} , $\bar{\omega}$ und \bar{v} und den Schätzungen von Hüftwinkel $\hat{\varphi}_{S1}$, Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}_{S1}$ und den geschätzten Werten für die Schlittenposition \hat{s}_{S1} bzw. die Schlittengeschwindigkeit \hat{v}_{S1} . Dies wird besonders in der direkten Betrachtung der daraus resultierenden Schätzfehler ersichtlich.

Die Kompensation der Reibungskräfte anhand des Modells mit dynamischer Reibung ist hingegen deutlich genauer. Betrachtet man die Verläufe der aus den Messgrößen zurückgerechneten Stellgrößen \bar{M} und \bar{F} und vergleicht diese mit den Differenzen aus den Stellgrößen M und F und den geschätzten Reibungswerten $Q_{i,S1}^D$ mit statischem und $Q_{d,i,S2}^D$ mit dynamischem Modell, so erkennt man, dass die Trajektorien für das dynamische Modell nahezu deckungsgleich mit den zurückgerechneten Stellgrößen sind, wohingegen die Trajektorien für das statische Modell erheblich

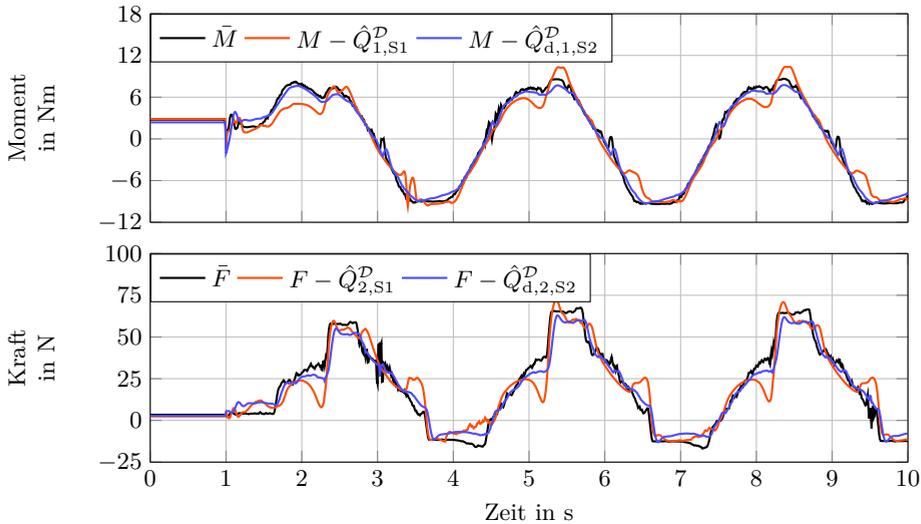


Abbildung 5.12: Vergleich der zurückgerechneten Stellgrößen \bar{M} und \bar{F} für das Modell ohne Reibung und der um die geschätzten Reibungskräfte korrigierten Systemeingänge

abweichen. Dadurch sind auch die resultierenden, kinematischen Schätzfehler in den Abbildungen 5.10 und 5.11 für das dynamische Reibungsmodell minimal.

Dennoch kommt es auch bei der Schätzung mit dem dynamischen Reibungsmodell in zyklischen Wiederholungen zu einem leichten Anwachsen der Schätzfehler, was besonders gut an der Trajektorie der Hüftwinkelgeschwindigkeit zu erkennen ist. Diese sind jedoch deutlich geringer als die Fehler mit statischem Reibungsmodell und können darüber hinaus physikalisch begründet werden. Wie in den beiden Vergrößerungen in Abbildung 5.10 dargestellt ist, kommt es zu diesen Zeitpunkten zu Ausreißern in den Geschwindigkeitsverläufen der Referenztrajektorie $\bar{\omega}$ und der Schätzgrößen $\hat{\omega}_{S1}$ und $\hat{\omega}_{S2}$. Betrachtet man nun den zurückgerechneten Stellmomentverlauf \bar{M} für ein entsprechendes System ohne Reibung in Abbildung 5.12, so erkennt man zu den vergrößerten Zeitintervallen nach 3 s und 7,5 s, dass die Trajektorie an diesen Punkten einen Nulldurchgang besitzt. Dabei kommt es zu einem Lastwechsel im Antriebsmoment, das aufgrund des Umkehrspiels zwischen Nut und Passfeder bzw. des Getriebes zu einer kurzen Überhöhung der Geschwindigkeit führt. Da dies einen hochdynamischen Vorgang darstellt, kommt es dabei durch das filternde Beobachterverhalten zu einer leichten Verzögerung der Schätzung und somit zu einem kurzen Anstieg des Schätzfehlers, der aber bereits nach kurzer Zeit wieder abklingt. Um das Lagerspiel im Modell berücksichtigen zu können, wäre auch hier der Einsatz von zwei unilateralen Beschränkungen möglich, allerdings steht dabei das Verhältnis von Aufwand zu Nutzen in keiner angemessenen Relation.

Eine weitere Besonderheit des dynamischen Reibungsmodells ist die geschwindigkeitsabhängige Modelldynamik. Da die Zeitkonstante des nachgeschalteten Filters im Stillstand gegen unendlich strebt, gleicht das dynamische Reibungsmodell in diesem Betriebspunkt einem Integratorstörmodell, wie es auch in [SBD14d] zur Störgrößenbeobachtung und -kompensation eingesetzt wird. Dabei ändern sich die geschätzten Zustände lediglich über die Unsicherheit des Zustands im Beobachter und es werden alle nicht im Modell befindlichen Störungen, die auf die Systemeingänge wirken, aufintegriert. Wie in den Abbildungen 5.10 und 5.11 zu erkennen ist, folgen dadurch die Reibungstrajektorien in den grau hinterlegten Phasen des Stillstands dem Verlauf der Stellgrößen. Besonders gut ist dieses Verhalten in den Trajektorien der Linearführung und der reibungskompensierten Stellgrößen in Abbildung 5.12 zu erkennen, da diese während den Stillstandsphasen einen nahezu konstanten Wert annehmen und sich somit eine Ruhelage ergibt. Dadurch kann beim Übergang aus der Bewegung in den Stillstand die geschätzte Geschwindigkeit nach einem kurzen Überschwingen auf null abklingen und dort gehalten werden. Dieses Verhalten ist besonders gut in der Vergrößerung der Schlittengeschwindigkeit in Abbildung 5.11 zu erkennen. Bei der Zustandsschätzung mit statischem Reibungsmodell sind die Kraftplateaus hingegen nicht so stark ausgeprägt, wodurch es während der Stillstandsphasen zu einem Abdriften der Geschwindigkeitsschätzungen kommt. Somit verbindet das dynamische Reibungsmodell die Vorteile eines Integratorstörmodells im Stillstand mit der hohen Dynamik eines Reibungsmodells während der Bewegung.

Wie durch die hier präsentierten Ergebnisse gezeigt werden konnte, stellt die dynamische Erweiterung der verallgemeinerten Reibungskräfte im Systemmodell eine deutliche Verbesserung für die Zustandsschätzung dar, da die direkte Kopplung zwischen Geschwindigkeit und Reibungskraft aufgelöst werden kann und sich das verwendete LPV-Filter mit Integratordynamik im Stillstand besonders gut für die Kombination mit einem Zustandsschätzer eignet. Über das Verhalten des Systemmodells mit dynamischer Reibung beim Auftreten mechanischer Beschränkungen kann hier jedoch noch keine Aussage getroffen werden. Dieser spezielle Fall wird daher nachfolgend anhand eines zweiten Szenarios untersucht.

Zustandsschätzung mit und ohne Beschränkungsmodell

Im vorherigen Experiment wurden die Vorzüge des Modells mit dynamischer Reibung gegenüber dem Modell mit statischer Reibung aufgezeigt. Daher soll hier nur noch das dynamische Reibungsmodell und dessen Verhalten bei aktiven Beschränkungen untersucht werden. Für die Zustandsschätzung werden daher die beiden Modelle S2 und S3 mit dynamischer Reibung verwendet, wobei in der Modellstufe S3 der mechanische Anschlag des Knies berücksichtigt wird. Auch für das zweite Szenario wurden vorab die Steuertrajektorien für den Bewegungstrainer festgelegt, die zunächst

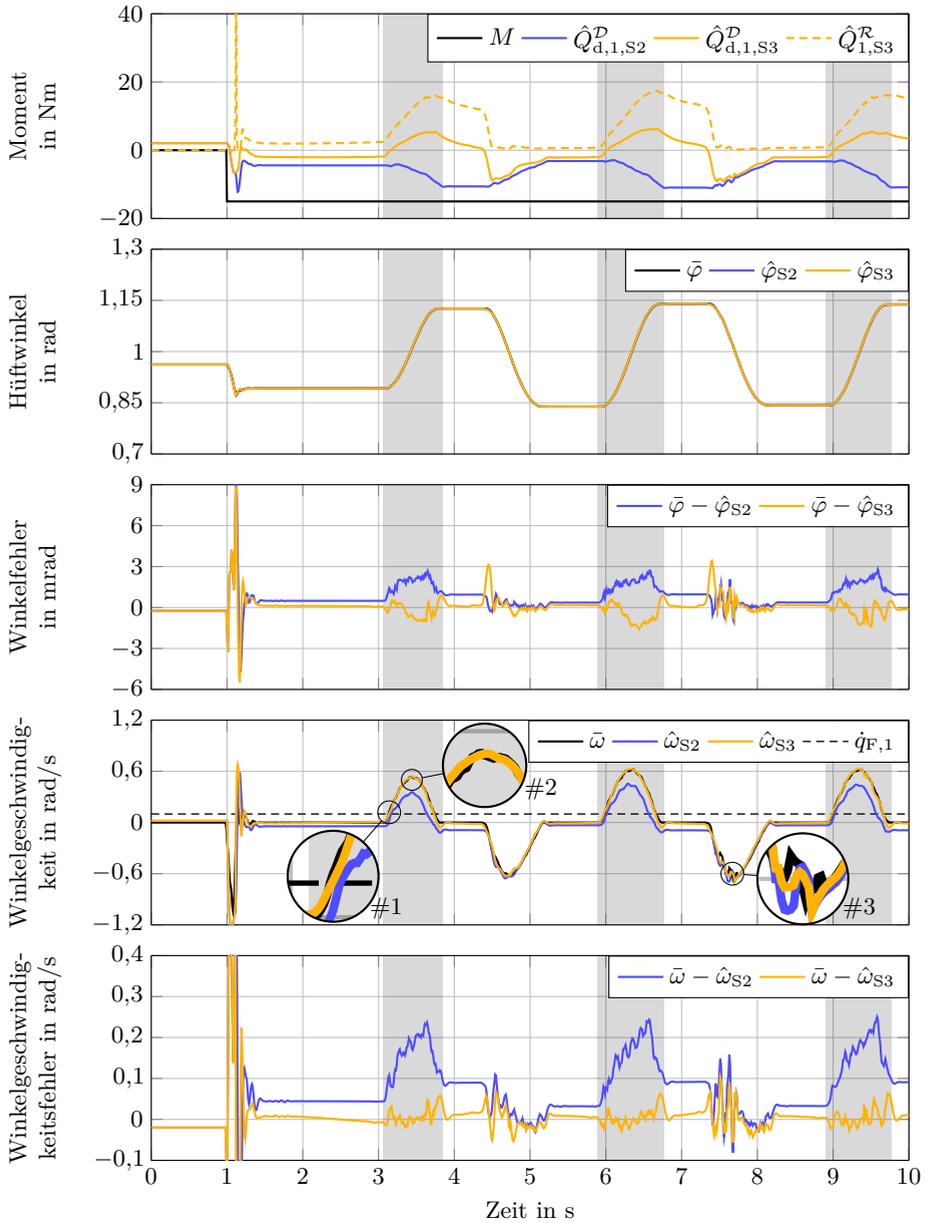


Abbildung 5.13: Schätzergebnisse für die Reibungs- und Kontaktmomente und die kinematischen Zustände am Hüftgelenk

