Krümmungen und Indexsätze - auf den Spuren von Gauß-Bonnet, Cartan, Atiyah-Singer und Witten.

Eine Einführung in Geometrie und Topologie für Physiker.

Bernhard Schiekel

Krümmungen und Indexsätze -
auf den Spuren von Gauß-Bonnet,
Cartan, Atiyah-Singer und Witten.
Eine Einführung in Geometrie und Topologie für Physiker.

Bernhard Schiekel,

Vers. 1.0, 30.06.2017

Drucksatz mit LYX 2.2.1, unter openSUSE-Linux 42.2 (Kernel 4.4.36),

KOMA-Scrip 2015.105.3.18svn37734-21.2t (TEX Live 2015),

BibTex-style natdin 3.0a4 (2005), pdfTEX 2015.104.svn37754-20.19 (TEX Live 2015).

Versionsgeschichte:

- V-1.0, 30.06.2017: 1. vollständige Version
  (Version 1.0, „you've been warned", Fehlerhinweise willkommen :-)

in Dankbarkeit meinen verehrten Eltern,

meinen inspirierenden und freundlichen Lehrern,

und Beate

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

„Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen."

Galileo Galilei (1564 - 1642), zitiert nach DMV (2013).

„Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken."

David Hilbert (1862 - 1943), zitiert nach DMV (2013).

„Kraft ist die Krümmung von Mannigfaltigkeiten
(Raum-Zeit-Mannigfaltigkeiten und Hauptfaserbündel)."

Eberhard Zeidler (1940), zitiert nach Grosche u. a. (2003), S. 571.

Der Gauß-Bonnet-Satz ist ein klassischer Satz über die Krümmung einer zweidimensionalen Fläche im dreidimensionalen Raum. Es gab bereits in der griechischen Antike erste Ansätze zu einem Verständnis von Kugelflächen. Euler begündete ab 1760 die moderne Differentialgeometrie und fand eine topologische Invariante von konvexen Körpern, die heute sog. Euler-Charakteristik. Schließlich konnte Gauß in seiner berühmten Veröffentlichung „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*" (*Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen*) im Jahr 1827 verschiedene Begriffe der Flächenkrümmung befriedigend klären. Und mit Riemanns Habilitationsvorlesung „*Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*" im Jahr 1854 beginnt die 'moderne' Differentialgeometrie, die nicht nur die Basis von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie ist, sondern auch die Grundlagen gelegt hat, welche die umfangreichen und tiefen Erweiterungen durch Élie Cartan, Hopf, Chern bis hin zu den Indexsätzen von Atiyah-Singer vorbereitet hat.

Vor einigen Jahren hat der Verfasser ein Manuskript mit dem Titel: „*Zeta-Funktionen in der Physik - eine Einführung*" (Schiekel, 2011) veröffentlicht. Diese Arbeit wendete sich an Physik-Studenten und Physiker, die einen leichten Zugang zur Welt der Zetafunktionen suchen, wie sie in der Quantentheorie und Quantenfeldtheorie auftauchen. Hierbei wurde auch auf den Zusammenhang spektraler Zetafunktionen mit den bedeutenden Indexsätzen von Atiyah und Singer für elliptische Pseudo-Differential-Operatoren hingewiesen. Der Zugang zu diesen Indexsätzen erfolgte von der Seite der Funktionalanalysis aus.

Nun ist der Index eines elliptischen Pseudo-Differential-Operators aber eine topologische Invariante der entsprechenden Lösungsmannigfaltigkeit und man kann sich diesem Index also auch über die Geometrie der Lösungsmannigfaltigkeit nähern.

Die vorliegende Arbeit versucht eine Einführung in einige geometrische Indexsätze vom berühmten Gauß-Bonnet-Satz bis hin zu einem supersymmetrischen Beweis eines Atiyah-Singer-Indexsatzes für Spinkomplexe von Witten et al. zu geben. Dabei wird in der Darstellung keine moderne, höchstmögliche Abstraktion etwa im Sinne von Grothedieck angestrebt, sondern ein leicht verständlicher Zugang zur historischen Entwicklung einiger grundlegender Fragen der Geometrie und Differentialtopologie. Vorausgesetzt werden daher nur einfache Kenntnisse der Analysis, linearen Algebra, differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und der Differentialformen von Élie Cartan. Bei Physikern beliebte Einführungen sind: Flanders (1989), Schutz (1980) und insbesondere die schönen Darstellungen von Nakahara (2003) und Frankel (2004).

Manchmal erschien es dem Verfasser aber doch wünschenswert, etwas weiter in die Tiefen und Untiefen der Mathematik vorzudringen, als die oben genannten Autoren. Eine große Hilfe hierbei waren für den Bereich der Differentialgeometrie die Standardwerke von Kobayashi u. Nomizu (1963), Kobayashi u. Nomizu (1969) und die fünf Bände von Spivak (1979), eine unerschöpfliche Quelle der Inspiration und Klarheit, für den Bereich der Algebraischen Topologie die schönen Bücher von Stöcker u. Zieschang (1994) und Hatcher (2001) und für die Indexsätze die wunderbare Darstellung durch Gilkey (1995). Seinem fünften Band über Differentialgeometrie hat Spivak den Titel gegeben:

All the Way with Gauss-Bonnet

- und dies könnte auch als Motto für die hier vorgelegte Arbeit dienen. Ein großer Dank allen genannten Autoren!

Special Thanks: Ein ganz spezieller Dank geht an die LaTeX- und LyX-Community für die wunderbaren Open-Source Programme und die immer hilfreiche und freundliche Unterstützung!

Kommentare und Fehlerhinweise sind willkommen unter: mb.schiekel@arcor.de

Möge diese Arbeit hilfreich sein. Viel Freude bei der Lektüre!

2 Konventionen

Wir verwenden die Konventionen von Misner u. a. (1973), an die sich weitgehend auch Nakahara (2003), Frankel (2004), Wald (1984) und Freedman u. Van Proeyen (2012) halten.

Die Lichtgeschwindigkeit c und Planck-Konstante $\hbar$ sind, sofern nicht explizit angegeben, jeweils auf 1 gesetzt.

Wenn M eine Menge bezeichne, dann seien $\mathring{M}$ das Innere von M, ∂M der Rand von M und $\bar{M}$ die Abschließung von M.

Wenn A eine Matrix ist, dann seien A^T die transponierte und $A^\dagger$ die adjungierte Matrix.

Es wird im Allgemeinen die Einsteinsche Summenkonvention verwendet:

$$A^\mu B_\mu := \sum_{\mu=1}^{m} A^\mu B_\mu \ .$$

In Zweifelsfällen wird jedoch die Summation ausführlich hingeschrieben.

Die euklidische Metrik ist $g_{\mu\nu} := \delta_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(+1, +1, \ldots, +1)$.

Die 'Plus'-Minkowski-Metrik ist $g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$.

Das Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{i_1,\ldots,i_k}$ ist das Vorzeichen der Permutation π, welche die Zahlen $(1, 2, \ldots, k)$ in die Zahlen $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ abbildet:

$$\pi := \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \end{pmatrix} \ , \quad \epsilon_{i_1,\ldots,i_k} := \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} := \mathrm{sgn}\, \pi \ .$$

Der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor $\tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_m}$ unterscheidet sich vom Levi-Civita-Symbol nur in seiner kontravarianten Form:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_m} &:= \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_m} \ , \\ \tilde{\epsilon}^{\mu_1\ldots\mu_m} &:= g^{\mu_1\nu_1} \cdot \ldots \cdot g^{\mu_m\nu_m} \tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_m} = g^{\mu_1\nu_1} \cdot \ldots \cdot g^{\mu_m\nu_m} \epsilon_{\nu_1\ldots\nu_m} \ . \end{aligned}$$

Die Symmetrisierung und Antisymmetrisierung von Indizes wird definiert als:

$$A_{\{\mu\nu\}} := \frac{1}{2!}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu\}}) \ , \quad A_{[\mu\nu]} := \frac{1}{2!}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu\}}) \ .$$

Die Strukturkonstanten einer Lie-Algebra sind definiert als: $[e_a, e_b] = c_{ab}{}^c\, e_c$.

Die kovariante Ableitung der Basisvektoren definiert die sog. Zusammenhangskoeffizienten:

$$\nabla_a e_b := \nabla_{e_a} e_b := \omega^c{}_{ab}\, e_c \ .$$

Die kovarinate Ableitung bzgl. der Vektoren $X = X^a e_a$ und $Y = Y^b e_b$ ist:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X^a e_a} Y^b e_b = X^a (e_a[Y^b]\, e_b + Y^b \nabla_{e_a} e_b) \\ &= X^a (e_a[Y^b]\, e_b + Y^b \omega^c{}_{ab}\, e_c) = X^a (e_a[Y^c] + \omega^c{}_{ab} Y^b)\, e_c \ .\end{aligned}$$

Der Torsionstensor ist:

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \ , \quad \text{bzw.}$$

$$T^a{}_{bc} := \langle \theta^a \mid T(e_b, e_c) \rangle = \omega^a{}_{bc} - \omega^a{}_{cb} - c_{bc}{}^a \ .$$

Der Riemannsche Krümmungstensor ist:

$$R(X,Y)Z := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)\, Z - \nabla_{[X,Y]} Z \ , \quad \text{bzw.}$$

$$R^a{}_{bcd} := \langle \theta^a \mid R(e_c, e_d) e_b \rangle = e_c \omega^a{}_{db} - e_d \omega^a{}_{cb} + \omega^e{}_{db} \omega^a{}_{ce} - \omega^e{}_{cb} \omega^a{}_{de} - c_{cd}{}^e \omega^a{}_{eb} \ .$$

Der Ricci-Tensor ist: $Ric_{\lambda\nu} := R^\kappa{}_{\lambda\kappa\nu}$.
Der Ricci-Skalar ist $\mathcal{R} := Ric^\nu{}_\nu = g^{\nu\lambda} Ric_{\lambda\nu}$.

Als Basen der Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$ verwenden wir die beiden Sätze von 2×2 Matrizen:

$$\begin{aligned}\sigma_\mu &:= (-\mathbb{1}, +\sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar\sigma_\mu = (-\mathbb{1}, -\sigma_i) \quad \text{bzw.} \\ \sigma^\mu &:= (\mathbb{1}, +\sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar\sigma^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma_i) \ .\end{aligned}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Daraus folgt

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \ , \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \ ,$$

$$\sigma_\mu \bar\sigma_\nu + \sigma_\nu \bar\sigma_\mu = -2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1} \ .$$

Die Diracschen Gamma-Matrizen verwenden wir in der Weyl-Darstellung:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \, , \; \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \, .$$

Daraus folgt in der 'Plus'-Minkowski-Metrik diag$(-1, +1, \ldots, +1)$.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} \, .$$

$$\gamma_* := \gamma^5 := \gamma_5 := (-i)^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} +\mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \, .$$

Damit gilt für den Diracschen Bispinor $\psi^T := (\psi_L, \psi_R)^T$ die folgende Dirac-Gleichung:

$$(\not{p} + mc\mathbb{1})\psi = (\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi = \vec{0} \, , \text{ bzw.}$$

$$(i\hbar\not{\partial} - mc)\psi(p, x) = (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\mathbb{1})\psi(p, x) = \vec{0} \, .$$

Für den Spintensor folgt wiederum in der 'Plus'-Minkowski-Metrik diag$(-1, +1, \ldots, +1)$:

$$\Sigma^{\mu\nu} := -\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \, ,$$

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} \, .$$

Für die Dirac-Gleichung mit euklidischer Metrik diag$(+1, +1, \ldots, +1)$, d.h. bzgl. der Gruppe $O(4)$, verwenden wir die folgenden euklidischen Gamma-Matrizen:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \, , \; \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \, ,$$

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}\mathbb{1} \, .$$

$$\gamma_* := \gamma^5 := \gamma_5 := (-i)^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \, .$$

Die Dirac-Gleichung für den Diracschen Bispinor $\psi^T := (\psi_L, \psi_R)^T$ bleibt unverändert, allerdings mit den euklidischen Gamma-Matrizen.

Die Verallgemeinerung auf eine $m = 2n$ dimensionale euklidische Mannigfaltigkeit geschieht über die entsprechende Clifford-Algebra. Seien $\gamma^\mu, \;\mu = 1, \ldots, m$ die Erzeugenden einer Clifford-Algebra und $\hat{c}_\nu$, $\hat{c}_\nu^\dagger$ mit $\nu = 1, \ldots, n = \frac{m}{2}$ die entsprechenden Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren eines n-Fermionen-Systems mit

$$\hat{c}_\nu := \frac{1}{2}(\gamma^{2\nu-1} + i\gamma^{2\nu}) \, , \quad \hat{c}_\nu^\dagger := \frac{1}{2}(\gamma^{2\nu-1} - i\gamma^{2\nu}) \, , \quad \nu = 1, \ldots, n = \frac{m}{2} \, ,$$

dann gilt mit dem Fermion-Teilchenzahl-Operator $\hat{F}$:

$$\hat{F} := \sum_{\nu=1}^{n} \hat{c}_\nu^\dagger \hat{c}_\nu \, ,$$

$$\Gamma := \gamma_* := \gamma^{2n+1} := (-i)^n\gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} = e^{i\pi\hat{F}} = (-1)^{\hat{F}} = (-1)^{\sum_{\nu=1}^{n} \hat{c}_\nu^\dagger \hat{c}_\nu} \, .$$

3 Euklid und Archimedes

3.1 Euklid von Alexandria (Εὐκλείδης, ca. 365-290 v. Chr.)

Über das Leben von Euklid ist kaum etwas verläßliches bekannt. Eine Quelle (Proklos) sagt, daß er etwa um 365 v. Chr. in Athen geboren worden sein soll und dann die Akademie von Platon besuchte. Es heißt, über dem Eingang zu Platons Akademie in Athen habe der Spruch gestanden:

> Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω. Ageōmetrētos mēdeis eisitō.
> Für Geometrie-Unkundige kein Eintritt.

Und auch wenn dieser Satz möglicherweise erst eine Erfindung späterer Jahrhunderte sein sollte, so hatte Platon doch eine große Wertschätzung für die Geometrie und gab diese auch an seine Schüler weiter.

Schließlich wirkte Euklid in Alexandria, wo er Zugang zu der weltberühmten Bibliothek hatte.

Das bekannteste und meistgeschätzte Werk von Euklid war seine systematische Zusammenstellung der kompletten antiken Mathematik in 13 Bänden, die *Elemente* (Στοιχεῖα, Stoicheia, 'Anfangsgründe', 'Prinzipien', 'Elemente'). Aber daneben schrieb er auch noch über Musiktheorie, Optik und Astronomie.

Euklids *Elemente* zeigen eine strenge Gliederung in Definitionen, Axiome, Sätze und Beweise und sind dadurch logisch so klar, daß Teile dieses Werkes in der westlichen Welt bis zum Beginn des 20. Jh. die Grundlage für den allgemeinen Mathematikunterricht darstellten. Hier eine kurze Übersicht über die Inhalte der einzelnen Bände:

1. Definitionen und Satz des Pythagoras,
2. Geometrische Algebra,
3. Kreise,
4. Polyeder,
5. Irrationale Größen,
6. Proportionen,
7. Teilbarkeit und Primzahlen,
8. Quadratzahlen, Kubikzahlen, geometrische Reihen,
9. Gerade und ungerade Zahlen,

10. Geometrie inkommensurabler Größen,
11. Einführung in die Raumgeometrie,
12. Exhaustionsmethode,
13. Die fünf 'platonischen' Körper.

Obwohl es in Byzanz eine griechische Abschrift der *Elemente* aus dem 9. Jh. und im Vatikan eine griechische Abschrift aus dem 10 Jh. gab, verbreitete sich in Europa die Kenntnis von Euklid und seinen Werken erst mit den lateinischen Übersetzungen des 12. Jh. aus dem Arabischen.

Über Euklid sind einige Anekdoten überliefert, die vielleicht erst in späteren Jahrhunderten entstanden, die aber auch etwas über das Hineinwirken Euklids in die europäische Kultur aussagen.

- Der Pharao Ptolemaios soll einmal Euklid gefragt haben, ob es nicht einen einfacheren Weg zur Erlernung der Geometrie gebe, als das Studium seiner Elemente. Dieser antwortete jedoch: „Oh Pharao, in der normalen Welt existieren immer zwei Wege, einen auf dem das Volk reist und einen der dem König zum Reisen vorbehalten ist. Zur Erlernung der Mathematik gibt es aber keinen Königsweg."
- Ein Schüler Euklids, fragte ihn nach dem Lernen des ersten Satzes der Elemente: „Aber wozu soll das alles gut sein und was kann ich damit verdienen?" Euklid rief nach seinem Sklaven und sagte ihm: „Gib ihm 3 Obolus, denn er muss mit dem was er lernt, etwas verdienen."

[Quelle: Wikipedia-Euklid (2016), Scriba u. Schreiber (2010)].

3.2 Euklid: Winkel in der Ebene

Der vielleicht einzige mathematische Satz, den viele Menschen aus ihrer Schulzeit in Erinnerung behalten, ist der Satz: „die Winkelsumme in Dreieck beträgt 180°". Wir werden im Folgenden für einen Winkel anstelle des Gradmaßes $\alpha°$ das Bogenmaß α verwenden:

$$\alpha := 2\pi \frac{\alpha°}{360°} \; . \tag{3.2.1}$$

Der Satz über die Winkelsumme im Dreieck war möglicherweise schon Thales von Milet (ca. 624 - 547 v. Chr.) oder seinen Schülern bekannt. Insbesondere dürfte dies für den Spezialfall der rechtwinkligen Dreiecke gelten. Schriften von Thales liegen uns heute jedoch nicht mehr vor.

Das obige Rechteck enthält vier rechte Winkel $\gamma = \frac{\pi}{2}$, also eine Winkelsumme w_4 von 2π, und damit ist die Winkelsumme w_3 im rechtwinkligen Dreieck gerade π:

$$w_4 := 2\gamma + 2(\alpha{+}\beta) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad w_3 = \alpha + \beta + \gamma = \pi \; . \tag{3.2.2}$$

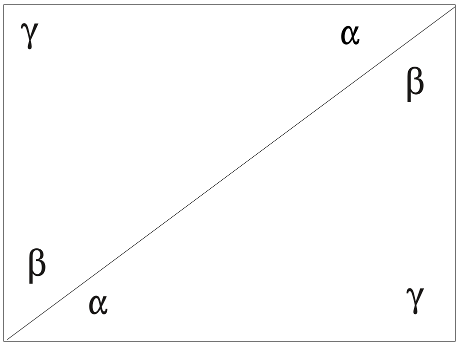

Abbildung 3.1: Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck

Üblicherweise zitieren Mathematiker für die Grundlagen der antiken Geometrie das berühmte 13-bändige Werk von Euklid von Alexandria (ca. 360 - 280 v. Chr.): *Die Elemente*. Die einheitliche Darstellung und strenge Beweisführung in dieser ersten großen Zusammenfassung der Mathematik war jahrhundertelang für die nachfolgenden Mathematiker der islamischen Kulturen und des europäischen Mittelalters das bedeutendste Grundlagenwerk (Scriba u. Schreiber, 2010).

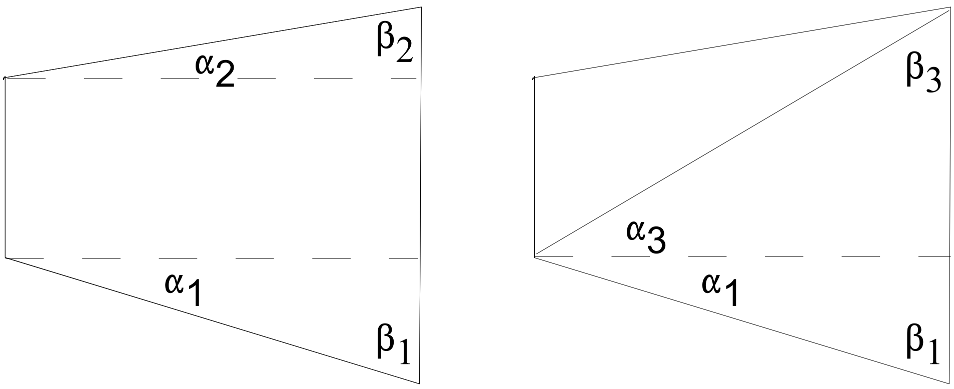

Abbildung 3.2: Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck

Aus dem linken Bild können wir entnehmen, daß die Winkelsumme des dargestellten Vierecks $w_4 = 2\pi$ ist, denn:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}\ ; \quad \alpha_2 + \beta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad w_4 = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + 2\frac{\pi}{2} = 2\pi\ . \tag{3.2.3}$$

Aus dem rechten Bild entnehmen wir, daß die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks $w_3 = \pi$ ist, denn:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}\ ; \quad \alpha_3 + \beta_3 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad w_3 = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3 = \pi\ . \tag{3.2.4}$$

Wenn man die Winkelsumme w_n in einem n-Eck bestimmen möchte, so ist es sinnvoll nicht nur die Innenwinkel α_i zu betrachten, sondern auch die Außenwinkel β_i. Wenn wir

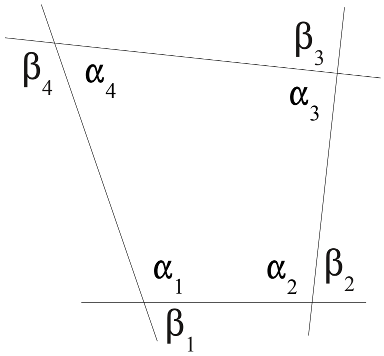

Abbildung 3.3: Winkelsumme in einem n-Eck

das n-Eck einmal im Gegenuhrzeigersinn umrunden, so summieren sich die Außenwinkel gerade zu einer vollen Umdrehung:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi \; ; \quad \alpha_i = \pi - \beta_i \; ; \tag{3.2.5}$$

$$w_n := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (\pi - \beta_i) = n\pi - 2\pi = (n-2)\pi \; . \tag{3.2.6}$$

Während die Winkelsumme w_n der Innenwinkel α_i für $n \to \infty$ unbegrenzt wächst, bleibt die Summe der Außenwinkel β_i unverändert 2π. Daher stützt man sich zur Definition der Krümmung auf diese Außenwinkel.

3.3 Archimedes: Kugelflächen

Die Beiträge von Archimedes von Syrakus auf Sizilien (ca. 287 - 212 v. Chr.) zu Mathematik, Physik und Ingenieurwesen sind überaus zahlreich und kreativ. Aus mathematischer Sicht besonders bemerkenswert sind die Flächen- und Volumenberechnungen von Archimedes, die einen ersten Schritt hin zu einer Integralrechnung darstellten. Das feste Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser, das wir heute π nennen, war schon im alten Babylonien und Ägypten bekannt. Archimedes fand zunächst, daß diese Zahl π auch die Kreisfläche bestimmt.

Die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks ist $A = \frac{1}{2} b \cdot h$. Jetzt konstruiert Archimedes n gleichschenklige Dreiecke im Innern eines Kreises und n gleichschenklige Dreiecke um einen Kreis herum (im obigen Bild ist $n = 4$). Die Fläche eines dieser einbeschriebenen Dreiecke ist $\frac{1}{2} h \cdot b_1$ und die Fläche eines der umbeschriebenen Dreiecke ist $\frac{1}{2} r \cdot b_2$. Je mehr Dreiecke man verwendet, umso mehr nähern sich $n \cdot b_1$ und $n \cdot b_2$ dem Kreisumfang an, also:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot b_1 = \lim_{n\to\infty} n \cdot b_2 = 2\pi r \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} h = r \; ,$$

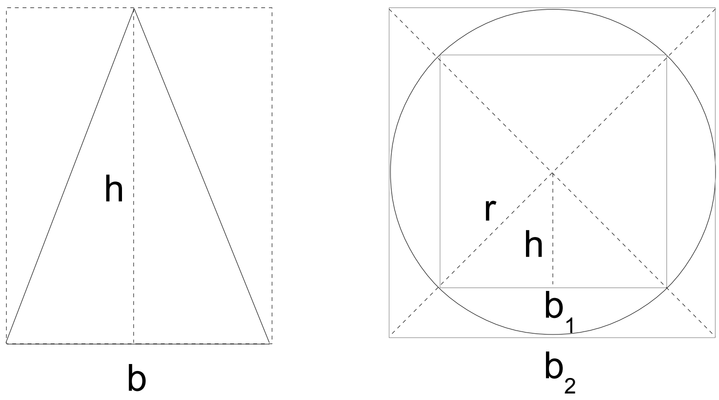

Abbildung 3.4: Flächenberechnung eines Kreises

$$n \cdot \frac{1}{2} h \cdot b_1 < A_{Kreis} < n \cdot \frac{1}{2} r \cdot b_2 \ ,$$

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{2} h \cdot b_1 = \pi r^2 \leq A_{Kreis} \leq \lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{2} r \cdot b_2 = \pi r^2 \quad \Rightarrow$$

$$A_{Kreis} = \pi r^2 \ . \tag{3.3.1}$$

Dieses Ergebnis benützt Archimedes nun, um die Fläche eines Kugelsektors zu berechnen, der von einer horizontalen Ebene E aus einer Kugel ausgeschnitten wird.

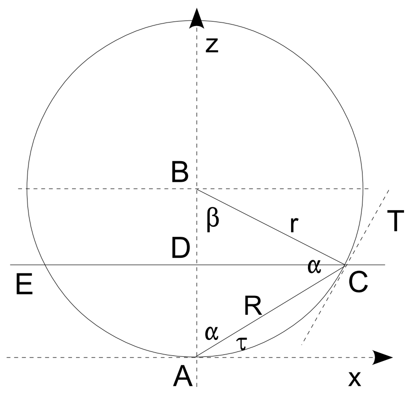

Abbildung 3.5: Berechnung eines Kugeloberflächensegments

Beim Dreieck ABC handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis R. Die Entdeckung von Archimedes war nun, daß die Fläche des Kugelsektors unterhalb der Ebene E gerade gleich der Fläche eines Kreises mit dem Radius R ist. Archimedes hatte noch keine trigonometrischen Funktionen und keine Differentiation zur Verfügung. Um für uns den Beweis zu vereinfachen, werden wir diese Hilfsmittel verwenden - dabei folgen wir im Wesentlichen Brown (2012).

Für die Winkel gilt $\tau := \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\beta = \pi - 2\alpha = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \tau) = 2\tau$. Mit dem Satz von Pythagoras für das Dreieck BDC folgt:

$$(R\cos\tau)^2 + (r - R\sin\tau)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 - 2rR\sin\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 2r\sin\tau \ .$$

Wenn wir den Winkel τ um $d\tau$ vergrößern, so vergrößert sich R um dR und die Kreisfläche $A_1 := \pi R^2$ um dA_1:

$$dR = 2r\cos\tau \cdot d\tau \quad \Rightarrow \quad dA_1 = 2\pi R \cdot dR = 4\pi rR\cos\tau \cdot d\tau \ . \tag{3.3.2}$$

Wie ändert sich die Fläche A_2 des Kugelsektors unterhalb der Ebene E bei einer Zunahme des Winkel τ um $d\tau$? Der horizontale Kugelumfang beim Punkt C in der Ebene E ist $2\pi R\cos\tau$. Bei einer Vergrößerung von τ um $d\tau$ kommt zu A_2 ein Flächenstreifen dA_2 hinzu:

$$r \cdot d\beta = r \cdot 2 \cdot \mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad dA_2 = (2\pi R\cos\tau) \cdot (r \cdot d\beta) = 4\pi rR\cos\tau \cdot d\tau \ . \tag{3.3.3}$$

Wenn die Ebene E in der $x - y$-Ebene liegt, so ist $\tau = 0$ und $R = 0$ und $A_1 = A_2 = 0$. Da nun auch $dA_1 = dA_2$ ist, so folgt die Behauptung von Archimedes, daß $A_1 = A_2$.

Wenn der Radius $R = 2r$ ist, so ist die Fläche des Kreises $A_1 = \pi R^2 = 4\pi r^2$ und dies ist also auch die Oberfläche der Kugel mit dem Radius r.

4 Harriot und Girard: sphärische Dreiecke

Thomas Harriot (1560 - 1621) fand wohl im Jahr 1603 als erster die Gleichung für den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, aber da er all seine Forschungsergebnisse nicht publizierte, trägt dieser Satz jetzt den Namen 'Satz von Girard' nach dem französischen Mathematiker Albert Girard (1595 - 1632), der seinen Beweis 1629 veröffentlichte.

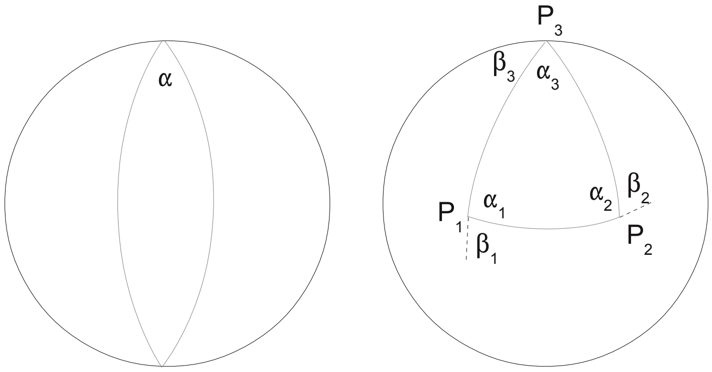

Abbildung 4.1: Sphärische Zwei- und Dreiecke

Alle im Folgenden betrachteten Linien auf der Kugeloberfläche seien Geodäten, also Großkreise. Die Fläche $A(\alpha)$ eines sphärischen Zweiecks ist proportional zu α und $A(2\pi) = A_{Kugel} = 4\pi r^2$, also gilt:

$$A := 4\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha r^2 \ . \tag{4.0.1}$$

Die Fläche $A_{P_1P_2P_3}$ des sphärischen Dreiecks $P_1P_2P_3$ können wir nun aus den drei sphärischen Zweiecken mit den jeweiligen Winkeln α_i berechnen. Sei $A(\alpha_1)$ die Fläche des sphärischen Zweiecks, das aus der Verlängerung der Linien $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_1P_3}$ gebildet wird und sei $A_1 := A(\alpha_1) - A_{P_1P_2P_3}$ der nicht in der Dreiecksfläche $A_{P_1P_2P_3}$ liegende Teil des Zweiecks $A(\alpha_1)$. Entsprechendes gelte für $A(\alpha_2)$ und A_2 und $A(\alpha_3)$ und A_3 der beiden anderen Zweiecke:

$$A(\alpha_1) = A_{P_1P_2P_3} + A_1 = 2\alpha_1 r^2 \ ,$$

$$A(\alpha_2) = A_{P_1P_2P_3} + A_2 = 2\alpha_2 r^2 \ ,$$

$$A(\alpha_3) = A_{P_1P_2P_3} + A_3 = 2\alpha_3 r^2 \ ,$$

$$3A_{P_1P_2P_3} + A_1 + A_2 + A_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) r^2 \ .$$

Jetzt ist aber $2[A(\alpha_1) + A(\alpha_2) + A(\alpha_3)]$ gleich der ganzen Kugeloberfläche, also:

$$2A_{P_1P_2P_3} + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow$$

$$2A_{P_1P_2P_3} = 2r^2(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i - \pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\, A_{P_1P_2P_3} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i - \pi \; . \tag{4.0.2}$$

Wenn wir schließlich noch zu den Außenwinkeln $\beta_i := \pi - \alpha_i$ übergehen, so folgt:

$$\frac{1}{r^2}\, A_{P_1P_2P_3} + \sum_{i=1}^{3} \beta_i = 2\pi \; . \tag{4.0.3}$$

Diese Formel erinnert nun doch schon sehr an die Gauß-Bonnet-Formel.

5 Krümmung von Kurven

5.1 Die Krümmung von Kurven von Newton bis Frenet-Serret

Der Begriff der Krümmung einer beliebigen Kurve in der Ebene als Kehrwert des Radius eines Krümmungskreises findet sich zuerst bei Newton (1643–1727) und Jacob I. Bernoulli (1654-1705) (Scriba u. Schreiber, 2010, S. 341).

Wir orientieren uns in diesem Abschnitt weitgehend an der schönen Einführung in die Differentialgeometrie von Eschenburg u. Jost (2007), S. 19 ff.

Heute führt man den Begriff der Krümmung einer stetig differenzierbaren Kurve üblicherweise folgendermaßen ein:
sei $\mathbb{E}^n$ der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik $g^0_{ik} := \delta_{ik}$ und dem Skalarprodukt

$$\langle x \mid y \rangle := \sum_{ik=1}^{n} g^0_{ik} x^i y^k =: x^i y_i \quad \text{für } x, y \in \mathbb{E}^n \ . \tag{5.1.1}$$

Dann ist die Länge des Vektors $x \in \mathbb{E}^n$: $|x| := ||x|| := \langle x \mid y \rangle^{1/2}$.
Eine *reguläre* Kurve ist eine stetig differenzierbare Abbildung eines offenen Parameterintervalls $(a, b) \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{E}^n$:

$$c : (a, b) \to \mathbb{E}^n \quad \text{mit } \dot{c}(t) := \frac{d}{dt} c(t) \neq 0 \ \text{ für } t \in (a, b) \ . \tag{5.1.2}$$

Die Forderung nichtverschwindender Tangenten $\dot{c}(t) \neq 0$, mit anderen Worten, die Forderung, daß c eine Immersion ist, soll die Existenz der Umkehrfunktion sicherstellen, die z.B. für eine Parametrisierung der Kurve nach der Bogenlänge benötigt wird. Ein Beispiel für eine an einem Punkt $t_0 \in (a, b)$ nichtreguläre Kurve ist etwa:

$$c(t) := c(t_0) + \frac{1}{2} \ddot{c}(t)|_{t_0} \cdot (t - t_0)^2 \ . \tag{5.1.3}$$

Die Kurve $c(t)$ hat bei t_0 einen Umkehrpunkt mit verschwindender Tangente $\dot{c}(t)|_{t_0} = 0$.

Die Bogenlänge $s : (a, b) \to \mathbb{R}$ wird definiert als

$$s(t) := \int_a^t |\dot{c}(t')| \, dt' \ . \tag{5.1.4}$$

$s(t)$ ist differenzierbar und $\dot{s}(t) = |\dot{c}(t)| > 0$, also existiert auf $(\tilde{a}, \tilde{b}) = (s(a), s(b))$ die Umkehrfunktion $s^{-1} : (\tilde{a}, \tilde{b}) \to (a, b)$. Die Funktion $c_B(s) := c \circ s^{-1}$, also $c_B(s) = c(t)$, heißt nun eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und für die Tangente $T(s)$ gilt:

$$|T(s)| := |c'_B(s)| = |\frac{d}{ds}c_B(s)| = |\frac{d}{dt}c(t)\,\frac{dt}{ds}| = 1\ . \tag{5.1.5}$$

Da viele Formeln der Differentialgeometrie bei nach Bogenlänge parametrisierten Kurven eine einfachere Darstellung haben werden wir künftig häufig diese Kurvendarstellung verwenden.

Definition 5.1.1 *Sei $c_B : (a, b) \to \mathbb{E}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, dann werden im Punkt s definiert:*
$\kappa(s)$ als die Krümmung von c_B, und $N(s)$ als der Normalenvektor in Richtung von c''_B:

$$\kappa(s) := |c''_B(s)|\ , \qquad c''_B(s) := \kappa(s)N(s) := \kappa(s)\frac{c''_B(s)}{|c''_B(s)|}\ . \tag{5.1.6}$$

Weil für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c_B(s)$ der Tangentenvektor $T(s) = c'_B(s)$ ein Einheitsvektor ist, steht der Normalenvektor $N(s) := c''_B(s)/|c''_B(s)|$ senkrecht auf dem Tangentenvektor $c'_B(s)$, denn

$$|c'_B(s)| = 1 \ \Rightarrow\ \langle c'_B(s) \mid c'_B(s)\rangle' = 2\langle c''_B(s) \mid c'_B(s)\rangle = 0\ . \tag{5.1.7}$$

Bei Kurven in $\mathbb{E}^2$ ergänzt man diese Definition noch, indem man Krümmungen im mathematisch positiven Sinn (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn) mit einem positiven Vorzeichen versieht, bei der entgegengesetzten Orientierung mit einem Minuszeichen. Mit der Matrix J für eine Linksdrehung kann man daher schreiben

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad N(s) = Jc'_B(s)\ . \tag{5.1.8}$$

$$N'(s) = Jc''_B(s) = \kappa(s)JN(s) = -\kappa(s)c'_B(s)\ . \tag{5.1.9}$$

Die beiden Gleichungen

$$c''_B(s) = \kappa(s)N(s) \quad \text{und} \quad N'(s) = -\kappa(s)c'_B(s)\ , \tag{5.1.10}$$

bzw.

$$T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad \text{und} \quad N'(s) = -\kappa(s)T(s)\ . \tag{5.1.11}$$

heißen Frenet-Gleichungen der ebenen Kurve $c_B(s)$.

Den Krümmungsvektor einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c_B(s)$ kann man auch folgendermaßen explizit darstellen. $c'_B(s)$ mit $|c'_B(s)| = 1$ und $c''_B(s)$ stehen ja orthogonal aufeinander. Seien jetzt $c'_B(s) = (c'_{B1}(s), c'_{B2}(s))^T$ und $c''_B(s) = (c''_{B1}(s), c''_{B2}(s))^T$

die Komponentendarstellungen von $c'_B(s)$ und $c''_B(s)$ in der von $c'_B(s)$ und $c''_B(s)$ aufgespannten zweidimensionalen Ebene, dann können wir $\kappa(s)$ auch als die Fläche des von $c'_B(s)$ und $c''_B(s)$ gebildeten Rechtecks ansehen, also

$$\kappa(s) = \det|c'_B(s), c''_B(s)| = \det \begin{vmatrix} c'_{B1}(s) & c''_{B1}(s) \\ c'_{B2}(s) & c''_{B2}(s) \end{vmatrix} = c'_{B1}(s)c''_{B2}(s) - c'_{B2}(s)c''_{B1}(s) \; . \tag{5.1.12}$$

Beispiel: Kreis um den Ursprung mit Radius r:

$$c_B(s) := \begin{pmatrix} r\cos\frac{s}{r} \\ r\sin\frac{s}{r} \end{pmatrix} , \quad c'_B(s) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{r} \\ \cos\frac{s}{r} \end{pmatrix} , \quad c''_B(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r} \\ -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \; . \tag{5.1.13}$$

□

Gelegentlich ist es auch vorteilhaft, diese Formel für nicht nach Bogenlänge parametrisierte Kurven $c(t)$ zur Verfügung zu haben. Sei also $c_B(s) := c \circ s^{-1}$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $c(t) := c_B \circ s$ die gleiche nach einem beliebigen Parameter t parametrisierte Kurve, dann gilt:

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = |\dot{c}(t)| = (\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{1/2} \; , \tag{5.1.14}$$

$$\dot{c}(t) := \frac{dc(t)}{dt} = c'_B(s)\frac{ds(t)}{dt} \; , \quad \ddot{c}(t) = c''_B(s)(\frac{ds(t)}{dt})^2 + c'_B(s)\frac{d^2s(t)}{dt^2} \quad \Rightarrow$$

$$c'_B(s) = \frac{\dot{c}(t)}{\dot{s}(t)} \; , \quad c''_B(s) = [\ddot{c}(t) - \frac{\dot{c}(t)}{\dot{s}(t)}\ddot{s}(t)]/\dot{s}(t)^2 = \frac{\ddot{c}(t) - \dot{c}(t)\frac{\ddot{s}(t)}{\dot{s}(t)}}{\dot{s}(t)^2} \; .$$

$$\begin{aligned} \kappa(t) := \kappa(s(t)) = \det|c'_B(s), c''_B(s)| &= \frac{1}{\dot{s}(t)^3}\det|\dot{c}(t), \ddot{c}(t) - \dot{c}(t)\frac{\ddot{s}(t)}{\dot{s}(t)}| \\ &= \frac{1}{\dot{s}(t)^3}\det|\dot{c}(t), \ddot{c}(t)| = \frac{\dot{c}_1(t)\ddot{c}_2(t) - \dot{c}_2(t)\ddot{c}_1(t)}{(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{3/2}} \; . \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Im $\mathbb{E}^n$ hat eine Kurve aber natürlich mehr Freiheitsgrade als im $\mathbb{E}^2$, also benötigt man zur Beschreibung einer Kurve $c_B : (a, b) \to \mathbb{E}^n$ entsprechend mehr Bestimmungsgrößen. Eine Kurve, bei welcher die Ableitungen $c_B^{(i)}(s)$ für $i \in 1 \dots n-1$ existieren, stetig und linear unabhängig sind, heißt Frenet-Kurve. Man kann nun diese $n-1$ Vektoren nach dem üblichen Verfahren von Gram-Schmidt orthogonalisieren und anschließend noch normieren:

$$d_i := c_B^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} \langle c_B^{(i)} \mid e_k \rangle e_k \quad \text{mit} \quad e_k := \frac{d_k}{|d_k|} \quad \text{für } i \in 1 \dots (n-1) \; . \tag{5.1.16}$$

Diese Basis vervollständigt man noch um einen normierten Vektor e_n, der auf allen anderen e_i senkrecht steht. Dann ergibt sich:

$$\langle e_i \mid e_k \rangle = \delta_{ik} \quad \Rightarrow \quad \langle e_i \mid e_k \rangle' = \langle e_i' \mid e_k \rangle + \langle e_i \mid e_k' \rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\langle e_i' \mid e_k \rangle = -\langle e_i \mid e_k' \rangle \ .$$

Also ist die Matrix der $\langle e_i' \mid e_k \rangle$ schiefsymmetrisch. Weiter sind die meisten Elemente dieser Matrix gleich 0, denn e_i ist eine Linearkombination der $c_B^{(k)}$, $k = 1 \dots i$, und damit ist e_i' eine Linearkombination der $c_B^{(k)}$, $k = 2 \dots i+1$, also folgt $\langle e_i' \mid e_k \rangle = 0$ für $k > i+1$. Mit $\kappa_i := \langle e_i' \mid e_{i+1} \rangle$ für $i = 1 \dots n-1$ können wir diesen Zusammenhang als ein System linearer Differentialgleichungen darstellen, die Frenetschen Gleichungen der Kurve $c_B(s)$ in $\mathbb{E}^n$:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1}' \\ e_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix} . \tag{5.1.17}$$

Für $\mathbb{E}^3$ ergibt sich mit dem Binormalenvektor b und der Torsion τ also:

$$T := e_1 \ , \ N := e_2 \ , \ B := e_3 \ , \ \kappa := \kappa_1 \ , \ \tau := \kappa_2 \ , \quad \Rightarrow$$

$$T' = \kappa N \ , \quad N' = -\kappa T + \tau B \ , \quad B' = -\tau N \ . \tag{5.1.18}$$

Dies sind bei Vorgabe von κ und τ neun gewöhnliche Differentialgleichungen für die Bestimmung der neun Komponenten von T, N, B, woraus dann $c_B(s) = c_{B0} + \int_0^s t(s')\, ds'$ bestimmt werden kann.

Frenet (1816-1900) veröffentlichte diese Gleichungen im Jahr 1847 in seiner Dissertation und 1852 in einer Publikation. Unabhängig von Frenet erfolgte eine etwas allgemeinere Formulierung durch Serret (1819-1885) im Jahr 1851, weshalb man manchmal auch von den Frenet-Serret-Gleichungen spricht (Spivak (1979), Bd. II, S. 45).

5.2 Leonhard Euler (1707 – 1783)

Leonhard Euler wurde 1707 in Basel geboren. Sein Vater, ein protestantischer Pfarrer, war mit dem Mathematiker Johann Bernoulli befreundet, der sehr schnell die Begabungen des jungen Leonhard Euler erkannte und einen großen Einfluß auf dessen Entwicklung und Ausbildung hatte. 1727 nahm Euler eine Anstellung an der Akademie St. Petersburg an. 1734 heiratete er in St. Petersburg Katharina Gsell. Von ihren dreizehn Kindern überlebten nur fünf die frühe Kindheit. Eine schwere Infektion Eulers 1735 hatte in den folgenden Jahren die völlige Erblindung seines rechten Auges zur Folge. 1741 folgte Euler einer Einladung Friedrichs des Großen an die Akademie Berlin. 1766 mußte er die Akademie nach einem Zerwürfnis mit Friedrich wieder verlassen und folgte einer Einladung Katharinas der Großen, an die Akademie St. Petersburg zurückzukehren. Gleichzeitig erblindete er nun auch auf dem linken Auge aufgrund eines Katarakts (Grauer Star). Dennoch konnte er mit der Hilfe zweier seiner Söhne und seines Sekretärs Nicolas Fuß weiter arbeiten und publizieren. 1771 verlor er bei einem Großfeuer in St. Petersburg sein Haus und fast sein Leben. 1773 starb seine Frau Katharina. Drei Jahre danach heiratete er die Halbschwester seiner verstorbenen Frau Salome Abigail Gsell. 1783 starb Euler nach dem Mittagessen mit seiner Familie mitten in einem Gespräch über den neuentdeckten Planeten Uranus an einer Hirnblutung.

Abbildung 5.1: L. Euler
E. Handmann (c. 1756), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler]

Euler forschte und veröffentlichte auf allen Gebieten der damaligen Mathematik und Physik: Analysis (insb. Differential-, Integral-Rechnung, Reihen, Variationsrechnung), Geometrie, Graphentheorie, Algebra, Anfänge der Topologie, Zahlentheorie, Mechanik, Astronomie, Elastizitätstheorie, Hydrodynamik, Optik, Musiktheorie. Euler gilt als einer der größten und produktivsten Mathematiker aller Zeiten. Das Euler Kommittee der Schweizer Akademie der Wissenschaften hat im Jahr 1907 mit der wissenschaftlich editierten Neuveröffentlichung aller Bücher und Publikationen Eulers (*Opera Omnia*) begonnen und will diese Aufgabe mit dem letzten Band Nr.74 im Jahr 2010 vollendet haben. Danach soll die wissenschaftliche Korrespondenz Eulers in einer Zusatzreihe erscheinen. [Quelle: Wikipedia-Euler (2010)].

5.3 Euler und die Krümmung von Flächen

Die differentialgeometrische Untersuchung gekrümmter Flächen im Raum beginnt mit Eulers Lehrbuch der Differentialrechnung in 2 Bänden (1755) und seinen daran anschließenden Einzelpublikationen (1760-1767) (Scriba u. Schreiber, 2010, S. 408).

Die Idee von Euler war es, Flächen in $\mathbb{R}^3$ durch die Krümmung von ebenen Kurven $c(t)$ zu beschreiben, die aus dem Schnitt der Fläche mit Normalenebenen entstehen. Wenn man nun in einem Punkt p der Oberfläche die Normalenebene um 2π rotieren läßt, dann wird diese Krümmung, die sog. Normalenkrümmung κ_T^N, der Schnittkurve von Fläche M und Normalenebene E einen Bereich von $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ durchlaufen. Wir orientieren uns an Spivak (1979), Bd. II, S. 65 ff.

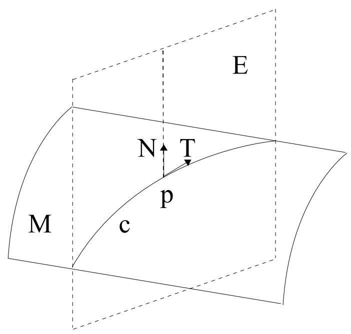

Abbildung 5.2: Krümmung von Normalenschnitten einer Fläche M

Satz 5.3.1 (Euler) *Seien E eine Normalenebene durch den Punkt p der Fläche M und T eine Tangente an die Schnittkurve $c(t)$ von E und M in Punkt p. Wenn die κ_T nicht alle gleich sind, dann gibt es genau eine Tangente T_{min} in der κ minimal ist, κ_{min}, und eine Tangente T_{max} in der κ maximal ist, κ_{max}. Die beiden Tangenten T_{min} und T_{max} stehen orthogonal aufeinander und für eine Tangente T, die einen Winkel von θ mit T_{min} bildet, gilt:*

$$\kappa_T^N = \kappa_{min} \cos^2 \theta + \kappa_{max} \sin^2 \theta \; . \tag{5.3.1}$$

Beweis. Zunächst legen wir das Koordinatensystem so, daß der Punkt p im Ursprung liegt, also $p = (0,0,0)^T$, und die Tangentialebene in p gerade die $x-y$ Ebene ist. Dann beschreiben wir die Oberfläche M in einer Umgebung von p als $\{(x,y,z,)^T | \, z = f(x,y)\}$. Wegen unserer Wahl des Koordinatensystems gilt:

$$f(0,0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \; .$$

Jetzt sucht Euler nach einer Drehung der $x-y$ Ebene um den Normalenvektor durch p, d.h. einer Drehung um die z-Achse, so daß die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ verschwinden. Daß dies möglich ist sieht man folgendermaßen. Wenn die Drehung der

$x-y$ Ebene um θ durch die Matrix $R(\theta)$ beschrieben wird, dann gilt für die gedrehte Oberfläche M:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} := R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

$$f_\theta(x,y) := f(\tilde{x},\tilde{y}) := f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\theta}{\partial y}(x,y) &= \partial_{\tilde{x}} f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \cdot (-\sin\theta) \\ &\quad + \partial_{\tilde{y}} f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \cdot (\cos\theta) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x \partial y}(x,y) &= \partial^2_{\tilde{x}} f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \cdot (-\sin\theta\cos\theta) \\ &\quad + \partial_{\tilde{x}}\partial_{\tilde{y}} f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta) , \\ &\quad + \partial^2_{\tilde{y}} f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \cdot (\cos\theta\sin\theta) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x \partial y}(0,0) &= [-\partial^2_{\tilde{x}} f(0,0) + \partial^2_{\tilde{y}} f(0,0)] \cdot (\cos\theta\sin\theta) \\ &\quad + \partial_{\tilde{x}}\partial_{\tilde{y}} f(0,0) \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\theta \cdot [\partial^2_{\tilde{y}} f(0,0) - \partial^2_{\tilde{x}} f(0,0)] + \cos 2\theta \cdot \partial_{\tilde{x}}\partial_{\tilde{y}} f(0,0) . \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan 2\theta = \frac{2\partial_{\tilde{x}}\partial_{\tilde{y}} f(0,0)}{\partial^2_{\tilde{x}} f(0,0) - \partial^2_{\tilde{y}} f(0,0)} & \text{für } \partial^2_{\tilde{x}} f(0,0) \neq \partial^2_{\tilde{y}} f(0,0) , \\ \cos 2\theta = 0 , \text{ d.h. } \theta = \frac{\pi}{4} & \text{für } \partial^2_{\tilde{x}} f(0,0) = \partial^2_{\tilde{y}} f(0,0) . \end{cases}$$

In diesem $(\tilde{x},\tilde{y},z)$ Koordinatensystem bestimmt Euler die Krümmung der Schnittkurve von M mit der $\tilde{x}-z$ Ebene und mit der $\tilde{y}-z$ Ebene mit Hilfe von 5.1.15:

$$\tilde{x} - z \text{ Ebene}: \quad c(t) = (t, f(t,0)) ,$$

$$\kappa_1 = \left. \frac{\dot{c}_1(t)\ddot{c}_2(t) - \dot{c}_2(t)\ddot{c}_1(t)}{(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{3/2}} \right|_{t=0} = \frac{\partial^2_{\tilde{x}} f(0,0)}{(1+0)^{3/2}} = \partial^2_{\tilde{x}} f(0,0) ;$$

$$\tilde{y} - z \text{ Ebene}: \quad c(t) = (t, f(0,t)) ,$$

$$\kappa_2 = \left.\frac{\dot{c}_1(t)\ddot{c}_2(t) - \dot{c}_2(t)\ddot{c}_1(t)}{(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{3/2}}\right|_{t=0} = \frac{\partial_{\tilde{y}}^2 f(0,0)}{(1+0)^{3/2}} = \partial_{\tilde{y}}^2 f(0,0)\ .$$

Die Krümmung der Schnittkurve von M mit einer Ebene durch die z-Achse, die mit der $\tilde{x} - z$ Ebene einen Winkel ϑ bildet, ergibt sich zu:

$$(\tilde{x}\cos\vartheta + \tilde{y}\sin\vartheta) - z \text{ Ebene}: \quad c(t) = (t, f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta))\ ,$$

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left.\frac{\dot{c}_1(t)\ddot{c}_2(t) - \dot{c}_2(t)\ddot{c}_1(t)}{(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{3/2}}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^2}{dt^2} f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta)\right|_{t=0} \\
&= \cos^2\vartheta \cdot \partial_{\tilde{x}}^2 f(0,0) + \sin^2\vartheta \cdot \partial_{\tilde{y}}^2 f(0,0) \\
&= \kappa_1 \cos^2\vartheta + \kappa_2 \sin^2\vartheta\ .
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\kappa_1 \neq \kappa_2$ und wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit für die Hauptkrümmungen $\kappa_1 < \kappa_2$ an. Damit erhalten wir $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$. Die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen sind gerade $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ und stehen damit orthogonal aufeinander. □

Schon kurz nach Eulers Publikation konnte Meusnier de la Place (1754-1793) im Jahr 1776 die obige Krümmungsformel von Euler für allgemeine Ebenenschnitte einer Fläche M veralgemeinern.

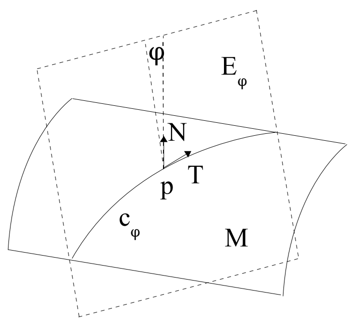

Abbildung 5.3: Krümmung von allgemeinen Ebenenschnitten einer Fläche M

Satz 5.3.2 (Meusnier) *Seien E_φ eine Ebene durch den Punkt p der Fläche M, die mit der Normalenebene E durch p einen Winkel von φ bilde und κ_T^N die Krümmung der Schnittkurve $c(t)$ der Normalenebene E mit der Fläche M. Dann gilt für die Krümmung κ_T^φ der Schnittkurve $c_\varphi(t)$ von E_φ und M im Punkt p:*

$$\kappa_T^\varphi \cos\varphi = \kappa_T^N\ . \tag{5.3.2}$$

Beweis. Seien $c(s)$ und $c_\varphi(s)$ die Schnittkurven der Ebenen E und E_φ mit der Fläche M, die durch den Punkt $p \in M$ gehen und in p gleiche Tangenten haben, d.h.:

$$p = c(0) = c_\varphi(0)\ , \quad c'(s)|_{s=0} = c'_\varphi(s)|_{s=0}\ .$$

Die Tangente $T(c(s)) := c'(s)$ steht überall senkrecht auf der Normalen $N(c(s))$:

$$\langle c'(s) \mid N(c(s))\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle c''(s) \mid N(c(s))\rangle = -\langle c'(s) \mid N'(c(s))\rangle\ .$$

An der Stelle p, also bei $s = 0$, gilt nun mit $T(p) = c'(0) = c'_\varphi(0)$:

$$\langle c'_\varphi(0) \mid N(p)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle c''_\varphi(0) \mid N(p)\rangle = -\langle c'_\varphi(0) \mid N'(p)\rangle\ .$$

Und mit 5.1.10 $c''(s) = \kappa(s)N(c(s))$ folgt :

$$\begin{aligned}
\kappa_T^N(0) &= \langle c''(0) \mid N(p)\rangle = -\langle c'(0) \mid N'(p)\rangle \\
&= -\langle c'_\varphi(0) \mid N'(p)\rangle = \langle c''_\varphi(0) \mid N(p)\rangle \\
&= \langle \kappa_T^\varphi(0) N_\varphi(p) \mid N(p)\rangle = \kappa_T^\varphi(0)\langle N_\varphi(p) \mid N(p)\rangle \\
&= \kappa_T^\varphi(0) \cdot \cos\varphi\ .
\end{aligned}$$

□

6 Tangentialvektoren und Differentialformen

6.1 Differentialformen

Bevor wir mit der Beschreibung von Geodäten und der Gaußschen Flächentheorie beginnen, soll hier kurz in die von uns verwendete Schreibweise der Differentialformen und deren Rücktransport eingeführt werden. Daneben werden die Begriffe von *Immersionen* und *Einbettungen* definiert.

Wir verwenden die von Élie Cartan bereits 1899 eingeführte Sprache der Differentialformen. Der Cartan-Formalismus blieb lange Zeit trotz seiner großen Vorteile an Klarheit und Koordinatenunabhängigkeit unbeachtet und hat sich in der Mathematik, beginnend mit der Differentialgeometrie, erst nach dem 2. Weltkrieg durchgesetzt, in der theoretischen Physik sogar erst Anfang der 1970'er Jahre.

Sei $f : M \to N$ mit $m := \dim M \leq n := \dim N$ eine glatte (d.h. C^∞) Abbildung zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N. Man bezeichnet dann mit f_* die durch f induzierte *Tangentialabbildung* (auch *Differential* df, oder *pushforward* genannt). Wenn $T_pM := \{V := V^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} \,|\, V^\mu \in \mathbb{R},\ \mu = 1 \ldots m\}$ der Raum der Tangentialvektoren am Punkt $p \in M$ ist und $T_{f(p)}N := \{W := W^i \frac{\partial}{\partial x^i} \,|\, W^i \in \mathbb{R},\ i = 1 \ldots n\}$ der Raum der Tangentialvektoren am Punkt $f(p) \in N$, dann wird f_* definiert als:

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}N \ , \quad f_*V(g) := V(g \circ f) \ , \quad \text{mit } g : N \to \mathbb{R} \ , \quad \Rightarrow \tag{6.1.1}$$

$$W^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g)|_{f(p)} = V^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}(g \circ f)|_p \ ,$$

und mit $g := x^i$ folgt

$$W^i|_{f(p)} = V^\mu \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}|_{f(p)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}|_{f(p)} V^\mu \ , \tag{6.1.2}$$

d.h. die Komponenten von $V \in T_pM$ werden mit der Jacobi-Matrix $\frac{\partial x}{\partial u}$ in die Komponenten von $W \in T_{f(p)}N$ abgebildet.

Der Dualraum des Tangentialraums T_pM ist der Kotangentialraum T_p^*M, der lineare Raum der 1-Formen, oder Covektoren) am Punkt $p \in M$:

$$T_p^*M := \{w := w_\mu du^\mu \,|\, w_\mu \in \mathbb{R},\ \langle du^\mu \mid \frac{\partial}{\partial u^\nu}\rangle := \frac{\partial}{\partial u^\nu}(du^\mu) = \delta^\mu_\nu,\ \mu, \nu = 1 \ldots m\} \ , \tag{6.1.3}$$

$$V \in T_pM,\ w \in T_p^*M \quad \Rightarrow \quad \langle w \mid V \rangle = V(w) = w_\mu V^\mu \ .$$

In der älteren physikalischen Literatur werden die $V \in T_pM$ als kontravariante Vektoren bezeichnet und die $w \in T_p^*M$ als kovariante Vektoren.

Analog zur Tangentialabbildung f_* bei Vektoren definiert man eine entsprechende induzierte Abbildung f^* für 1-Formen, den sog. *Rücktransport* (auch *pullback* genannt). Sei $T^*_{f(p)}N := \{\xi := \xi_i dx^i \,|\, \xi_i \in \mathbb{R},\ i = 1 \dots n\}$, dann wird f^* definiert als:

$$f^* : T^*_{f(p)}N \to T_p^*M \ , \quad \langle f^*\xi \mid V \rangle := \langle \xi \mid f_*V \rangle \ . \tag{6.1.4}$$

Damit folgt, daß die Komponenten von $\xi \in T^*_{f(p)}N$ mit der transponierten Jacobi-Matrix $(\frac{\partial x}{\partial u})^T$ in die Komponenten von $w \in T_p^*M$ abgebildet werden, denn:

$$\langle f^*\xi \mid V \rangle = w_\mu V^\mu = \xi_i W^i|_{f(p)} = \xi_i V^\mu \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}|_{f(p)} \quad \Rightarrow$$

$$w_\mu = \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}|_{f(p)} = ((\frac{\partial x}{\partial u})^T|_{f(p)})_\mu{}^i\, \xi_i \ . \tag{6.1.5}$$

Hinweis: Wenn $f : M \to N$ nicht injektiv ist, dann gibt es Punkte $p \neq p' \in M$ mit $f(p) = f(p')$ und möglicherweise $f_*V(p) \neq f_*V(p')$, d.h. Vektorfelder $V(p) \in T_pM$ werden nicht auf Vektorfelder in $T_{f(p)}N$ abgebildet! Hier verhalten sich Felder von 1-Formen deutlich freundlicher in der Handhabung, denn für ein 1-Formenfeld $\xi(f(p)) \in T^*_{f(p)}N$ existiert immer ein eindeutiges 1-Formenfeld $f^*\xi \in T_p^*M$.

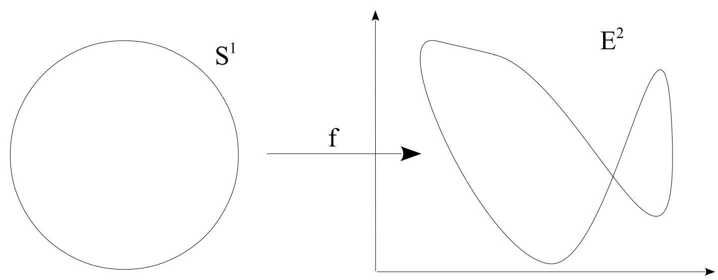

Abbildung 6.1: eine Immersion von $S^1 \to \mathbb{E}^2$, die keine Einbettung ist

Definition 6.1.1 *Eine glatte Funktion (d.h. C^∞) zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $f : M \to N$ mit $m = \dim M \leq n = \dim N$ heißt eine Immersion von M in N, wenn der Tangentialraum T_pM an jedem Punkt $p \in M$ injektiv in den Tangentialraum $T_{f(p)}N$ abgebildet wird, oder kürzer gesagt: $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ ist eine Injektion.*
Wenn zusätzlich auch noch f selbst injektiv ist, so spricht man von einer Einbettung.

Wir werden hier und im Folgenden eine zweidimensionale Fläche in $\mathbb{E}^3$ als die Immersion einer Menge $U \subset \mathbb{E}^2$ in $\mathbb{E}^3$ beschreiben. In der Verallgemeinerung auf n Dimensionen nennen wir eine Immersion von $U \subset \mathbb{E}^{n-1}$ in $\mathbb{E}^n$ eine Hyperfläche in $\mathbb{E}^n$.

Differentialformen höherer Stufe werden nach Élie Cartan folgendermaßen definiert:

Das Civita-Symbols $\epsilon_{i_1,\ldots,i_k}$ ist das Vorzeichen der Permutation π der Zahlen $(1, 2, \ldots, k)$ in die Zahlen $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$:

$$\pi := \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \end{pmatrix} , \quad \epsilon_{i_1,\ldots,i_k} := \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} := \operatorname{sgn} \pi \ . \tag{6.1.6}$$

Da es $k!$ Permutationen der Zahlen $(1, 2, \ldots, k)$ gibt, folgt sofort (Summenkonvention):

$$\epsilon_{i_1,\ldots,i_k} \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} = k! \ . \tag{6.1.7}$$

Definition 6.1.2 *Das äußere Produkt $\wedge^r$ der 1-Formen dx^{μ_1} bis dx^{μ_r} ist definiert als:*

$$\begin{aligned} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} &:= \sum_\pi \operatorname{sgn}(\pi)\, dx^{\pi(\mu_1)} \otimes dx^{\pi(\mu_2)} \otimes \ldots \otimes dx^{\pi(\mu_r)} \qquad (6.1.8) \\ &= \epsilon_{\mu_1,\ldots,\mu_r}\, dx^{\pi(\mu_1)} \otimes dx^{\pi(\mu_2)} \otimes \ldots \otimes dx^{\pi(\mu_r)} \ . \end{aligned}$$

Damit wird eine r-Differentialform an einem Punkt $p \in M$ definiert als:

$$\omega := \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1,\ldots,\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \tag{6.1.9}$$

Der Vektorraum der r-Differentialformen an einem Punkt $p \in M$ heißt $\Omega_p^r(M)$. Früher sprach man bei den Koeffizienten $\omega_{\mu_1,\ldots,\mu_r}$ der r-Differentialformen als von r-stufigen, antisymmetrischen, kovarianten Tensoren.

Jetzt kann man auf

$$\Omega_p^*(M) := \Omega_p^0(M) \oplus \Omega_p^1(M) \oplus \ldots \oplus \Omega_p^m(M) \tag{6.1.10}$$

ein Produkt definieren, wodurch $\Omega_p^*(M)$ zu einer Algebra wird. Seien also $\omega \in \Omega_p^r(M)$, $\xi \in \Omega_p^s(M)$ und $V_i \in T_pM$, $1 \leq i \leq r+s$, dann wird das äußere Produkt $\omega \wedge \xi$ definiert als:

$$\omega \wedge \xi(V_1, \ldots, V_{r+s}) := \frac{1}{r!s!} \sum_\pi \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(V_{\pi(1)}, \ldots, V_{\pi(r)})\, \xi(V_{\pi(r+1)}, \ldots, V_{\pi(r+s)}) \ .$$

Für $r + s > m$ ist $\omega \wedge \xi := 0$.

Seien $\omega \in \Omega_p^r(M)$ und $\xi \in \Omega_p^s(M)$, dann gilt

$$\omega \wedge \xi = (-1)^{rs}\, \xi \wedge \omega \ , \tag{6.1.11}$$

denn

$$\begin{aligned} & dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_s} \\ & \qquad = (-1)^r \, dx^{\nu_1} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_s} \\ & \qquad = (-1)^{rs} \, dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_s} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \; . \end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere für $\omega \in \Omega^r_p(M)$

$$\omega \wedge \omega = 0 \quad \text{für } r \text{ ungerade} \; . \tag{6.1.12}$$

Da es $\binom{m}{r}$ verschiedene Möglichkeiten gibt $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ aus $(1, 2, \ldots$,m) auszuwählen, ist

$$\dim(\Omega^r) = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!} \; . \tag{6.1.13}$$

Daraus folgt auch sofort, daß

$$\dim(\Omega^{m-r}) = \binom{m}{m-r} = \frac{m!}{(m-r)!r!} = \dim(\Omega^r) \; , \tag{6.1.14}$$

eine Tatsache, wovon wir später bei der Einführung des Hodge-Stern-Operators noch Gebrauch machen werden.

Eine Möglichkeit um r-Differentialformen auf $(r-1)$-Differentialformen zu verjüngen ist das sog. *innere Produkt* der r-Differentialform ω mit einem Vektor X.