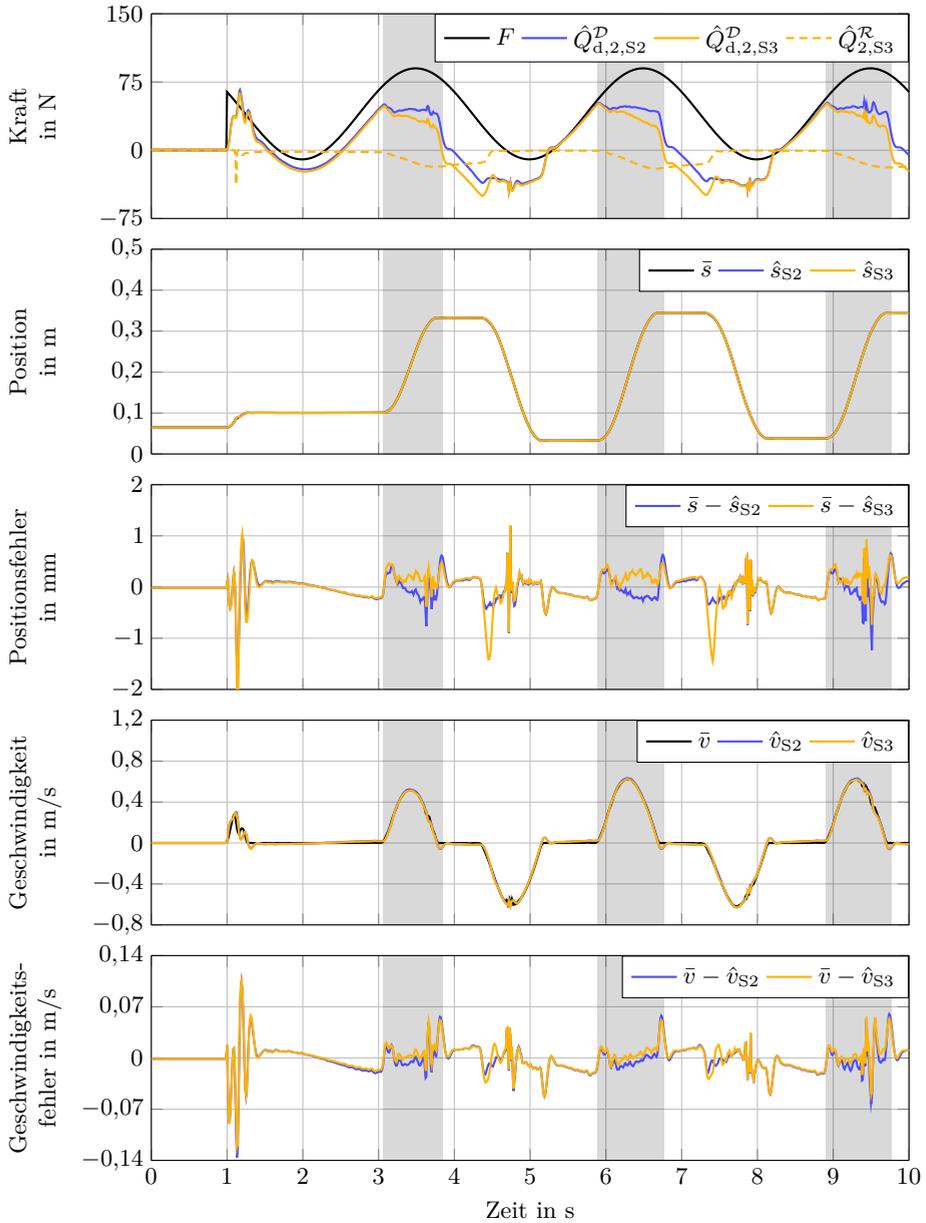


Abbildung 5.14: Schätzergebnisse für die Reibungs- und Kontaktmomente und die kinematischen Zustände an der Linearführung

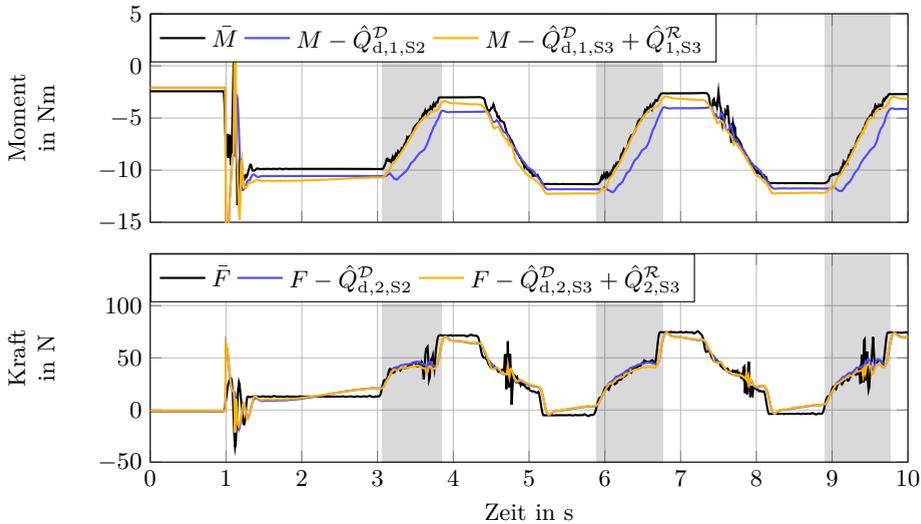


Abbildung 5.15: Vergleich der zurückgerechneten Stellgrößen \bar{M} und \bar{F} für das Modell ohne Reibung und der um die geschätzten Reibungskräfte korrigierten Systemeingänge

mit einer Initialisierungsphase mit $M = 0$ und $F = 0$ beginnen und anschließend mit einem konstanten Offset an der Hüfte und einem sinusförmigen Kraftverlauf an der Linearführung beaufschlagt werden. Mit dem Aufschalten des negativen Offsets am Hüftgelenk wird dabei das Oberschenkelprofil nach unten gedrückt. Da der Kraftoffset an der Linearführung positiv ist, wird gleichzeitig der Schlitten nach oben gezogen, wodurch das Knie gestreckt und der mechanische Anschlag aktiv wird. Anschließend wird durch den sinusförmigen Kraftverlauf an der Linearführung der Schlitten nach oben und unten bewegt, wobei die Streckung des Knies stets erhalten bleibt. Dadurch ist die Änderung des Hüftwinkels direkt mit der Bewegung des Schlittens gekoppelt. Im Rahmen des Tests kann man somit sowohl das Stoßverhalten des Anschlags, das nach dem Aufschalten der Stellgrößen bei 1 s auftritt, als auch das statische Kontaktverhalten eines steifen Kniegelenks untersuchen, bei dem das System einen seiner zwei Freiheitsgrade verliert. Der Verlauf der Stellgrößen sowie die daraus resultierenden Schätzgrößen für die kinematischen Zustände, die Reibungskräfte und die verallgemeinerten Kontaktkräfte sind für die Hüfte in Abbildung 5.13 und für die Linearführung in Abbildung 5.14 dargestellt. Der Vergleich der aus den Messgrößen zurückgerechneten Stellgrößen des Modells ohne Reibung und Beschränkung mit den um die geschätzten Reibungs- und Kontaktkräfte kompensierten Stellgrößen erfolgt in Abbildung 5.15.

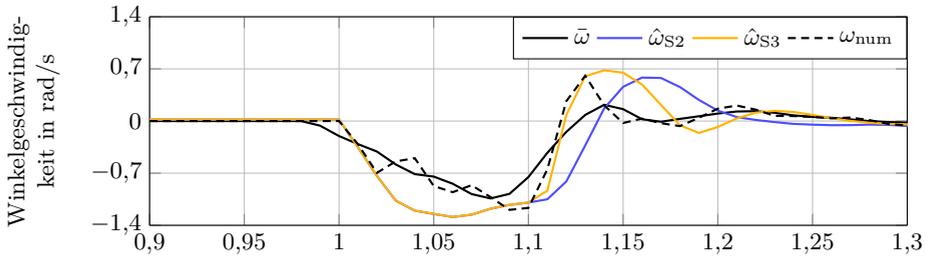


Abbildung 5.16: Verhalten der unterschiedlich geschätzten Winkelgeschwindigkeiten bei einem Stoß des Knieanschlags

Betrachtet man zunächst das dynamische Systemverhalten nach dem Aufschalten der Stellgrößen bei 1 s, so erkennt man besonders in den Trajektorien des Hüftgelenks ein schnelles Ansteigen der Hüftwinkelgeschwindigkeit, das mit dem Erreichen der mechanischen Kniebeschränkung abrupt gestoppt wird. Die Geschwindigkeitsänderungen geschehen dabei so schnell, dass sie in der zeitlichen Auflösung von Abbildung 5.13 kaum zu bewerten sind. Daher wird der Geschwindigkeitsverlauf des Hüftwinkels zum Zeitpunkt des Stoßes in Abbildung 5.16 nochmals vergrößert dargestellt. Zusätzlich zur gefilterten Referenzgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ wird auch die numerische Ableitung ω_{num} der Messgröße s ohne vorherige Filterung abgebildet. Die Ableitung der Messgröße erfolgte dabei wiederum über den Zentralfdifferenzenquotienten nach Gleichung (5.46). Vergleicht man nun die Ergebnisse der Geschwindigkeitsschätzungen $\hat{\omega}_{S2}$ und $\hat{\omega}_{S3}$ für die Modelle ohne bzw. mit Kontakt, so sind die Trajektorien zunächst identisch, da der Kontakt noch keinen Einfluss auf das Systemverhalten aufweist. Erst nach ca. 1,1 s wird der Knieanschlag erreicht und es kommt zu einem abrupten Abbremsen der Oberschenkelbewegung. Die Schätzung mit Kontaktmodell $\hat{\omega}_{S3}$ reagiert dabei deutlich schneller auf den Kontakt als die Modellausbaustufe S2 und liegt sogar näher an ω_{num} als die zur Bewertung verwendete Referenzgröße $\bar{\omega}$. Eine absolute Bewertung der Schätzung des Stoßverhaltens ist aber nur bedingt möglich, da auch die numerische Ableitung ohne Filterung bei einer Abtastzeit von 10 ms die realen Abläufe eines hochdynamischen Stoßes nur näherungsweise beschreiben kann. Daher sind für die Beobachtung von Stoßprozessen deutlich höhere Abtastfrequenzen notwendig. Allerdings ist offensichtlich, dass $\hat{\omega}_{S3}$ eine bessere Schätzung des Kontaktverhaltens darstellt als es das Modell ohne Kontakt ermöglicht.