Definition 6.1.3 *Seien $\omega \in \Omega^r(M)$ und $X \in T_p(M)$, dann ist das innere Produkt definiert als:*

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1,\ldots,\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \; , \quad X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; , \quad X, X_1, \ldots, X_{r-1} \in T_p(M) \; ,$$

$$i_X : \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M) \; , \quad i_X\omega(X_1, \ldots, X_{r-1}) := \omega(X, X_1, \ldots, X_{r-1}) \quad \textit{d.h.} \tag{6.1.15}$$

$$i_X\omega = \frac{1}{(r-1)!} X^\mu \omega_{\mu\mu_2\ldots\mu_r} dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \; . \tag{6.1.16}$$

6.2 Rücktransport von Differentialformen höherer Stufe

Häufig benötigt man auch den Rücktransport von Differentialformen höherer Stufe. Seien jetzt $m := \dim M \leq \dim N$, $f : M \to N$ eine injektive Abbildung mit $x^\mu := f(u^\mu)$, $\{\frac{\partial}{\partial u^\mu} | \mu = 1 \ldots m\}$ eine Basis von T_pM, $\{du^\mu | \mu = 1 \ldots m\}$ eine Basis von T_p^*M und $V_\alpha = V_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} \in T_pM$ mit $\alpha = 1 \ldots k \leq m$ linear unabhängige Vektoren. Dann wird der Rücktransport der k-Form $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ definiert als

$$(f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k))(V_1, \ldots, V_k) := (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k)(f_* V_1, \ldots, f_* V_k) \,. \tag{6.2.1}$$

Im Zusammenhang mit k-Formen tauchen häufig auch Determinanten auf, die wir im Folgenden ebenfalls mit Hilfe des oben eingeführten Civita-Symbols $\epsilon_{i_1,\ldots,i_k}$ beschreiben.

Die Determinante einer k-dimensionalen Matrix A wird dann definiert als

$$\det(A) := \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} A_{1i_1} \cdot \ldots \cdot A_{ki_k} \,. \tag{6.2.2}$$

Statt nach Zeilen kann die Determinante mit einer Umsortierung auch nach Spalten entwickelt werden

$$\det(A) := \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} A_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k k} \,. \tag{6.2.3}$$

Beweis. Sei $i_m = \pi(m) = 1 \;\Rightarrow\; \pi^{-1}(1) = m$, dann bringen wir den Faktor mit dem Doppelindex (m, i_m), d.h. $A_{m,i_m} = A_{m,\pi(m)} = A_{\pi^{-1}(1),1}$ ganz nach links, usw., und erhalten

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} A_{1i_1} \cdot \ldots \cdot A_{ki_k} = \epsilon^{\pi(1),\ldots,\pi(k)} A_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot A_{k,\pi(k)} \\
&= \epsilon^{\pi(1),\ldots,\pi(k)} A_{\pi^{-1}(1),1} \cdot \ldots \cdot A_{\pi^{-1}(k),k} \\
&= \epsilon^{\pi^{-1}(1),\ldots,\pi^{-1}(k)} A_{\pi^{-1}(1),1} \cdot \ldots \cdot A_{\pi^{-1}(k),k} \\
&= \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} A_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k k} \,.
\end{aligned}$$ □

Hilfreich ist auch die Formel

$$\epsilon^{i_1,\ldots,i_k} A_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k j_k} = \det(A)\, \epsilon_{j_1,\ldots,j_k} \,, \tag{6.2.4}$$

die ebenso wie die vorhergehende Formel mit einer Umsortierung bewiesen wird.

Beweis. Sei $j_m = \pi(m) = 1 \;\Rightarrow\; \pi^{-1}(1) = m,\ \pi^{-1}(i_1) = i_m$, dann bringen wir den Faktor mit dem Index i_m, j_m, d.h. $A_{i_m,j_m} = A_{i_m,\pi(m)} = A_{\pi^{-1}(i_1),1}$ ganz nach links, usw., und erhalten

$$\begin{aligned}
\epsilon^{i_1,\ldots,i_k} A_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k j_k} &= \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} A_{i_1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot A_{i_k,\pi(k)} \\
&= \epsilon^{i_1,\ldots,i_k} A_{\pi^{-1}(i_1),1} \cdot \ldots \cdot A_{\pi^{-1}(i_k),k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \epsilon^{\pi^{-1}(i_1),\ldots,\pi^{-1}(i_k)} \operatorname{sgn}(\pi^{-1})\, A_{\pi^{-1}(i_1),1} \cdot \ldots \cdot A_{\pi^{-1}(i_k),k} \\
&= \epsilon^{l_1,\ldots,l_k} \operatorname{sgn}(\pi)\, A_{l_1 1} \cdot \ldots \cdot A_{l_k k} \\
&= \det(A) \operatorname{sgn}(\pi) = \det(A)\, \epsilon_{j_1,\ldots,j_k}\ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Eine wichtige Beobachtung ist, daß der Rücktransport f^* die Algebra der äußeren Produkte erhält.

Lemma 6.2.1

$$
f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge x^k) = f^*dx^1 \wedge \ldots \wedge f^*dx^k = \det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})(du^1 \wedge \ldots \wedge du^k)\ . \tag{6.2.5}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
(f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k))(V_1,\ldots,V_k) &= (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k)(f_*V_1,\ldots,f_*V_k) \\
&= (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k)(f_*V_1^{\mu_1}\frac{\partial}{\partial u^{\mu_1}},\ldots,f_*V_k^{\mu_k}\frac{\partial}{\partial u^{\mu_k}}) \\
&= V_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot V_k^{\mu_k}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k)(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^{\mu_1}}\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial x^{j_k}}{\partial u^{\mu_k}}\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}) \\
&= V_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot V_k^{\mu_k}\, \epsilon_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{\mu_k}} \\
&= \epsilon_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{\mu_k}}\, (du^{\mu_1} \otimes \ldots \otimes du^{\mu_k})(V_1,\ldots,V_k) \\
&= \epsilon_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{\mu_k}}\, \epsilon^{\mu_1,\ldots,\mu_k}\, (du^1 \wedge \ldots \wedge du^k)(V_1,\ldots,V_k) \\
&= \epsilon_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^k}\, (du^1 \wedge \ldots \wedge du^k)(V_1,\ldots,V_k) \\
&= \det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})(du^1 \wedge \ldots \wedge du^k)(V_1,\ldots,V_k)\ .
\end{aligned}
$$

Andererseits gilt:

$$
\begin{aligned}
(f^*(dx^1) \wedge \ldots \wedge f^*(dk^k))(V_1,\ldots,V_k) &= \epsilon_{i_1,\ldots,i_k}\, (f^*(dx^{i_1}) \otimes \ldots \otimes f^*(dx^{i_k}))(V_1,\ldots,V_k) \\
&= \epsilon_{i_1,\ldots,i_k}\, (f^*(dx^{i_1}))(V_1) \cdot \ldots \cdot (f^*(dx^{i_k}))(V_k) \\
&= \epsilon_{i_1,\ldots,i_k}\, dx^{i_1}(f_*V_1) \cdot \ldots \cdot dx^{i_k}(f_*V_k) \\
&= \epsilon_{i_1,\ldots,i_k}\, dx^{i_1}(f_*V_1^{\mu_1}\frac{\partial}{\partial u^{\mu_1}}) \cdot \ldots \cdot dx^{i_k}(f_*V_1^{\mu_k}\frac{\partial}{\partial u^{\mu_k}})
\end{aligned}
$$

$$= V_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot V_1^{\mu_k} \, \epsilon_{i_1,\ldots,i_k} \, dx^{i_1}(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}) \cdot \ldots \cdot dx^{i_k}(\frac{\partial x^{j_k}}{\partial u^{\mu_k}} \frac{\partial}{\partial x^{j_k}})$$

$$= V_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot V_1^{\mu_k} \, \epsilon_{i_1,\ldots,i_k} \, \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{\mu_k}} \; .$$

Also ist

$$(f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k))(V_1, \ldots, V_k) = (f^*(dx^1) \wedge \ldots \wedge f^*(dk^k))(V_1, \ldots, V_k) \; . \qquad \square$$

6.3 Äußere Ableitung von Differentialformen

Der Begriff der *äußeren Ableitung*, oder auch *Cartan-Ableitung*, verallgemeinert die 'gewöhnliche' Ableitung auf die von Élie Cartan eingeführten Differentialformen.

Sei $\omega \in \Omega^r(M)$ eine r-Form, dann ist die äußere Ableitung definiert als

Definition 6.3.1

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \;\; \in \Omega^r(M) \qquad \Rightarrow$$

$$d_r : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M) \quad mit \quad d\omega := d_r\omega := \frac{1}{r!}(\frac{\partial}{\partial x^k} \omega_{i_1 \ldots i_r}) dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \; . \tag{6.3.1}$$

Eine außerordentliche wichtige Eigenschaft der äußeren Ableitung ist, daß $d_r\omega$ eine geschlossene $(r+1)$-Form ist, d.h.

$$d_{r+1}(d_r\omega) = 0 \quad \text{oder kurz} \quad d^2 = 0 \; , \tag{6.3.2}$$

denn

$$d^2\omega = d_{r+1} d_r \omega = \frac{1}{r!}(\frac{\partial^2 \omega_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^j \partial x^k}) dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} = 0 \; ,$$

da $(\partial_j \partial_k \omega_{i_1 \ldots i_r})$ symmetrisch und $dx^j \wedge dx^k$ antisymmetrisch unter der Vertauschung von j und k sind. Eine r-Form, die in $\ker d_r$ liegt, heißt eine *geschlossene* r-Form, eine r-Form, die in $\operatorname{im} d_{r-1}$ liegt, heißt eine *exakte* r-Form. Aus $d^2 = 0$ folgt, daß $\ker d_r \supset \operatorname{im} d_{r-1}$. Dies gibt Anlaß zur Definition der folgenden Quotientengruppe:

$$r - \text{te de Rham Kohomologiegruppe} := \frac{\ker d_r}{\operatorname{im} d_{r-1}} \; . \tag{6.3.3}$$

Mit den de Rham Kohomologiegruppen werden wir uns später noch ausführlicher beschäftigen.

Hier soll noch der Rücktransport f^* der äußeren Ableitung einer r-Form betrachtet werden.

Satz 6.3.2 *Sei $f : M \to N$ eine injektive Abbildung und $\omega \in \Omega^r(M)$ eine r-Form, dann gilt*

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) \quad \textit{bzw. genauer} \quad d_r(f^*\omega) = f^*(d_r\omega). \tag{6.3.4}$$

Beweis. Zunächst betrachten wir eine 0-Form ω, d.h. eine Funktion $\omega : N \to \mathbb{R}$. Seien weiter $m := \dim M \leq n := \dim N$, $f : M \to N$ injektiv, $\{u^\mu | \mu = 1 \ldots m\}$ eine Basis von M, $\{x^k | k = 1 \ldots n\}$ eine Basis von N und $X \in T_pM$. Für die 0-Form ω ist die äußere Ableitung gleich dem einfachen Differential, also $d_0 = d$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d(\omega \circ f) = d(\omega \circ f) = d(\omega(x(u)) \\ &= \frac{\partial\omega}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial u^\mu}du^\mu = f^*(\frac{\partial\omega}{\partial x^k}dx^k) = f^*(d\omega)\ . \end{aligned}$$

Jetzt sei ω eine r-Form, dann folgt mit dem gerade gezeigten Rücktransport von Funktionen:

$$\begin{aligned} d_r(f^*\omega) &= d_r f^*[(\frac{1}{r!}\omega_{i_1\ldots i_r}(x))dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}] \\ &= d_r[(\frac{1}{r!}f^*\omega_{i_1\ldots i_r}(x))(f^*dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge (f^*dx^{i_r})] \\ &= d_r[(\frac{1}{r!}f^*\omega_{i_1\ldots i_r}(x))(df^*x^{i_1}) \wedge \ldots \wedge (df^*x^{i_r})] \\ &= (\frac{1}{r!}df^*\omega_{i_1\ldots i_r}(x)) \wedge (df^*x^{i_1}) \wedge \ldots \wedge (df^*x^{i_r})] \\ &= (\frac{1}{r!}f^*d\omega_{i_1\ldots i_r}(x)) \wedge (f^*dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge (f^*dx^{i_r})] \\ &= f^*[(\frac{1}{r!}d\omega_{i_1\ldots i_r}(x)) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}] \\ &= f^*d_r[(\frac{1}{r!}\omega_{i_1\ldots i_r}(x))\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}] \\ &= f^*(d_r\omega)\ . \end{aligned}$$

□

6.4 Integrale von Differentialformen und Rücktransport

Sei jetzt $f : M \to N$ eine glatte Funktion (d.h. C^∞) zwischen zwei orientierbaren differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N der Dimension $m = \dim M = \dim N$. Wenn nun f zusätzlich invertierbar ist, also ein Diffeomorphismus, und ω eine k-Form auf N mit $k \leq m$, und $U \subset M$ mit $k \leq \dim U \leq m$, dann ist $\det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})_U \neq 0$, und es folgt mit 6.2.5 sofort

$$\int\limits_{f(U)} (dx^1 \wedge \ldots \wedge x^k) = \int\limits_{f^{-1}(f(U))} |\det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})|(du^1 \wedge \ldots \wedge du^k) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})_{u_0 \in U} \int\limits_U \det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})(du^1 \wedge \ldots \wedge du^k)$$

$$= \pm \int\limits_U f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge x^k)$$

und mit der Linearität von f^* also für jede k-Form ω

$$\int\limits_{f(U)} \omega = \operatorname{sgn}(\det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})_{u_0 \in U} \int\limits_U f^*\omega = \pm \int\limits_U f^*\omega \; . \tag{6.4.1}$$

Hierbei gilt das positive Vorzeichen für Abbildungen f, welche die Orientierung der Basis erhalten und das negative Vorzeichen für Abbildungen f, welche die Orientierung umkehren.

7 Geodäten

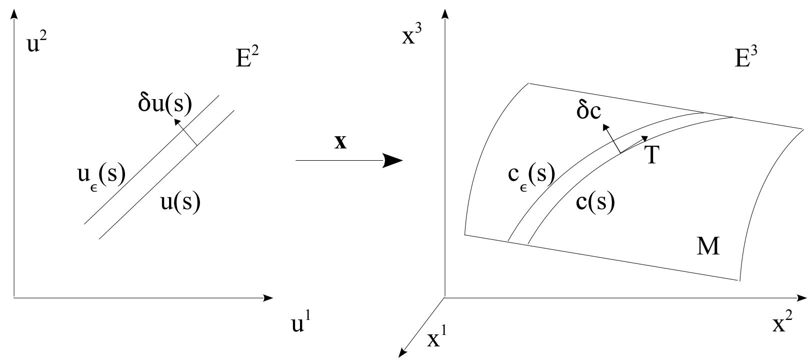

Abbildung 7.1: Immersion einer Kurve von $\mathbb{E}^2$ in eine Fläche $M \subset \mathbb{E}^3$

Bislang haben wir Kurven in der Ebene $\mathbb{E}^2$, im Raum $\mathbb{E}^3$, und Kurven als Schnitte von Flächen in $\mathbb{E}^3$ mit Normalenebenen betrachtet. Nachdem Euler die Variationsrechnung entwickelt hatte kam es zwischen ihm und Johann Bernoulli (1667-1748) zu einem schriftlichen Austausch über den Begriff der Geodäte, als der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten einer Fläche (Scriba u. Schreiber, 2010).

Im Vorangehenden wurde die Krümmung $\kappa(s)$ einer nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : (a, b) \to \mathbb{E}^n$ als den Betrag $|c''(s)|$ definiert (5.1.6). Wenn wir nun die Immersion einer Kurve $u(s)$ in $\mathbb{E}^m$ in eine Kurve $c(s)$ in einer m-dimensionalen Hyperfläche M in $\mathbb{E}^{m+1}$ betrachten, dann wird im Allgemeinen die Richtung des Vektors $c''(s)$ nicht mit dem Normalenvektor der Fläche M am Punkt $c(s)$ übereinstimmen. Wir zerlegen daher $c''(s)$, und damit $\kappa(s)$, in einen Normalen- und einen Tangentialanteil:

$$c''(s) = c''^N(s) + c''^T(s). \tag{7.0.1}$$

Die normale Komponente $|c''^N(s)|$ ist die bereits oben diskutierte Eulersche Normalenkrümmung $\kappa_T^N(s)$. Die tangentiale Komponente $|c''^T(s)|$ heißt geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ und soll jetzt betrachtet werden. Der wesentliche Punkt ist hier, wie wir sogleich sehen werden, daß die geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ intrinsisch in der Fläche M definiert ist und daher ohne Bezugnahme auf den umgebenden Raum $\mathbb{E}^{m+1}$ auskommt.

Wir orientieren uns an Spivak (1979) (Bd. II, S. 115 ff.), Eschenburg u. Jost (2007) (S. 61 ff.) und Frankel (2004) (S. 232 ff.).

Definition 7.0.1 *Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : (a, b) \to M$ in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt Geodäte, wenn $c''^T(s) = 0$ für $s \in (a, b)$ ist, d.h. wenn die geodätische Krümmung $\kappa_g(s) := |c''^T(s)| = 0$ ist.*

Eine Geodäte ist also eine Kurve verschwindender Krümmung in der Hyperfläche M in der sie verläuft. Wenn diese m-dimensionale Hyperfläche M in eine höherdimensionale Mannigfaltigkeit eingebettet ist, z.B. in $\mathbb{E}^n$ mit $m < n$, dann wird jedoch die Normal-Komponente der Krümmung der Geodäten im Allgemeinen nicht verschwinden.

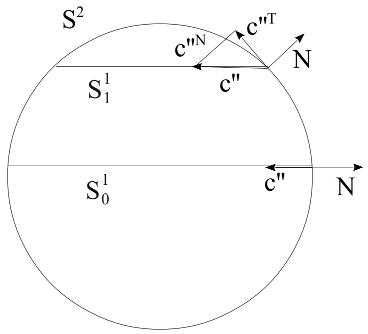

Abbildung 7.2: der Großkreis S_0^1 auf der Kugel S^2 ist eine Geodäte

Beispiel: Bei einem Großkreis S_0^1 auf einer Kugel S^2, d.h. einem Kreis S^1 mit Kreismittelpunkt gleich Kugelmittelpunkt, hat c'' keine Tangentialkomponente, also ist der Großkreis eine Geodäte. □

Wenn $c(t)$ die Geodätengleichung $c''^T(t) = 0$ erfüllt, dann ist die Parametrisierung t proportional zur Bogenlänge, denn $c'(t)$ ist stets tangential bzgl. M, d.h. $c'(t) = c'^T(t)$:

$$0 = \langle c''^T \mid c'^T \rangle = \langle c'' \mid c'^T \rangle = \langle c'' \mid c' \rangle = \frac{1}{2}\langle c' \mid c' \rangle' \quad \Rightarrow \quad |c'(t)| = k = \text{const} .$$

Durch Übergang zu $s := k \cdot t + t_0$ und $c_B(s) := c(t)$ folgt $|c_B'(s)| = 1$. Dies können wir auch so ausdrücken: eine Geodäte ist invariant unter einer affinen Transformation. Daher nehmen wir im Folgenden eine Geodäte stets als nach Bogenlänge parametrisiert an!

Sei jetzt $a(s)$ eine Kurve $a : (a,b) \to \mathbb{E}^m$ und $c(s)$ die Immersion dieser Kurve mittels der Abbildung $\mathbf{x}$ in eine m-dimensionale Hyperfläche $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$, also $c(s) := \mathbf{x}(a(s))$. Die Koordinatensysteme seien $\{u^\mu\}$ in $\mathbb{E}^m$ und $\{x^i\}$ in $\mathbb{E}^{m+1}$. Wir wollen jetzt die Geodätengleichung $c''^T(s) = 0$ in Bezug auf die Kurve $a(s)$ und das Koordinatensystem $\{u^\mu\}$ betrachten.

Definition 7.0.2 *Seien $Z(t)$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ in einer m-dimensionalen Hyperfläche $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$, $T(t) \subset M$ der Tangenten-Einheitsvektor zu $c(t)$ und $N(t)$ der Normalen-Einheitsvektor mit $N(t) \perp M$ am Punkt $c(t)$, dann ist der Vektor der intrinsischen oder kovarianten Ableitung $\frac{\nabla Z(t)}{dt}$ definiert als die Projektion der gewöhnlichen Ableitung $\frac{dZ(t)}{dt}$ in die Tangentialebene von M:*

$$\nabla Z(T) := \nabla_T Z := \frac{\nabla Z(t)}{dt} := \frac{dZ(t)}{dt} - \langle \frac{dZ(t)}{dt} \mid N \rangle N . \qquad (7.0.2)$$

Sei jetzt also $c(s)$ die Immersion $\mathbf{x}(u(s)) \subset M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ und sei $c(s)$ nach Bogenlänge parametrisiert. Wenn wir zunächst $c(s)$ als Raumkurve in $\mathbb{E}^{m+1}$ betrachten, dann ist $c'(s) = T(s)$ und $c''(s) = \frac{dT(s)}{ds} = \kappa(s)N_0(s)$ mit dem Normalen-Einheitsvektor $N_0(s)$ von $c(s)$, der senkrecht auf $T(s)$ steht. Im Allgemeinen steht $N_0(s)$ im Gegensatz zu $N(s)$ aber nicht senkrecht auf M. Die geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ ist jetzt als die Projektion von $c''(s) = \frac{dT(s)}{ds}$ in die Tangentialebene von M am Punkt $c(s)$ definiert:

$$\kappa_g := |c''^T(s)| = |(\frac{dT(s)}{ds})^T| = |\frac{\nabla T(s)}{ds}| \tag{7.0.3}$$

und die Geodätengleichung folgt also als

$$c''(s)^T = \frac{\nabla T}{ds} = 0\ . \tag{7.0.4}$$

Häufig stellt man diese Geodätengleichung auch in den lokalen Koordinaten $\{u^\mu\}$ von $\mathbb{E}^m$ dar. Die erste Ableitung von $\mathbf{x}(u)$ an einem Punkt u_0 liegt in der Tangentialebene $T_{\mathbf{x}(u_0)}M$:

$$\partial_\mu \mathbf{x}(u) := \frac{\partial}{\partial u^\mu}\mathbf{x}(u)\ .$$

Die zweite Ableitung von $\mathbf{x}(u)$ an einem Punkt u_0 hat einen Tangential- und einen Normalenanteil:

$$\partial_\mu\partial_\nu \mathbf{x}(u) := [\frac{\partial^2}{\partial u^\mu \partial u^\nu}\mathbf{x}(u)]^T + [\frac{\partial^2}{\partial u^\mu \partial u^\nu}\mathbf{x}(u)]^N =: \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda \mathbf{x}(u) + b_{\mu\nu}N\ .$$

Damit folgt:

$$T := \frac{\partial \mathbf{x}}{ds} = \partial_\nu \mathbf{x}\,\frac{du^\nu}{ds} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{ds^2} &= \partial_\mu\partial_\nu \mathbf{x}\,\frac{du^\mu}{ds}\frac{du^\nu}{ds} + \partial_\nu \mathbf{x}\,\frac{d^2u^\nu}{ds^2} \\
&= (\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda \mathbf{x} + b_{\mu\nu}N)\frac{du^\mu}{ds}\frac{du^\nu}{ds} + \partial_\nu \mathbf{x}\,\frac{d^2u^\nu}{ds^2} \qquad \Rightarrow \\
\frac{\nabla T}{ds} &= (\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{ds^2})^T = (\frac{d^2u^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{ds}\frac{du^\nu}{ds})\,\partial_\lambda \mathbf{x}\ .
\end{aligned} \tag{7.0.5}$$

Also lautet die Geodätengleichung einer Kurve $c(s) = \mathbf{x}(u(s)) \subset M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ in den lokalen Koordinaten $\{u^\alpha\}$ von $\mathbb{E}^m$:

$$\frac{\nabla T}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2u^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{ds}\frac{du^\nu}{ds} = 0\ . \tag{7.0.6}$$

Dies ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades, und diese hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf für die Anfangswerte u_0 und $T_0 = T(u_0)$ in einer geeigneten Umgebung von u_0 eine eindeutige Lösung (siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238).

8 Euler-Charakteristik von konvexen Polyedern

Wir unterbrechen an dieser Stelle unsere Betrachtung der Krümmung von Flächen in $\mathbb{E}^3$ für einen Augenblick und wenden uns einem wichtigen topologischen Resultat von Euler zu, der Euler-Charakteristik. Später werden wir uns mit weitreichenden Verallgemeinerungen dieses Resultats von Euler beschäftigen.

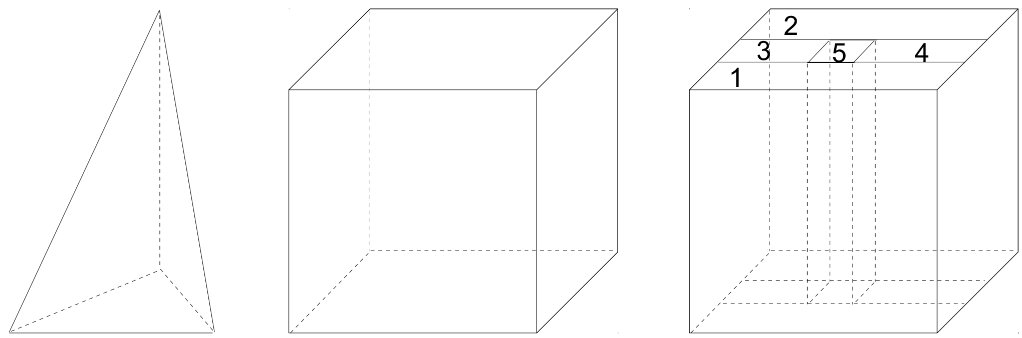

Abbildung 8.1: Polyeder mit Geschlecht 0 und 1

Die Euler-Charakteristik wird gelegentlich auch Euler-Poincaré-Charakteristik genannt. Euler betrachtete in den Jahren 1752-1753 reguläre Polyeder (Platonische Körper) in $\mathbb{E}^3$ und fand dabei seine berühmte Polyeder-Formel. Sei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen des Polyeders, dann gilt für die Euler-Charakteristik χ:

$$\chi := e - k + f = 2 \; . \tag{8.0.1}$$

Bei der dreiseitigen Pyramide zählen wir $e = 4$, $k = 6$, $f = 4$, also $\chi = 2$, beim konvexen Quader erhalten wir $e = 8$, $k = 12$, $f = 6$, also wieder $\chi = 2$.

Euler hatte sich gewundert, daß dieser einfache Zusammenhang noch niemandem zuvor aufgefallen war. Was Euler jedoch nicht wissen konnte war, daß tatsächlich schon Descartes (1596-1650) in den Jahren 1619-1621 einen Aufsatz über Polyeder verfaßt hatte, in dem er diesen Zusammenhang hergeleitet hatte. Descartes Manuskript wurde nie publiziert, jedoch 1675 oder 1676 von Leibniz (1646-1716) in Paris aus dem Nachlaß von Descartes handschriftlich kopiert und schließlich erst 1860 mit dem Nachlaß von Leibniz veröffentlicht (Phillips, 2013).

Eppstein (2013) hat im Internet einen schönen Artikel mit dem Titel „Twenty Proofs of Euler's Formula: V-E+F=2" veröffentlicht, der zeigt, wie diese geometrisch-topologische

Frage bis heute immer wieder zu neuen und kreativen Antworten geführt hat. Wir folgen hier dem 9. Beweis von Eppstein, der wohl auf Adrien-Marie Legendre (1752–1833) zurückgeht.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß der Polyeder 'klein' ist, d.h. im Innern einer Einheitskugel S^2 liegt und daß der Kugelmittelpunkt irgendwo innerhalb des Polyeders liegt. Als nächstes triangulieren wir die Oberfläche des Polyeders, d.h. wir ersetzen alle Flächen durch eine Summe von Dreiecken. Wenn wir jetzt nach der Summe aller Dreieckskanten k fragen, so finden wir $\frac{3}{2}$ mal soviele Kanten wie Dreiecksflächen f, denn jedes Dreieck hat 3 Kanten, teilt sich aber jede Kante mit einem Nachbardreieck.

$$k = \frac{3}{2} f \ . \tag{8.0.2}$$

Wenn wir jetzt jede Dreieckskante der Oberfläche des Polyeders vom Kugelmittelpunkt auf die Kugeloberfläche projizieren, so erhalten wir als Bild der Dreieckskante ein Segment eines Großkreises. Also wird jedes Dreieck des Polyeders auf ein sphärisches Dreieck auf S^2 abgebildet. Für die Fläche eines sphärischen Dreiecks mit den Innenwinkeln α_i auf der Einheitskugel ($r = 1$) hatte Harriot gefunden (4.0.2):

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = A + \pi \ .$$

Jetzt summieren wir diesen Ausdruck über alle Dreiecksflächen und erhalten:

$$\sum_{m=1}^{f} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \sum_{m=1}^{f} (A + \pi) = 4\pi + f\pi \ , \tag{8.0.3}$$

denn die Summe über alle sphärischen Dreiecksflächen A ist ja gerade die gesamte Kugeloberfläche.

Andererseits können wir die Winkelsumme $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i$ auch über alle Ecken (Vertizes) E durchführen und erhalten dann:

$$\sum_{n=1}^{e} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 2\pi e \ . \tag{8.0.4}$$

Die Gesamtwinkelsummen 8.0.3 und 8.0.4 müssen gleich sein, unabhängig davon, ob wir über Flächen oder Ecken summieren. Also folgt

$$4\pi + f\pi = 2\pi e \quad \Rightarrow \quad f = 2e - 4 \quad \Rightarrow \quad 3f = 2e - 4 + 2f \quad \Rightarrow$$

$$2k = 2e - 4 + 2f \quad \Rightarrow \quad \chi := e - k + f = 2 \ . \tag{8.0.5}$$

Natürlich stellt sich nun die Frage, ob dieses Ergebnis von der speziellen Form der Triangulierung abhängt? Wenn wir aus einem Dreieck zwei Dreiecke machen, indem wir einen Eckpunkt mit irgendeinem Punkt auf der gegenüberliegenden Kante verbinden, so erhöhen sich e um 1, k um 2, f um 1 und $\chi = e - k + f$ bleibt unverändert. □

Die ersten beiden Abbildungen zeigen konvexe Polyeder. Die dritte Abbildung zeigt einen Quader mit einem 'Loch', bzw. 'offenen Kanal'. Wir finden hier $e = 2 \cdot 12 = 24$, $k = 4 + 2 \cdot (6 + 10) + 4 = 40$, $f = 4 + 2 \cdot 4 + 4 = 16$, also $\chi = 0$. Dies kann man eleganter darstellen, indem man diesen Quader kompakt aus fünf Teilquadern zusammensetzt, wobei der fünfte Quader gerade als Kanal in der Mitte liegen möge. Den aus fünf Teilquadern zusammengesetzten Quader nennen wir $Q_0 := \cup_{i=1}^{5} Q_i$ und weil er identisch mit dem einfache Quader Q_0 ist, gilt $\chi(Q_0) = 2$. Jetzt entfernen wir den fünften Quader in der Mitte und erhalten also $\chi = \chi(Q_0) - \chi(Q_5) = 2 - 2 = 0$. Für jeden weiteren Quader, den wir im Zentrum entfernen, um ein weiteres 'Loch' zu erzeugen, verringert sich χ um 2. Also gilt allgemein: wenn g, das sog. *Geschlecht* eines Polyeders bezeichne, d.h. die Anzahl der 'Löcher', so ändert sich die Formel der Euler Charakteristik zu:

$$\chi_g := e - k + f = 2 - 2g \; . \tag{8.0.6}$$

9 Flächentheorie von Gauß

9.1 Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)

Der Vater von Carl Friedrich Gauß, Gebhard Dietrich Gauß (1744-1808) lebte in Braunschweig als Lehmmaurer und Hausschlachter. Seine erste Frau Dorothea Emeranzia Warnecken (1745-1775), mit der er einen Sohn hatte, Johann Georg Heinrich (1769-1854), starb früh an 'Auszehrung' (Tuberkulose). Mit seiner zweiten Frau Dorothea Benze (1743-1839) hatte er ein weiteres Kind namens Carl Friedrich (1777-1855).

Abbildung 9.1: C. F. Gauß
G. Biermann (1887), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Gauß]

Der junge Carl Friedrich war ein sehr waches und interessiertes Kind und lernte auf eigene Initiative mit Hilfe seines Bruders Georg schon sehr früh Lesen und Schreiben. Gegen große Widerstände des Vaters gelang es ihm mit 11 Jahren das Gymnasium in Braunschweig besuchen zu dürfen. Dort lernte er nebenbei auf eigene Initiative hin Altgriechisch, um Pythagoras und Euklid im Original lesen zu können. Der 14-jährige Gauß wurde vom Braunschweiger Professor Zimmermann als außergewöhnliches Talent erkannt und auf dessen Veranlassung vom Braunschweiger Herzog Carl Wilhelm Ferdinand gefördert. Mit 15 Jahren begann Gauß sein Studium in Braunschweig am Collegium Carolinum bei Prof. Zimmermann in Mathematik und Physik und bei Prof. Eschenburg in Philosophie und Literatur.

Ab dem Jahr 1795 durfe Gauß mit einem Stipendium seines Herzogs für drei Jahre an der Universität Göttingen studieren. Die dortige Universität hatte für Gauß vornehmlich wegen ihrer umfangreichen Universitätsbibliothek eine große Bedeutung, weil diese ihm den Zugang zu allen aktuellen mathematischen Publikationen eröffnete. In Göttingen begann Gauß die Zahlentheorie von Euler zu studieren und zu erweitern, was schließlich 1801 zu seiner ersten großen Veröffentlichung führte, den *Disquisitiones Arithmeticae.* Mit einem Teilergebnis dieser Arbeit, dem *Fundamentalsatz der Algebra*, promovierte Gauß 1799 an der Braunschweigischen Landesuniversität Helmstedt.