Im Gegensatz zum Stoß stellt die Abtastzeit für die Zustandsschätzung bei anhaltendem Kontakt kein Problem dar, da sich in diesem Fall keine hochdynamischen Zustandsänderungen ergeben. Betrachtet man zunächst die ersten beiden Sekunden nach dem initialen Stoß, fällt zunächst eine längere Phase des Stillstands auf, bei der die Veränderung der Antriebskraft am Schlitten nicht ausreicht, um die Haftkraft zu überwinden. Wie in den Trajektorien der Kontaktkräfte zu erkennen

ist, sind die Werte von $\hat{Q}_{1,S3}^{\mathcal{R}}$ und $\hat{Q}_{2,S3}^{\mathcal{R}}$ dabei nur sehr gering, da der mechanische Anschlag am Knie kurz davor ist sich aus seiner Beschränkung zu lösen. Daher zeigen in dieser Phase sowohl die Schätzungen der kinematischen Zustände mit als auch ohne Kontaktmodell sehr gute Ergebnisse, die lediglich in der Trajektorie der Hüftwinkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}_{S2}$ einen minimalen Offset aufweisen. Diese Abweichung ist dabei modellbedingt, da ohne den mechanischen Anschlag am Kniegelenk der Oberschenkel durch die Schwerkraft weiter absinken würde und aus dieser negativen Beschleunigung ein anhaltender Offset der Geschwindigkeit resultiert.

Nach ca. drei Sekunden überschreitet die Kraft an der Linearführung die Stribeck-Reibung, wodurch sich der Schlitten nach oben bewegt und der Oberschenkel des Exoskeletts mitgezogen wird. Dabei nehmen die über den Knieanschlag wirkenden Kontaktkräfte deutlich zu. Der Einfluss der Beschränkung auf das Hüftgelenk ist hierbei deutlich größer als auf die Linearführung, da sich aus der starren Kopplung von Ober- und Unterschenkel ein langer Hebelarm ergibt. Dadurch bleibt die Reibungskraft der dominierende Einfluss an der Linearführung und die Zustandsschätzungen sind für beide Modelle durchweg sehr gut.

Betrachtet man hingegen die Schätzungen am Hüftgelenk, so erkennt man in den Phasen mit positiver Schlittengeschwindigkeit deutliche Unterschiede in der Güte der Zustandsschätzung. Zwar gleicht die Dynamik des Reibungsmodells zu Beginn der Bewegung noch dem Verhalten eines Integratorstörmodells, wodurch auch die geschätzten Zustände auf Basis des Modells ohne Kontakt dem Referenzverlauf zunächst noch folgen können. Allerdings ändert sich dies mit Überschreiten der Filtergeschwindigkeit $\dot{q}_{F,1}$, wie in der ersten Vergrößerung in Abbildung 5.13 zu erkennen ist. Ab diesem Punkt wird das Integratorstörmodell wieder zu einem tiefpassgefilterten Reibungsmodell und die auftretenden Kontaktkräfte können nicht weiter kompensiert werden. Dies lässt sich besonders gut anhand des Vergleichs der zurückgerechneten und der korrigierten Stellgrößen in Abbildung 5.15 erkennen. Da der Verlust eines Freiheitsgrads nicht mehr ausreichend genau über die Stellgrößen approximiert werden kann, werden die Fehler bei der Schätzung der kinematischen Zustände größer. Bei der Zustandsschätzung mit der Modellstufe S3 ist der Einfluss der Kontaktkraft durch die Berücksichtigung der Restriktionsfunktion des Knies in den Lagrange-Gleichungen nativ gegeben. Somit passt sich das Modell selbstständig an den Verlust des Freiheitsgrads an, wodurch auch in dieser Phase der Bewegung eine exakte Kompensation der Kontaktkräfte ermöglicht wird. Die Schätzung der Zustände liefert daher weiterhin sehr gute Ergebnisse.

Zusätzlich zur guten Approximation des Systemverhaltens weist der Zustandsschätzer ein sehr gutes Filterverhalten auf. Wie in der zweiten Vergrößerung in Abbildung 5.13 dargestellt ist, wird das Rauschen des Geschwindigkeitsfehlers nicht durch den geschätzten Geschwindigkeitswert $\hat{\omega}_{S3}$, sondern durch die Referenzgröße $\bar{\omega}$ hervorgerufen. Auch die Störungen außerhalb der grau unterlegten Bereiche,

wie sie z. B. in der dritten Vergrößerung abgebildet sind, sind nicht auf das Filter zurückzuführen und treten in allen Trajektorien auf. Der Anstieg des Schätzfehlers resultiert dabei lediglich aus einem Phasenversatz zwischen dem mittelwertgefilterten und dem geschätzten Geschwindigkeitsverlauf. Da der Phasenversatz auch aus dem gefilterten Mittelwert resultieren kann, ist in diesen Bereichen keine Aussage über den Ursprung des Fehlers möglich.

Unabhängig davon sind die Abweichungen zwischen den auf Basis der Modellstufe S3 geschätzten Zuständen und den Referenzgrößen aber so gering, dass durchweg ein sehr gutes Schätzergebnis für das Kontaktszenario vorliegt. Somit konnte am Beispiel des Bewegungstrainers gezeigt werden, dass nicht nur die Berücksichtigung des leistungsbasierten Reibungsmodells zu einer deutlichen Verbesserung der Zustandsschätzung führt, sondern auch die Modellierung von Kontakten auf Basis von Restriktionsfunktionen.

5.4 Fazit

In diesem Kapitel wurde die Praktikabilität der leistungsbasierten Ansätze zur Reibungs- und Kontaktmodellierung aus den Kapiteln 2 bis 4 anhand eines ersten Anwendungsbeispiels verdeutlicht. Dabei konnte nicht nur gezeigt werden, dass die Reibungseffekte und mechanischen Anschläge an einem Trainingsgerät zur Gangrehabilitation ohne großen Aufwand in einem komplexen Systemmodell berücksichtigt werden können, sondern auch, dass der Einsatz der daraus resultierenden Modelle in Kombination mit einem Zustandsschätzer möglich ist. Dies führt einerseits zu einem sehr detailgetreuen Simulationsmodell des Bewegungstrainers, an dem sowohl die Güte als auch die Robustheit von Regelungsansätzen und Parameterschätzern vorab simulativ getestet und verbessert werden können, und andererseits zu einer signifikanten Verbesserung der Schätzung von nicht messbaren Zuständen. Besonders das dynamische Reibungsmodell aus Kapitel 2 und die leistungsbasierten Restriktionsfunktionen aus Kapitel 3 weisen dabei in Kombination mit einem nichtlinearen Zustandsbeobachter sehr vorteilhafte Eigenschaften auf.

Da für das Reibungsmodell die statischen Reibungskräfte über einen LPV-Tiefpass erster Ordnung gefiltert werden, wird das sehr steife Verhalten der Reibungsdynamik weicher und auch die direkte Kopplung zwischen Geschwindigkeit und Reibungskraft wird aufgebrochen. Dies lässt geschwindigkeitsunabhängige Variationen der geschätzten Reibungskraft zu, wodurch sich der Beobachter an leichte Veränderungen der Reibungskoeffizienten, wie sie z. B. an der Linearführung des Bewegungstrainers auftreten, anpassen kann. Dadurch kann die Reibung im Modell genauer approximiert und kompensiert und somit auch die Schätzung der kinematischen Zustände

verbessert werden. Darüber hinaus bewirkt die gefilterte Reibungskraft ein robusteres Modell- und dadurch auch Schätzverhalten. Ein weiterer Vorteil bei der Zustandsschätzung ergibt sich aus der Verwendung eines LPV-Filters mit veränderlicher Zeitkonstante und einer Integratordynamik im Stillstand. Dadurch können auch längere Stillstandsphasen exakt beobachtet werden, da die Reibungskräfte im Stillstand dem Verlauf von Stell- oder Störgrößen über die Unsicherheiten der Reibungszustände im Beobachter folgen können.

Werden zusätzlich die mechanischen Kontakte über Restriktionsfunktionen im Modell berücksichtigt, so kann selbst der Verlust eines Freiheitsgrads durch das Modell abgebildet und dadurch eine Verschlechterung der Zustandsschätzung durch einen systematischen Fehler verhindert werden. Da dabei die Ordnung des Systemmodells im Beobachter unverändert bleibt, ist keine Anpassung des Zustandsschätzers und auch keine Neuinitialisierung der Zustände am Kontaktpunkt notwendig. Aufgrund der Begrenzung der Kontaktkräfte auf die Werte von $r_{f,i}$ weist auch die Modellbeschränkung ein weiches Verhalten auf. Dadurch können die Beschränkungen so parametrisiert werden, dass sie eine gute Approximation des Kontakts darstellen, ohne dass sie dabei zu einem unbeschränkten Anstieg der Kontaktkräfte und somit zu numerischen Problemen im Beobachter führen. Daher bleibt das Beobachterverhalten selbst bei einer Abtastzeit von 10ms, die im Verhältnis zu den Zeitkonstanten von Reibungs- und Kontaktprozessen bereits sehr groß ist, stets robust.

Somit konnte in diesem Kapitel gezeigt werden, dass die in dieser Arbeit vorgestellten, leistungsbasierten Modellierungsansätze nicht nur sehr vielseitige und anwendungsfreundliche Werkzeuge für die Simulation von Reibungs- und Kontaktszenarien sind, sondern dass sie darüber hinaus auch einen signifikanten Nutzen für praktische Anwendungen haben und dabei auch für größere Abtastzeiten ein sehr robustes Verhalten aufweisen.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Mit den in dieser Arbeit präsentierten Ansätzen zur leistungsbasierten Beschreibung von unilateralen Kontakten und Reibprozessen wurden zwei neue Modellierungswerkzeuge vorgestellt, die zum einen eine äußerst präzise Approximation physikalischer Kontaktmechanismen in der Simulation ermöglichen und zum anderen ein robustes Modellverhalten für regelungstechnische Anwendungen besitzen. Darüber hinaus sind sowohl das Reibungs- als auch das Kontaktmodell durch die Integration in den Lagrange-Gleichungen zweiter Art vielseitig einsetzbar und untereinander kombinierbar, wodurch auch das Verhalten unilateraler Kontakte mit tangential auftretender Reibung simuliert werden kann.

Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, erreicht das neue dynamische Reibungsmodell dabei eine Genauigkeit, die mit den Ergebnissen von etablierten Modellierungsansätzen, z. B. dem LuGre-Modell, vergleichbar ist. Im Gegensatz dazu verfügt der hier vorgestellte, leistungsbasierte Modellierungsansatz aber über weitere vorteilhafte Eigenschaften, die den Ansatz von bestehenden Reibungsmodellen abhebt. So kann die Reibungsmodellierung mit Dissipationsfunktionen auch ohne signifikanten Aufwand bei mehrdimensionalen Reibungsprozessen eingesetzt werden, da der einfache Formalismus des Reibungsmodells innerhalb der Lagrange-Gleichungen unverändert bleibt. Dabei kann durch die Verwendung von stetig differenzierbaren Basisfunktionen auch auf Fallunterscheidungen mit schaltenden Modellstrukturen verzichtet werden, wodurch sich ein numerisch robustes Modellverhalten ergibt und die Handhabbarkeit des Ansatzes deutlich vereinfacht wird. Dies stellt bereits hinsichtlich der Anwendbarkeit eine signifikante Verbesserung im Vergleich zu den etablierten Reibungsmodellen dar. Darüber hinaus können die stetig differenzierbaren Funktionen aber auch unter geringem Aufwand mit einem Zustandsbeobachter kombiniert werden, wodurch eine signifikante Verbesserung bei der Schätzung der Reibungszustände erreicht werden kann. Dies konnte in Kapitel 5 anhand einer ersten praktischen Anwendung an einem Rehabilitationsroboter gezeigt werden.

Auch das in Kapitel 3 vorgestellte Kontaktmodell zeigt im Vergleich zu etablierten Modellierungsansätzen deutliche Vorteile und bildet aufgrund der leistungsbasierten Ansatzfunktionen einen neuen Theoriezweig der unilateralen Kontaktmodellierung. Im Gegensatz zu den auf Impulserhaltung basierenden Verfahren kann der neue Ansatz sowohl für die Modellierung von Stößen als auch von anhaltenden Kontakten herangezogen werden. Dabei können nicht nur Einkörpersysteme mit einfachen Beschränkungen, sondern auch Mehrkörpersysteme mit multiplen Kontakten simuliert werden. Anders als bei den kraftbasierten Ansätzen mit Herz'scher Feder muss dabei jedoch keine Fallunterscheidung erfolgen, da auch hier nur stetig differenzierbare Leistungsfunktionen zur Modellierung herangezogen werden. Diese können, ebenso wie die Dissipationsfunktionen beim Reibungsmodell, in den Lagrange-Formalismus eingebettet werden. Dadurch werden die am Kontaktpunkt auftretenden Kräfte automatisch auf die Wirkrichtung der verallgemeinerten Koordinaten transformiert, wodurch auch hier der Modellierungsaufwand für komplexe Mehrkörpersysteme im Gegensatz zu bestehenden Ansätzen überschaubar bleibt. Dabei kann ein breiter Bereich an unterschiedlichen Szenarien abgedeckt werden, die bei elastischen Kontakten beginnen und bis hin zu näherungsweise plastischen Stößen reichen, wobei die Kontaktverluste u. a. von der Aufprallgeschwindigkeit abhängig sind.

Die Parametrierung eines jeden Einzelkontakts erfolgt dabei über lediglich vier Parameter mit eindeutiger physikalischer Bedeutung. Zusätzlich zu den Kontakten sphärischer Objekte lässt sich der Ansatz auch anhand von finiten Kugelementen auf beliebig geformte 3D-Objekte anwenden und darüber hinaus auch auf Beschränkungen mit begrenzter Leistung und Breite erweitern. Dadurch wird auch die Modellierung von Schrankendurchbrüchen möglich, die in dieser Form mit keinem anderen Theoriezweig abgebildet werden können. Im Vergleich zu den etablierten Kontakttheorien überzeugt das leistungsbasierte Kontaktmodell aber nicht nur durch die Vielseitigkeit, die einfache Handhabbarkeit und die Robustheit des Ansatzes. Durch die Möglichkeit der Kombination mit einem Zustandsbeobachter weist der Ansatz darüber hinaus auch einen erheblichen Nutzen für praktische Anwendungen auf. Wie in Kapitel 5 an einer Anwendung beispielhaft gezeigt werden konnte, kann durch die Verwendung von Restriktionsfunktionen der Verlust eines Freiheitsgrads, der durch den mechanischen Knieanschlag des Rehabilitationsroboters hervorgerufen wird, im Modell für die Zustandsschätzung berücksichtigt werden. Dadurch konnte die Güte der Zustandsschätzung signifikant verbessert werden.

Für die Beschreibung des Verhaltens unilateraler Kontakte mit tangential auftretender Reibung wurden in Kapitel 4 das Reibungsmodell aus Kapitel 2 und das Kontaktmodell aus Kapitel 3 zu einer allgemeinen Beschreibung zusammengefasst. Das daraus resultierende Gesamtmodell folgt wiederum einem gleichbleibenden Formalismus, der selbst bei komplexen Szenarien eine einfache Handhabbarkeit gewährleistet. Dabei kann selbst das dynamische Verhalten von Mehrkörpersystemen unter Einfluss von multiplen Kontakten und tangentialer Reibung beschrieben

werden. Die physikalischen Eigenschaften der in den Kapiteln 2 und 3 beschriebenen Einzelmodelle bleiben dabei weiterhin erhalten, wodurch auch das Gesamtmodell ein physikalisch plausibles Verhalten aufweist, wie in Kapitel 4 in einer simulativen Evaluation gezeigt werden konnte. Da die Modellierung eines solchen Szenarios unter Verwendung von etablierten Modellierungsansätzen nicht oder nur unzureichend möglich ist, gilt dies im Bereich der Kontakt- und Reibungsmodellierung als eine der größten Herausforderungen. Vergleicht man diese Tatsache mit der einfachen Beschreibung eines Mehrkörperkontakts auf Basis des hier vorgestellten Ansatzes, wird erneut die Signifikanz der leistungsbasierten Reibungs- und Kontaktmodellierung deutlich.

Neben den in dieser Arbeit beschriebenen, vielseitigen Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten der leistungsbasierten Reibungs- und Kontaktmodellierung sind noch zusätzliche Erweiterungen und Anwendungsfelder denkbar. So könnte u. a. für die Beschränkungsmodellierung einfacher 3D-Objekte, z. B. für einen Zylinder oder einen Volltorus, anstelle der finiten Sphärenelemente eine mathematische Beschreibung für das Gesamtobjekt untersucht werden. Dadurch wäre ein Einsatz der reibungsbehafteten Kontakte als Reifenmodell für Kraftfahrzeuge, Nutzfahrzeuge oder Zweiräder denkbar. Die nicht-holonomen Eigenschaften des Kontakts zwischen Reifen und Boden würden somit aufgebrochen und der Kontakt könnte direkt in den Lagrange-Gleichungen zweiter Art berücksichtigt werden. Dabei wäre die Abhängigkeit der Reibungskraft von der Aufstandskraft bereits nativ über die Normalkraft im Kontaktmodell gegeben. Eine weitere Möglichkeit zur Erweiterung der Kontakttheorie wäre eine quantitative Untersuchung der einzelnen Modellparameter für unterschiedliche Materialien. Könnten den einzelnen Materialien dabei feste Parameter zugeordnet werden, könnte das dynamische Kontaktverhalten realer Beschränkungen mit unterschiedlichen Materialkonfigurationen anhand von Simulationen prädiert und eine unzureichende Auslegung der Beschränkung damit bereits vorab ausgeschlossen werden. Die leistungsbasierten Modellierungsansätze stellen somit auch über die bisher gezeigten Anwendungen hinaus einen wichtigen Beitrag für die Modellierung von reibungsbehafteten und mechanisch beschränkten Systemen dar.

Anhang A

Modellgleichungen

In diesem Teil des Anhangs werden die unterschiedlichen Modellgleichungen der Simulationsszenarien und des Bewegungstrainers dargestellt, sofern der Umfang der Gleichungen eine sinnvolle Darstellung ermöglicht. In Abschnitt A.1 werden die Modellgleichungen des zweidimensionalen Stick-Slip-Szenarios präsentiert, gefolgt von den Gleichungen des beschränkten Doppelpendels ohne Reibung in Abschnitt A.2, den Gleichungen des unbeschränkten Würfels ohne Reibung in Abschnitt A.3, den Gleichungen des Doppelpendels mit Reibung in Abschnitt A.4 und den Gleichungen des Bewegungstrainers in Abschnitt A.5.

A.1 2D-Stick-Slip-Modell

Das dynamische Verhalten der Masse im zweidimensionalen Stick-Slip-Modell unter Einfluss der Feder und der Reibung ist durch die Differentialgleichungen

$$\ddot{q}_1 = \frac{k(x_{ZF} - q_1) \left(\sqrt{(x_{ZF} - q_1)^2 + (y_{ZF} - q_2)^2} - l_{ZF} \right)}{m \sqrt{(x_{ZF} - q_1)^2 + (y_{ZF} - q_2)^2}} - \frac{1}{m} Q_{d,1}^D \quad (\text{A.1a})$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{k(y_{ZF} - q_2) \left(\sqrt{(x_{ZF} - q_1)^2 + (y_{ZF} - q_2)^2} - l_{ZF} \right)}{m \sqrt{(x_{ZF} - q_1)^2 + (y_{ZF} - q_2)^2}} - \frac{1}{m} Q_{d,2}^D \quad (\text{A.1b})$$

definiert. Für die Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Reibungskraft ergeben sich auf Basis der leistungsbasierten Dissipationsfunktion die verallgemeinerten

Reibungskräfte

$$\dot{Q}_{d,1}^{\mathcal{D}} = \frac{a_1(\dot{q}_1)}{T_{F,1}} \left(d\dot{q}_1 + \hat{F}_C \frac{\dot{q}_1 \tanh\left(\frac{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}}{v_C}\right)}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}} + F_S^\Delta \frac{\dot{q}_1}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}{2\hat{v}_S^2}} - Q_{d,1}^{\mathcal{D}} \right), \quad (\text{A.1c})$$

$$\dot{Q}_{d,2}^{\mathcal{D}} = \frac{a_2(\dot{q}_2)}{T_{F,2}} \left(d\dot{q}_2 + \hat{F}_C \frac{\dot{q}_2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}}{v_C}\right)}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}} + F_S^\Delta \frac{\dot{q}_2}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \epsilon^2}{2\hat{v}_S^2}} - Q_{d,2}^{\mathcal{D}} \right). \quad (\text{A.1d})$$