Zu Beginn des Jahres 1801 wurde von dem italienischen Astronomen Giuseppe Piazzi der Asteroid Ceres entdeckt (heute als Zwergplanet klassifiziert). Gauß begann mit großem Engagement und großem Arbeitsaufwand aus den wenigen Beobachtungsdaten von Piazzi die Bahn von Ceres zu berechnen. Nachdem sich diese Berechnungen als korrekt herausgestellt hatten wurde Gauß über Nacht europaweit berühmt und durfte sich Hoffnungen auf einen Ruf an eine Sternwarte machen. 1807 wurde er Professor für Astronomie in Göttingen und Leiter der dortigen Sternwarte. 1809 erschien sein astronomisches Hauptwerk *Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen*. In diesem Werk stellte Gauß auch erstmalig die von ihm schon jahrelang verwendete *Fehlerrechnung* vor. 1812 berechnete Gauß die Bahn des Jupitermondes Pallas, wobei er fast ein Jahr lang 800000 reelle Zahlen verarbeitete (ohne Taschenrechner und Computer!). Anschließend korrigierte er die theoretische Jupitermasse aus den beobachteten Bahnstörungen des Pallas.

Daneben versuchte Gauß alle möglichen Fehlerquellen für seine astronomischen Beobachtungen zu identifizieren und zu minimieren. Dabei wurde ihm klar, daß eine wesentliche Ungenauigkeit bei astonomischen Beobachtungen die ungenügend genauen Erdkoordinaten der Beobachtungsstationen aufgrund der Abplattung der Erde war. Daher planten die europäischen Geodäten und Astronomen ein möglichst präzises gesamteuropäisches Vermessungsnetz. Gauß ließ sich von dieser Idee überzeugen und erklärte sich bereit, die Vermessung des Königreichs Hannover zu übernehmen. Diese für Gauß auch körperlich überaus anstrengende Arbeit beschäftigte ihn von 1821-1825. Seine Erfindung des Heliotrops, eines Spiegel-Linsen-Systems, mit dem er Sonnenlicht bündeln und in eine Richtung fokusiert abstrahlen konnte, erlaubte ihm bei guter Sicht eine Strecke von bis zu 100 km zwischen zwei Meßpunkten zu überbrücken und stellte eine Revolution in der Geodäsie dar. In all diesen Jahren der geodätischen Messungen arbeitete Gauß nebenbei an seiner mathematischen Flächentheorie, die ihn zum Begriff der Flächenkrümmungen und seinem *Theorema Egregium* (*Herausragender Satz*) führte. Gauß erkannte klar die große Bedeutung dieser Entdeckung und war über seine in mühevoller Arbeit erreichten Ergebnisse sehr glücklich. Er publizierte einige dieser Arbeiten über Differentialgeometrie 1827 unter dem Titel *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (*Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen*). Gauß blieb lebenslang seinem Publikationsmotto treu: „*pauca sed matura*" („*nur Weniges, aber Reifes*"), und so blieben viele seiner Einsichten unveröffentlicht und fanden sich erst Jahrzehnte später in seinen mathematischen Tagebüchern. Legendär sind die zahlreichen brieflichen Antworten von Gauß an andere Mathematiker, die ihm stolz von ihren Entdeckungen berichteten und denen Gauß dann kurz und freundlich mitteilte, daß er sich über diese Entdeckung freue, daß er selbst aber schon vor vielen Jahren einen entsprechenden „zierlichen kleinen Beweis" gefunden habe.

In den Jahren von 1828-1844 wurde Gauß um eine Verfeinerung seines Meßnetzes zum Zweck der Kartographie gebeten, doch diese Arbeit delegierte er soweit als möglich. 1831 trat der mit Gauß befreundete Physiker Wilhelm Weber seine Professur in Göttingen an und zwischen Gauß, der bislang immer nur als Einzelgänger geforscht hatte, und dem jungen Weber entwickelte sich eine für beide inspirierende Zusammenarbeit beim Thema Magnetismus. Dabei entwickelte Gauß das Magnetometer, das erste exakte Meßgerät zur Messung von Magnetfeldstärken und baute und erprobte mit Weber den ersten elektromagnetischen Telegraphen.

Bernhard Riemann begann sein Mathematikstudium in Göttingen, hatte dort zunächst von Gauß aber nicht allzuviel erlebt, weil dieser kein Interesse an der Lehre zeigte und nur pflichtgemäß seine Astronomievorlesungen hielt. Riemann wechselte dann nach Berlin zu Jacobi und Dirchlett, die ihn unterstützten und förderten und kehrte dann wieder zurück nach Göttingen, wo er unter Gauß mit einer Arbeit über Funktionentheorie promovierte. Anschließend habilitierte Riemann 1854 im Fach Mathematik unter Gauß. Dieser saß als Dekan der Prüfungskommission für Riemann vor und wählte aus Riemanns Liste der möglichen Themen für dessen Probevorlesung das letztgenannte Thema „*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*". Riemann wurde von dieser Wahl völlig überrascht, denn üblicherweise akzeptierte die Fakultät immer das erstgenannte Thema des Kandidaten, und er erarbeitete aus dem Nichts in zwei Monaten die Grundlagen der Differentialgeometrie in n Dimensionen. Gauß, zu jener Zeit schon herzkrank, war wohl der Einzige der Riemanns Vortrag wirklich verstand, und er war außergewöhnlich erregt und begeistert. Dies war der letzte öffentliche Auftritt von Gauß in der Fakultät vor seinem Tod zu Beginn des Jahres 1855.

Die glücklichste Zeit seines Lebens war für Gauß die Zeit seiner ersten Ehe mit Johanna Osthof ab dem Jahr 1805. Nach der Geburt ihres dritten Kindes starb Johanna, und nur ein halbes Jahr später im Verlauf einer großen Masern-Epidemie starb auch dieses junge Kind. Gauß war zutiefst betroffen und verfiel in eine Depression. 1810 heiratete er Wilhelmine Waldeck, eine Göttinger Freundin von Johanna, und aus dieser Ehe gingen drei Kinder hervor. Ab 1818 begann Wilhelmine gesundheitlich schwächer zu werden und einige Jahre später zeigte sich, daß sie unheilbar an Tuberkulose erkrankt war. Sie wurde liebevoll von Minna, dem zweiten Kind von Gauß gepflegt, die sich dabei jedoch auch an Tuberkulose infizierte. Wilhelmine starb nach langem Leiden 1831 und Minna starb 1840. Gauß blieb als Trost nur seine Arbeit!

Die Originalarbeiten von Gauß hat das Göttinger Digitalisierungszentrum freundlicherweise online gestellt, siehe Gauß (2013).

[Quellen: Wikipedia-Gauß (2013), Mania (2012)].

9.2 Erste und zweite Fundamentalform einer Fläche

Gauß standen zu seiner Zeit weder der Begriff der Tensoren noch jener der Differentialformen zur Verfügung. Eine schöne Darstellung der Gaußschen Gedanken und Bezeichnungen findet sich im Abschnitt „*How to Read Gauss*" in Spivak (1979), II, S. 74 ff.

Wir orientieren uns hier im Wesentlichen an Frankel (2004), S. 201 ff. und Eschenburg u. Jost (2007), S. 45 ff., mit etwas modifizierten Bezeichnungen.

Sei $\mathbf{x} : \mathbb{E}^2 \to M \subset \mathbb{E}^3$ eine Immersion. Dann gilt für die Tangentialabbildung

$$\mathbf{x}_* : T_u(\mathbb{E}^2) \to T_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) \ , \quad \mathbf{x}_*(\partial_{u^i}) := \frac{\partial \mathbf{x}^k(u)}{\partial u^i} \, \partial_{x^k} \ , \quad i \in \{1,2\}, \ k \in \{1,2,3\} \ , \quad (9.2.1)$$

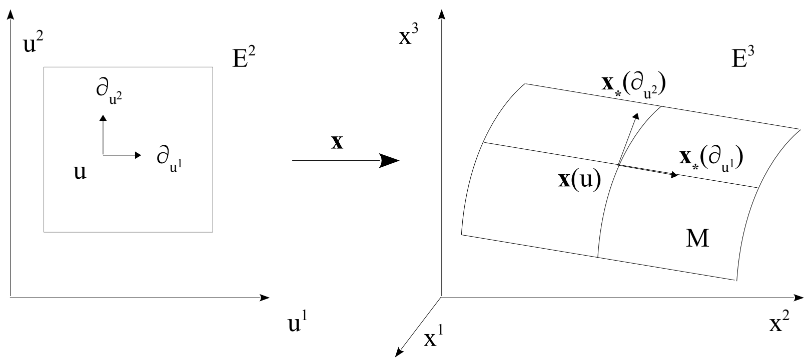

Abbildung 9.2: Immersion einer Fläche von $\mathbb{E}^2$ in eine Fläche $M \subset \mathbb{E}^3$

das heißt, der Tangentialraum $T_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$ an $M \subset \mathbb{E}^3$ im Punkt $\mathbf{x}(u) \in \mathbb{E}^3$ ist gegeben durch

$$T_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \{\frac{\partial x^k(u)}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\ , \ i = 1\dots 2,\ k = 1\dots 3\}\ .$$

Nun ist $T_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) \sim \mathbb{E}^3$ und so wählen wir als Einheitsvektoren in dem äquivalenten Tangentialraum $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3$:

$$e_i(u) := \mathbf{x}_{u^i} := \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^i}\ , \tag{9.2.2}$$

also

$$\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3 = \{e_i(u) = \mathbf{x}_{u^i} = \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1(u)}{\partial u^i} \\ \frac{\partial x^2(u)}{\partial u^i} \\ \frac{\partial x^3(u)}{\partial u^i} \end{pmatrix}\ , \ i = 1\dots 2\}$$

Senkrecht auf $e_1(u)$ und $e_2(u)$ im Punkt $\mathbf{x}(u) \in M$ wählen wir mit rechtshändiger Orientierung den Normalenvektor $\mathbf{N}(u)$.

Jetzt führen wir die zu $\{e_i(u)\}$ duale Basis des Kotangentialraums $\tilde{T}^*_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$ ein mit

$$\tilde{T}^*_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3 = \{de^i(u)\,|\,de^i(e_j)|_u = \delta^i_j\}\ .$$

Mittels der $de^i(u)$ kann man die beiden folgenden vektorwertige 1-Formen an der Stelle $\mathbf{x}(u)$ einführen:

$$d\mathbf{x}(u) := x_{u^i}de^i = x_{u^1}de^1 + x_{u^2}de^2\ ,$$

$$d\mathbf{N}(u) := N_{u^i}de^i = N_{u^1}de^1 + N_{u^2}de^2\ .$$

$d\mathbf{x}(u)$ angewendet auf einen Vektor V ergibt gerade wieder diesen Vektor V, denn

$$V = V^i e_i \in \tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x}(u)(V) = \mathbf{x}_{u^i}(u)de^i(V^j e_j) = \mathbf{x}_{u^i}(u)V^i = V\ , \tag{9.2.3}$$

Auf M wird eine Metrik g als ein Feld einer 2-Form (d.h. eines kovarianten Tensors 2. Stufe) eingeführt durch

$$g_{ij}(u) := \langle e_i(u) \mid e_j(u)\rangle := \sum_{k=1}^{3} \mathbf{x}^k_{u^i}\, \mathbf{x}^k_{u^j} \ , \tag{9.2.4}$$

$$g(u) := g_{ij}(u)\, de^i(u) \otimes de^j(u) \ . \tag{9.2.5}$$

Für zwei Vektoren $V = V^i e_i$ und $W = W^j e_j$ des Tangentialraums $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$ gilt also:

$$\langle V \mid W\rangle = V^i W^j \langle e_i(u) \mid e_j(u)\rangle = g_{ij}(u) V^i W^j \ . \tag{9.2.6}$$

Nun kann die Metrik-2-Form $g(u)$ als ein 'Quadrat' einer 1-Form $ds(u)$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned} ds^2(u) &:= \langle d\mathbf{x}(u) \mid d\mathbf{x}(u)\rangle := \langle \mathbf{x}_{u^i}(u) de^i(u) \mid \mathbf{x}_{u^j}(u) de^j(u)\rangle \\ &= \langle e_i(u) de^i(u) \mid e_j(u) de^j(u)\rangle = g_{ij}(u)\, de^i(u) de^j(u) = g(u) \ . \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

Die *Erste Fundamentalform von Gauß* ist jetzt der folgende Ausdruck für die Bogenlänge ds, in der Sprache der Differentialformen also die folgende 1-Form:

$$\begin{aligned} ds(u) &:= \langle d\mathbf{x}(u) \mid d\mathbf{x}(u)\rangle^{\frac{1}{2}} := \langle \mathbf{x}_{u^i}(u) de^i(u) \mid \mathbf{x}_{u^j}(u) de^j(u)\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle e_i(u) de^i(u) \mid e_j(u) de^j(u)\rangle^{\frac{1}{2}} = (g_{ij}(u)\, de^i(u) de^j(u))^{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned} \tag{9.2.8}$$

Diese *Erste Fundamentalform von Gauß* ist bezüglich der Fläche M intrinsisch, denn sie bezieht sich nur auf den Tangentialraum $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$ von $\mathbf{x}(u) \in M$.

Den Zusammenhang mit der bekannten Schreibweise der Differentialquotienten sieht man sofort, wenn $V(t)$ eine Tangente an die Kurve $\mathbf{x}(u(t))$ ist:

$$V = \frac{de^i}{dt} \mathbf{x}_{u^i}(u) = \frac{de^i}{dt} e_i \in \tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x}(u)(V) = \mathbf{x}_{u^i}(u) de^i(\frac{de^j}{dt} e_j) = \mathbf{x}_{u^i}(u) \frac{de^i}{dt} \ ,$$

$$\begin{aligned} (\frac{ds(u)}{dt})^2 &:= \langle \frac{d}{dt} d\mathbf{x}(u) \mid \frac{d}{dt} d\mathbf{x}(u)\rangle := \langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \frac{de^i}{dt} \mid \mathbf{x}_{u^j}(u) \frac{de^j}{dt}\rangle \\ &= \langle e_i(u) \frac{de^i}{dt} \mid e_j(u) \frac{de^j}{dt}\rangle = g_{ij}(u)\, \frac{de^i}{dt} \frac{de^j}{dt} \ . \end{aligned}$$

Damit wird die Bogenlänge einer Kurve $\mathbf{x}(u(t))$ von $\mathbf{x}(u(a))$ bis $\mathbf{x}(u(b))$ zu

$$s(a,b) = \int_a^b || \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^i} \frac{de^i}{dt} ||\, dt = \int_a^b \langle \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^i} \frac{de^i}{dt} \mid \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^j} \frac{de^j}{dt}\rangle^{\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \int_a^b (g_{ij}(u)\,\frac{de^i}{dt}\,\frac{de^j}{dt})^{\frac{1}{2}}\,dt\;. \tag{9.2.9}$$

Die *Zweite Fundamentalform von Gauß* beschreibt jetzt die Änderung des Tangentialraums, bzw. des Normalenvektors im umgebenden Raum $\mathbb{E}^3$ bei einer Änderung des Punktes $\mathbf{x}(u)$. Dies ist eine direkte Verallgemeinerung der Definition der Krümmung einer Kurve als Änderung der Tangente in Normalenrichtung (siehe 5.1.6):

$$b_{ij}(u) := \langle \frac{\partial}{\partial u^i} e_j(u) \mid N(u)\rangle = \langle \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}\mathbf{x}(u) \mid \mathbf{N}(u)\rangle = \langle \mathbf{x}_{u^i u^j}(u) \mid \mathbf{N}(u)\rangle\;, \tag{9.2.10}$$

bzw. als Feld einer symmetrischen 2-Form:

$$b(u) := b_{ij}(u)\,de^i(u) \otimes de^j(u)\;. \tag{9.2.11}$$

Eine alternative Beschreibung von $b_{ij}(u)$ erhält man mittels

$$\mathbf{x}_{u^i} \perp \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial u^j}\langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{N}(u)\rangle = \langle \mathbf{x}_{u^j u^i}(u) \mid \mathbf{N}(u)\rangle + \langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{N}_{u^j}(u)\rangle \quad \Rightarrow$$

$$b_{ij}(u) = -\langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{N}_{u^j}(u)\rangle\;, \quad \text{bzw.} \tag{9.2.12}$$

$$b(u) = -\langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{N}_{u^j}(u)\rangle\,de^i \otimes de^j = -\langle d\mathbf{x}_{u^i}(u) \mid d\mathbf{N}_{u^j}(u)\rangle\;. \tag{9.2.13}$$

In einem endlichdimensionalen Vektorraum kann man jeder reellen, symmetrischen Matrix eine selbstadjungierte Abbildung zuordnen. In unserem Zusammenhang kann man so mit $b_{ij}(u)$ die sog. Weingarten-Abbildung $L(u)$ definieren:

$$\langle e_i(u) \mid L(u)\,e_j(u)\rangle = \langle e_i(u) \mid L(u)^k{}_j\,e_k(u)\rangle = L(u)^k{}_j\,g_{ki}(u) := b_{ij}(u)\;, \quad \text{d.h.} \tag{9.2.14}$$

$$L(u)^k{}_j = b^k{}_j(u)\;. \tag{9.2.15}$$

Damit folgt

$$\langle e_i(u) \mid L(u)\,e_j(u)\rangle = L(u)^k{}_j\,g_{ki}(u) = b_{ij}(u) = -\langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{N}_{u^j}(u)\rangle\;,$$

$$L(u)e_j(u) = L(u)^k{}_j\,e_k(u) = -\mathbf{N}_{u^j}(u)\;, \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{N}_{u^j}(u) = -b^k{}_j(u)\mathbf{x}_{u^k}(u)\;. \tag{9.2.16}$$

Daraus folgt für die Änderung von $\mathbf{N}(u)$ entlang einer Kurve $\mathbf{x}(u(t))$:

$$d\mathbf{N}(u) = \mathbf{N}_{u^j}(u)\,de^j(u) = -L(u)^i{}_j\,e_i(u)de^j(u) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\mathbf{N}(u(t))}{dt} = -L(u(t))^i{}_j\,\mathbf{x}_{u^i}(u(t))\frac{de^j(t)}{dt}\;. \tag{9.2.17}$$

9.3 Gauß-Krümmung

Die reelle, symmetrische Matrix $L(u)^i{}_j$ der Weingarten-Abbildung $L(u)$ kann nun diagonalisiert werden zu

$$\tilde{L}(u)^i{}_j := \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} . \tag{9.3.1}$$

Die entsprechenden orthogonalen Eigenvektoren $\tilde{e}_k$ mit $L(u)^k{}_j \tilde{e}_k = \kappa_j \tilde{e}_j$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

Die Gaußsche Krümmung ist definiert als

$$\begin{aligned} K(u) &:= \det(L(u)^i{}_j) = \det(\tilde{L}(u)^i{}_j) = \kappa_1 \kappa_2 \\ &= \det(b^i{}_j(u)) = \frac{\det(b_{ij}(u))}{\det(g_{kl}(u))} =: \frac{\det(b(u))}{\det(g(u))} , \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

und sie ist als Determinante unabhängig von der jeweils gewählten Basis des Tangentialraums $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$.

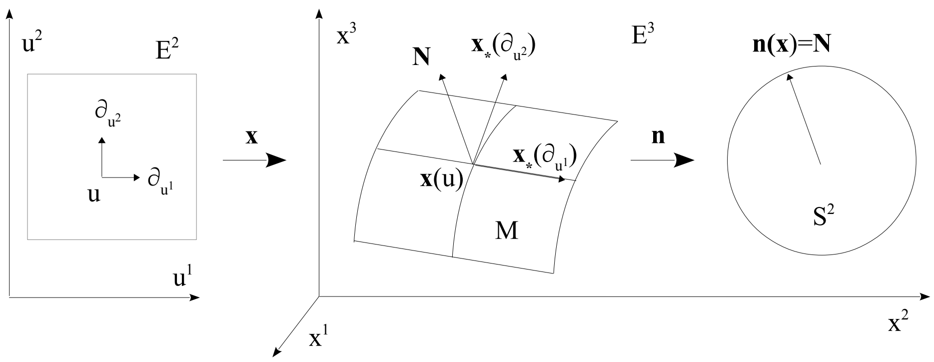

Abbildung 9.3: Gaußsche Normalenabbildung einer Fläche $M \subset \mathbb{E}^3$

Tatsächlich hat Gauß die nach ihm benannte Krümmung ursprünglich mittels seiner *Normalenabbildung* definiert. Diese Abbildung $n : M \to S^2$ mit $n(x) := \mathbf{N}(x)$ ordnet jedem Punkt $x \in M$ seinem jeweiligen Normalenvektor $\mathbf{N}(x)$ entsprechend einen Punkt auf der Kugeloberfläche S^2 zu. Nun hat Gauß um den Punkt $x \in M$ eine kleine Umgebung U konstruiert und diese Umgebung dann mittels n auf S^2 abgebildet. Das Verhältnis der Flächen $\lim_{U\to 0} \operatorname{vol}(n(U))/\operatorname{vol}(U)$ zeigt an, wie stark sich $\mathbf{N}(x)$ an der Stelle x verändert und wurde daher von Gauß als Krümmung K definiert.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang dieser Krümmungsdefinition mit der obigen Definition mittel der Determinanten von b herstellen.

Seien also die drei Basisvektoren $e_1, e_2, \mathbf{N} \in \tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3$ in einer positiven Orientierung gegeben. Seien weiter M und S^2 beide in den gleichen Raum $\mathbb{E}^3$ eingebettet, dann kann man die Tangentialräume T_xM und $T_{n(x)}S^2$ miteinander identifizieren. Damit sind dann auch die entsprechenden Flächenformen bei x, bzw. $n(x)$ identisch:

$$\omega := \mathrm{vol}_{S^2} = \mathrm{vol}_M = \sqrt{g}\,\frac{1}{2!}\epsilon_{ij}\, de^i \wedge de^j = \sqrt{g}\, de^1 de^2 \ .$$

Für die Tangentialabbildung n_* gilt dann:

$$n_*(e_i) = n_*(\mathbf{x}_{u^i}) = n_*(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^i} \ .$$

Für den Rücktransport (pullback) der Flächenform $\omega = \mathrm{vol}_{S^2}$ von S^2 nach M ergibt sich mit 9.2.16:

$$\begin{aligned} n^*(\mathrm{vol}_{S^2}) &= n^*(\omega(e_1, e_2)) = \omega(n_*\mathbf{x}_{u^1}, n_*\mathbf{x}_{u^2}) = \omega(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^2}) \\ &= \omega(-b^k{}_1\mathbf{x}_{u^k}, -b^l{}_2\mathbf{x}_{u^l}) = b^k{}_1 b^l{}_2\,\omega(e_k, e_l) \\ &= (b^1{}_1 b^2{}_2 - b^2{}_1 b^1{}_2)\omega(e_1, e_2) = \det(b^i{}_j)\omega(e_1, e_2) \\ &= \frac{\det(b_{ij})}{\det(g)}\omega(e_1, e_2) = K(u)\,\mathrm{vol}_M\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun wie behauptet

$$\lim_{U\to 0} \frac{\mathrm{vol}(n(U))}{\mathrm{vol}(U)} = \lim_{U\to 0} \frac{\int\limits_{n(U)} \mathrm{vol}_{S^2}}{\int\limits_U \mathrm{vol}_M} = K \ .$$

9.4 Integrabilitätsbedingungen von Gauß, Codazzi, Mainardi

Der Vektor $\mathbf{x}_{u^iu^j}(u)$ wird im Allgemeinen nicht in der Fläche M liegen, also zerlegt man ihn in einen tangentialen und einen normalen Anteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{u^iu^j}(u) &= \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}\mathbf{x}(u) =: \Gamma^k{}_{ij}(u)\mathbf{x}_{u^k}(u) + \langle \mathbf{x}_{u^iu^j}(u) \mid \mathbf{N}(u)\rangle \mathbf{N}(u) \\ &= \Gamma^k{}_{ij}(u)\mathbf{x}_{u^k}(u) + b_{ij}(u)\mathbf{N}(u) \ . \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

Für die Christoffel-Symbole $\Gamma^k{}_{ij}(u)$ findet man:

$$\Gamma^k{}_{ij}(u) = \Gamma^k{}_{ji}(u) = \frac{1}{2}g^{km}(u)[\frac{\partial g_{jm}(u)}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}(u)}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^m}]\ , \quad \text{und} \tag{9.4.2}$$

$$\Gamma_{kij}(u) = \Gamma_{kji}(u)\ , \quad \Gamma_{kij}(u) = -\Gamma_{ikj}(u)\ . \tag{9.4.3}$$

Beweis. Aus $\mathbf{x}_{u^iu^j}(u) = \mathbf{x}_{u^ju^i}(u)$ folgt sofort ${\Gamma^k}_{ij}(u) = {\Gamma^k}_{ji}(u)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{jm}(u)}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i}\langle \mathbf{x}_{u^j}(u) \mid \mathbf{x}_{u^m}(u)\rangle = \langle \mathbf{x}_{u^iu^j}(u) \mid \mathbf{x}_{u^m}(u)\rangle + \langle \mathbf{x}_{u^j}(u) \mid \mathbf{x}_{u^iu^m}(u)\rangle \\ &= \langle {\Gamma^n}_{ij}(u)\mathbf{x}_{u^n}(u) \mid \mathbf{x}_{u^m}(u)\rangle + \langle \mathbf{x}_{u^j}(u) \mid {\Gamma^n}_{im}(u)\mathbf{x}_{u^n}(u)\rangle \\ &= {\Gamma^n}_{ij}(u)g_{nm}(u) + {\Gamma^n}_{im}(u)g_{jn}(u) = \Gamma_{mij}(u) + \Gamma_{jim}(u) \ ,\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\frac{\partial g_{im}(u)}{\partial u^j} = \Gamma_{mji}(u) + \Gamma_{ijm}(u) \ , \quad \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^m} = \Gamma_{jmi}(u) + \Gamma_{imj}(u) \ ,$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g_{jm}(u)}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}(u)}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^m} \\ &\qquad = \Gamma_{mij}(u) + \Gamma_{jim}(u) + \Gamma_{mji}(u) + \Gamma_{ijm}(u) - \Gamma_{jmi}(u) - \Gamma_{imj}(u) \\ &\qquad = 2\Gamma_{mij}(u) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{\Gamma^k}_{ij}(u) &= g^{km}(u)\Gamma_{mij}(u) \\ &= \frac{1}{2}g^{km}(u)[\frac{\partial g_{jm}(u)}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}(u)}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^m}] \ , \quad \text{und} \\ \Gamma_{mij}(u) &= -\Gamma_{imj}(u) \ .\end{aligned}$$

□

Gauß hat aus der Bedingung $\mathbf{x}_{u^iu^ju^k}(u) = \mathbf{x}_{u^ju^iu^k}(u)$, also aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, eine notwendig Bedingung an die Koeffizienten der ersten Fundamentalform $g_{ij}(u)$ abgeleitet. Die entsprechende Bedingung für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform $b_{ij}(u)$ stammt von Codazzi und Mainardi. Bonnet konnte dann mit Hilfe des Satzes von Frobenius (siehe das nächste Kapitel) zeigen, daß diese beiden Bedingungen an $g_{ij}(u)$ und $b_{ij}(u)$ auch hinreichende Bedingungen für eine eindeutige Bestimmung einer 2-dimensionalen Fläche M im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{E}^3$ sind.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{u^iu^ju^k}(u) &= \partial_{u^i}\mathbf{x}_{u^ju^k}(u) = \partial_{u^i}[{\Gamma^m}_{jk}(u)\mathbf{x}_{u^m}(u) + b_{jk}(u)\mathbf{N}(u)] \\ &= (\partial_{u^i}{\Gamma^m}_{jk}(u))\mathbf{x}_{u^m}(u) + {\Gamma^m}_{jk}(u)\mathbf{x}_{u^iu^m}(u) + (\partial_{u^i}b_{jk}(u))\mathbf{N}(u) + b_{jk}(u)\mathbf{N}_{u^i}(u) \\ &= (\partial_{u^i}{\Gamma^m}_{jk}(u))\mathbf{x}_{u^m}(u) + {\Gamma^m}_{jk}(u){\Gamma^n}_{im}(u)\mathbf{x}_{u^n}(u) + {\Gamma^m}_{jk}(u)b_{im}(u)\mathbf{N}(u) \\ &\quad + (\partial_{u^i}b_{jk}(u))\mathbf{N}(u) - b_{jk}(u){b^n}_i(u)\mathbf{x}_{u^n}(u) \\ &= [\partial_{u^i}{\Gamma^n}_{jk}(u) + {\Gamma^m}_{jk}(u){\Gamma^n}_{im}(u) - b_{jk}(u){b^n}_i(u)]\mathbf{x}_{u^n}(u)\end{aligned}$$

$$+ [\partial_{u^i} b_{jk}(u) + \Gamma^m{}_{jk}(u) b_{im}(u)] \mathbf{N}(u) \ ,$$

und analog

$$\mathbf{x}_{u^j u^i u^k}(u) = [\partial_{u^j} \Gamma^n{}_{ik}(u) + \Gamma^m{}_{ik}(u) \Gamma^n{}_{jm}(u) - b_{ik}(u) b^n{}_j(u)] \mathbf{x}_{u^n}(u)$$
$$+ [\partial_{u^j} b_{ik}(u) + \Gamma^m{}_{ik}(u) b_{jm}(u)] \mathbf{N}(u) \ .$$

Aus $\mathbf{x}_{u^i u^j u^k}(u) - \mathbf{x}_{u^j u^i u^k}(u) \stackrel{!}{=} 0$ ergibt sich also

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{u^i u^j u^k}(u) - \mathbf{x}_{u^j u^i u^k}(u) \\
&\quad = [\partial_{u^i} \Gamma^n{}_{jk}(u) + \Gamma^m{}_{jk}(u) \Gamma^n{}_{im}(u) - b_{jk}(u) b^n{}_i(u) \\
&\qquad - \partial_{u^j} \Gamma^n{}_{ik}(u) - \Gamma^m{}_{ik}(u) \Gamma^n{}_{jm}(u) + b_{ik}(u) b^n{}_j(u)] \mathbf{x}_{u^n}(u) \\
&\qquad + [\partial_{u^i} b_{jk}(u) + \Gamma^m{}_{jk}(u) b_{im}(u) - \partial_{u^j} b_{ik}(u) - \Gamma^m{}_{ik}(u) b_{jm}(u)] \mathbf{N}(u) \\
&\quad \stackrel{!}{=} 0 \ .
\end{aligned}$$

Wir führen die Abkürzung

$$R^n{}_{kij}(u) := \partial_{u^i} \Gamma^n{}_{jk}(u) - \partial_{u^j} \Gamma^n{}_{ik}(u) + \Gamma^m{}_{jk}(u) \Gamma^n{}_{im}(u) - \Gamma^m{}_{ik}(u) \Gamma^n{}_{jm}(u) \ , \tag{9.4.4}$$

ein, der wir später als Komponente des Riemannschen Krümmungstensors wiederbegegnen werden. Grundlegend ist hier die Einsicht, daß die $R^n{}_{kij}(u)$ über die Christoffel-Symbole $\Gamma^n{}_{jk}(u)$ nur vom den Koeffizienten $g_{ij}(n)$ der Metrik-2-Form und deren ersten und zweiten Ableitungen abhängen, also vollständig intrinsische Größen der Fläche M sind, und sich nicht auf den umgebenden Raum beziehen!

Damit ergeben sich nun die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Integrabilitätbedingungen:

$$R^n{}_{kij}(u) = b_{jk}(u) b^n{}_i(u) - b_{ik}(u) b^n{}_j(u) \ , \tag{9.4.5}$$

$$\partial_{u^i} b_{jk}(u) - \Gamma^m{}_{ik}(u) b_{jm}(u) = \partial_{u^j} b_{ik}(u) - \Gamma^m{}_{jk}(u) b_{im}(u) \ . \tag{9.4.6}$$

9.5 Integrabilitätsbedingungen und der Satz von Frobenius

Sei $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{E}^n \sim \mathbb{E}^n$ ein Vektorfeld eines n-dimensionalen euklidischen Raums. Dann stellt sich in der Physik häufig die Frage, ob sich dieses Vektorfeld als Gradientenfeld einer skalaren Funktion $f(\mathbf{x})$ darstellen läßt, also $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$. Dies ist nun ein System von n Gleichungen für die eine unbekannte Funktion $f(\mathbf{x})$, also für $n > 1$ ein überbestimmtes Gleichungssystem. Die zusätzlichen Bedingungen für eine Lösbarkeit nennt man *Integrabilitätsbedingungen*.