A.2 Beschränktes Doppelpendel ohne Reibung

Die Differentialgleichungen des unbeschränkten Doppelpendels

$$0 = g(\cos(\varphi_1 + \varphi_2)l_2m_2 + \cos(\varphi_1)l_1(m_1 + m_2)) - l_1l_2m_2 \sin(\varphi_2)(2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_2^2) \\ + ((2 \cos(\varphi_2)l_1 + l_2)l_2m_2 + l_1^2(m_1 + m_2)) \ddot{\varphi}_1 + (\cos(\varphi_2)l_1 + l_2)l_2m_2\ddot{\varphi}_2 \quad (\text{A.2a})$$

$$0 = l_2m_2 (g \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + l_1 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 + (\cos(\varphi_2)l_1 + l_2)\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2) \quad (\text{A.2b})$$

ergeben sich aus der Anwendung des Lagrange-Formalismus auf die Energiegleichungen (3.34). Erfolgt die Beschränkung des inversen Doppelpendels nach Abbildung 3.16 mit den Massenabständen und den relativen Geschwindigkeiten für m_1 und m_2 gemäß den Gleichungen (3.35) und (3.36), so erhält man die verallgemeinerte Restriktionsfunktion

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4} \left(1 - \tanh\left(r_{t,1}(x_0 - r_{c,1} + l_1 \sin(\varphi_1))\right) \right) \\ \cdot \left(l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{r_{d,1}} \log\left(\cosh(l_1 r_{d,1} \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1)\right) \right) r_{f,1} \\ + \frac{1}{4} \left(1 - \tanh\left(r_{t,2}(x_0 - r_{c,2} + l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2))\right) \right) \\ \cdot \left(\left(l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{r_{d,2}} \log\left(\cosh(r_{d,2}(l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2))\right) \right) r_{f,2}. \quad (\text{A.3})$$

Setzt man die Restriktionsfunktion aus Gleichung (A.3) in Gleichung (3.29) ein und leitet das Ergebnis partiell nach \dot{q}_i ab, so ergeben sich daraus die verallgemeinerten Kontaktmomente

$$\begin{aligned}
Q_1^{\mathcal{R}} &= \frac{1}{4} l_1 r_{f,1} \cos(\varphi_1) \left(\tanh(r_{t,1}(x_0 - r_{c,1} + l_1 \sin(\varphi_1))) - 1 \right) \\
&\cdot \left(\tanh(l_1 r_{d,1} \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1) - 1 \right) + \frac{1}{4} r_{f,2} \left(l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right) \\
&\cdot \left(\tanh(r_{t,2}(x_0 - r_{c,2} + l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2))) - 1 \right) \\
&\cdot \left(\tanh(r_{d,2}(l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2))) - 1 \right) \quad (\text{A.4a})
\end{aligned}$$

am Gelenk im Koordinatenursprung und

$$\begin{aligned}
Q_2^{\mathcal{R}} &= \frac{1}{4} l_2 r_{f,2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\
&\cdot \left(\tanh(r_{t,2}(x_0 - r_{c,2} + l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2))) - 1 \right) \\
&\cdot \left(\tanh(r_{d,2}(l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2))) - 1 \right). \quad (\text{A.4b})
\end{aligned}$$

am Gelenk im Massenpunkt m_1 . Die Normalkräfte am Kontaktpunkt zwischen Masse m_1 und Boden

$$\begin{aligned}
F_{\perp,1} &= \frac{1}{4} r_{f,1} \left(\tanh(r_{t,1}(x_0 - r_{c,1} + l_1 \sin(\varphi_1))) - 1 \right) \\
&\cdot \left(\tanh(l_1 r_{d,1} \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1) - 1 \right) \quad (\text{A.5a})
\end{aligned}$$

und zwischen Masse m_2 und Boden

$$\begin{aligned}
F_{\perp,2} &= \mathcal{R}_{a,2}(\mathbf{q}) F_{c,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\tanh(r_{t,2}(x_0 - r_{c,2} + l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2))) - 1 \right) \\
&\cdot \frac{r_{f,2}}{2} \left(\tanh(r_{d,2}(l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2))) - 1 \right) \quad (\text{A.5b})
\end{aligned}$$

erhält man durch Einsetzen von Gleichung (A.3) in Gleichung (3.31). Die Kräfte $F_{\perp,i}$ könnten u.a. für die Berücksichtigung von tangential auftretender Reibung während des Kontakts verwendet werden.

A.3 Unbeschränkter Würfel ohne Reibung

Die Differentialgleichungen eines unbeschränkten Würfels mit drei translatorischen Freiheitsgraden x_{SP} , y_{SP} und z_{SP} und drei rotatorischen Freiheitsgraden α , β und γ ergeben sich, unter Berücksichtigung der xyz -Konvention, zu

$$0 = m\ddot{x}_{\text{SP}}, \quad (\text{A.6a})$$

$$0 = m\ddot{y}_{\text{SP}}, \quad (\text{A.6b})$$

$$0 = m\ddot{z}_{\text{SP}} + gm, \quad (\text{A.6c})$$

$$0 = \frac{1}{12}m(-2k^2 \cos(\beta)\dot{\beta}\dot{\gamma} + 2k^2\ddot{\alpha} - 2k^2 \sin(\beta)\ddot{\gamma}), \quad (\text{A.6d})$$

$$0 = \frac{1}{6}k^2m \cos(\beta)\dot{\alpha}\dot{\gamma} + \frac{1}{6}k^2m\ddot{\beta}, \quad (\text{A.6e})$$

$$0 = \frac{1}{12}m(-2k^2 \cos(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2k^2 \sin(\beta)\ddot{\alpha} + 2k^2\ddot{\gamma}). \quad (\text{A.6f})$$

Die Kantenlänge des Würfels wird durch k dargestellt und dessen Masse durch m . Vergleicht man die Gleichungen (A.6d) und (A.6f), wird für $\beta = \frac{\pi}{2}$ auch das Problem einer kardanischen Blockade ersichtlich, da dabei die Rotationsachsen z und x'' zusammenfallen, wodurch beide Gleichungen dieselben Informationen beinhalten. Dadurch ist das Gleichungssystem nicht mehr eindeutig lösbar. Eine Lösung dieses Problems kann über die Verwendung von Quaternionen anstelle von Rotationsmatrizen erfolgen. Da in den Simulationen in dieser Arbeit jedoch keine kardanische Blockade auftritt, soll dieses Problem hier vernachlässigt werden.

A.4 Beschränktes Doppelpendel mit Reibung

Die Differentialgleichungen des kontaktbedingten, dynamischen Reibverhaltens für das inverse Doppelpendel ergeben sich in Abhängigkeit der Normalkraft $F_{\perp,2}$ aus Gleichung (A.5b) und der tangentialen Geschwindigkeit $v_{\parallel,2}$ aus Gleichung (4.7) zu

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\mathcal{R},1}^{\mathcal{D}} = & \frac{1 - e^{-\left(\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{q}_{\mathcal{F},1}}\right)^2}}{T_{\mathcal{F},1}} \left(-Q_{\mathcal{R},1}^{\mathcal{D}} + (-l_1 \sin(\varphi_1) - l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) F_{\perp,2} \right. \\ & \left. \cdot \left(\mu_{\text{C}} \tanh\left(\frac{v_{\parallel,2}}{v_{\text{C}}}\right) + \left(\mu_{\text{S}} - \mu_{\text{C}} \tanh\left(\frac{\hat{v}_{\text{S}}}{v_{\text{C}}}\right) \right) \frac{v_{\parallel,2}}{\hat{v}_{\text{S}}} e^{\frac{1}{2} - \frac{v_{\parallel,2}^2}{2\hat{v}_{\text{S}}^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7a})$$

und

$$\dot{Q}_{\mathcal{R},2}^{\mathcal{D}} = \frac{1 - e^{-\left(\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{q}_{F,2}}\right)^2}}{T_{F,2}} \left(-Q_{\mathcal{R},2}^{\mathcal{D}} + (-l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) F_{\perp,2} \cdot \left(\mu_C \tanh\left(\frac{v_{11,2}}{v_C}\right) + \left(\mu_S - \mu_C \tanh\left(\frac{\hat{v}_S}{v_C}\right) \right) \frac{v_{11,2}}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{v_{11,2}^2}{2\hat{v}_S^2}} \right) \right). \quad (\text{A.7b})$$

Die tangential zur Kontaktfläche auftretende, statische Reibungskraft

$$F_{11,2} = F_{\perp,2} \left(\mu_C \tanh\left(\frac{v_{11,2}}{v_C}\right) + \left(\mu_S - \mu_C \tanh\left(\frac{\hat{v}_S}{v_C}\right) \right) \frac{v_{11,2}}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{v_{11,2}^2}{2\hat{v}_S^2}} \right) \quad (\text{A.8})$$

erhält man durch partielles Ableiten der Dissipationsgleichung (4.8) nach der Geschwindigkeit $v_{11,2}$.

A.5 Rehabilitationsroboter MoreGait

Die verallgemeinerte Dissipationsfunktion für die beiden dominanten Reibungseffekte im Getriebe des Hüftantriebs und in den Gleitlagern der Linearführung des Rehabilitationsroboters ist durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{d_\omega}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{d_v}{2} \dot{q}_2^2 + \hat{M}_C \omega_C \log \left(\cosh \left(\frac{\dot{q}_1}{\omega_C} \right) \right) + \hat{F}_C v_C \log \left(\cosh \left(\frac{\dot{q}_2}{v_C} \right) \right) \\ &\quad - \left(\hat{M}_S - \hat{M}_C \tanh \left(\frac{\hat{\omega}_S}{\omega_C} \right) - d_\omega \hat{\omega}_S \right) \hat{\omega}_S e^{\frac{1}{2} - \frac{\dot{q}_1^2}{2\omega_S^2}} \\ &\quad - \left(\hat{F}_S - \hat{F}_C \tanh \left(\frac{\hat{v}_S}{v_C} \right) - d_v \hat{v}_S \right) \hat{v}_S e^{\frac{1}{2} - \frac{\dot{q}_2^2}{2\hat{v}_S^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

gegeben. Leitet man $\mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ partiell nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_i ab, so erhält man daraus die statischen Reibungskräfte

$$Q_1^{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = d_\omega \dot{q}_1 + \hat{M}_C \tanh \left(\frac{\dot{q}_1}{\omega_C} \right) + \left(\hat{M}_S - \hat{M}_C \tanh \left(\frac{\hat{\omega}_S}{\omega_C} \right) - d_\omega \hat{\omega}_S \right) \frac{\dot{q}_1}{\omega_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{\dot{q}_1^2}{2\omega_S^2}} \quad (\text{A.10a})$$

am Hüftantrieb und

$$Q_2^D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = d_v \dot{q}_2 + \hat{F}_C \tanh\left(\frac{\dot{q}_2}{v_C}\right) + \left(\hat{F}_S - \hat{F}_C \tanh\left(\frac{\hat{v}_S}{v_C}\right) - d_v \hat{v}_S\right) \frac{\dot{q}_2}{\hat{v}_S} e^{\frac{1}{2} - \frac{\dot{q}_2^2}{2\hat{v}_S^2}} \quad (\text{A.10b})$$

an der Linearführung, die die Dynamik des Bewegungstrainers in Wirkrichtung der verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} beeinflussen.

Für die Restriktionsfunktion des mechanischen Knieanschlags zum Schutz des Patienten muss zunächst die Winkeldifferenz

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\mathbf{q}) = & \varphi - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\cos(\varphi)l_1 + \frac{\tan(\delta_{LA})s}{\sqrt{1+\tan^2(\delta_{LA})}} + y_{LA,0}}{l_1 \sin(\varphi) - \frac{s}{\sqrt{1+\tan^2(\delta_{LA})}} - x_{LA,0}}\right) \\ & + \arccos\left(\frac{l_2^2 - l_3^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{1+\tan^2(\delta_{LA})}} + x_{LA,0} - l_1 \sin(\varphi)\right)^2 + \left(\cos(\varphi)l_1 + \frac{\tan(\delta_{LA})s}{\sqrt{1+\tan^2(\delta_{LA})}} + y_{LA,0}\right)^2}{2l_2 \sqrt{\left(\frac{s}{\sqrt{1+\tan^2(\delta_{LA})}} + x_{LA,0} - l_1 \sin(\varphi)\right)^2 + \left(\cos(\varphi)l_1 + \frac{\tan(\delta_{LA})s}{\sqrt{1+\tan^2(\delta_{LA})}} + y_{LA,0}\right)^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

zwischen Ober- und Unterschenkel berechnet werden. Diese kann anschließend zusammen mit ihrer zeitlichen Ableitung in die Restriktionsfunktion eingesetzt werden.

Anhang B

Algorithmus des Zentralfilterns

Der nachfolgend dargestellte Algorithmus des Zentralfilterns in seiner Wurzelimplementierung basiert weitestgehend auf dem in [Mer04] beschriebenen Verfahren. Lediglich der letzte Teil des Korrekturschritts, in dem die Zustandskovarianz $\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}$ neu berechnet wird, entspricht dem Algorithmus in [Fox07].

Die Zustandsschätzung des Differenzfilters basiert auf einer Prädiktor-Korrektor-Struktur, bei der zunächst anhand der im letzten Abtastschritt geschätzten Zustände $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ und der Modellgleichungen $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ die Zustände zum aktuellen Zeitpunkt $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ prädiziert werden. Für die Lösung der Differentialgleichungen wird hier das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung verwendet. Anschließend wird die initiale Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ anhand der aktuellen Messwerte \mathbf{y}_k korrigiert, wodurch man die geschätzten Zustände $\hat{\mathbf{x}}_k$ erhält. Dieses Vorgehen wird dabei nicht nur für den Erwartungswert der Schätzung, sondern auch parallel für die $2n$ Sigmapunkte $\chi_{i,k}$ durchgeführt, die in Abhängigkeit der Kovarianz des vorangegangenen Abtastschritts $\mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k-1}}$ und der Schrittweite des Differenzenquotienten h bestimmt werden. Den resultierenden Schätzwert erhält man somit aus dem gewichteten Mittelwert des Erwartungswerts und der Sigmapunkte. Gemäß den Ausführungen in [Fox07] wurde für alle hier betrachteten Anwendungsfälle die Schrittweite zu $h = \sqrt{3}$ gewählt.

Für die Anwendung des Zentralfilterns werden zunächst der initiale Erwartungswert der Zustände $\hat{\mathbf{x}}_0$, die zugehörige Kovarianzmatrix $\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0}$ sowie die Kovarianzmatrizen für das Prozessrauschen \mathbf{S}_v und das Messrauschen \mathbf{S}_n festgelegt:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0, \mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} = \text{chol}\{\mathbf{P}_0\}, \mathbf{S}_v = \text{chol}\{\mathbf{Q}_P\}, \mathbf{S}_n = \text{chol}\{\mathbf{R}_M\}.$$

Da es sich hierbei um die Wurzelimplementierung des Filters handelt, werden diese über eine Cholesky-Zerlegung $\text{chol}\{\cdot\}$ aus \mathbf{P}_0 , \mathbf{Q}_P und \mathbf{R}_M berechnet. Anschließend werden für $k = 1, \dots, \infty$ folgende Schritte durchgeführt:

Berechnung der Sigmapunkte für den Prädiktionsschritt:

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1} = [\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \quad \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + h\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_{k-1}}, \quad \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} - h\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_{k-1}}]$$

Prädiktionsschritt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{k,k-1} &= \text{rk4}\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1})\} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k^- &= \frac{h^2-n}{h^2}\boldsymbol{\chi}_{0,k|k-1} + \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{2n}\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} \\ \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_k}^- &= \text{QR}\left\{\left[\frac{1}{2h}(\boldsymbol{\chi}_{1:n,k|k-1} - \boldsymbol{\chi}_{n+1:2n,k|k-1}), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\sqrt{h^2-1}}{2h^2}(\boldsymbol{\chi}_{1:n,k|k-1} + \boldsymbol{\chi}_{n+1:2n,k|k-1} - 2\boldsymbol{\chi}_{0,k|k-1}), \quad \boldsymbol{S}_v\right]\right\} \end{aligned}$$

Berechnung der Sigmapunkte für den Korrekturschritt:

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^* = [\hat{\boldsymbol{x}}_k^-, \quad \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + h\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_k}^-, \quad \hat{\boldsymbol{x}}_k^- - h\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_k}^-]$$

Korrekturschritt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{k|k-1} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^*) \\ \hat{\boldsymbol{y}}_k^- &= \frac{h^2-n}{h^2}\boldsymbol{y}_{0,k|k-1} + \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{2n}\boldsymbol{y}_{i,k|k-1} \\ \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{y}_k} &= \text{QR}\left\{\left[\frac{1}{2h}(\boldsymbol{y}_{1:n,k|k-1} - \boldsymbol{y}_{n+1:2n,k|k-1}), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\sqrt{h^2-1}}{2h^2}(\boldsymbol{y}_{1:n,k|k-1} + \boldsymbol{y}_{n+1:2n,k|k-1} - 2\boldsymbol{y}_{0,k|k-1}), \quad \boldsymbol{S}_n\right]\right\} \\ \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{y}_k} &= \frac{1}{2h}\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_k}^- (\boldsymbol{y}_{1:n,k|k-1} - \boldsymbol{y}_{n+1:2n,k|k-1})^\text{T} \\ \boldsymbol{K}_k &= \left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{y}_k} / \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{y}_k}^\text{T}\right) / \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{y}_k} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k &= \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}_k - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-) \\ \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_k} &= \text{QR}\left\{\left[\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_k}^- - \boldsymbol{K}_k \frac{1}{2h}(\boldsymbol{y}_{1:n,k|k-1} - \boldsymbol{y}_{n+1:2n,k|k-1}), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \boldsymbol{K}_k \frac{\sqrt{h^2-1}}{2h^2}(\boldsymbol{\chi}_{1:n,k|k-1} + \boldsymbol{\chi}_{n+1:2n,k|k-1} - 2\boldsymbol{\chi}_{0,k|k-1}), \quad \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{S}_n\right]\right\} \end{aligned}$$

Anhang C

Betreute Abschlussarbeiten

Harder, K.: *Robuste und adaptive Regelung eines Gangrehabilitationsroboters*. Masterarbeit, Universität Ulm, 2014.

Oppelt, A.: *Iterativ lernende Regelung eines neuartigen Gangtrainers zur Kompensation repetitiver Störungen*. Masterarbeit, Universität Ulm, 2014.

Peuling, S.: *Modellierung eines Trainingsgeräts zur Gangrehabilitation*. Bachelorarbeit, Universität Ulm, 2012.

Ziegler, J.: *Parameteridentifikation eines Trainingsgeräts zur Gangrehabilitation*. Diplomarbeit, Universität Ulm, 2014.

Anhang D

Eigene Veröffentlichungen

Teile der vorliegenden Dissertation wurden im Rahmen der folgenden Vorveröffentlichungen publiziert:

Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Modellierung eines Trainingsgeräts zur Gangrehabilitation*. In: Sawodny, O. und Adamy, J. (Herausgeber): *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.30*, Seiten 122–130. VDI/VDE-GMA, Technische Universität Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Darmstadt, 2013.

Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *A New Approach of Dynamic Friction Modelling for Simulation and Observation*. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Seiten 4523–4528, 2014.

Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Combined Estimation of Friction and Patient Activity in Rehabilitation Robotics*. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Seiten 12325–12330, 2014.

Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Combined State and Parameter Estimation for Adaptive Control and Feedback Applications for a Gait Rehabilitation Robot*. In: *Proceedings of the IEEE Multi-conference on Systems and Control*, Seiten 1287–1293, 2014.

Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Flatness-Based Trajectory Tracking Control of a Rehabilitation Robot with Disturbance Compensation*. In: *Proceedings of the IEEE Multi-conference on Systems and Control*, Seiten 1275–1280, 2014.

Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Numerisch robuste Modellierung von Reibung in dynamischen Systemen*. In: Rudolph, J. und Adamy, J. (Herausgeber): *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.30*, Seiten 114–128. VDI/VDE-GMA, Technische Universität Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Darmstadt, 2014.

Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Dynamical Modeling of Constraints with Friction in Mechanical Systems*. In: *Proceedings of the 8th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, Seiten 514–519, 2015.

Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Modelling of unilateral constraints using power-based restriction functions within Lagrangian mechanics*. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Band 21, Nr. 6, Seiten 509–534, 2015.