Die bekannte Antwort im obigen Beispiel lautet, $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ ist genau dann lösbar, wenn die Rotation von $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ verschwindet. Daß diese Bedingung notwendig ist, sieht man leicht. Seien $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld und das Differential $df(\mathbf{x})$ eine 1-Form auf $\mathbb{E}^n$, also

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{E}^n := \{W^i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^i} \,|\, W^i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R},\ i = 1 \ldots n\} \ ,$$

$$df(\mathbf{x}) \in T^*_{\mathbf{x}}\mathbb{E}^n := \{w_i(\mathbf{x})dx^i \,|\, w^i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R},\ i = 1 \ldots n\} \ ,$$

dann ist der Gradient als die kontravariante Form des kovarianten Differentials definiert, d.h.

$$\langle \nabla f \mid \mathbf{V} \rangle := df(\mathbf{V}) \quad \Rightarrow \tag{9.5.1}$$

$$df(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \begin{cases} \partial_i f dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \partial_j f \ , \\ \langle (\nabla f)^k \frac{\partial}{\partial x^k} \mid \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = g_{jk}(\nabla f)^k \ , \end{cases}$$

$$(\nabla f)^i = g^{ij} g_{jk} (\nabla f)^k = g^{ij} \partial_j f =: \partial^i f \ . \tag{9.5.2}$$

Wenn sich nun $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ als Gradientenfeld einer Funktion $f(\mathbf{x})$ in $\mathbb{E}^n$ darstellen läßt, so gilt also

$$V^i = g^{ij}\partial_j f = \partial^i f \quad \text{bzw.} \quad V_i = \partial_i f \ .$$

Notwendig für die Lösbarkeit dieser überbestimmten Gleichung ist die Gleichheit der gemischten Ableitungen

$$\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f = \partial_i V_j - \partial_j V_i \stackrel{!}{=} 0 \ ,$$

und da in $\mathbb{E}^n$ ja $V^i = V_i$ ist, so gilt also:

$$\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f = \partial_i V^j - \partial_j V^i \stackrel{!}{=} 0 \ , \quad \text{in } \mathbb{E}^3 \text{ also}: \ \nabla \times \mathbf{V} \stackrel{!}{=} 0 \ . \tag{9.5.3}$$

Eine Verallgemeinerung dieses Beispiels ist die Frage nach der Lösbarkeit eines speziellen, überbestimmten linearen Differentialgleichungssystems, oder geometrisch formuliert: gibt es eine *Integralmannigfaltigkeit*, die tangential zu einer vorgegebenen glatt verbundenen Schar von Tangentialräumen liegt? Die Aussage, daß die Gleichheit der gemischten Ableitungen für die Lösbarkeit eines solchen Gleichungssystems nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, wird heute als der **Satz von Frobenius** (1877) bezeichnet, obwohl historisch betrachtet die ersten Beweise dieses Satzes von Feodor Deahna (1840) und Alfred Clebsch (1866) stammen. Wir folgen hier Spivak (1979), I, S. 244 ff., mit einigen Modifikationen und kleinen Erweiterungen.

Ein Beispiel in $\mathbb{E}^3$ hilft bei der Klärung der Begriffe. Gegeben sei eine glatt verbundene Schar von Flächen, die man durch eine 2-dimensionale *Distribution* Δ, d.h. 2-dimensionale Unterräume von $\mathbb{E}^3$, beschreibt:

$$\Delta_p := \{r_1 \cdot (\frac{\partial}{\partial x}|_p + \bar{f}_1(p)\frac{\partial}{\partial z}|_p) + r_2 \cdot (\frac{\partial}{\partial y}|_p + \bar{f}_2(p)\frac{\partial}{\partial z}|_p) \,|\, r_1, r_2 \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{E}^3\} \; . \quad (9.5.4)$$

Hierbei sind $\bar{f}_1, \bar{f}_2 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^1$ vorgegebene C^∞-Funktionen, welche die Tangentialräume der verschiedenen Punkte $p \in \mathbb{E}^3$ verbinden. Nebenbei: diese *Distribution* der Differentialgeometrie hat, außer dem Namen, nichts mit den Distributionen der Funktionalanalysis gemeinsam!

Sei nun $\bar{\alpha} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}(x,y) := (x, y, z(x,y))^T := (x, y, \alpha(x,y))^T \quad \text{und} \\ &\alpha(x,y) := z(x,y) \quad \text{also} \quad \alpha : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1 \; . \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

Wenn nun $\bar{\alpha}$ eine Lösungsmannigfaltigkeit zu der Distribution Δ_p in dem Sinne sein soll, daß $\bar{\alpha}$ tangential zu Δ_p für alle $p \in \mathbb{E}^3$ liegt , dann muß für $\alpha : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ gelten:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \bar{f}_1(p) \; , \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \bar{f}_2(p) \; . \quad (9.5.6)$$

Der Übergang von den Variablen x, y, z zu $x, y, \alpha(x,y)$ entspricht dem Übergang von den Funktionen $\bar{f}_1, \bar{f}_2 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^1$ zu $f_1, f_2 : \mathbb{E}^2 \otimes \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$ mit $\bar{f}_i(x,y,z) = f_i(x,y,\alpha(x,y))$.

Die Distribution kann also mit der Integralmannigfaltigkeit $\bar{\alpha}$ geschrieben werden als:

$$\Delta_p := \{r_1 \cdot (\frac{\partial}{\partial x}|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}|_p) + r_2 \cdot (\frac{\partial}{\partial y}|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}|_p) \,|\, r_1, r_2 \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{E}^3\} \; . \quad (9.5.7)$$

und diese Integralmannigfaltigkeit $\bar{\alpha}$ ist die Lösung des überbestimmten Differentialgleichungssystems (2 Gleichungen für die eine Unbekannte α):

$$\begin{aligned} \partial_x \alpha(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\alpha(x,y) = f_1(x, y, \alpha(x,y)) \; , \\ \partial_y \alpha(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\alpha(x,y) = f_2(x, y, \alpha(x,y)) \; , \end{aligned} \quad (9.5.8)$$

mit den Anfangsbedingungen $\alpha(0,0) = \alpha_0 \in \mathbb{E}^1$. Natürlich ist die Integralmannigfaltigkeit α nur dann eine Lösung des DGL-Systems sofern eine Lösung existiert. Man kann leicht Beispiele konstruieren die zeigen, daß es nicht für jedes Funktionenpaar f_1, f_2 eine Lösung gibt (siehe etwa Spivak (1979), I, S. 247). In jedem Fall notwendig für die Existenz einer Lösung ist die Gleichheit der gemischten Ableitungen:

$$\partial_x \partial_y \alpha(x,y) \stackrel{!}{=} \partial_y \partial_x \alpha(x,y) \; . \quad (9.5.9)$$

Dieses Beispiel wollen wir nun für eine m-dimensionale Distribution in $\mathbb{E}^{m+n}$ verallgemeinern. Wenn $\alpha : \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n$ die m-dimensionale Integralmannigfaltigkeit bezeichne, dann können wir die m-dimensionale Distribution Δ am Punkt $p \in \mathbb{E}^{m+n}$ wie oben definieren als:

$$\Delta_p := \{r_i \cdot (\partial_i|_p + \sum_{k=1}^{n} f_i^k(p) \frac{\partial}{\partial \alpha^k}|_p) \,|\, i = 1 \ldots m,\, k = 1 \ldots n,\, r_i \in \mathbb{R}\} \,. \tag{9.5.10}$$

Hierbei sind die $f_i : \mathbb{E}^m \otimes \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $i = 1 \ldots m$, vorgegebene C^∞-Funktionen, welche die Tangentialräume der verschiedenen Punkte p verbinden. Wenn nun die m-dimensionale Mannigfaltigkeit α für alle p tangential zu Δ_p liegt, dann läßt sich die Distribution Δ wieder schreiben als:

$$\Delta_p := \{r_i \cdot (\partial_i|_p + \sum_{k=1}^{n} \partial_i \alpha^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k}|_p) \,|\, i = 1 \ldots m,\, k = 1 \ldots n,\, r_i \in \mathbb{R},\} \,, \tag{9.5.11}$$

und diese Integralmannigfaltigkeit α ist Lösung des überbestimmten Differentialgleichungssystems ($m \cdot n$ Gleichungen für n Unbekannte):

$$\partial_i \alpha^k(x^1, \ldots, x^m) = f_i^k(x^1, \ldots, x^m, \alpha^k(x^1, \ldots, x^m)) \,,\; i = 1 \ldots m \,,\, k = 1 \ldots n \,, \tag{9.5.12}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\alpha^k(0, \ldots, 0) = \alpha_0^k \in \mathbb{E}^n,\, i = 1 \ldots m,\, k = 1 \ldots n, \tag{9.5.13}$$

Notwendig für die Existenz einer Lösung ist wieder die Gleichheit der gemischten Ableitungen:

$$(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) \alpha^k(x^1, \ldots, x^m) \stackrel{!}{=} 0 \,,\, i, j = 1 \ldots m \,. \tag{9.5.14}$$

Wenn man sich den Ausdruck für die Gleichheit der gemischten Ableitungen ausführlicher hinschreibt, so erhält man die sog. *Frobenius-Gleichungen*:

$$\begin{aligned} &\partial_i f_j^k|_\alpha + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_j^k}{\partial \alpha^l} \partial_i \alpha^l - (\partial_j f_i^k|_\alpha + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i^k}{\partial \alpha^l} \partial_j \alpha^l) = \\ &\partial_i f_j^k|_\alpha - \partial_j f_i^k|_\alpha + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_j^k}{\partial \alpha^l} f_i^l - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i^k}{\partial \alpha^l} f_j^l \stackrel{!}{=} 0 \,, \qquad (9.5.15) \\ &i, j = 1 \ldots m \,,\, k, l = 1 \ldots n \,. \end{aligned}$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß die Frobenius-Gleichungen nicht nur notwendig, sondern lokal auch hinreichend für die Existenz einer Lösung α sind.

Beweis. Wir suchen eine lokale Lösung von 9.5.12 mit den Anfangsbedingungen 9.5.13 um $(x^1, \dots, x^m) = 0$ herum. Wir beginnen mit der ersten Variablen x^1:

$$\alpha^k(0, \dots, 0) = \alpha_0^k \ , \ k = 1 \dots n, \tag{9.5.16}$$

$$\partial_1 \alpha^k(x^1, 0, \dots, 0) = f_1^k(x^1, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, 0, \dots, 0)) \ . \tag{9.5.17}$$

Dies ist für jedes $k = 1 \dots n$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Grades, die nach dem Satz von Picard-Lindelöf für den Anfangswerte α_0^k in einer geeigneten Umgebung von $|x^1| < \epsilon_1$ eine eindeutige Lösung hat (siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238). Jetzt suchen wir um $(x_0^1, 0, \dots, 0)$ mit einem festen $|x_0^1| < \epsilon_1$ herum eine Lösung in der zweiten Variablen x^2:

$$\alpha^k(x_0^1, \dots, 0) = \alpha_1^k \ , \ k = 1 \dots n,$$

$$\partial_2 \alpha^k(x_0^1, x^2, 0, \dots, 0) = f_2^k(x_0^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x_0^1, x^2, 0, \dots, 0)) \ .$$

Wie zuvor existiert um den Anfangswerte α_1^k in einer geeigneten Umgebung von $|x^2| < \epsilon_2$ eine eindeutige Lösung. Jetzt stellt sich allerdings die Frage, ob diese Lösung auch noch die Differentialgleichung bezüglich der ersten Variablen x^1 erfüllt?

$$g^k(x^2) := \partial_1 \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0) - f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) \ .$$

Zunächst sieht man, daß wegen 9.5.17 die Anfangsbedingung erfüllt ist:

$$g^k(0) = \partial_1 \alpha^k(x^1, 0, 0, \dots, 0) - f_1^k(x^1, 0, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, 0, 0, \dots, 0)) = 0 \ .$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß unter Voraussetzung der Frobenius-Gleichungen 9.5.15 tatsächlich $g^k(x^2) = 0$ für alle $|x^2| < \epsilon_2$ ist, d.h. daß diese Lösung wie gewünscht auch die Differentialgleichung in x^1 9.5.17 erfüllt.

$$\begin{aligned}
&\partial_2 g^k(x^2) \\
&= \partial_2 \partial_1 \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0) - \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \\
&\quad - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} \partial_2 \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0) \\
&= \partial_1(\partial_2 \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) - \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \\
&\quad - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} f_2^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) \\
&= \partial_1(f_2^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) \\
&\quad - \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha
\end{aligned}$$

$$- \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))}{\partial \alpha^l} f_2^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))$$

$$= \partial_1 f_2^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))|_\alpha$$

$$- \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))|_\alpha$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_2^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))}{\partial \alpha^l} \partial_1 \alpha^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0)$$

$$- \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))}{\partial \alpha^l} f_2^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))$$

$$= \partial_1 f_2^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))|_\alpha$$

$$- \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))|_\alpha$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_2^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))}{\partial \alpha^l} \cdot$$

$$\cdot \left(f_1^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0)) + g^l(x^2)\right)$$

$$- \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))}{\partial \alpha^l} f_2^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \ldots, 0)) .$$

Mit Hilfe der Frobenius-Gleichungen 9.5.15 folgt sofort:

$$\partial_2 g^k(x^2) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_2^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0))}{\partial \alpha^l} g^l(x^2) .$$

Dieses lineare DGL-System für $g^k(x^2)$ mit der Anfangsbedingung $g^k(x^2) = 0$ liefert die eindeutige Lösung $g^k(x^2) = 0$ für alle $|x^2| < \epsilon_2$, womit also $\alpha^k(x^1, x^2, 0, \ldots, 0)$ auch eine Lösung der DGL. 9.5.15 bzgl. der Koordinate x^1 ist. Und so weiter bis x^m ... □

Wenn die vorgegebenen C^∞-Funktionen $f_i : \mathbb{E}^m \otimes \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $i = 1 \ldots m$, welche die Distribution definieren, von der gesuchten Integralmannigfaltigkeit $\alpha : \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n$ linear abhängen, dann lassen sich die Fresenius-Gleichungen deutlich vereinfachen. Sei also

$$f_i = F_i \cdot \alpha \quad \Leftrightarrow \tag{9.5.18}$$

$$f_i^k(x_1, \ldots, x_m, \alpha(x_1, \ldots, x_m)) = \sum_{l'} F_{il'}^k(x_1, \ldots, x_m) \cdot \alpha^{l'}(x_1, \ldots, x_m) \tag{9.5.19}$$

mit $i = 1 \dots m$, $k, l' = 1 \dots n$. Damit wird das DGL-System 9.5.12 linear:

$$\partial_i \alpha^k(x^1, \dots, x^m) = \sum_{l'} F^k_{il'}(x_1, \dots, x_m) \cdot \alpha^{l'}(x_1, \dots, x_m) \ . \tag{9.5.20}$$

Dann ist

$$\frac{\partial f^l_j}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \sum_{l'=1}^{n} F^l_{jl'} \alpha^{l'} = F^l_{jk} \ , \quad \text{und} \quad \frac{\partial f^l_i}{\partial \alpha^k} = F^l_{ik} \ ,$$

$$\partial_i \alpha^k = f^k_i = \sum_{l'=1}^{n} F^k_{il'} \alpha^{l'} \ , \quad \text{und} \quad \partial_j \alpha^k = \sum_{l'=1}^{n} F^k_{jl'} \alpha^{l'} \ ,$$

$$\partial_i f^l_j|_\alpha = \sum_{l'=1}^{n} (\partial_i F^l_{jl'}) \alpha^{l'} \ , \quad \text{und} \quad \partial_j f^l_i|_\alpha = \sum_{l'=1}^{n} (\partial_j F^l_{il'}) \alpha^{l'} \ .$$

Wenn wir dies in die Frobenius-Gleichungen 9.5.15 einsetzen, so folgt

$$\sum_{l'=1}^{n} (\partial_i F^l_{jl'}) \alpha^{l'} - \sum_{l'=1}^{n} (\partial_j F^l_{il'}) \alpha^{l'} + \sum_{\substack{k=1 \\ l'=1}}^{n} F^l_{jk} F^k_{il'} \alpha^{l'} - \sum_{\substack{k=1 \\ l'=1}}^{n} F^l_{ik} F^k_{jl'} \alpha^{l'} \stackrel{!}{=} 0 \ ,$$

bzw. in Matrixschreibweise mit den $n \times n$ Matrizen F_i, F_j, $i, j = 1 \dots m$, und dem n-dimensionalen Vektor α:

$$(\partial_i F_j - \partial_j F_i + F_j \cdot F_i - F_i \cdot F_j) \cdot \alpha \stackrel{!}{=} 0 \ , \quad \text{bzw.} \tag{9.5.21}$$

$$\partial_i F_j - \partial_j F_i + [F_j, F_i] \stackrel{!}{=} 0 \ . \tag{9.5.22}$$

Achtung: Gelegentlich taucht in der Literatur auch die zu 9.5.21 transponierte Gleichung auf (z.B. in Eschenburg u. Jost (2007), S. 195, 233) und dies führt dann zu einem Vorzeichenwechsel im obigen Kommutator, denn mit $G_i := F_i^T$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \alpha^T \cdot (\partial_i G_j - \partial_j G_i + (F_j \cdot F_i)^T - (F_i \cdot F_j)^T) \\ &= \alpha^T \cdot (\partial_i G_j - \partial_j G_i + (F_i^T \cdot F_j^T - F_i^T \cdot F_j^T)) \\ &= \alpha^T \cdot (\partial_i G_j - \partial_j G_i + [G_i, G_j]) \ . \end{aligned} \tag{9.5.23}$$

Wenn man die $n \times n$ Matrizen G_i, $i = 1 \dots m$, als eine Matrix-Differentialform schreibt, so erhält man:

$$G := \sum_{j=1}^{m} G_j dx^j \quad \Rightarrow$$

$$dG = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \partial_i G_j \, dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} (\partial_i G_j - \partial_j G_i) \, dx^i dx^j \ ,$$

$$G \wedge G = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} G_i G_j \, dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} (G_i G_j - G_j G_i) \, dx^i dx^j \ ,$$

$$\boxed{(\partial_i G_j - \partial_j G_i + [G_i, G_j]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dG + G \wedge G = 0 \ .} \tag{9.5.24}$$

Dieses Form der linearen Frobenius-Gleichungen wird als *Maurer-Cartan-Gleichung* bezeichnet und begegnet uns wieder und wieder in den Eichfeldtheorien der theoretischen Physik.

Beispiel: Das Eingangsbeispiel dieses Abschnitts stellte die Frage, wann genau ein gegebenes Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{E}^3$ sich als Gradientenfeld einer Funktion $\bar{\alpha}(\mathbf{x}) = (x^1, x^2, x^3, \alpha(x^1, x^2, x^3))^T$, also als 3-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $\bar{\alpha}$ in $\mathbb{E}^{3+1}$, mit $\partial_i \alpha = V_i$ darstellen läßt. Wir schreiben $\alpha =: \log \beta$ und erhalten

$$\partial_i \beta(\mathbf{x}) = V_i(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) \ , \ i = 1 \ldots 3 \ .$$

Dies ist gerade das lineare DGL-System 9.5.19 mit $n = 1$. Die hinreichende Bedingung für die Existenz von β bei vorgegebenem $V_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ ist 9.5.22 mit der eindimensionalen Matrix $F_i = V_i$, also:

$$\partial_i V_j - \partial_j V_i + [V_j, V_i] = \partial_i V_j - \partial_j V_i \stackrel{!}{=} 0 \ . \qquad \square$$

Mit Hilfe des Satzes von Frobenius können wir jetzt auf den Spuren von Bonnet zeigen, daß die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Integrabilitätbedingungen auch hinreichend für die eindeutige Existenz einer 2-dimensionalen Fläche in $\mathbb{E}^3$ sind.

Satz 9.5.1 *Seien auf einem einfach zusammenhängenden 2-dimensionalen Gebiet $U \subset \mathbb{E}^3$ zwei 2-dimensionale symmetrische C^∞-Funktionen $g, b : U \to \mathbb{E}^2$ (d.h. 2-dim. symmetrische Matrizen) gegeben, sei g eine positiv definite Metrik, und g und b mögen die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Integrabilitätbedingungen (9.4.5, 9.4.6) erfüllen, dann sind g und b die erste und zweite Fundamentalform einer 2-dimensionalen Fläche in $\mathbb{E}^3$.*

Beweis. Wir folgen der Beweisskizze von Eschenburg u. Jost (2007), S. 194-195, jedoch in unserer Bezeichnungsweise. In 9.4.1 und 9.2.16 hatten wir die beiden Gaußschen Flächengleichungen gefunden ($i, j, k = 1, 2$):

$$\partial_i \mathbf{x}_{u^j} := \frac{\partial}{\partial u^i}\mathbf{x}_{u^j}(u) = \Gamma^k{}_{ij}(u)\mathbf{x}_{u^k}(u) + b_{ij}(u)\mathbf{N}(u) ,$$

$$\partial_i \mathbf{N}(u) := \frac{\partial}{\partial u^i}\mathbf{N}(u) = -b^k{}_i(u)\mathbf{x}_{u^k}(u) .$$

Es soll jetzt mittels des Satzes von Frobenius in seiner linearisierten Form 9.5.23 gezeigt werden, daß die Vorgabe von $b_{ij}(u)$, $g_{ij}(u)$ und damit auch $\Gamma^k{}_{ij}(u)$ hinreichend zur Bestimmung von $\mathbf{x}_{u^k}(u)$ und $\mathbf{N}(u)$ ist. Wir fassen die $\mathbf{x}_{u^k}(u)$ und $\mathbf{N}(u)$ zu einem Zeilenvektor zusammen:

$$\alpha := (\mathbf{x}_{u^1}, \mathbf{x}_{u^2}, \mathbf{N}) ,$$

und damit können wir die Gaußschen Flächengleichungen als eine Vektor-Differentialgleichung schreiben:

$$\partial_i(\mathbf{x}_{u^l}, \ldots, \mathbf{N}) = (\mathbf{x}_{u^k}, \ldots, \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \Gamma^k{}_{il} & \ldots & -b^k{}_i \\ \vdots & & \vdots \\ b_{il} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i \alpha = \alpha G_i .$$

Dabei sind $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ pro Gleichung fixiert, $k, k' \in \{1, \ldots, n\}$ Matrixzeilenindizes, $l, l' \in \{1, \ldots, n\}$ Matrixspaltenindizes. Die Frobenius Bedingungen 9.5.23 lauten dann:

$$0 \overset{!}{=} \partial_i G_j - \partial_j G_i + [G_i, G_j] .$$

$$\partial_i G_j - \partial_j G_i = \begin{pmatrix} \partial_i \Gamma^k{}_{jl} - \partial_j \Gamma^k{}_{il} & \ldots & -\partial_i b^k{}_j + \partial_j b^k{}_i \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_i b_{jl} - \partial_j b_{il} & \ldots & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} [G_i, G_j] &= \left[\begin{pmatrix} \Gamma^k{}_{il'} & \ldots & -b^k{}_i \\ \vdots & & \vdots \\ b_{il'} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma^{k'}{}_{jl} & \ldots & -b^{k'}{}_j \\ \vdots & & \vdots \\ b_{jl} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{l'} \Gamma^k{}_{il'}\Gamma^{l'}{}_{jl} - b^k{}_i b_{jl} & \ldots & -\sum\limits_{l'} \Gamma^k{}_{il'} b^{l'}{}_j \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{l'} b_{il'}\Gamma^{l'}{}_{jl} & \ldots & -\sum\limits_{l'} b_{il'} b^{l'}{}_j \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \sum\limits_{l'} \Gamma^k{}_{jl'}\Gamma^{l'}{}_{il} - b^k{}_j b_{il} & \ldots & -\sum\limits_{l'} \Gamma^k{}_{jl'} b^{l'}{}_i \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{l'} b_{jl'}\Gamma^{l'}{}_{il} & \ldots & -\sum\limits_{l'} b_{jl'} b^{l'}{}_i \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die linearen Frobenius-Gleichungen liefern also vier Gleichungsblöcke:

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_i \Gamma^k{}_{jl} - \partial_j \Gamma^k{}_{il} + \sum_{l'} \Gamma^k{}_{il'} \Gamma^{l'}{}_{jl} - \sum_{l'} \Gamma^k{}_{jl'} \Gamma^{l'}{}_{il} - b^k{}_i b_{jl} + b^k{}_j b_{il} \ ,$$

$$0 \stackrel{!}{=} -\partial_i b^k{}_j + \partial_j b^k{}_i - \sum_{l'} \Gamma^k{}_{il'} b^{l'}{}_j + \sum_{l'} \Gamma^k{}_{jl'} b^{l'}{}_i \ ,$$

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_i b_{jl} - \partial_j b_{il} + \sum_{l'} b_{il'} \Gamma^{l'}{}_{jl} - \sum_{l'} b_{jl'} \Gamma^{l'}{}_{il} \ ,$$

$$0 \stackrel{!}{=} - \sum_{l'} b_{il'} b^{l'}{}_j + \sum_{l'} b_{jl'} b^{l'}{}_i \ .$$

Wir benutzen die Symmetrie von $b_{ij} = b_{ji}$ (9.2.11) und

$$\sum_i c_i d^i = \sum_{i,j} c_i \delta^i_j d^j = \sum_{i,j,k} c_i g^{ik} g_{kj} d^j = \sum_k c^k d_k = \sum_i c^i d_i \ .$$

Die vierte Zeile ist dann trivialerweise erfüllt, denn

$$\begin{aligned} - \sum_{l'} b_{il'} b^{l'}{}_j + \sum_{l'} b_{jl'} b^{l'}{}_i &= \sum_{l'} (-b_{l'i} b^{l'}{}_j + b_{jl'} b^{l'}{}_i) = \sum_{l'} (-b^{l'}{}_i b_{l'j} + b_{jl'} b^{l'}{}_i) \\ &= \sum_{l'} (-b^{l'}{}_i b_{jl'} + b_{jl'} b^{l'}{}_i) = 0 \ . \end{aligned}$$

Die dritte Zeile ist wegen der Symmetrie der Christoffel-Symbole im zweiten und dritten Index $\Gamma_{kij} = \Gamma_{kji}$ und der Antisymmetrie im ersten und zweiten Index $\Gamma_{kij} = -\Gamma_{ikj}$ (9.4.3) identisch mit der zweiten Zeile, denn

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \partial_i b_{jl} - \partial_j b_{il} + \sum_{l'} b_{il'} \Gamma^{l'}{}_{jl} - \sum_{l'} b_{jl'} \Gamma^{l'}{}_{il} = \partial_i b_{lj} - \partial_j b_{li} + \sum_{l'} b_{l'i} \Gamma^{l'}{}_{jl} - \sum_{l'} b_{l'j} \Gamma^{l'}{}_{il} \\ &= \partial_i b_{lj} - \partial_j b_{li} + \sum_{l'} b^{l'}{}_i \Gamma_{l'jl} - \sum_{l'} b^{l'}{}_j \Gamma_{l'il} = \partial_i b_{lj} - \partial_j b_{li} + \sum_{l'} \Gamma_{l'lj} b^{l'}{}_i - \sum_{l'} \Gamma_{l'li} b^{l'}{}_j \\ &= \partial_i b_{lj} - \partial_j b_{li} - \sum_{l'} \Gamma_{ll'j} b^{l'}{}_i + \sum_{l'} \Gamma_{ll'i} b^{l'}{}_j \quad \Rightarrow \\ 0 &\stackrel{!}{=} \partial_i b^l{}_j - \partial_j b^l{}_i + \sum_{l'} \Gamma^l{}_{il'} b^{l'}{}_j - \sum_{l'} \Gamma^l{}_{jl'} b^{l'}{}_i \ . \end{aligned}$$

Diese Gleichung formen wir noch ein wenig um:

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_i b_{lj} - \partial_j b_{li} + \sum_{l'} \Gamma_{lil'} b^{l'}{}_j - \sum_{l'} \Gamma_{ljl'} b^{l'}{}_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_i b_{jl} - \partial_j b_{il} + \sum_{l'} \Gamma_{ll'i} b^{l'}{}_j - \sum_{l'} \Gamma_{ll'j} b^{l'}{}_i \\
&= \partial_i b_{jl} - \partial_j b_{il} - \sum_{l'} \Gamma_{l'li} b^{l'}{}_j + \sum_{l'} \Gamma_{l'lj} b^{l'}{}_i \\
&= \partial_i b_{jl} - \partial_j b_{il} - \sum_{l'} \Gamma^{l'}{}_{li} b_{l'j} + \sum_{l'} \Gamma^{l'}{}_{lj} b_{l'i} \\
&= \partial_i b_{jl} - \sum_{l'} \Gamma^{l'}{}_{il} b_{jl'} - (\partial_j b_{il} - \sum_{l'} \Gamma^{l'}{}_{jl} b_{il'})\ ,
\end{aligned}
$$

und erhalten gerade die Codazzi-Mainardi-Integrabilitätbedingung 9.4.6.

In der ersten Zeile setzen wir den Riemannschen Krümmungstensor (9.4.4) ein:

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \partial_i \Gamma^k{}_{jl} - \partial_j \Gamma^k{}_{il} + \sum_{l'} \Gamma^k{}_{il'} \Gamma^{l'}{}_{jl} - \sum_{l'} \Gamma^k{}_{jl'} \Gamma^{l'}{}_{il} - b^k{}_i b_{jl} + b^k{}_j b_{il} \\
&= R^k{}_{lij} - b^k{}_i b_{jl} + b^k{}_j b_{il}\ .
\end{aligned}
$$

Und dies ist nun die Gauss'sche Integrabilitätsbedingung 9.4.5. □

9.6 Das *Theorema Egregium* von Gauß

Gauß vermutete während der Zeit seiner Beschäftigung mit der Vermessung des Königreichs Hannover, daß die Krümmung einer 2-dimensionalen Fläche sich allein aus Längen- und Winkelmessungen bestimmen läßt. Aber Gauß brauchte doch sehr viel Mühe und Zeit, bis er dies tatsächlich beweisen konnte. Umso größer war dann aber seine Freude über das Ergebnis, die er mit dem Titel *Theorema Egregium* (*Herausragender Satz*) seiner lateinisch verfaßten Arbeit ausdrückte.

Heute können wir den Inhalt des *Theorema Egregium* in Kürze so ausdrücken:

Satz 9.6.1 (Theorema Egregium von Gauß) *Die Gaußsche Krümmung $K(u)$ einer 2-dimensionalen Fläche M im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{E}^3$ hängt nur von den Koeffizienten der ersten Fundamentalform $g_{ij}(u)$ und ihren Ableitungen ab, ist also eine intrinsische Größe von M.*

Beweis. Wir hatten in 9.4.4 gesehen, daß $R^n{}_{kij}(u)$ nur von den Christoffelsymbolen und deren ersten Ableitungen abhängt, und damit nach 9.4.2 also nur von $g_{ij}(u)$ und deren ersten und zweiten Ableitungen. Aus 9.4.5 folgt:

$$
\begin{aligned}
R^{nk}{}_{ij}(u) &= g^{km}(u) R^n{}_{mij}(u) = g^{km}(u)[b_{jm}(u) b^n{}_i(u) - b_{im}(u) b^n{}_j(u)] \\
&= g^{km}(u)[b_{mj}(u) b^n{}_i(u) - b_{mi}(u) b^n{}_j(u)]
\end{aligned}
$$

$$= b^k{}_j(u)b^n{}_i(u) - b^k{}_i(u)b^n{}_j(u) \; .$$

Daraus folgt mit 9.3.2

$$\begin{aligned} R^{12}{}_{12}(u) &= b^2{}_2(u)b^1{}_1(u) - b^2{}_1(u)b^1{}_2(u) = \det(b^i{}_j(u)) \\ &= \frac{\det(b_{ij}(u))}{\det(g_{kl}(u))} = \frac{\det(b(u))}{\det(g(u))} = \kappa_1(u)\kappa_2(u) = K(u) \end{aligned} \tag{9.6.1}$$

$\square$

Damit hängt die Gaußsche Krümmung $K(u)$ nur von $g_{ij}(u)$ und deren ersten und zweiten Ableitungen ab und ist eine intrinsische Größe der Fläche M und zugleich eine isometrische Invariante der Fläche, d.h. $K(u)$ bleibt unter Metrik-erhaltenden Abbildungen unverändert.

Diese Arbeit von Gauß war ein bedeutender Schritt auf dem Weg zur Theorie der geometisch-topologischen Invarianten - und die Freude von Gauß über seine Entdeckung ist wirklich verständlich!

10 Riemannsche Geometrie

10.1 Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Bernhard Riemann wurde 1826 in Breselenz bei Dannenberg in Niedersachsen geboren. Wie sein Vater sollte er zunächst Pfarrer werden, aber bereits auf dem Gymnasium fiel dem Rektor Riemanns außergewöhnliche Begabung für Mathematik auf. Es heißt, Riemann habe das von seinem Rektor entliehene Buch von Legendre über Zahlentheorie mit 859 Seiten in einer Woche gelesen. Er begann ein Studium der Mathematik in Göttingen, wo er erstmals Gauß hörte, der aber für Studenten der Anfangssemester unzugänglich war. Riemann wechselte dann nach Berlin zu Jacobi und Dirchlett, die ihn unterstützten und förderten, und dann wieder zurück nach Göttingen. Er promovierte unter Gauß mit einer Arbeit über Funktionentheorie. Gleichzeitig hatte Riemann durch den Kontakt mit den Göttinger Physikern Weber und Listing ein starkes Interesse an Physik. Bei Weber hatte er 18 Monate eine Assistentenstelle inne. Riemann habilitierte mit der Arbeit „*Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*", worin er u.a. für die Integration reeller Funktionen das sog. 'Riemann-Integral' einführte. Um als Privatdozent in Göttingen lehren zu dürfen, mußten die Kandidaten drei Themenvorschläge für ihre Probevorlesung einreichen - und üblicherweise wurde vom Dekan der Fakultät der oberste Vorschlag dieser Liste ausgewählt. Riemanns Vorschlag Nr. 3 lautete „*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*", und als Gauß das las, wählte er als Dekan dieses Thema für Riemanns Probevorlesung. Überrascht legte Riemann all seine Untersuchungen zum Thema „*Elektrizität, Magnetismus, Licht und Gravitation*" zur Seite und schuf im Jahr 1854 in den 2 Monaten bis zu seiner Probevorlesung die Grundlagen der Differentialgeometrie in n Dimensionen. Der Physiker Weber, ein enger Freund von Gauß berichtete, daß Gauß nach Riemanns Vortrag außergewöhnlich begeistert und erregt gewesen sei. Dies war der letzte öffentliche Auftritt von Gauß in der Fakultät vor seinem Tod.