Symbolverzeichnis

Lagrange-Formalismus

q	Verallgemeinerte Koordinaten
\dot{q}	Verallgemeinerte Geschwindigkeiten
T	Kinetische Energie
V	Potentielle Energie
Q	Verallgemeinerter Kraftvektor
\mathcal{L}	Lagrange-Funktion

Reibmodell

v	Geschwindigkeit
F_{\perp}	Normalkraft
d	Dämpfungskonstante der viskosen Reibung
\mathcal{D}_v	Dissipationsfunktion der viskosen Reibung
$F_v^{\mathcal{D}}$	Reibkraft der viskosen Reibung
μ_C	Gleitreibungskoeffizient
\hat{F}_C	Maximalkraft der Coulomb-Reibung
v_C	Transitionskoeffizient der Coulomb-Reibung
\mathcal{D}_C	Dissipationsfunktion der Coulomb-Reibung
$F_C^{\mathcal{D}}$	Reibkraft der Coulomb-Reibung
μ_S	Haftreibungskoeffizient
\hat{F}_S	Maximalkraft der Stribeck-Reibung
v_S	Stribeck-Geschwindigkeit
\hat{v}_S	Geschwindigkeit bei maximaler Haftkraft
\mathcal{D}_S	Dissipationsfunktion der Stribeck-Reibung
$F_S^{\mathcal{D}}$	Reibkraft der Stribeck-Reibung
$g^{\mathcal{D}}$	Abklingverhalten der Stribeck-Reibung
\mathcal{D}_R	Dissipationsfunktion des statischen Reibmodells
$F_R^{\mathcal{D}}$	Reibkraft des statischen Reibmodells

ϵ	Stabilisierungsterm
\mathcal{D}	Verallgemeinerte Dissipationsfunktion
$\mathbf{Q}^{\mathcal{D}}$	Verallgemeinerter, statischer Reibkraftvektor
T_{F}	Filterkonstante des Tiefpassfilters
a	Adaptionsfaktor der Filterkonstante
\dot{q}_{F}	Adaptionsgeschwindigkeit
$\mathbf{Q}_{\text{d}}^{\mathcal{D}}$	Dynamischer Reibkraftvektor
k_{LG}	Federkonstante des LuGre-Modells
d_{LG}	Mikroskopischer Dämpfungskoeffizient des LuGre-Modells

Kontaktmodell

s_{\perp}	Abstand zwischen Objektmittelpunkt und Beschränkung
v_{\perp}	Relativgeschwindigkeit zwischen Objektmittelpunkt und Beschränkung
g	Abstand zwischen Objekt und Beschränkung (engl.: <u>g</u> ap function)
s_0	Außenradius der Kontaktsphäre
s_c	Kompressionsradius der Kontaktsphäre
r_a	Approximationsparameter der Aktivierungsfunktion
r_t	Transitionskoeffizient zur Definition der Objektelastizität
r_c	Offset der Beschränkung (engl.: <u>c</u> onstraint)
\mathcal{R}_a	Aktivierungsfunktion für die Schrankendetektion
$\mathcal{R}_{a,r}$	Aktivierungsfunktion für starre Körper (engl.: <u>r</u> igid)
r_d	Dämpfungskoeffizient zur Definition der energetischen Kontaktverluste
r_f	Kraft-/Widerstandskoeffizient der Beschränkung (engl.: <u>f</u> orce)
\mathcal{R}_p	Schrankenspezifische Leistungsfunktion
$\mathcal{R}_{p,el}$	Schrankenspezifische Leistungsfunktion für elastische Kontakte
$\mathcal{R}_{p,pl}$	Schrankenspezifische Leistungsfunktion für plastische Kontakte
v_{\perp}^{-}	Aufprallgeschwindigkeit des Objekts
v_{\perp}^{+}	Austrittsgeschwindigkeit des Objekts
e_r	Restitutionskoeffizient
T_{-}	Objektenergie vor dem Kontakt
ΔT_c	Energieverluste während der Kompressionsphase (engl.: <u>c</u> ompression)
T_s	Gespeicherte Energie im Umkehrpunkt
ΔT_r	Energieverluste während der Restitutionsphase
\mathcal{R}	Restriktionsfunktion für viskoelastische Kontakte
\mathcal{R}_{el}	Restriktionsfunktion für elastische Kontakte
\mathcal{R}_{pl}	Restriktionsfunktion für plastische Kontakte

F_c	Widerstandskraft der Beschränkung (engl.: <u>c</u> onstraint)
$F_{c,el}$	Widerstandskraft der Beschränkung bei elastischen Kontakten
$F_{c,pl}$	Widerstandskraft der Beschränkung bei plastischen Kontakten
$F_{\perp,el}$	Normalkraft bei elastischen Kontakten
$F_{\perp,pl}$	Normalkraft bei plastischen Kontakten
p	Impuls des Objekts
p_-	Impulsänderung während der Kompressionsphase
p_+	Impulsänderung während der Restitutionsphase
\hat{s}_{\perp}	Maximale Deformation bei viskoelastischen Kontakten
$\hat{s}_{\perp,el}$	Maximale Deformation bei elastischen Kontakten
$\hat{s}_{\perp,pl}$	Maximale Deformation bei plastischen Kontakten
s_{Δ}	Breite der Beschränkung
\tilde{s}_0	Ende der Beschränkung
\tilde{s}_c	Ende der maximalen Interaktion zwischen Objekt und Beschränkung
\tilde{r}_t	Transitionskoeffizient für den Schrankendurchbruch
\tilde{r}_c	Offset des Schrankenendes
$\tilde{\mathcal{R}}_a$	Aktivierungsfunktion für Beschränkungen mit endlicher Breite
$\tilde{\mathcal{R}}_{a,r}$	Aktivierungsfunktion starrer Objekte für Beschränkungen mit endlicher Breite
$\tilde{\mathcal{R}}$	Restriktionsfunktion für Beschränkungen mit endlicher Breite
$Q^{\mathcal{R}}$	Verallgemeinerte Kontaktkräfte in Abhängigkeit der Restriktionsfunktion

Kontaktmodell mit Reibung

$v_{ }$	Tangentiale Relativgeschwindigkeit am Kontaktpunkt
$\mathcal{D}_v^{\mathcal{R}}$	Dissipationsfunktion der kontaktbedingten viskosen Reibung
$\mathcal{D}_C^{\mathcal{R}}$	Dissipationsfunktion der kontaktbedingten Coulomb-Reibung
$\mathcal{D}_S^{\mathcal{R}}$	Dissipationsfunktion der kontaktbedingten Stribeck-Reibung
$\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$	Verallgemeinerte, kontaktbedingte Dissipationsfunktion
$Q_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$	Kontaktbedingter, verallgemeinerter dynamischer Reibkraftvektor
$F_{ }$	Tangentiale Reibkraft am Kontaktpunkt

Bewegungstrainermodell

φ	Lotwinkel an der Hüfte
$P_{HF,0}$	Fixpunkt der Hüftfeder
$k_{HF,0}$	Federkonstante der Hüftfeder
$l_{HF,0}$	Länge der Hüftfeder
l_{HF}	Hebellänge der Hüftfeder
δ_{HF}	Hebelwinkel der Hüftfeder

M	Drehmoment am Hüftantrieb
l_{OS}	Oberschenkellänge
\mathbf{P}_{KG}	Position des Kniegelenks
m_{KG}	Approximierte Masse im Kniegelenk
l_{US}	Unterschenkellänge
\mathbf{P}_{SG}	Position des Sprunggelenks
m_{SG}	Approximierte Masse im Sprunggelenk
l_{ST}	Länge der Stimulationseinheit
\mathbf{P}_{SL}	Position des Schlittens
$\mathbf{P}_{SL,0}$	Nullposition des Schlittens
m_{SL}	Approximierte Masse im Schlitten
s	Schlittenposition
$s_{LF,0}$	Schlittenposition bei entspannter Feder
k_{LF}	Federkonstante der Linearfeder
\mathbf{P}_{LA}	Fixpunkt des Linearantriebs
δ_{LA}	Steigung des Linearantriebs
F	Kraft am Linearantrieb
\mathbf{g}	Potenzialkräftevektor
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{f}_{S0}	Differentialgleichungen des reib- und kontaktfreien Modells
\mathbf{f}_{S1}	Differentialgleichungen des Modells mit statischer Reibung
\mathbf{f}_{S2}	Differentialgleichungen des Modells mit dynamischer Reibung
\mathbf{f}_{S3}	Differentialgleichungen des Gesamtmodells
\mathcal{R}_{LF}	Restriktionsfunktion der Schlittenbeschränkung
\mathcal{R}_{KA}	Restriktionsfunktion der Kniebeschränkung
\mathcal{R}_{ST}	Restriktionsfunktion der Stimulationseinheit

Zentralfilter

\mathbf{Q}_P	Kovarianzmatrix des Prozessrauschens
\mathbf{R}_M	Kovarianzmatrix des Messrauschens
\mathbf{P}_0	Initiale Zustandskovarianz
h	Schrittweite des Differenzenquotienten
χ	Sigmapunkte
$\hat{\mathbf{x}}_k^-$	Prädizierte Zustände
$\hat{\mathbf{y}}_k^-$	Prädizierte Ausgänge
$\hat{\mathbf{x}}_k$	Korrigierte Zustandsschätzung

Literaturverzeichnis

- [ADC94] Armstrong-Hélouvry, B.; Dupont, P. und Canudas de Wit, C.: *A survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction*. In: *Automatica*, Band 30, Nr. 7, Seiten 1083–1138, 1994.
- [And30] Andrews, J. P.: *LVI. Theory of collision of spheres of soft metals*. In: *Philosophical Magazine Series 7*, Band 9, Seiten 593–610, 1930.
- [ASB07] Andersson, S.; Söderberg, A. und Björklund, S.: *Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts*. In: *Tribology International*, Band 40, Seiten 580–587, 2007.
- [Bow82] Bowden, F. P.: *Friction: An Introduction to Tribology*. Hrsg. von Tabor, D. Krieger, Malabar, 1982.
- [BP82] Bo, L. C. und Pavelescu, D.: *The friction-speed relation and its influence on the critical velocity of stick-slip motion*. In: *Wear*, Band 82, Nr. 3, Seiten 277–289, 1982.
- [Bra91] Brach, R. M.: *Mechanical impact dynamics: rigid body collisions*. Wiley, New York, 1991.
- [BS93] Bliman, P.-A. und Sorine, M.: *A system-theoretic approach of systems with hysteresis. Application to friction modelling and compensation*. In: *Proceedings of the 2nd European Control Conference*, 1993.
- [BS95] Bliman, P.-A. und Sorine, M.: *Easy-to-use realistic dry friction models for automatic control*. In: *Proceedings of the 3rd European Control Conference*, Seiten 3788–3794, 1995.
- [COÅL93] Canudas de Wit, C.; Olsson, H.; Åström, K. J. und Lischinsky, P.: *Dynamic Friction models and control design*. In: *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, 1993.
- [COÅL95] Canudas de Wit, C.; Olsson, H.; Åström, K. J. und Lischinsky, P.: *A New Model for Control of Systems with Friction*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Band 40, Seiten 419–425, 1995.
- [Cou21] Coulomb, C. A.: *Théorie des machines simple (Nouv. éd.)* Bachelier, 1821.

- [Cro52] Crook, A. W.: *A Study of Some Impacts between Metal Bodies by a Piezo-Electric Method*. In: *Proceedings of the Royal Society London A*, Band 212, Seiten 377–390, 1952.
- [Dah68] Dahl, P.: *A solid friction model*. Techn. Ber. TOR-0158(3107-18). The Aerospace Corporation, El Segundo, CA, 1968.
- [Dan99] Dankowicz, H.: *On the Modeling of Dynamic Friction Phenomena*. In: *Z. Angew. Math. Mech.* Band 79, Seiten 399–409, 1999.
- [DH07] Dresig, H. und Holzweißig, F.: *Maschinendynamik*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.
- [Dow98] Dowson, D.: *History of Tribology*. Professional Engineering Publishing Limited, London, 1998.
- [FMM92] Ferretti, G.; Maffezzoni, C. und Magnani, G.: *Dynamic simulation of robots interacting with stiff contact surfaces*. In: *Transactions of the Society for Computer Simulation*, Band 9, Seiten 1–24, 1992.
- [Fox07] Fox, J.: *Robotergestützte Parameterschätzung für inertielle Messsysteme*. Logos, Berlin, 2007.
- [Glo01] Glocker, C.: *On frictionless impact models in rigid-body systems*. In: *Philosophical Transaction of the Royal Society London A*, Band 359, Seiten 2385–2404, 2001.
- [Glo04] Glocker, C.: *Newton's and Poisson's impact law for the non-convex case of re-entrant corners*. In: *Complementarity, Duality and Symmetry in Nonlinear Mechanics*, Band 6, Seiten 101–125, Springer, New York, 2004.
- [Gol01] Goldsmith, W.: *Impact - The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*. Dover Publications, Inc., Mineola, 2001.
- [GPS06] Goldstein, H.; Poole, C. P. und Safko, J. L.: *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH, Weinheim, 2006.
- [GS02] Gilardi, G. und Sharf, I.: *Literature survey of contact dynamics modeling*. In: *Mechanism and Machine Theory*, Band 37, Seiten 1213–1239, 2002.
- [Har14] Harder, K.: *Robuste und adaptive Regelung eines Gangrehabilitationsroboters*. Masterarbeit, Universität Ulm, 2014.
- [HC75] Hunt, K. H. und Crossley, F. R. E.: *Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact*. In: *Journal of Applied Mechanics*, Band 42, Nr. 2, Seiten 440–445, 1975.
- [HM94] Hurmuzlu, Y. und Marghitu, D. B.: *Rigid Body Collisions of Planar Kinematic Chains With Multiple Contact Points*. In: *The International Journal of Robotics Research*, Band 13, Seiten 82–92, 1994.

- [HS90] Hess, D. P. und Soom, A.: *Friction at a Lubricated Line Contact Operating at Oscillating Sliding Velocities*. In: *Journal of Tribology*, Band 112, Nr. 1, Seiten 147–152, 1990.
- [IX00] Ito, K. und Xiong, K.: *Gaussian filters for nonlinear filtering problems*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Band 45, Nr. 5, Seiten 910–927, 2000.
- [Joh03] Johnson, K. L.: *Contact mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [JUD95] Julier, S. J.; Uhlmann, J. K. und Durrant-Whyte, H. F.: *A New Approach for Filtering Nonlinear Systems*. In: *Proceedings of the American Control Conference*, Seiten 1628–1632, 1995.
- [Khu13] Khulief, Y. A.: *Modeling of Impact in Multibody Systems: An Overview*. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Band 8, 021012–1:15, 2013.
- [Kli99] Klisch, T.: *Contact mechanics in multibody systems*. In: *Mechanism and Machine Theory*, Band 34, Seiten 665–675, 1999.
- [Kne10] Knestel, M.: *MoreGait - Ein Rehabilitationsroboter zur Gangtherapie im Heimbereich*. Cuvillier, Göttingen, 2010.
- [KRL06] Kakabeke, T. H.; Roy, S. H. und Largo, R. H.: *Coordination Training in individuals with incomplete spinal cord injury: consideration of motor hierachical structures*. In: *Spinal Cord*, Band 44, Seiten 7–10, 2006.
- [Kuy97] Kuypers, F.: *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH Bad Honnef, 1997.
- [LF98] Liang, J.-W. und Feeny, B. F.: *Dynamical Friction Behaviour in a Forced Oscillator with a Compliant Contact*. In: *Journal of Applied Mechanics*, Band 65, Nr. 1, Seiten 250–257, 1998.
- [LN94] Lankarani, H. M. und Nikravesh, P. E.: *Continuous Contact Force Models for Impact Analysis in Multibody Systems*. In: *Nonlinear Dynamics*, Band 5, Seiten 193–207, 1994.
- [Mas49] Masket, A. V.: *The Measurement of Forces Resisting Armor Penetration*. In: *Journal of Applied Physics*, Band 20, Seiten 132–140, 1949.
- [May07] Mayo, J.: *Impacts with friction in planar flexible multi-body systems: Application of the momentum-balance approach*. In: *Proceedings of the 12th International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress*, 2007.
- [MDSH05] Makkar, C.; Dixon, W. E.; Sawyer, W. G. und Hu, G.: *A New Continuously Differentiable Friction Model for Control Systems Design*. In: *Proceedings of the 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Seiten 600–605, 2005.

- [MO99] Marhefka, D. W. und Orin, D. E.: *A Compliant Contact Model with Nonlinear Damping for Simulation of Robotic Systems*. In: *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Band 29, Seiten 566–572, 1999.
- [Mer04] van der Merwe, R.: *Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models*. Dissertation, Oregon Health & Science University, 2004.
- [Mor88] Moreau, J. J.: *Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics*. In: *Nonsmooth Mechanics and Applications*, Seiten 1–82, Springer, Wien, 1988.
- [NPR00] Nørgaard, M.; Poulsen, N. K. und Ravn, O.: *New developments in state estimation for nonlinear systems*. In: *Automatica*, Band 36, Nr. 11, Seiten 1627–1638, 2000.
- [OÅC⁺98] Olsson, H.; Åström, K. J.; Canudas de Wit, C.; Gräfer, M. und Lischinsky, P.: *Friction Models and Friction Compensation*. In: *European Journal of Control*, Band 4, Seiten 176–195, 1998.
- [Ols96] Olsson, H.: *Control Systems with Friction*. Dissertation, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1996.
- [Opp14] Oppelt, A.: *Iterativ lernende Regelung eines neuartigen Gangtrainers zur Kompensation repetitiver Störungen*. Masterarbeit, Universität Ulm, 2014.
- [Peu12] Peuling, S.: *Modellierung eines Trainingsgeräts zur Gangrehabilitation*. Bachelorarbeit, Universität Ulm, 2012.
- [PG96] Pfeiffer, F. und Glocker, C.: *Multibody dynamics with unilateral contacts*. Wiley, New York, 1996.
- [Pie10] Pietruszkiewicz, W.: *A comparison of nonlinear Kalman filtering applied to feed-forward neural networks as learning algorithms*. In: *Proceedings of the IEEE 9th International Conference on Cybernetic Intelligent Systems*, Seiten 1–6, 2010.
- [Pop10] Popov, V. L.: *Contact Mechanics and Friction*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [RPS⁺11] Rupp, R.; Plewa, H.; Schuld, Ch. u. a.: *Ein motorisiertes Exoskelett zur automatisierten Lokomotionstherapie im häuslichen Umfeld - Ergebnisse einer Pilotstudie mit inkomplett Querschnittgelähmten*. In: *Neurologie & Rehabilitation*, Band 17(1), Seiten 13–20, 2011.

- [RS84] Richter, P. H. und Scholz, H.-J.: *Chaos in Classical Mechanics: The Double Pendulum*. In: Schuster, P (Herausgeber): *Stochastic Phenomena and Chaotic Behaviour in Complex Systems*, Band 21. Aus der Reihe *Springer Series in Synergetics*, Seiten 86–97, Springer Berlin, 1984.
- [SAGP00] Swevers, J.; Al-Bender, F.; Ganseman, C. G. und Prajogo, T.: *An Integrated Friction Model Structure with Improved Presliding Behaviour for Accurate Friction Compensation*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Band 45, Seiten 675–686, 2000.
- [SBD13] Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Modellierung eines Trainingsgeräts zur Gangrehabilitation*. In: Sawodny, O. und Adamy, J. (Herausgeber): *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.30*, Seiten 122–130. VDI/VDE-GMA, Technische Universität Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Darmstadt, 2013.
- [SBD14a] Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *A New Approach of Dynamic Friction Modelling for Simulation and Observation*. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Seiten 4523–4528, 2014.
- [SBD14b] Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Combined Estimation of Friction and Patient Activity in Rehabilitation Robotics*. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Seiten 12325–12330, 2014.
- [SBD14c] Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Combined State and Parameter Estimation for Adaptive Control and Feedback Applications for a Gait Rehabilitation Robot*. In: *Proceedings of the IEEE Multi-conference on Systems and Control*, Seiten 1287–1293, 2014.
- [SBD14d] Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Flatness-Based Trajectory Tracking Control of a Rehabilitation Robot with Disturbance Compensation*. In: *Proceedings of the IEEE Multi-conference on Systems and Control*, Seiten 1275–1280, 2014.
- [SBD14e] Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Numerisch robuste Modellierung von Reibung in dynamischen Systemen*. In: Rudolph, J. und Adamy, J. (Herausgeber): *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.30*, Seiten 114–128. VDI/VDE-GMA, Technische Universität Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Darmstadt, 2014.
- [SBD15a] Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Dynamical Modeling of Constraints with Friction in Mechanical Systems*. In: *Proceedings of the 8th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, Seiten 514–519, 2015.

- [SBD15b] Specker, T.; Buchholz, M. und Dietmayer, K.: *Modelling of unilateral constraints using power-based restriction functions within Lagrangian mechanics*. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Band 21, Nr. 6, Seiten 509–534, 2015.
- [SRH⁺07] Srinivasan, M.; Raj, H. A.; Haritha, D.; Krishna, D. S. und Tyagi, M. K.: *Derivative-free filters for target motion analysis with bearings-only measurement*. In: *Proceedings of the Institution of Engineering and Technology UK International Conference on Information and Communication Technology in Electrical Sciences*, Seiten 93–99, 2007.
- [Str03] Stribeck, R.: *Wesentliche Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager*. Springer, 1903.
- [Str04] Stronge, W. J.: *Impact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [Tus47] Tustin, A.: *The effects of backlash and of speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control systems*. In: *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part IIA: Automatic Regulators and Servo Mechanisms*, Band 94, Nr. 1, Seiten 143–151, 1947.
- [WKA92] Wang, Y.-T.; Kumar, V. und Abel, J.: *Dynamics of Rigid Bodies Undergoing Multiple Frictional Contacts*. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1992.
- [WSWK08] Wojewoda, J.; Stefanski, A.; Wiercigroch, M. und Kapitaniak, T.: *Hysteretic effects of dry friction: modelling and experimental studies*. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Band 366, Seiten 747–765, 2008.
- [WZR⁺05] Wirz, M.; Zamon, D. H.; Rupp, R. u. a.: *Effectiveness of Automated Locomotor Training in Patients With Chronic Incomplete Spinal Cord Injury: A Multicenter Trial*. In: *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, Band 86, Seiten 672–680, 2005.
- [ZA05] Zhang, D.-G. und Angeles, J.: *Impact dynamics of flexible joint robots*. In: *Computers and Structures*, Band 83, Seiten 25–33, 2005.
- [Zie14] Ziegler, J.: *Parameteridentifikation eines Trainingsgeräts zur Gangrehabilitation*. Diplomarbeit, Universität Ulm, 2014.