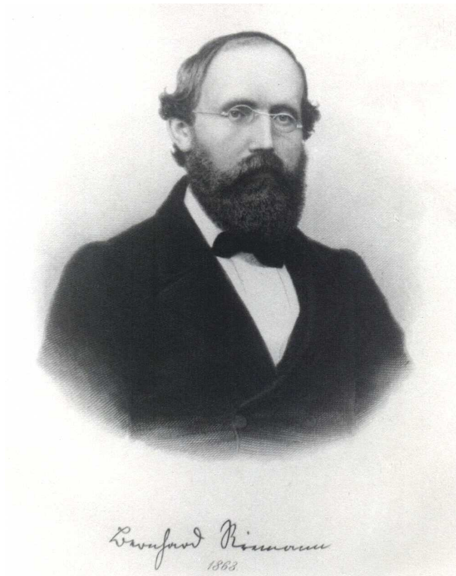

Abbildung 10.1: B. Riemann
A. Weger (1863), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann]

1855 starb Gauß und Dirichlett folgte ihm in Göttingen nach. Als auch Dirichlett im Jahr 1859 starb, erhielt Riemann den Göttinger Lehrstuhl für Mathematik. 1862 heiratete er Elise Koch, mit der er eine Tochter hatte. Riemann erkrankte an Tuberkulose und suchte Linderung im milderen Klima des Tessin, wo er dann mit nur 39 Jahren am Lago Maggiore verstarb.

Neben der Begründung der Differentialgeometrie in seiner Probevorlesung sind besonders wichtig Riemanns zahlreiche Beiträge zur Funktionentheorie, seine Arbeit „*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*" von 1859 mit den Erkenntnissen zur Zetafunktion, sowie weitere Arbeiten zur Theorie der Integration, der Fourier-Transformation, der hypergeometrischen Differentialgleichung, der hyperbolischen Differentialgleichungen und Stabilitätsproblemen von Lösungen partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Seine italienischen Mathematiker-Freunde Betti und Beltrami beeinflußte Riemann bei ihren Forschungen zur algebraischen Geometrie und Topologie. [Quelle: Wikipedia-Riemann (2010)].

Der Riemannsche Habilitationsvortrag „*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*" findet sich erfreulicherweise zusammen mit anderen Arbeiten Riemanns auf dem Server des GDZ, des 'Göttinger Digitalisierungszentrums': Riemann (1854).

Es gab zur Zeit von Riemann noch keine Tensorrechnung. Diese wurde erst in den Jahren 1887-1896 im Zusammenhang mit der Riemannschen n-dimensionalen Geometrie unter dem Titel „*absolute Differentialgeometrie*" von Ricci-Curbastro und seinem Schüler Civita eingeführt. Wir werden im Folgenden die Riemannsche Differentialgeometrie vornehmlich in der 'neueren' Differentialformen-Darstellung verwenden, wie sie auf die Arbeiten von Élie Cartan (1869-1951) in den 1920'er Jahren zurückgeht.

10.2 Basen im Tangentialraum und Vielbeine

Es gibt Darstellungen der Riemannschen Differentialgeometrie wie Sand am Meer und viele Autoren kreieren ihre ganz eigenen Notationen. Evans schreibt im Vorwort seines schönen Buches *Partial Differential Equations* (Evans, 1998): „Notation is a nightmare" :-) Well, that's it!

Wir folgen hier weitgehend der Bezeichnungsweise von Nakahara (2003). Abweichend davon verwenden wir jedoch die heute bei vielen theoretischen Physikern gebräuchliche Konvention, die griechischen Buchstaben $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi$ nur für die Indizes von Koordinatenbasen $\{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ zu verwenden, und die lateinischen Buchstaben a, b, c, d, e, f für allgemeine Indizes, bzw. die Indizes von Nichtkoordinatenbasisen $\{e_a\}$ (siehe etwa: Wald (1984), Freedman u. Van Proeyen (2012), etc.).

Warum will man eigentlich den zusätzlichen Aufwand einer Transformation auf eine Nichtkoordinatenbasis betreiben, da eine Darstellung von Tensoren sich doch am leichtesten in einer Koordinatenbasis realisieren läßt? Aus der Sicht der Physik sind Nichtkoordinatenbasen unverzichtbar zur Realisierung von Spinoren in gekrümmten Raumzeiten. Da es keine endlichdimensionalen, unitären Spinordarstellungen der Diffeomorphismengruppe gibt, führt also der Standard-Weg zu solchen endlichdimensionalen, unitären

Spinordarstellungen über lokale Lorentztransformationen, und damit zu lokalen Nichtkoordinatenbasen (siehe etwa Wald (1984), Kapitel 13: Spinors).

Die Definitionen von Torsion, Krümmung, allgemeiner Metrik und Minkowski-Metrik stimmen mit den Definitionen in dem berühmten klassischen Werk ***Gravitation*** von Misner u. a. (1973) überein.

Zur Festlegung unserer im Folgenden verwendeten Bezeichnungen seien hier kurz einige Definitionen und Zusammenhänge erinnert.

Es sei M eine m-dimensionale C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeit, d.h. ein topologischer Raum, der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist:

Definition 10.2.1 *M heißt eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn gilt:*

(1) M ist ein topologischer Raum;

(2) es gibt eine Überdeckung $\{U_i\}$ von M durch offene Mengen U_i, d.h. $\cup_i U_i = M$;

(3) in jeder offenen Menge $U_i \subseteq M$ gibt es eine Koordinatenfunktion φ_{U_i}, d.h. einen Homöomorphismus $\varphi_{U_i} : U_i \to U_i' \subset \mathbb{R}^m$ mit $\varphi_{U_i}(p) := (x^1_{U_i}(p), \ldots, x^m_{U_i}(p))$, $p \in M$. Das Paar $\{U_i, \varphi_{U_i}\}$ heißt Karte und die $\{x^\mu_{U_i}\}$ die Koordinaten von U_i;

(4) im Überlappungsgebiet $U_i \cap U_j$ zweier Karten gibt es eine Kartenwechselabbildung als eine C^∞-Abbildung $\psi_{ij} := \varphi_{U_i} \circ \varphi^{-1}_{U_j}$.

Eine allgemeine differenzierbare m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ohne Rand, da sie ja überall lokal zu $\mathbb{R}^m$ sein soll. Allerdings kann man bei Bedarf auch differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand definieren (siehe etwa Nakahara (2003), S. 173 ff.).

Das Standardbeispiel aus der Physik für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist die 4-dimensionale Raumzeit-Mannigfaltigkeit.

Der Tangentialraum an einem Punkt $p \in M$ sei der Vektorraum $T_pM := \{V \,|\, V = V^\mu \partial_\mu = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,,\ \mu = 1 \ldots m\}$. Die Menge $\{\partial_\mu \,|\, \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,,\ \mu = 1 \ldots m\}$ ist die sogenannte *Koordinatenbasis*, auch *holonome Basis* genannt, des Tangentialraums.

Das Entsprechende gilt für T^*_pM, den Kotangentialraum oder Dualraum zu T_pM, also den Vektorraum $T^*_pM := \{w \,|\, w = w_\mu dx^\mu\,,\ \mu = 1 \ldots m\}$.
Die Menge $\{dx^\mu \,|\, dx^\mu(\partial_\nu) := \langle dx^\mu \mid \partial_\nu \rangle := \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu\,,\ \mu, \nu = 1 \ldots m\}$ ist die sogenannte Koordinatenbasis des Kotangentialraums.

Élie Cartan hat in seinen Arbeiten eingeführt, vom Tangentialraum T_pM mittels einer linearen Abbildung von einer Koordinatenbasis $\{\partial_\mu\}$ zu einer *Nichtkoordinatenbasis* $\{e_a\}$, auch *nicht-holonome* Basis genannt, überzugehen.

Sei an einem Punkt $p \in M$ die Abbildung $e_a{}^\mu \in GL(m, \mathbb{R})$ mit $\det e_a{}^\mu > 0$ eine lineare, reelle, invertierbare und orientierungserhaltende m-dimensionale Abbildung und

${e^a}_\mu$ die entsprechende inverse Abbildung, also ${e^a}_\mu {e_a}^\nu = {\delta^\nu}_\mu$ und ${e^a}_\mu {e_b}^\mu = {\delta^a}_b$. Die Nichtkoordinatenbasis $\{e_a\}$ wird jetzt definiert als

$$e_a := {e_a}^\mu \partial_\mu \ . \tag{10.2.1}$$

Die Abbildung ${e_a}^\mu$ heißt *Vielbein*, bzw. bei $m = 2$ *Zweibein*, bei $m = 3$ *Dreibein* oder bei $m = 4$ *Vierbein*. Ein Vektor $X \in T_pM$ ist unabhängig von der verwendeten Basis, also gilt

$$X = X^\mu \partial_\mu = X^a e_a = X^a {e_a}^\mu \partial_\mu \quad \Rightarrow$$

$$X^\mu = X^a {e_a}^\mu \ , \quad X^a = {e^a}_\mu X^\mu \ . \tag{10.2.2}$$

Die zu $\{e_a\}$ duale Nichtkoordinatenbasis $\{\theta^a\}$ des Kotangentialraums wird definiert durch $\langle \theta^a \mid e_b \rangle = {\delta^a}_b$, also

$$\theta^a := {e^a}_\mu dx^\mu \ . \tag{10.2.3}$$

Für den Kommutator zweier Koordinatenbasisvektoren gilt $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$.

Wenn $X = X^\mu \partial_\mu$ und $Y = Y^\nu \partial_\nu$ zwei Tangentialvektoren sind, dann sind XY und YX keine Elemente des Tangentialraums T_pM, wohl aber der Kommutator $[X,Y] := XY - YX$, denn

$$\begin{aligned} [X,Y] &= X^\mu \partial_\mu (Y^\nu \partial_\nu) - Y^\nu \partial_\nu (X^\mu \partial_\mu) \\ &= X^\mu (\partial_\mu Y^\nu) \partial_\nu - Y^\nu (\partial_\nu X^\mu) \partial_\mu \ . \end{aligned} \tag{10.2.4}$$

Also ist der Kommutator von zwei Nichtkoordinaten-Basisvektoren eine Linearkombination von Nichtkoordinaten-Basisvektoren:

$$[e_a, e_b] = {c_{ab}}^c e_c \ . \tag{10.2.5}$$

Die ${c_{ab}}^c \in \mathbb{R}$ heißen Strukturkonstanten. Sie sind offensichtlich schiefsymmetrisch in a und b und erfüllen die Jacobi-Identität:

$$[e_a, e_b] = -[e_b, e_a] \quad \Rightarrow \tag{10.2.6}$$

$${c_{ab}}^c = -{c_{ba}}^c \ , \tag{10.2.7}$$

$$[[e_a, e_b], e_d] + [[e_d, e_a], e_b] + [[e_b, e_d], e_a] = 0 \quad \Rightarrow \tag{10.2.8}$$

$${c_{ab}}^c {c_{cd}}^e + {c_{da}}^c {c_{cb}}^e + {c_{bd}}^c {c_{ca}}^e = 0 \ , \tag{10.2.9}$$

denn

$$
\begin{aligned}
&({c_{ab}}^c {c_{cd}}^e + {c_{da}}^c {c_{cb}}^e + {c_{bd}}^c {c_{ca}}^e) e_e = [[e_a, e_b], e_d] + [[e_d, e_a], e_b] + [[e_b, e_d], e_a] \\
&= (e_a e_b e_d - e_b e_a e_d - e_d e_a e_b + e_d e_b e_a) + (e_d e_a e_b - e_a e_d e_b - e_b e_d e_a + e_b e_a e_d) \\
&\quad + (e_b e_d e_a - e_d e_b e_a - e_a e_b e_d + e_a e_d e_b) \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Die Strukturkonstanten ${c_{ab}}^c$ beziehen sich aber ebenso wie die Basen $\{e_a\}$ und $\{\theta^a\}$ zunächst nur auf einen einzelnen Punkt $p \in M$.

Von einem Vektorfeld X auf M spricht man, wenn $X|_p$ für alle $p \in M$ definiert und glatt ist. Sei also $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller C^∞-Funktionen auf M, d.h.:

$$
\mathcal{F}(M) := \{f\,:\, M \to \mathbb{R} \,|\, f \circ \varphi_{U_i}^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)\ ,\ \text{auf allen Karten } U_i\}\ , \tag{10.2.10}
$$

dann ist X ein Vektorfeld auf M, wenn gilt $X \in \mathcal{X}(M)$ mit:

$$
\mathcal{X}(M) := \{X \,|\, X|_p \in T_p(M)\,,\ X[f] := X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathcal{F}(M) \text{ für alle } f \in \mathcal{F}(M)\}\ . \tag{10.2.11}
$$

Entsprechend zur Menge der Vektorfelder $\mathcal{X}(M)$ definiert man auch die Menge der 1-Formenfelder $\Omega^1(M)$ und die Menge der Tensorfelder $\mathcal{T}^q_r(M)$. Dabei ist $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}^0_1(M)$ und $\Omega^1(M) = \mathcal{T}^1_0(M)$.

Das *Vielbein-Feld* (auch: *Rahmenfeld, moving frame, repère mobile*) e^μ_α ist ein Tensor aus $\mathcal{T}^1_1(M)$. Später werden wir in M eine Metrik einführen und dadurch zusätzliche Aussagen zu diesem Vielbein-Feld gewinnen können.

Immer wieder sehr nützlich ist die folgende Formel der äußeren Ableitung einer 1-Form: $d\omega$.

Lemma 10.2.2 *Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^1(M)$, dann gilt*

$$
d\omega(X,Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X,Y])\ . \tag{10.2.12}
$$

Beweis. Die zu beweisende Aussage ist unabhängig von der verwendeten Basis, also verwenden wir der Einfachheit halber eine Koordinatenbasis: $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\nu \partial_\nu$, $w = w_\lambda dx^\lambda$. Für die linke Seite ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&d(w_\lambda dx^\lambda) = \partial_\mu w_\lambda dx^\mu \wedge dx^\lambda = \partial_\mu w_\lambda (dx^\mu \otimes dx^\lambda - dx^\lambda \otimes dx^\mu) \quad \Rightarrow \\
&dw(X,Y) = (\partial_\mu w_\lambda)(X^\mu Y^\lambda - X^\lambda Y^\mu)\ ,
\end{aligned}
$$

und für die rechte Seite

$$
\begin{aligned}
&X[w(Y)] - Y[w(X)] - w([X,Y]) \\
&= X^\mu \partial_\mu (w_\lambda Y^\lambda) - Y^\nu \partial_\nu (w_\lambda X^\lambda) - (w_\lambda X^\mu \partial_\mu Y^\lambda - w_\lambda Y^\nu \partial_\nu X^\lambda) \\
&= X^\mu (\partial_\mu w_\lambda) Y^\lambda + X^\mu w_\lambda \partial_\mu Y^\lambda - Y^\nu (\partial_\nu w_\lambda) X^\lambda - Y^\nu w_\lambda \partial_\nu X^\lambda \\
&\quad - w_\lambda X^\mu \partial_\mu Y^\lambda + w_\lambda Y^\nu \partial_\nu X^\lambda \\
&= X^\mu Y^\lambda \partial_\mu w_\lambda - X^\lambda Y^\nu \partial_\nu w_\lambda = X^\mu Y^\lambda \partial_\mu w_\lambda - X^\lambda Y^\mu \partial_\mu w_\lambda \\
&= (\partial_\mu w_\lambda)(X^\mu Y^\lambda - X^\lambda Y^\mu) \; .
\end{aligned}
$$
□

Satz 10.2.3 *Ein Feld von Basisvektoren $\{e_a\}$ ist genau dann lokal ein Feld einer Koordinatenbasis (Koordinatenrahmen), wenn $[e_a, e_b] = 0$ für alle a und b ist.*

Beweis. Wenn $e_\mu = \partial_\mu$, dann ist natürlich $[e_\mu, e_\nu] = 0$. Es bleibt also die Umkehrung zu zeigen.

Sei also $[e_a, e_b] = 0$ und sei $\{\theta^a\}$ die duale Basis zu $\{e_a\}$, dann folgt mit dem obige Lemma

$$
\begin{aligned}
d\theta^a(e_b, e_c) &= e_b[\theta^a(e_c)] - e_c[(\theta^a e_b)] - \theta^a([e_b, e_c]) \\
&= e_b[\delta^a{}_c] - e_c[\delta^a{}_b] = 0 \; ,
\end{aligned}
$$

da ja e_b, e_c Differentialoperatoren sind. $d\theta^a = 0$ heißt, daß θ^a geschlossen ist und nach dem Lemma von Poincaré damit auch lokal exakt (sofern die erste Betti-Zahl $b_1(M) = 0$ ist, siehe etwa Frankel (2004), S. 157), und also existieren lokal Funktionen x^a mit $\theta^a = dx^a$. Mit $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m = \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^m \neq 0$ folgt, daß die x^a linear unabhängig sind und also ein lokales Koordinatensystem bilden. Mit $\delta^a{}_b = \theta^a(e_b) = dx^a(e_b)$ folgt: $e_a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$. □

Aus dem obigen Lemma kann man auch unschwer eine wichtige Strukturgleichung für die duale Basis in einem Nichtkoordinatensystem gewinnen:

Lemma 10.2.4 (Maurer-Cartan Strukturgleichung)

$$
d\theta^a = -c_{bc}{}^a \, \theta^b \wedge \theta^c \; . \tag{10.2.13}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
d\theta^a(e_b, e_c) &= e_b[\theta^a(e_c)] - e_c[(\theta^a e_b)] - \theta^a([e_b, e_c]) \\
&= e_b[\delta^a{}_c] - e_c[\delta^a{}_b] - \theta^a([e_b, e_c]) \\
&= -\theta^a(c_{bc}{}^d \, e_d) = -c_{bc}{}^a \; .
\end{aligned}
$$
□

10.3 Lie Ableitung

Sei $Y \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfelder auf M, also $Y|_p \in T_pM$ für $p \in M$. Wenn man sich jetzt für die Änderung von Y auf M interessiert, dann kann man Y nicht einfach differenzieren, indem man $Y|_{p_0+q} - Y|_{p_0}$ für $q \to 0$ betrachtet, denn die Differenz zwischen Vektoren der verschiedenen Tangentialräume $T_{p_0}M$ und $T_{p_0+q}M$ ist nicht definiert. Es bedarf zum Differenzieren von Vektoren in einer Mannigfaltigkeit also einer zusätzlichen Struktur, welche die verschiedenen Tangentialräume miteinander in einen Zusammenhang bringt. Eine sehr allgemeine Möglichkeit dazu ist die Lie-Ableitung, die hier kurz erläutert wird, bevor wir im nächsten Abschnitt dann ausführlich auf den affinen Zusammenhang (= kovariante Ableitung) eingehen.

Gegeben sei ein weiteres Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ und eine Integralkurve $\sigma(t, p_0)$ von X, d.h. eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung für $\sigma : \mathbb{R} \times M \to M$

$$\frac{d}{dt}\sigma(t, p_0) = X|_{\sigma(t,p_0)} \quad \text{mit} \quad \sigma(0, p_0) = p_0 \, . \tag{10.3.1}$$

Diese Integralkurve $\sigma(t, p_0)$ existiert und ist eindeutig für die Anfangswerte p_0 und $\sigma(0, p_0) = p_0$ in einer geeigneten Umgebung von p_0 (Satz von Picard-Lindelöf, siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238) und heißt der von X erzeugte Fluß durch p_0.

Lemma 10.3.1 *Der Fluß $\sigma(t, p_0)$ ist bezüglich des Parameters $t \in \mathbb{R}$ eine 1-dimensionale kommutative Gruppe, für welche gilt*

$$\sigma(t_2, \sigma(t_1, p_0)) = \sigma(t_2 + t_1, p_0) \, . \tag{10.3.2}$$

Beweis. Für die linke Seite erhalten wir das DGL-Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt_2}\sigma(t_2, \sigma(t_1, p_0)) = X|_{\sigma(t_2,\sigma(t_1,p_0))} \, , \quad \sigma(0, \sigma(t_1, p_0)) = \sigma(t_1, p_0) \, ,$$

und für die rechte Seite

$$\frac{d}{dt_2}\sigma(t_2 + t_1, p_0) = \frac{d}{d(t_2 + t_1)}\sigma(t_2 + t_1, p_0) = X|_{\sigma(t_2+t_1,p_0)} \, ,$$

$$\sigma(0 + t_1, p_0) = \sigma(t_1, p_0) \, .$$

Damit erfüllen die Funktionen auf der linken und auf der rechten Seite die gleiche DGL mit den gleichen Anfangswerten und sind also identisch (wieder wie oben aufgrund des Satzes von Picard-Lindelöf). □

Diesen Fluß σ kann man jetzt benutzen, um einen Zusammenhang zwischen den Tangentialräumen entlang des Flußes und somit eine Ableitung eines Vektorfelds $Y \in \mathcal{X}(M)$ entlang dieses Flusses zu definieren - die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X Y$:

$$\mathcal{L}_X Y := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\sigma(-t, p)_* Y|_p - Y|_{p_0}) \quad \text{mit} \quad p := \sigma(t, p_0) \, . \tag{10.3.3}$$

Von Bedeutung ist das folgende Lemma, das die Lie-Ableitung mit dem Kommutator der Vektorfelder in Beziehung setzt.

Lemma 10.3.2

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]\ .$$

Beweis. Seien $p_0, p \in U_i \subset M$ zwei nah benachbarte Punkte auf dem durch das Vektorfeld X definierten Fluß $\sigma(t, p_0)$ in der Karte (U_i, φ_{U_i}) mit den Koordinaten

$$x_0 = \varphi_{U_i}(p_0)\ ,\ x = \varphi_{U_i}(p) = \varphi_{U_i}(\sigma(t, p_0)) = x_0 + tX|_{x_0}\ ,$$

wobei die Vektorfelder X und Y in U_i die folgenden Koordinatendarstellungen haben mögen: $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\mu \partial_\mu$, dann folgt

$$\begin{aligned} Y|_p &\cong Y^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} \partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} \\ &= (Y^\mu|_{x_0} + tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu Y^\mu|_{x_0}) \partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}}\ . \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir den Rücktransport $\sigma(-t, p)_*$ in Koordinatendarstellung auf $\partial_\mu|_x = \partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}}$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \varphi_{U_i}(\sigma(-t, p))_*(\partial_\mu|_{x_0+tX}) &= \frac{\partial x_0^\lambda}{\partial x^\mu} \partial_\lambda|_{x_0} = \frac{\partial(x^\lambda - tX^\lambda)}{\partial x^\mu} \partial_\lambda|_{x_0} \\ &= (\delta^\lambda_\mu - t\frac{\partial}{\partial x^\mu} X^\lambda) \partial_\lambda|_{x_0} = (\delta^\lambda_\mu - t\frac{\partial}{\partial x_0^\mu} X^\lambda + O(t^2)) \partial_\lambda|_{x_0} \\ &= (\delta^\lambda_\mu - t\partial_\mu|_{x_0} X^\lambda + O(t^2)) \partial_\lambda|_{x_0}\ , \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &[Y^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} \partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} - Y^\mu|_{x_0} \partial_\mu|_{x_0}] \\ &\quad = [(Y^\mu|_{x_0} + tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu Y^\mu|_{x_0})(\delta^\lambda_\mu - t\partial_\mu|_{x_0} X^\lambda + O(t^2)) \partial_\lambda|_{x_0} - Y^\mu|_{x_0} \partial_\mu|_{x_0}] \\ &\quad = [tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu Y^\mu|_{x_0} \partial_\mu|_{x_0} - tY^\mu|_{x_0} \partial_\mu X^\lambda|_{x_0} \partial_\lambda|_{x_0}) + O(t^2)] \\ &\quad = t[XY - YX]_{x_0} + O(t^2)\ , \end{aligned}$$

und damit $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. □

10.4 Affiner Zusammenhang oder kovariante Ableitung

Es hat sich gezeigt, daß einer der wichtigsten Begriffe der Differentialgeometrie und der theoretischen Physik der Begriff der Krümmung von Kurven, Flächen und Räumen ist. Im euklidischen Raum $\mathbb{E}^n$ ist die Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c_B : (a, b) \to \mathbb{E}^n$ einfach der Betrag der zweiten Ableitung der Kurve nach der Bogenlänge, d.h. $\kappa(s) = |c''_B(s)|$ (5.1.6).

Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M steht uns in jedem Punkt $p \in M$ der jeweilige Tangentialraum T_pM zur Verfügung, wir können aber zunächst keine Differenzen von Vektoren an verschiedenen Punkten, also etwa $c'(s+\epsilon)-c'(s)$, bilden, da nicht definiert ist, wie die Tangentialräume $T_{p+\epsilon}$ und T_p miteinander zusammenhängen. Im Lauf der Zeit wurden verschiedene Definitionen eines Zusammenhangs auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt, die alle ihre jeweiligen Vorteile haben, aber glücklicherweise letztlich alle miteinander übereinstimmen - siehe die ausführliche Diskussion in Spivak (1979), II.

Wir beginnen mit der kovarianten Differentiation mittels der linearen Abbildung ∇, die auch affiner Zusammenhang, bzw. nach dem französischen Mathematiker Jean-Louis Koszul (*1921) Koszul-Zusammenhang genannt wird. Anschließend gehen wir zu der Zusammenhangs-1-Form ω des Cartan-Zusammenhangs über, die Cartan als Zusammenhang im Vektorfeld der Nichtkoordinaten-Basen $\{e_\alpha\}$ unter dem Stichwort *begleitende Vielbeine* (*Rahmenfelder, moving frames*, *repère mobile*) eingeführt hat. Später, im Zusammenhang mit *Prinzipalbündeln* (*Hauptfaserbündeln*), werden wir uns auf den Ehresmann-Zusammenhang des französischen Mathematikers Charles Ehresmann (1905-1979) stützen, der insbesonders bei Mannigfaltigkeiten von Lie-Gruppen den Paralleltransport von Vektoren sehr transparent werden läßt.

Die kovariante Ableitung, oder der affine Zusammenhang (oder Koszul-Zusammenhang), wird definiert als eine bilineare Abbildung auf Vektorfeldern über der Mannigfaltigkeit M, die zusätzlich eine Leibniz-Regel erfüllt:

Definition 10.4.1

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \ , \quad \textit{mit}\ (X,Y) \to \nabla_X Y \quad \textit{für}\ X,Y \in \mathcal{X}(M) \ .$$

$$\nabla_X(Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2) \ , \tag{10.4.1}$$

$$\nabla_{(X_1+X_2)}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y \ , \tag{10.4.2}$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y \quad \textit{für}\ f \in \mathcal{F}(M) \ , \tag{10.4.3}$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y \quad \textit{für}\ f \in \mathcal{F}(M) \ . \tag{10.4.4}$$

Die kovariante Ableitung der Basisvektoren definiert die sog. Zusammenhangskoeffizienten:

$$\nabla_a e_b := \nabla_{e_a} e_b := \omega^c{}_{ab}\, e_c \ . \tag{10.4.5}$$

Seien $X = X^a e_a$ und $Y = Y^b e_b$ so folgt

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^a e_a} Y^b e_b = X^a (e_a[Y^b]\, e_b + Y^b \nabla_{e_a} e_b)$$

$$= X^a(e_a[Y^b]\, e_b + Y^b\omega^c{}_{ab}\, e_c) = X^a(e_a[Y^c] + \omega^c{}_{ab}Y^b)\, e_c \; . \tag{10.4.6}$$

Mit Hilfe der Definition des Differentials $df(X) := X[f]$ und dem Dualbasisvektor θ^a mit $\theta^a[X] = \theta^a[X^d e_d] = X^a$ kann man dies auch folgendermaßen formulieren:

$$\nabla_X Y = (dY^c(X) + \omega^c{}_{ab}X^aY^b)\, e_c = (dY^c + \omega^c{}_{ab}\theta^aY^b)X\, e_c \; , \tag{10.4.7}$$

Am häufigsten werden wir die folgende Kurzform der kovarianten Ableitung verwenden:

$$(\nabla_a Y)^c = (\nabla_{e_a} Y)^c = e_a[Y^c] + \omega^c{}_{ab}Y^b \; . \tag{10.4.8}$$

In einer Koordinatenbasis mit $X = X^\mu \partial_\mu$ und $Y = Y^\nu \partial_\nu$ erhalten wir für die kovariante Ableitung eines Vektors einfach:

$$\nabla_X Y = (\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu}Y^\nu)X^\mu\, \partial_\lambda \; , \text{ bzw. } (\nabla_\mu Y)^\lambda = \frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu}Y^\nu \; . \tag{10.4.9}$$

Für die kovariante Ableitung einer 1-Form $w = w_b\theta^b$ ergibt sich:

$$X[w(Y)] := X[\langle w \mid Y\rangle] = \nabla_X\langle w \mid Y\rangle = \langle \nabla_X w \mid Y\rangle + \langle w \mid \nabla_X Y\rangle \; .$$

Für die linke Seite ergibt sich

$$X[\langle w \mid Y\rangle] = X^a e_a[w_bY^b] = X^a e_a[w_b]Y^b + X^a w_b e_a[Y^b] \; ,$$

und für den zweiten Ausdruck der rechten Seite

$$\langle w \mid \nabla_X Y\rangle = w_b(\nabla_X Y)^b = w_b X^a(e_a[Y^b] + \omega^b{}_{ac}Y^c) \; .$$

Aus diesen 3 Zeilen folgt

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X w \mid Y\rangle &= X[\langle w \mid Y\rangle] - \langle w \mid \nabla_X Y\rangle \\ &= X^a e_a[w_b]Y^b + X^a w_b e_a[Y^b] - w_b X^a(e_a[Y^b] + \omega^b{}_{ac}Y^c) \\ &= X^a(e_a[w_b]Y^b - w_b\omega^b{}_{ac}Y^c) = X^a(e_a[w_b]Y^b - w_c\omega^c{}_{ab}Y^b) \\ &= X^a(e_a[w_b] - w_c\omega^c{}_{ab})Y^b \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\nabla_X w = X^a(e_a[w_b] - \omega^c{}_{ab}w_c)\, \theta^b \; . \tag{10.4.10}$$

Wie oben werden wir am häufigsten die folgende Kurzform der kovarianten Ableitung verwenden:

$$(\nabla_a w)_b = (\nabla_{e_a} w)_b = e_a[w_b] - \omega^c{}_{ab}w_c \; . \tag{10.4.11}$$

In einer Koordinatenbasis ist das einfach:

$$\nabla_X w = (\frac{\partial w_\nu}{\partial x^\mu} - \omega^\lambda{}_{\mu\nu}w_\lambda)X^\mu\, dx^\nu \; , \text{ bzw. } (\nabla_\mu w)_\nu = \frac{\partial w_\nu}{\partial x^\mu} - \omega^\lambda{}_{\mu\nu}w_\lambda \; . \tag{10.4.12}$$

Die Definitionsgleichung 10.4.4 der kovarianten Ableitung hat die Form einer Leibniz-Regel. Daher liegt es nahe, die Leibniz-Regel ganz allgemein für die kovariante Ableitung von Tensorfeldern auf M zu fordern.

Definition 10.4.2 *Seien $T_1 \in \mathcal{T}^{q_1}_{r_1}(M)$, $T_2 \in \mathcal{T}^{q_2}_{r_2}(M)$ zwei Tensorfelder auf M mit*

$$\mathcal{T}^q_r(M) = \{T \,|\, T = T^{1\dots q}_{1\dots r}\, \partial_1 \otimes \dots \otimes \partial_q \otimes dx^1 \otimes \dots \otimes dx^r\} \ ,$$

dann gelte für die kovariante Ableitung die Leibniz-Regel

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2) \ . \tag{10.4.13}$$

Daraus folgt nun sofort:

$$\begin{aligned}(\nabla_a T)^{c_1\dots c_q}_{b_1\dots b_r} &= (\nabla_{e_a} T)^{c_1\dots c_q}_{b_1\dots b_r} \\ &= e_a[T^{c_1\dots c_q}_{b_1\dots b_r}] + \omega^{c_1}{}_{ad} T^{dc_2\dots c_q}_{b_1\dots b_r} + \dots + \omega^{c_q}{}_{ad} T^{c_1\dots c_{q-1}d}_{b_1\dots b_r} \\ &\quad - \omega^d{}_{ab_1} T^{c_1\dots c_q}_{db_2\dots b_r} - \omega^d{}_{ab_r} T^{c_1\dots c_q}_{b_1\dots b_{r-1}d} \ , \end{aligned} \tag{10.4.14}$$

bzw. in einer Koordinatenbasis

$$\begin{aligned}(\nabla_\mu T)^{\lambda_1\dots\lambda_q}_{\nu_1\dots\nu_r} &= (\nabla_{x^\mu} T)^{\lambda_1\dots\lambda_q}_{\nu_1\dots\nu_r} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\lambda_1\dots\lambda_q}_{\nu_1\dots\nu_r} + \omega^{\lambda_1}{}_{\mu\kappa} T^{\kappa\lambda_2\dots\lambda_q}_{\nu_1\dots\nu_r} + \dots + \omega^{\lambda_q}{}_{\mu\kappa} T^{\lambda_1\dots\lambda_{q-1}\kappa}_{\nu_1\dots\nu_r} \\ &\quad - \omega^\kappa{}_{\mu\nu_1} T^{\lambda_1\dots\lambda_q}_{\kappa\nu_2\dots\nu_r} - \omega^\kappa{}_{\mu\nu_r} T^{\lambda_1\dots\lambda_q}_{\nu_1\dots\nu_{r-1}\kappa} \ . \end{aligned} \tag{10.4.15}$$

Der Paralleltransport eines Vektors $Y \in \mathcal{X}(M)$ entlang einer glatten Kurve $c : (a, b) \to M$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, wird nun mit Hilfe des oben eingeführten Zusammenhangs definiert. Sei $X = \{\frac{d}{ds} \in \mathcal{X}(M) \,|\, c(s) \in C^\infty(M)\}$ das Tangentialvektorfeld an die Kurve $c(s)$, dann heißt Y entlang $c(s)$ parallel verschoben, wenn gilt

$$X|_{c(s)} = \frac{d}{ds}|_{c(s)} = X^\mu \partial_\mu|_{c(s)} = \frac{dx^\mu(c(s))}{ds}\, \partial_\mu|_{c(s)} \quad \Rightarrow \quad \nabla_X Y = 0 \ , \tag{10.4.16}$$

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= (\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu} Y^\nu) X^\mu\, \partial_\lambda = (\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu} Y^\nu) \frac{dx^\mu(c(s))}{ds}\, \partial_\lambda \\ &= (\frac{dY^\lambda}{ds} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(c(s))}{ds} Y^\nu)\, \partial_\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{dY^\lambda}{ds} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(c(s))}{ds} Y^\nu = 0 \ . \tag{10.4.17}$$

Aus dieser Gleichung für die Parallelverschiebung eines Vektors Y entlang einer Kurve $c(s)$ kann man auch sofort ersehen, warum dieser *Koszul-Zusammenhang* zumeist *Affiner Zusammenhang* genannt wird. Denn wenn wir die Kurve $c(s)$ einer affinen Transformation unterziehen, also $\tilde{c}(t) := c(s)$ mit $s := a \cdot t + t_0$, dann bleibt die Gleichung 10.4.17 für die Parallelverschiebung unverändert.

Eine Geodäte wird nun definiert als eine Kurve $c(s)$, deren Tangentenvektor $X = \frac{d}{ds}$ bei Parallelverschiebung entlang von $c(s)$ unverändert bleibt, also

$$\nabla_X X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0\ . \tag{10.4.18}$$

Diese Geodätengleichung entspricht genau der Geodätengleichung 7.0.6, die wir für Kurven in m-dimensionalen Hyperflächen $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ abgeleitet hatten und stellt damit eine weitreichende Verallgemeinerung auf beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten M dar.

10.5 Der Torsionstensor

Wenn nun in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ein solcher affiner Zusammenhang vorliegt, so lassen sich aus der kovarianten Ableitung ∇_X weitere Tensoren bilden - die beiden wichtigsten sind der Torsionstensor (das Torsionstensorfeld) $T \in \mathcal{T}^1_2(M)$ und der Krümmungstensor (das Krümmungstensorfeld) $R \in \mathcal{T}^1_3(M)$. Beide Tensoren werden zunächst völlig unabhängig von einer eventuell zusätzlich vorhandenen Metrik definiert.

Während gewöhnliche Ableitungen kommutieren, trifft dies für kovariante Ableitungen i.A. nicht zu. Für $X = \partial_\mu$ und $Y = \partial_\nu$ gilt ja in Bezug auf C^∞-Funktionen $[X, Y] = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Seien jetzt $X = X^\beta e_\beta$ und $Y = Y^\gamma e_\gamma$ beliebige Vektoren aus $\mathcal{X}(M)$, dann stellt $\nabla_X Y - \nabla_Y X$ einen Differentialoperator 2.Ordnung für C^∞-Funktionen dar, denn sei $f \in C^\infty(M)$, dann gilt mit 10.4.4 und einem konstanten $e_0 \in \mathcal{X}(M)$ für die kovarianten Ableitungen:

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X) f\, e_0 = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) f\, e_0\ .$$

Dieser Ausdruck ist zwar per Konstruktion koordinatenunabhängig, aber nicht bilinear in X und Y und damit kein Tensor, denn es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y - \nabla_Y X &= X^b e_b[Y^c] e_c + X^b Y^c \omega^d{}_{bc}\, e_d - Y^c e_c[X^b] e_b - Y^c X^b \omega^d{}_{cb}\, e_d \\
&= X^b e_b[Y^c e_c] - Y^c e_c[X^b e_b] - (X^b Y^c e_b[e_c] - Y^c X^b e_c[e_b]) \\
&\quad + X^b Y^c(\omega^d{}_{bc} - \omega^d{}_{cb}) e_d \\
&= [X, Y] - X^b Y^c [e_b, e_c] + X^b Y^c (\omega^d{}_{bc} - \omega^d{}_{cb}) e_d \\
&= [X, Y] + X^b Y^c (\omega^d{}_{bc} - \omega^d{}_{cb}) e_d - X^b Y^c c_{bc}{}^d e_d\ .
\end{aligned}$$

Hier ist der Kommutator $[X, Y]$ auf der rechten Seite kein Tensor, weil er keine bilineare Funktion in X und Y ist, denn mit $f, g \in C^\infty$ folgt:

$$[fX, gY] = fX[gY] - gY[fX] = f(X[g]Y + gX[Y]) - g(Y[f]X + fY[X])$$

$$= fg[X,Y] + fX[g]Y - gY[f]X \neq fg[X,Y] \;.$$

Jedoch ist offensichtlich $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ sowohl unabhängig von der gewählten Basis, als auch bilinear in X und Y, und damit ein Tensor, der Torsionstensor genannt wird:

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \;, \tag{10.5.1}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$T^a{}_{bc} := \langle \theta^a \mid T(e_b, e_c) \rangle = \omega^a{}_{bc} - \omega^a{}_{cb} - c_{bc}{}^a \;. \tag{10.5.2}$$

Um die geometrische Bedeutung des Torsionstensors T zu veranschaulichen betrachtet man üblicherweise ein kleines, d.h. infinitesimales, Parallelogramm in der Mannigfaltigkeit M.

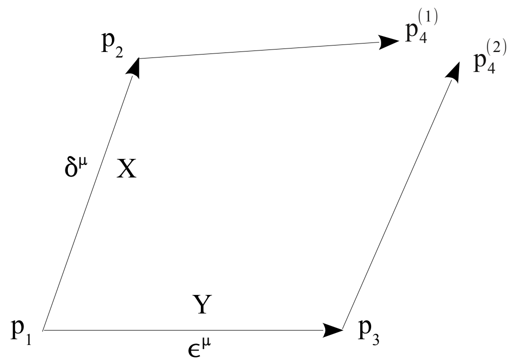

Abbildung 10.2: infinitesimales Parallelogramm und Torsion

Der Startpunkt des Parallelogramms $p_1 \in M$ habe die Koordinaten x^μ und wir wählen die entsprechende Koordinatenbasis ∂_μ, so daß die Strukturkonstanten $c_{ab}{}^c = 0$ sind (10.2.5). Seien jetzt p_2, $p_3 \in M$ zwei weitere Punkte des Parallelogramms mit den Koordinaten $x^\mu + \delta^\mu$, bzw. $x^\mu + \epsilon^\mu$, mit infinitesimalen δ^μ und ϵ^μ. Seien weiter

$$X = X^\mu \partial_\mu = \frac{d(x^\mu + \delta^\mu s)}{ds}\partial_\mu = \delta^\mu \partial_\mu \;, \quad \text{und} \quad Y = Y^\mu \partial_\mu = \frac{d(x^\mu + \epsilon^\mu s)}{ds}\partial_\mu = \epsilon^\mu \partial_\mu$$

zwei Vektoren aus $T_{p_1}M$ mit $X^\mu = \overline{p_1 p_2} = \delta^\mu$ und $Y^\mu = \overline{p_1 p_3} = \epsilon^\mu$. Aus der Gleichung 10.4.17 für die Parallelverschiebung eines Vektors X entlang einer Kurve $c(s)$ um die infinitesimale Strecke ds folgt:

$$dX^\lambda + \omega^\lambda{}_{\nu\mu} dx^\nu(c(s)) X^\mu = 0 \;, \quad \Rightarrow$$

$$dX^\lambda = -\omega^\lambda{}_{\nu\mu} dx^\nu(c(s)) X^\mu \;.$$

Jetzt verschieben wir den Vektor X parallel entlang Y bis zu p_3 und erhalten den Punkt $p_4^{(2)}$:

$$x^\lambda + \epsilon^\lambda + (\delta^\lambda - \omega^\lambda{}_{\nu\mu}\epsilon^\nu\delta^\mu) \, .$$

Ebenso verschieben wir den Vektor Y parallel entlang X bis zu p_2 und erhalten den Punkt $p_4^{(1)}$:

$$x^\lambda + \delta^\lambda + (\epsilon^\lambda - \omega^\lambda{}_{\mu\nu}\delta^\mu\epsilon^\nu) \, .$$

Die Differenz der beiden Parallelogrammpunkte $p_4^{(2)}$ und $p_4^{(1)}$ wird gerade vom Torsionstensor bestimmt:

$$\overline{p_4^{(2)} p_4^{(1)}} = (\omega^\lambda{}_{\mu\nu} - \omega^\lambda{}_{\nu\mu})\delta^\mu\epsilon^\nu = T^\lambda{}_{\mu\nu}\delta^\mu\epsilon^\nu \, . \tag{10.5.3}$$

In einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M mit affinem Zusammenhang und nichtverschwindender Torsion schließt sich also ein durch Parallelverschiebungen konstruiertes infinitesimales Parallelogramm nicht.

Einstein hat in seiner *Allgemeinen Relativitätstheorie* zur Beschreibung der Gravitation einen torsionsfreien Zusammenhang für die vierdimensionale Raumzeit angenommen und den Energie-Impuls-Tensor an die Krümmung gekoppelt. Wenn man in dieser Weise die Torsion in der ganzen Mannigfaltigkeit M zu Null setzt und eine Koordinatenbasis ∂_μ verwendet, so daß die Strukturkonstanten $c_{ab}{}^c = 0$ sind, dann sind die Zusammenhangskoeffizienten symmetrisch: $\omega^c{}_{ab} = \omega^c{}_{ba}$.

Erweiterte Gravitationstheorien, wie z.B. die *Einstein-Cartan-Theorie* (EC), die *Supergravity* (SUGRA) oder die *Loop Quantum Gravity* (LQG) verwenden die Torsion und koppeln diese an Fermionenspins. Die EC-Theorie läßt sich als Eichtheorie der lokalen Poincaré-Gruppe ableiten (z.B. Hehl u. a. (1976)) und die SUGRA-Therie als Eichtheorie der lokalen Super-Poincaré-Gruppe (z.B. Freedman u. Van Proeyen (2012)).

10.6 Der Krümmungstensor

Wenn der Differentialoperator 2.Ordnung $(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)$, dem wir soeben schon bei der Torsion begegnet sind, nicht auf C^∞-Funktionen angewandt wird, sondern auf Vektoren $Z \in \mathcal{X}(M)$, so gelangen wir zum Krümmungstensor. Seien $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ mit $X = X^c e_c$, $Y = Y^d e_d$, $Z = Z^b e_b$:

$$\begin{aligned}
K_1 &:= (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)\, Z \\
&= (\nabla_{X^c e_c}\nabla_{Y^d e_d} - \nabla_{Y^d e_d}\nabla_{X^c e_c})\, Z^b e_b \\
&= X^c\nabla_c(Y^d\nabla_d Z^b e_b) - Y^d\nabla_d(X^c\nabla_c Z^b e_b) \\
&= X^c\nabla_c(Y^d(\nabla_d Z^b)e_b + Y^d Z^b\nabla_d e_b) - Y^d\nabla_d(X^c(\nabla_c Z^b)e_b + X^c Z^b\nabla_c e_b)
\end{aligned}$$

$$= X^c(\nabla_c Y^d)(\nabla_d Z^b)e_b + X^c Y^d(\nabla_c\nabla_d Z^b)e_b + X^c Y^d(\nabla_d Z^b)\nabla_c e_b$$
$$+ X^c(\nabla_c Y^d)Z^b\nabla_d e_b + X^c Y^d(\nabla_c Z^b)\nabla_d e_b + X^c Y^d Z^b(\nabla_c\nabla_d e_b)$$
$$- Y^d(\nabla_d X^c)(\nabla_c Z^b)e_b - Y^d X^c(\nabla_d\nabla_c Z^b)e_b - Y^d X^c(\nabla_c Z^b)\nabla_d e_b$$
$$- Y^d(\nabla_d X^c)Z^b\nabla_c e_b - Y^d X^c(\nabla_d Z^b)\nabla_c e_b - Y^d X^c Z^b(\nabla_d\nabla_c e_b)\ .$$

Der 3. und der 11. Term, sowie der 5. und der 9. Term, heben sich gegenseitig auf. Im 2. und 8. Term finden wir für $\nabla_c\nabla_d Z^b = e_c e_d Z^b$, bzw. $\nabla_d\nabla_c Z^b = e_d e_c Z^b$, denn die $e_a \in T_p(M)$ sind ja Differentialoperatoren:

$$Z^b \in C^\infty(M) \ \Rightarrow\ \nabla_d Z^b = e_d Z^b \in C^\infty(M) \ \Rightarrow\ e_c e_d Z^b \in C^\infty(M)\ , \quad \Rightarrow$$

$$X^c Y^d(\nabla_c\nabla_d Z^b)e_b - Y^d X^c(\nabla_d\nabla_c Z^b)e_b = X^c Y^d([e_c, e_d]Z^b)e_b = X^c Y^d({c_{cd}}^e e_e Z^b)e_b\ .$$

Damit ergibt sich für K_1:

$$K_1 = X^c(\nabla_c Y^d)(\nabla_d Z^b)e_b + X^c Y^d({c_{cd}}^e e_e Z^b)e_b$$
$$+ X^c(\nabla_c Y^d)Z^b\nabla_d e_b + X^c Y^d Z^b(\nabla_c\nabla_d e_b)$$
$$- Y^d(\nabla_d X^c)(\nabla_c Z^b)e_b - Y^d(\nabla_d X^c)Z^b\nabla_c e_b - Y^d X^c Z^b(\nabla_d\nabla_c e_b)\ .$$

Dieser Ausdruck ist nun offensichtlich nicht in X, Y, Z multilinear. Also versucht man, ebenso wie zuvor bei der Torsion, die Nichtlinearitäten von $(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)\,Z$ abzuziehen, um einen Tensor 3. Stufe zu erhalten.

$$[X,Y] = [X^c e_c, Y^d e_d] = X^c e_c(Y^d e_d) - Y^d e_d(X^c e_c)$$
$$= X^c(e_c Y^d)e_d + X^c Y^d e_c e_d - Y^d(e_d X^c)e_c - Y^d X^c e_d e_c$$
$$= X^c(e_c Y^d)e_d - Y^d(e_d X^c)e_c + X^c Y^d[e_c, e_d]$$
$$= X^c(e_c Y^d)e_d - Y^d(e_d X^c)e_c + X^c Y^d {c_{cd}}^e e_e\ .$$

$$K_2 := \nabla_{[X,Y]}Z$$
$$= X^c(\nabla_c Y^d)\nabla_d Z - Y^d(\nabla_d X^c)\nabla_c Z + X^c Y^d {c_{cd}}^e\nabla_e Z$$
$$= X^c(\nabla_c Y^d)(\nabla_d Z^b)e_b + X^c Z^b(\nabla_c Y^d)\nabla_d e_b$$
$$- Y^d(\nabla_d X^c)(\nabla_c Z^b)e_b - Y^d Z^b(\nabla_d X^c)\nabla_c e_b$$
$$+ X^c Y^d {c_{cd}}^a(\nabla_a Z^b)e_b + X^c Y^d Z^b({c_{cd}}^e\nabla_e e_b)\ .$$

Für die Differenz $K_1 - K_2$ ergibt sich nun der gesuchte in X, Y, Z multilineare Ausdruck, der Krümmungstensor R:

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &:= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)\, Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= X^c Y^d Z^b \{\nabla_c \nabla_d e_b - \nabla_d \nabla_c e_b - c_{cd}{}^e \nabla_e e_b\} \\
&= X^c Y^d Z^b \{\nabla_c \omega^e{}_{db} e_e - \nabla_d \omega^e{}_{cb} e_e - c_{cd}{}^e \nabla_e e_b\} \\
&= X^c Y^d Z^b \cdot \\
&\quad \cdot \{(e_c \omega^e{}_{db}) e_e + \omega^e{}_{db} \omega^f{}_{ce} e_f - (e_d \omega^e{}_{cb}) e_e - \omega^e{}_{cb} \omega^f{}_{de} e_f - c_{cd}{}^e \omega^f{}_{eb} e_f\}\ ,
\end{aligned} \tag{10.6.1}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned}
R^a{}_{bcd} &:= \langle \theta^a \mid R(e_c, e_d) e_b \rangle \\
&= e_c \omega^a{}_{db} - e_d \omega^a{}_{cb} + \omega^e{}_{db} \omega^a{}_{ce} - \omega^e{}_{cb} \omega^a{}_{de} - c_{cd}{}^e \omega^a{}_{eb}\ .
\end{aligned} \tag{10.6.2}$$

Der Krümmungstensor $R^a{}_{bcd}$ ist in den beiden Indizes c, d antisymmetrisch, da ja die Strukturkonstanten $c_{cd}{}^e$ in den beiden unteren Indizes antisymmetrisch sind (10.2.7):

$$R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc}\ . \tag{10.6.3}$$

Um die geometrische Bedeutung des Krümmungstensors R zu veranschaulichen betrachtet man üblicherweise ein kleines, d.h. infinitesimales, Parallelogramm in der Mannigfaltigkeit M. Das Parallelogramm möge in diesem Beispiel geschlossen sein, also M ohne Torsion.

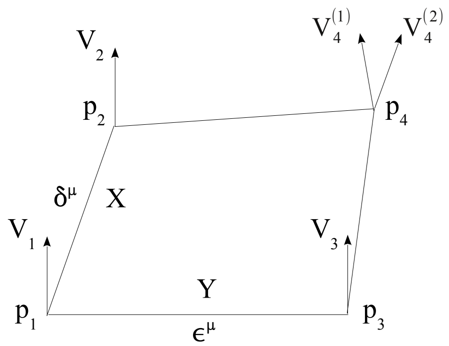

Abbildung 10.3: infinitesimales Parallelogramm und Krümmung

Der Startpunkt des Parallelogramms $p_1 \in M$ habe die Koordinaten x^μ und wir wählen die entsprechende Koordinatenbasis ∂_μ, so daß die Strukturkonstanten $c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$ sind

(10.2.5). Seien jetzt p_2, $p_3 \in M$ zwei weitere Punkte des Parallelogramms mit den Koordinaten $x^\mu + \delta^\mu$, bzw. $x^\mu + \epsilon^\mu$, mit infinitesimalen δ^μ und ϵ^μ. Seien weiter

$$X = X^\mu \partial_\mu = \frac{d(x^\mu + \delta^\mu s)}{ds} \partial_\mu = \delta^\mu \partial_\mu \ , \quad \text{und} \quad Y = Y^\mu \partial_\mu = \frac{d(x^\mu + \epsilon^\mu s)}{ds} \partial_\mu = \epsilon^\mu \partial_\mu$$

zwei Vektoren aus $T_{p_1} M$ mit $X^\mu = \overline{p_1 p_2} = \delta^\mu$ und $Y^\mu = \overline{p_1 p_3} = \epsilon^\mu$. Aus der Gleichung 10.4.17 für die Parallelverschiebung eines Vektors V entlang einer Kurve $c(s)$ um die infinitesimale Strecke ds folgt:

$$dV^\kappa + \omega^\kappa{}_{\lambda\mu} dx^\lambda (c(s)) V^\mu = 0 \ , \quad \Rightarrow$$

$$dV^\kappa = -\omega^\kappa{}_{\lambda\mu} dx^\lambda (c(s)) V^\mu \ .$$

Wir verschieben den Vektor V_1 vom Punkt p_1 parallel entlang X bis zu p_2 und erhalten V_2. Danach verschieben wir V_2 parallel bis zu $p_4$und erhalten den Vektor $V_4^{(1)}$:

$$V_2^\kappa = V_1^\kappa - \omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \delta^\mu \ .$$

$$\begin{aligned}
V_4^{(1)\kappa} &= V_2^\kappa - \omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_2) V_2^\lambda \epsilon^\nu \\
&= V_1^\kappa - \omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \delta^\mu - [\omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_2)(V_1^\lambda - \omega^\lambda{}_{\mu\xi}(p_1) V_1^\xi \delta^\mu)\epsilon^\nu] \\
&= V_1^\kappa - \omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \delta^\mu \\
&\quad - [(\omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_1) + \partial_\mu \omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_1)\delta^\mu)(V_1^\lambda - \omega^\lambda{}_{\mu\xi}(p_1) V_1^\xi \delta^\mu)\epsilon^\nu] + O(|\delta|^2 |\epsilon|) \ .
\end{aligned}$$

Ebenso verschieben wir den Vektor V_1 vom Punkt p_1 parallel entlang Y bis zu p_3 und erhalten V_3. Danach verschieben wir V_3 parallel bis zu p_4 und erhalten den Vektor $V_4^{(2)}$:

$$V_3^\kappa = V_1^\kappa - \omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \epsilon^\nu \ .$$

$$\begin{aligned}
V_4^{(2)\kappa} &= V_3^\kappa - \omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_3) V_3^\lambda \delta^\mu \\
&= V_1^\kappa - \omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \epsilon^\nu - [\omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_3)(V_1^\lambda - \omega^\lambda{}_{\nu\xi}(p_1) V_1^\xi \epsilon^\nu)\delta^\mu] \\
&= V_1^\kappa - \omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \epsilon^\nu \\
&\quad - [(\omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_1) + \partial_\nu \omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_1)\epsilon^\nu)(V_1^\lambda - \omega^\lambda{}_{\nu\xi}(p_1) V_1^\xi \epsilon^\nu)\delta^\mu] + O(|\delta||\epsilon|^2) \ .
\end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Vektoren $V_4^{(2)}$ und $V_4^{(1)}$ bis zur 2. Ordnung in δ und ϵ wird gerade vom Krümmungstensor bestimmt:

$$V_4^{(2)\kappa} - V_4^{(1)\kappa} = -\partial_\nu \omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \delta^\mu \epsilon^\nu + \partial_\mu \omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \delta^\mu \epsilon^\nu$$

$$
\begin{aligned}
&+ \omega^\kappa{}_{\mu\xi}(p_1)\omega^\xi{}_{\nu\lambda}(p_1)V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu - \omega^\kappa{}_{\nu\xi}(p_1)\omega^\xi{}_{\mu\lambda}(p_1)V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu \\
= &\left[\partial_\mu\omega^\kappa{}_{\nu\lambda}(p_1) - \partial_\nu\omega^\kappa{}_{\mu\lambda}(p_1)\right. \\
&\left.+ \omega^\kappa{}_{\mu\xi}(p_1)\omega^\xi{}_{\nu\lambda}(p_1) - \omega^\kappa{}_{\nu\xi}(p_1)\omega^\xi{}_{\mu\lambda}(p_1)\right] V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu \\
= &R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu \; .
\end{aligned}
$$

In einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M mit affinem Zusammenhang und nichtverschwindender Krümmung ist also das Resultat der Parallelverschiebung eines Vektors wegabhängig.

In der Einsteinschen Gravitationstheorie spielt jedoch nicht der Riemannsche-Krümmungstensor, sondern der daraus durch Kontraktion des 1. und 3. Indexes abgeleitete *Ricci-Tensor* die entscheidende Rolle.

$$
Ric(Z,Y) := \langle \theta^a \mid R(e_a,Y)Z\rangle \; , \tag{10.6.4}
$$

bzw. in Komponenten

$$
Ric_{bd} = Ric(e_b,e_d) = R^a{}_{bad} \; . \tag{10.6.5}
$$

Wir werden bei der Bianchi-2 Identität und später beim Levi-Civita Zusammenhang auf den Ricci-Tensor zurückkommen.

10.7 Élie Cartan (1869 - 1951)

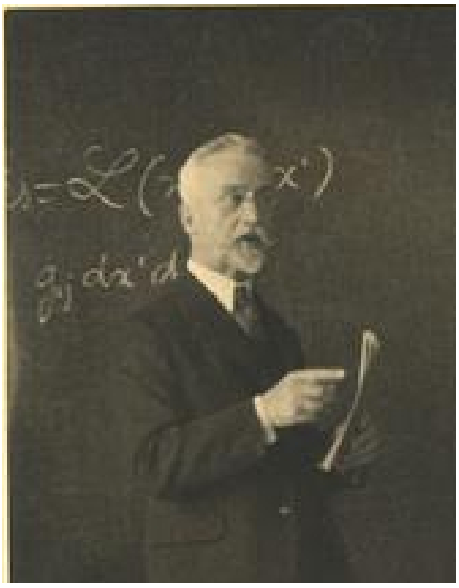

Abbildung 10.4: Élie Cartan im Math. Seminar Hamburg, unbekannt, CC-BY-SA-2.5. Bildausschnitt des Originals. (Math. Inst. Oberwolfach) [http://de.wikipedia.org/wiki/Élie_Cartan]

Élie Cartan wurde 1869 als Sohn eines Schmieds in Dolomieu im Departement Isère in Frankreich geboren. Er fiel seinen Lehrern bereits in der Grundschule auf, so daß er ein Stipendium zum Besuch des Gymnasiums in Lyon und anschließend ab 1888 zum Studium an der École Normale Supérieure in Paris erhielt. Dort promovierte er 1894 mit einer Arbeit über Lie-Algebren und Lie-Gruppen. Dieses Thema beschäftigte ihn danach noch viele Jahre und letztlich konnte er eine vollständige Klassifikation der komplexen, einfachen Lie-Gruppen erzielen. Nach seiner Promotion unterrichtete er zunächst an der Universität von Montpellier und von 1896 bis 1903 an der Universität von Lyon. Im Jahr 1903 erhielt er eine Professur an der Universität von Nancy und ab 1909 lehrte er in Paris an der Sorbonne auf verschiedenen Lehrstühlen. In der Zeit des Ersten Weltkriegs arbeitete er im Hospital der Ecole Normale Supérieure. Im Jahr 1940 emeritierte er und verstarb 1951 nach einer langen, schweren Krankheit.
Élie Cartan war seit 1903 mit Marie-Luise Bianconi verheiratet und führte ein ruhiges und glückliches Familienleben. Das Ehepaar Cartan hatte vier Kinder, die alle ebenfalls erwähnenswert sind:

- Henri Cartan (1904-2008), ein bedeutender Mathematiker und Gründungsmitglied der berühmten Gruppe *Nicolas Bourbaki*, die sich um einen streng axiomatischen Aufbau der Mathematik auf den Spuren Hilberts bemühte. Henri Cartan war Doktorvater vieler berühmter französischer Mathematiker (u.a. Dolbeaut, Koszul, Thom), und privat ein guter Pianist,
- Jean Cartan (1906-1932), ein außergewöhnlicher Komponist, der leider schon mit 25 Jahren an Tuberkulose verstarb,
- Louis Cartan (1909-1943), ein Physiker, der sich im 2. Weltkrieg der Resistence anschloß und von den Nazis 1943 ermordet wurde,
- Hélène Cartan (1917-1952), eine begabte Mathematikerin und Pianistin, die leider auch viel zu früh an einem schweren Verlauf einer Tuberkulose verstarb.

Élie Cartans wichtigste Arbeiten behandeln die Themen:
Lie-Algebren und deren Klassifizierung (1894), Lie-Gruppen und deren Topologie und

Darstellungen (1914), partielle Differentialgleichungen, integrable Systeme und Integral-Invarianten, Differentialgeometrie und dabei insb. Strukturgruppen und die Klassifizierung global irreduzibler symmetrischer Riemannscher Räume (1926-27), begleitende Vielbeine (Rahmenfelder, moving frames, repère mobile) und Zusammenhänge. Besonders erwähnenswert aus der Sicht der Physik ist sicherlich Cartans Einführung der Spinoren im Jahr 1913 und seine Erweiterung von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie um die Torsion im Jahr 1921, die heute so genannte *Einstein-Cartan-Theorie* (EC-Theorie).

Cartan war ein sehr bescheidener und humorvoller Mensch und vielleicht ist dies ein Grund dafür, daß seine Zeitgenossen erst nach Jahrzehnten die Bedeutung seiner Forschungen und didaktischen Innovationen, wie etwa den Differentialformen-Kalkül, erkennen und wertschätzen konnten. Heute begegnet uns der Name Cartan überall in der Theorie der Lie-Gruppen, partiellen Differentialgleichungen und der Differentialgeometrie.

Cartan war neben seinen Forschungen auch ein begabter und engagierter akademischer Lehrer (im Gegensatz etwa zu Poincaré oder Einstein). Ein auch heute noch mit Gewinn zu lesendes Buch und ein Beispiel für Cartans klare und schöne Darstellung komplexer Zusammenhänge sind seine Vorlesungen über Spinoren, die zuerst auf französisch (Cartan (1938)) und später auf englisch (Cartan (1966)) erschienen sind.

Zu seinen zahlreichen bedeutenden Schülern gehörte auch Shiing-Shen Chern (s.u. der Nachruf auf Élie Cartan von Chern und Chevalley).

[Quellen: Wikipedia-Cartan (2013), MacTutor-E.-Cartan (2013), Chern u. Chevalley (1952), Audin (2008)]

10.8 Die Cartansche Zusammenhangsform

Élie Cartan hat in der Differentialgeometrie anstelle der Beschreibung der Geometrie durch Tensoren eine elegante Beschreibung durch Differentialformen eingeführt, die insbesondere die Behandlung der Geometrie in Lie-Gruppen und Faserbündeln transparenter gestaltet. Dazu führte Cartan die Zusammenhangs-1-Form, die Torsions-2-Form und die Krümmungs-2-Form ein, die wir hier im Kontext der Riemannschen Geometrie betrachten:

$$\omega^a{}_b := \omega^a{}_{cb}\theta^c \,, \tag{10.8.1}$$

$$T^a := \frac{1}{2}T^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c \,, \tag{10.8.2}$$

$$R^a{}_b := \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d \,. \tag{10.8.3}$$

Diese Zusammenhangs-1-Form erfüllt die beiden Cartanschen Strukturgleichungen:

Satz 10.8.1 (Cartan Strukturgleichung)

$$T^a = d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b \ , \tag{10.8.4}$$

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \ . \tag{10.8.5}$$

Beweis. Zunächst zur Torsions-2-Form:

$$\begin{aligned} T^a(e_b, e_c) &= \frac{1}{2} T^a{}_{de} \theta^d \wedge \theta^e(e_b, e_c) \\ &= \frac{1}{2} T^a{}_{de}(\theta^d(e_b)\theta^e(e_c) - \theta^d(e_c)\theta^e(e_b)) \\ &= \frac{1}{2}(T^a{}_{bc} - T^a{}_{cb}) = T^a{}_{bc} \ . \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Gleichung ergibt sich:

$$(d\theta^a + \omega^a{}_e \wedge \theta^e)(e_b, e_c) = d\theta^a(e_b, e_c) + (\omega^a{}_{de}\theta^d \wedge \theta^e)(e_b, e_c) \ .$$

Für die äußere Ableitung einer 1-Form hatten wir in 10.2.12 die hilfreiche Formel gefunden:

$$d\omega(X, Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]) \ .$$

Damit und mit 10.5.2 ergibt sich das gesuchte Ergebnis:

$$\begin{aligned} (d\theta^a + \omega^a{}_e \wedge \theta^e)(e_b, e_c) &= e_b[\delta^a_c] - e_c[\delta^a_b] - \theta^a([e_b, e_c]) + \omega^a{}_{bc} - \omega^a{}_{cb} \\ &= \omega^a{}_{bc} - \omega^a{}_{cb} - c_{bc}{}^a = T^a{}_{bc} \ . \end{aligned}$$

Nun zur Krümmungs-2-Form:

$$\begin{aligned} R^a{}_b(e_c, e_d) &= \frac{1}{2} R^a{}_{bef} \theta^e \wedge \theta^f(e_c, e_d) \\ &= \frac{1}{2} R^a{}_{bef}(\theta^e(e_c)\theta^f(e_d) - \theta^e(e_d)\theta^f(e_c)) \\ &= \frac{1}{2}(R^a{}_{bcd} - R^a{}_{bdc}) = R^a{}_{bcd} \ . \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} (d\omega^a{}_b + \omega^a{}_e \wedge \omega^e{}_b)(e_c, e_d) &= (d(\omega^a{}_{eb}\theta^e) + \omega^a{}_{fe}\omega^e{}_{gb}(\theta^f \wedge \theta^g - \theta^g \wedge \theta^f))(e_c, e_d) \\ &= d(\omega^a{}_{eb}\theta^e)(e_c, e_d) + \omega^a{}_{ce}\omega^e{}_{db} - \omega^a{}_{de}\omega^e{}_{cb} \ . \end{aligned}$$

Wie oben mit 10.2.12 und mit 10.6.2 folgt für die äußere Ableitung einer 1-Form:

$$(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_e \wedge \omega^e{}_b)(e_c, e_d) = e_c[\omega^a{}_{eb}\theta^e(e_d)] - e_d[\omega^a{}_{eb}\theta^e(e_c)] - \omega^a{}_{eb}\theta^e([e_c, e_d])$$

$$
\begin{aligned}
&+ \omega^a{}_{ce}\omega^e{}_{db} - \omega^a{}_{de}\omega^e{}_{cb} \\
&= e_c[\omega^a{}_{db}] - e_d[\omega^a{}_{cb}] - \omega^a{}_{eb}c_{cd}{}^e + \omega^a{}_{ce}\omega^e{}_{db} - \omega^a{}_{de}\omega^e{}_{cb} \\
&= R^a{}_{bcd} \; . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Wenn man auf die beiden Cartanschen Strukturgleichungen 10.8.4 und 10.8.5 nochmals die äußere Ableitung d anwendet, so erhält man die beiden Bianchi-Identitäten:

$$dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b = R^a{}_b \wedge \theta^b \; , \tag{10.8.6}$$

$$dR^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge R^c{}_b - R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0 \; . \tag{10.8.7}$$

Beweis. Zunächst Bianchi-1:

$$
\begin{aligned}
dT^a &= d(d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b) = d(\omega^a{}_b \wedge \theta^b) \\
&= d\omega^a{}_b \wedge \theta^b - \omega^a{}_b \wedge d\theta^b \\
&= R^a{}_b \wedge \theta^b - \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge \theta^b - \omega^a{}_b \wedge (T^b - \omega^b{}_c \wedge \theta^c) \\
&= R^a{}_b \wedge \theta^b - \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge \theta^b - \omega^a{}_b \wedge T^b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge \theta^b \\
&= R^a{}_\beta \wedge \theta^b - \omega^a{}_b \wedge T^b \; .
\end{aligned}
$$

Nun Bianchi-2:

$$
\begin{aligned}
dR^a{}_b &= d(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) = d(\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \\
&= d\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge d\omega^c{}_b \\
&= R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c \wedge \omega^c{}_b - (\omega^a{}_c \wedge R^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b) \\
&= -\omega^a{}_c \wedge R^c{}_b + R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \; . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Im Folgenden sollgezeigt werden, daß man diese beiden Bianchi-Identitäten im torsionsfreien Fall folgendermaßen formulieren kann:

$$1. \quad T = 0 \quad \Rightarrow \quad R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0 \; , \tag{10.8.8}$$

$$2. \quad \omega^a{}_{bc} = \omega^a{}_{cb} \quad \Rightarrow \quad (\nabla_X R(Y,Z) + \nabla_Z R(X,Y) + \nabla_Y R(Z,X))V = 0 \; . \tag{10.8.9}$$

Hinreichend für die Voraussetzung eines symmetrischen Zusammenhang $\omega^a{}_{bc} = \omega^a{}_{cb}$ ist $T = 0$ und das Vorliegen einer Koordinatenbasis, d.h. $c_{bc}{}^a = 0$ (siehe 10.5.2).

In Komponentenschreibweise in einer Koordinatenbasis mit der Antisymmetrisierungsklammer $W_{[bc]} := \frac{1}{2!}(W_{bc} - W_{cb})$ ist dies:

$$1. \quad R^\kappa{}_{[\lambda\mu\nu]} = 0 \; , \text{ d.h.} \tag{10.8.10}$$

$$R^\kappa{}_{[\lambda\mu\nu]} := \frac{1}{3!}(R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} - R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} + R^\kappa{}_{\nu\lambda\mu} - R^\kappa{}_{\nu\mu\lambda} + R^\kappa{}_{\mu\nu\lambda} - R^\kappa{}_{\mu\lambda\nu})$$

$$= \frac{1}{3}(R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} + R^\kappa{}_{\nu\lambda\mu} + R^\kappa{}_{\mu\nu\lambda}) = 0$$

2. $R^\kappa{}_{\lambda[\mu\nu;\xi]} = 0$, d.h. (10.8.11)

$$R^\kappa{}_{\lambda[\mu\nu;\xi]} := \frac{1}{3!}((\nabla_\xi R)^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} - (\nabla_\xi R)^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} + (\nabla_\nu R)^\kappa{}_{\lambda\xi\mu} - (\nabla_\nu R)^\kappa{}_{\lambda\mu\xi}$$

$$+ (\nabla_\mu R)^\kappa{}_{\lambda\nu\xi} - (\nabla_\mu R)^\kappa{}_{\lambda\xi\nu})$$

$$= \frac{1}{3}((\nabla_\xi R)^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_\nu R)^\kappa{}_{\lambda\xi\mu} + (\nabla_\mu R)^\kappa{}_{\lambda\nu\xi}) = 0 \ .$$

Beweis. Jeder Tensor y_{ik} kann in die Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Teils zerlegt werden, denn

$$y_{ik} := y_{(ik)} + y_{[ik]} := \frac{1}{2!}(y_{ik} + y_{ki}) + \frac{1}{2!}(y_{ik} - y_{ki}) \ .$$

In einer 2-Form $y_{ik}\theta^i \wedge \theta^k$ fällt der symmetrische Teil des Koeffizienten $y_{(ik)}$ trivialerweise fort, denn

$$y_{ik}\theta^i \wedge \theta^k = (y_{(ik)} + y_{[ik]})(\theta^i\theta^k - \theta^k\theta^i) = y_{[ik]}(\theta^i\theta^k - \theta^k\theta^i) = 2y_{[ik]}\theta^i\theta^k \ .$$

Dies gilt ebenso für beliebige n-Formen: wenn eine n-Form $y_{i_1\ldots i_n}\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_n} = 0$ ist, dann ist damit auch der antisymmetrische Anteil $y_{[i_1\ldots i_n]} = 0$.

Nun zu Bianchi-1 in einer Koordinatenbasis. Aus 10.8.6 folgt:

$$T = 0 \quad \Rightarrow \quad R^\kappa{}_\lambda \wedge dx^\lambda = \frac{1}{2}R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda = 0 \quad \Rightarrow$$

$$R^\kappa{}_{[\lambda\mu\nu]} = 0 \ .$$

Nun zu Bianchi-2 in einer Koordinatenbasis. Aus 10.8.7 folgt:

$$0 = \frac{\partial R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\xi}dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu + \omega^\kappa{}_{\xi\pi}dx^\xi \wedge R^\pi{}_{\lambda\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu - R^\kappa{}_{\pi\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \omega^\pi{}_{\xi\lambda}dx^\xi$$

$$= (\frac{\partial R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\xi} + \omega^\kappa{}_{\xi\pi}R^\pi{}_{\lambda\mu\nu} - R^\kappa{}_{\pi\mu\nu}\omega^\pi{}_{\xi\lambda})dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \ . \qquad (10.8.12)$$

Da wir einen symmetrischen Zusammenhang vorausgesetzt haben gilt:

$$(\omega^\pi{}_{\xi\mu}R^\kappa{}_{\lambda\pi\nu})dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0 \ ,$$

$$(\omega^{\pi}{}_{\xi\nu} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\pi}) dx^{\xi} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = 0 \; .$$

Diese beiden Gleichungen subtrahieren wir von 10.8.12 und erhalten die kovariante Ableitung von R:

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi R)^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} dx^{\xi} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = (&\partial_\xi R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} + \omega^{\kappa}{}_{\xi\pi} R^{\pi}{}_{\lambda\mu\nu} - \omega^{\pi}{}_{\xi\lambda} R^{\kappa}{}_{\pi\mu\nu} \\ &- \omega^{\pi}{}_{\xi\mu} R^{\kappa}{}_{\lambda\pi\nu} - \omega^{\pi}{}_{\xi\nu} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\pi}) dx^{\xi} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \; .\end{aligned}$$

Damit muß der antisymmetrische Teil bzgl. ξ, μ, ν von $(\nabla_\xi R)^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}$ gleich 0 sein, also:

$$R^{\kappa}{}_{\lambda[\mu\nu;\xi]} = 0 \; . \tag{10.8.13}$$

Ausführlich geschrieben ist das:

$$\frac{1}{3!}[(\nabla_\xi R)^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} - (\nabla_\xi R)^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} + (\nabla_\nu R)^{\kappa}{}_{\lambda\xi\mu} - (\nabla_\nu R)^{\kappa}{}_{\lambda\mu\xi} + (\nabla_\mu R)^{\kappa}{}_{\lambda\nu\xi} - (\nabla_\mu R)^{\kappa}{}_{\lambda\xi\nu}] = 0 \; ,$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}&(\nabla_\xi R)^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_\nu R)^{\kappa}{}_{\lambda\xi\mu} + (\nabla_\mu R)^{\kappa}{}_{\lambda\nu\xi} = 0 \; , \quad \text{bzw.} \\ &(\nabla_X R(Y,Z) + \nabla_Z R(X,Y) + \nabla_Y R(Z,X))V = 0 \; .\end{aligned}$$

□

Aus der Bianchi-2 Identität für $R^{a}{}_{bcd}$ bei einem symmetrischen Zusammenhang, d.h. $\omega^{a}{}_{bc} = \omega^{a}{}_{cb}$ (hinreichend dafür ist ein torsionsfreier Zusammenhang in einer Koordinatenbasis, siehe 10.5.2) folgt die entsprechende Identität für den Ricci-Tensor:

$$\begin{aligned}R^{a}{}_{b[ad;f]} &= \frac{1}{3}((\nabla_f R)^{a}{}_{bad} + (\nabla_d R)^{a}{}_{bfa} + (\nabla_a R)^{a}{}_{bdf}) \\ &= \frac{1}{3}((\nabla_f Ric)_{bd} - (\nabla_d R)^{a}{}_{baf} + (\nabla_a R)^{a}{}_{bdf}) \\ &= \frac{1}{3}((\nabla_f Ric)_{bd} - (\nabla_d Ric)_{bf} + (\nabla_a R)^{a}{}_{bdf}) = 0 \; .\end{aligned} \tag{10.8.14}$$

10.9 Riemannsche und pseudo-Riemannsche Metrik

Der Tangentialraum T_pM und der Kotangentialraum T_p^*M sind endlichdimensionale Vektorräume, die häufig zusätzlich mit einem euklidischen Skalarprodukt ausgestattet werden:

$$X, Y \in T_pM, \; X = X^{\mu}\partial_\mu, \; Y = X^{\nu}\partial_\nu \quad X \cdot Y := \sum_{\mu=1}^{m} X^{\mu} Y^{\mu} = \delta_{\mu\nu} X^{\mu} Y^{\nu} \; .$$

In der Riemannschen Geometrie verwendet man anstelle dieses Skalarproduktes die allgemeinere Struktur einer Riemannschen Metrik oder einer pseudo-Riemannschen Metrik:

Definition 10.9.1 *Seien $p \in M$, $X, Y \in T_pM$, dann heißt $g_p : T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R}$ eine Riemannsche Metrik am Punkt p, wenn g_p bilinear, symmetrisch und positiv definit ist, d.h.:*

$$g_p(c_1X + c_2Y, Z) = c_1 g_p(X, Z) + c_2 g_p(Y, Z) \ ,$$

$$g_p(Z, c_1X + c_2Y) = c_1 g_p(Z, X) + c_2 g_p(Z, Y) \ ,$$

$$g_p(X, Y) = g_p(Y, X) \ ,$$

$$g_p(X, X) \geq 0 \ , \quad g_p(X, X) = 0 \ \Leftrightarrow \ X = 0 \ .$$

Seien $p \in M$, $X, Y \in T_pM$, dann heißt $g_p : T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R}$ eine pseudo-Riemannsche Metrik, wenn g_p bilinear, symmetrisch und nicht entartet ist, d.h.:

$$g_p(c_1X + c_2Y, Z) = c_1 g_p(X, Z) + c_2 g_p(Y, Z) \ ,$$

$$g_p(Z, c_1X + c_2Y) = c_1 g_p(Z, X) + c_2 g_p(Z, Y) \ ,$$

$$g_p(X, Y) = g_p(Y, X) \ ,$$

$$g_p(X, Y) = 0 \textit{ für alle } Y \ \Rightarrow \ X = 0 \ .$$

Damit ist g_p ein kovarianter Tensor zweiter Stufe am Punkt $p \in M$ und kann geschrieben werden als $g_p = g_{\mu\nu}(p)\, dx^\mu \otimes dx^\nu$.

Weiter seien die Koeffizienten $g_{\mu\nu}(p) \in C^\infty$ für alle $p \in M$, so daß $g := g_p \in \mathcal{T}^0_2(M)$ ein kovariantes Tensorfeld auf M ist.

Mit einer Metrik kann man Winkel und Längen in $p \in M$ definieren.

Definition 10.9.2 *Seien $X, Y \in T_pM$ und $g_p : T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R}$ eine Riemannsche oder pseudo-Riemannsche Metrik, dann wird der Winkel φ zwischen X und Y in $p \in M$ definiert als:*

$$\cos\varphi := \frac{g_p(X, Y)}{[g_p(X, X) g_p(Y, Y)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{g_{\mu\nu}(p) X^\mu Y^\nu}{[(g_{\mu\nu}(p) X^\mu X^\nu)(g_{\mu\nu}(p) Y^\mu Y^\nu)]^{\frac{1}{2}}} \ .$$

Vorsicht: *dies bedeutet nun aber noch nicht, daß der Winkel φ bei einer Parallelverschiebung von X und Y in M konstant bleibt. Dies ist erst beim sog. metrisch-affinen Zusammenhang der Fall, den wir im nächsten Kapitel einführen.*

Seien $c : (a, b) \to M$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, eine glatten Kurve in M, und $X = \{\frac{d}{dt} \in \mathcal{X}(M) \,|\, c(t) \in C^\infty(M)\}$ das Tangentialvektorfeld an die Kurve $c(t)$, dann definiert man die Länge eines Kurvenabschnitts als:

$$X = \frac{d}{dt}|_{c(t)} = X^\mu \partial_\mu|_{c(t)} = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\, \partial_\mu|_{c(t)} \quad \Rightarrow$$

$$s := \int_{t_1}^{t_2} [g(X, X)]^{\frac{1}{2}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} [g_{\mu\nu}(c(t)) X^\mu(t) X^\nu(t))]^{\frac{1}{2}}\, dt \ .$$

$g_{\mu\nu}(p)$ ist eine reelle, symmetrische Matrix und kann daher mittels einer orthogonalen Transformation diagonalisiert werden. Im Fall einer Riemannschen Metrik ist g_p positiv definit und damit sind auch alle Eigenwerte von $g_{\mu\nu}(p)$ positiv definit. Mittels einer geeigneten orthogonalen Transformation und einer anschließenden Skalentransformation kann also $g_{\mu\nu}(p)$ in die *Euklidische Metrik* $\delta := \mathrm{diag}(1,\dots,1)$ überführt werden. Im Fall einer pseudo-Riemannschen Metrik kann $g_{\mu\nu}(p)$ auch negative Eigenwerte aufweisen. Wenn $g_{\mu\nu}(p)$ genau einen negativen Eigenwert hat spricht man von einer *Lorentz-Metrik*, die insbesondere in der Physik zur Beschreibung der lokalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit in Form der speziellen Relativitätstheorie von zentraler Bedeutung ist. Mittels einer geeigneten orthogonalen Transformation und einer anschließenden Skalentransformation kann $g_{\mu\nu}(p)$ in die *Minkowski-Metrik* $\eta := \mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$. überführt werden kann.

Wenn die Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik g ausgestattet ist, so kann man an jedem Punkt $p \in M$ im Tangentialraum $T_p(M)$ auch mittels einer linearen Abbildung von einer Koordinatenbasis $\{\partial_\mu\}$ zu einer *orthonormalen Nichtkoordinatenbasis* $\{e_a\}$, auch *nicht-holonome* Basis genannt, übergehen.

Sei ${e_a}^\mu \in GL(m,\mathbb{R})$ mit $\det({e_a}^\mu) > 0$ eine lineare, reelle, invertierbare und orientierungserhaltende m-dimensionale Abbildung und ${\tilde{e}^a}_\mu$ die entsprechende inverse Abbildung, also ${\tilde{e}^a}_\mu {e_a}^\nu = {\delta^\nu}_\mu$ und ${\tilde{e}^a}_\mu {e_b}^\mu = {\delta^a}_b$. Die Nichtkoordinatenbasis $\{e_a\}$ wird jetzt definiert als

$$e_a := {e_a}^\mu \partial_\mu \; . \tag{10.9.1}$$

Die Matrix ${e_a}^\mu$ besteht also gerade aus den Koordinaten der Basisvektoren e_a in der Koordinatenbasis der ∂_μ und heißt das *Vielbein* (der *Rahmen*, *frame*, *repère*), bzw. bei $m = 2$ *Zweibein*, bei $m = 3$ *Dreibein* oder bei $m = 4$ *Vierbein* (*Tetrade*).
Wenn die ${e_a}^\mu(p) \in C^\infty(M)$ sind, so heißt das Feld der ${e_a}^\mu \in \mathcal{T}^1_1(M)$ das *begleitende Vielbein* (*Rahmenfeld*, *moving frame*, *repère mobile*).

Weiter verlangt man von ${e_a}^\mu$ noch, daß die $\{e_a\}$ orthonormal in Bezug auf g seien, d.h.

$$g_{ab} := g(e_a, e_b) = g_{\mu\nu} {e_a}^\mu {e_b}^\nu = \begin{cases} \delta_{ab} & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases} \tag{10.9.2}$$

Damit läßt sich der metrische Tensor g schreiben als

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} {e_a}^\mu {e_b}^\nu \theta^a \otimes \theta^b = \begin{cases} \delta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases} \tag{10.9.3}$$

Wenn m die Dimension der Mannigfaltigkeit M (und damit auch die Dimension von Tangential- und Kotangentialraum) ist, dann hat ein Vielbein ${e_a}^\mu(p)$ am Punkt $p \in M$ gerade m^2 Variable, die Metrik $g_{\mu\nu}(p)$ als eine symmetrische Matrix aber nur $\frac{1}{2}m(m+1)$

Variable. Also gibt es $m^2 - \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}m(m-1)$ Nichtkoordinatenbasen, die sich voneinander nur durch eine lineare Transformation $\Lambda^a{}_b(p)$, eine *lokale Eichtransformation*, unterscheiden und die Metrik invariant lassen:

$$\theta'^a(p) := \Lambda^a{}_b(p)\theta^b(p)\ . \tag{10.9.4}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{bd} = \Lambda^a{}_b\delta_{ac}\Lambda^c{}_d \quad &\Rightarrow \quad \delta^b{}_d = \Lambda^{ab}\delta_{ac}\Lambda^c{}_d = \Lambda^{ab}\Lambda_{ad} = \Lambda_a{}^b\Lambda^a{}_d = (\Lambda^\dagger)^b{}_a\Lambda^a{}_d \\
&\Rightarrow \quad \Lambda^a{}_b \in SO(m) \quad \text{für Riemann-Metrik, bzw.} \qquad (10.9.5) \\
\eta_{bd} = \Lambda^a{}_b\eta_{ac}\Lambda^c{}_d \quad &\Rightarrow \quad \Lambda^a{}_b \in SO(1, m-1) \quad \text{für Lorentz-Metrik.} \qquad (10.9.6)
\end{aligned}$$

Aus 10.9.4 folgt:

$$\theta'^a(e'_b) = \theta^a(e_b) = \delta^a_b \quad \Rightarrow \quad e'{}_a = (\Lambda^{-1})^b{}_a e_b \tag{10.9.7}$$

Damit transformieren sich die Torsions-2-Form und die Krümmungs-2 Form als Tensoren:

$$T'^a = \Lambda^a{}_bT^b \quad \text{und} \quad R'^a{}_b = \Lambda^a{}_cR^c{}_d(\Lambda^{-1})^d{}_b\ . \tag{10.9.8}$$

Die Zusammenhangs-1-Form transformiert sich wegen 10.8.4 folgendermaßen:

$$T'^a = \Lambda^a{}_bT^b \quad \Rightarrow$$

$$d\theta'^a + \omega'^a{}_b \wedge \theta'^b = \Lambda^a{}_b(d\theta^b + \omega^b{}_c \wedge \theta^c)$$

$$d(\Lambda^a{}_b\theta^b) + \omega'^a{}_b \wedge (\Lambda^b{}_c\theta^c) = \Lambda^a{}_b(d\theta^b + \omega^b{}_c \wedge \theta^c)$$

$$(d\Lambda^a{}_c)\theta^c + \Lambda^a{}_bd\theta^b + \omega'^a{}_b \wedge \theta^c\Lambda^b{}_c = \Lambda^a{}_bd\theta^b + \Lambda^a{}_b\omega^b{}_c \wedge \theta^c$$

$$\omega'^a{}_b\Lambda^b{}_c = \Lambda^a{}_b\omega^b{}_c - (d\Lambda^a{}_c)$$

$$\omega'^a{}_d = \omega'^a{}_b\Lambda^b{}_c(\Lambda^{-1})^c{}_d = \Lambda^a{}_b\omega^b{}_c(\Lambda^{-1})^c{}_d - (d\Lambda^a{}_c)(\Lambda^{-1})^c{}_d \tag{10.9.9}$$

$$\omega' = \Lambda\omega\Lambda^{-1} - d\Lambda \cdot \Lambda^{-1}\ . \tag{10.9.10}$$

Damit transformiert sich die Zusammenhangs-1-Form nichtlinear und ist also kein Tensor! Jedoch transformiert sich die Differenz zweier Zusammenhänge, also z.B. die Variation $\delta\omega$, wie ein Tensor.

10.10 Der metrisch-affine Zusammenhang

Der *metrisch-affine Zusammenhang* wird häufig auch als *Metrik-kompatibler Zusammenhang*, oder kurz als *metrischer Zusammenhang* bezeichnet. Gemeint ist damit, daß man von der Metrik verlangt, daß sie bei Paralleltransport *kovariant konstant* bleibt, daß also somit Winkel beim Paralleltransport erhalten bleiben:

$$\nabla_\lambda g \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\lambda g_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} 0 \; . \tag{10.10.1}$$

Daraus folgt mit $X, Y, Z \in T_pM$ und der Leibniz-Regel 10.4.13:

$$\begin{aligned}\partial_\lambda g(X,Y) = \nabla_\lambda g(X,Y) &= (\nabla_\lambda g)(X,Y) + g(\nabla_\lambda X, Y) + g(X, \nabla_\lambda Y)\\ &= g(\nabla_\lambda X, Y) + g(X, \nabla_\lambda Y) \; , \quad \text{bzw.}\end{aligned} \tag{10.10.2}$$

$$Z\, g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \; . \tag{10.10.3}$$

Wenn X und Y entlang von $Z = Z^\lambda \partial\lambda$ parallel verschoben werden, so gilt per Definition der Parallelverschiebung $\nabla_Z X = \nabla_Z Y = 0$ und damit bleibt $g(X,Y)$ und also der Winkel zwischen X und Y erhalten.

Diese Eigenschaft kennen wir aus der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und auch aus Einsteins *Allgemeiner Relativitätstheorie*. Gewisse moderne erweiterte Gravitationstheorien, die von einer Körnigkeit und möglichen Fehlstellen und Versetzungen der Raumzeit (analog zu einem Festkörper) ausgehen, geben die Forderung eines Metrik-kompatiblen Zusammenhangs auf.

Die Metrik in einer nichtholonomen Basis ist gemäß 10.9.2 $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ oder $\hat{g}_{ab} = \eta_{ab}$ für eine Riemannsche oder Lorentzsche Metrik. Daraus folgt:

$$\partial_a g(e_b, e_c) = \partial_a \hat{g}_{bc} = \begin{cases} \partial_a \delta_{bc} = 0 & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \partial_a \eta_{bc} = 0 & \text{für Lorentz-Metrik,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\partial_a g(e_b, e_c) = \nabla_a g(e_b, e_c) &= g(\nabla_a e_b, e_c) + g(e_b, \nabla_a e_c)\\ &= g(\omega^d{}_{ab}\, e_d, e_c) + g(e_b, \omega^d{}_{ac}\, e_d)\\ &= \hat{g}_{dc}\omega^d{}_{ab} + \hat{g}_{bd}\omega^d{}_{ac} = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$(\hat{g}_{cd}\omega^d{}_{ab} + \hat{g}_{bd}\omega^d{}_{ac})\theta^a = \hat{g}_{cd}\omega^d{}_b + \hat{g}_{bd}\omega^d{}_c = \omega_{cb} + \omega_{bc} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\omega_{bc} = -\omega_{cb} \; . \tag{10.10.4}$$

Bei der Transformation dieser Gleichung in eine holonome Basis (Koordinatenbasis) muß man jedoch das Transformationsverhalten 10.9.9, bzw. 10.9.10, berücksichtigen, da $\omega^b{}_c$ kein Tensor ist.

Aus der Antisymmetrie von ω_{bc} folgt die Antisymmetrie der kovarianten Krümmungs-2-Form:

$$R_{ab} := g_{ae} R^e{}_b = -R_{ba} \;, \tag{10.10.5}$$

bzw. eine zusätzliche Antisymmetrie des kovarianten Krümmungstensors:

$$R_{abcd} := g_{ae} R^e{}_{bcd} = -R_{bacd} \;. \tag{10.10.6}$$

Beweis. Aus 10.8.5 folgt:

$$\begin{aligned} R_{ab} = \hat{g}_{ae} R^e{}_b &= \hat{g}_{ae} d\omega^e{}_b + \hat{g}_{ae}\omega^e{}_c \wedge \omega^c{}_b \\ &= d(\hat{g}_{ae}\omega^e{}_b) + \hat{g}_{ae}\omega^e{}_c \wedge \hat{g}^{cf}\hat{g}_{fe}\omega^e{}_b \\ &= d\omega_{ab} + \omega_{ac} \wedge \hat{g}^{cf}\omega_{fb} \\ &= -d\omega_{ba} - \hat{g}^{cf}\omega_{fb} \wedge \omega_{ac} = -d\omega_{ba} - \hat{g}^{cf}\omega_{bf} \wedge \omega_{ca} \\ &= -d\omega_{ba} - \omega_{bf} \wedge \hat{g}^{fc}\omega_{ca} = -(d\omega_{ba} + \omega_{bf} \wedge \omega^f{}_a) \\ &= -\hat{g}_{be}(d\omega^e{}_a + \omega^e{}_f \wedge \omega^f{}_a) = -\hat{g}_{be} R^e{}_a = -R_{ba} \;. \end{aligned}$$

Aus 10.8.3 folgt:

$$R_{ab} = R_{abcd}\theta^c \wedge \theta^d \quad \Rightarrow \quad R_{abcd} = -R_{bacd} \;. \qquad \square$$

Weil R_{ab} wegen 10.9.8 ein Tensor ist gilt diese Symmetrie der Krümmmungs-2-Form, bzw. des Krümmungstensors, in jeder Basis (also auch in einer Koordinatenbasis).

Sehr gebräuchlich ist die folgende Darstellung der Zusammenhangskomponenten durch die Metrikkomponenten in einer Koordinatenbasis:

Satz 10.10.1

$$\omega^\kappa{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^\kappa{}_{\mu\nu} \tag{10.10.7}$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{10.10.8}$$

und dem Kontorsionstensor

$$K^\kappa{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(T^\kappa{}_{\mu\nu} + T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T_\nu{}^\kappa{}_\mu) \;, \tag{10.10.9}$$

wobei $T^\kappa{}_{\mu\nu}$ der Torsionstensor in einer Koordinatenbasis ist.

Beweis.

$$(\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = (\nabla_{x^\lambda} g)_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \omega^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \omega^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} = 0 \,. \tag{10.10.10}$$

Eine zyklische Vertauschung der Indizes λ, μ, ν ergibt

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \omega^\kappa{}_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \omega^\kappa{}_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} = 0 \,, \tag{10.10.11}$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \omega^\kappa{}_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \omega^\kappa{}_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa} = 0 \,, \tag{10.10.12}$$

und mit einer Addition von 10.10.11 und 10.10.12 und Subtraktion von 10.10.10 unter Verwendung von $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ und 10.5.2 und

$$\omega^\kappa{}_{(\mu\nu)} := \frac{1}{2}(\omega^\kappa{}_{\mu\nu} + \omega^\kappa{}_{\nu\mu}) \quad \text{und} \quad \omega^\kappa{}_{[\mu\nu]} := \frac{1}{2}(\omega^\kappa{}_{\mu\nu} - \omega^\kappa{}_{\nu\mu}) = \frac{1}{2} T^\kappa{}_{\mu\nu} \tag{10.10.13}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \omega^\kappa{}_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \omega^\kappa{}_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} \\
&\quad + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \omega^\kappa{}_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \omega^\kappa{}_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa} \\
&\quad - \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \omega^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \omega^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} \\
&= (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
&\quad - \omega^\kappa{}_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \omega^\kappa{}_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} - \omega^\kappa{}_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \omega^\kappa{}_{\nu\mu} g_{\kappa\lambda} + \omega^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \omega^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} \\
&= (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
&\quad - (\omega^\kappa{}_{\mu\nu} + \omega^\kappa{}_{\nu\mu}) g_{\kappa\lambda} + (\omega^\kappa{}_{\lambda\mu} - \omega^\kappa{}_{\mu\lambda}) g_{\kappa\nu} + (\omega^\kappa{}_{\lambda\nu} - \omega^\kappa{}_{\nu\lambda}) g_{\kappa\mu} \\
&= (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) - 2\omega^\kappa{}_{(\mu\nu)} g_{\kappa\lambda} + T^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + T^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} \quad \Rightarrow \\
\omega_{\lambda(\mu\nu)} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}) \quad \Rightarrow \\
\omega^\kappa{}_{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}(T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}) \quad \Rightarrow \\
&= \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu) \quad \Rightarrow \\
\omega^\kappa{}_{\mu\nu} = \omega^\kappa{}_{(\mu\nu)} + \omega^\kappa{}_{[\mu\nu]} &= \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T^\kappa{}_{\mu\nu}) \\
&= \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^\kappa{}_{\mu\nu} \,.
\end{aligned}$$

□

10.11 Der Levi-Civita Zusammenhang

Ein torsionsfreier metrisch-affiner Zusammenhang in einer Koordinatenbasis heißt Levi-Civita Zusammenhang. Die Levi-Civita-Zusammenhangskoeffizienten werden üblicherweise als $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}$ bezeichnet. Dieser Zusammenhang liegt der *Euklidischen Geometrie* ebenso wie *Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie* zugrunde. Mit 10.10.7, 10.10.8, 10.10.9 folgt:

$$T^\kappa{}_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad K^\kappa{}_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} := \omega^\kappa{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} . \tag{10.11.1}$$

Die Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}$ sind damit gerade die Christoffelsymbole und hängen somit also nur von der Metrik ab.

Es können in einer Mannigfaltigkeit viele verschiedene affine Zusammenhänge konstruiert werden. Der Levi-Civita Zusammenhang als metrisch-affiner Zusammenhang in einer Koordinatenbasis ist durch die beiden Forderungen der Torsionsfreiheit und der Symmetrie der Zusammenhangskomponenten $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}$ jedoch eindeutig bestimmt, denn mit 10.10.13 folgt:

$$\Gamma^\kappa{}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}) = \frac{1}{2}T^\kappa{}_{\mu\nu} = 0 \; , \tag{10.11.2}$$

$$\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{1}{2}(T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu) = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} \; , \tag{10.11.3}$$

$$\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \; . \tag{10.11.4}$$

Für den Krümmungstensor bei einem Levi-Civita Zusammenhang gilt mit den Vielbeinen $e^a{}_\mu e_a{}^\nu = \delta^\nu{}_\mu$ und $e^a{}_\mu e_b{}^\mu = \delta^a{}_b$ und $c_{\mu\nu}{}^\pi = 0$ und 10.6.2:

$$\begin{aligned}
R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} &= e_a{}^\kappa e^b{}_\lambda e^c{}_\mu e^d{}_\nu R^a{}_{bcd} \\
&= e_a{}^\kappa e^b{}_\lambda e^c{}_\mu e^d{}_\nu [e_c \omega^a{}_{db} - e_d \omega^a{}_{cb} + \omega^e{}_{db}\omega^a{}_{ce} - \omega^e{}_{cb}\omega^a{}_{de} - c_{cd}{}^e \omega^a{}_{eb}] \\
&= \partial_\mu \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} + e_a{}^\kappa e^b{}_\lambda e^c{}_\mu e^d{}_\nu [\omega^e{}_{db}\delta^f{}_e \omega^a{}_{cf} - \omega^e{}_{cb}\delta^f{}_e \omega^a{}_{df} - c_{cd}{}^e \delta^f{}_e \omega^a{}_{fb}] \\
&= \partial_\mu \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} \\
&\quad + e_a{}^\kappa e^b{}_\lambda e^c{}_\mu e^d{}_\nu [\omega^e{}_{db} e^f{}_\pi e_e{}^\pi \omega^a{}_{cf} - \omega^e{}_{cb} e^f{}_\pi e_e{}^\pi \omega^a{}_{df} - c_{cd}{}^e e^f{}_\pi e_e{}^\pi \omega^a{}_{fb}] \\
&= \partial_\mu \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\pi{}_{\nu\lambda}\Gamma^\kappa{}_{\mu\pi} - \Gamma^\pi{}_{\mu\lambda}\Gamma^\kappa{}_{\nu\pi} - c_{\mu\nu}{}^\pi \Gamma^\kappa{}_{\pi\lambda} \\
&= \partial_\mu \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\pi{}_{\nu\lambda}\Gamma^\kappa{}_{\mu\pi} - \Gamma^\pi{}_{\mu\lambda}\Gamma^\kappa{}_{\nu\pi} \; .
\end{aligned} \tag{10.11.5}$$

Satz 10.11.1 *Für die Koeffizienten des Krümmungstensors $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\kappa'} R^{\kappa'}{}_{\lambda\mu\nu}$ in einem Levi-Civita Zusammenhang gilt:*

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\mu \partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\kappa} + \partial_\nu \partial_\kappa g_{\mu\lambda})$$
$$+ g_{\xi\kappa'} \Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa} \Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} - g_{\xi\kappa'} \Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} \, . \tag{10.11.6}$$

Aus dieser Darstellung folgen die Symmetrien:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} \, , \tag{10.11.7}$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} \, , \tag{10.11.8}$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} \, . \tag{10.11.9}$$

Beweis. Der Beweis stützt sich auf die Kovarianz der Metrik (10.10.10) und die Darstellung der Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}$ als Funktion der Metrik 10.11.4:

$$(\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} = 0 \quad \text{bzw.}$$
$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} \, .$$

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= g_{\kappa\kappa'} R^{\kappa'}{}_{\lambda\mu\nu} \\ &= g_{\kappa\kappa'} [\partial_\mu \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\xi}{}_{\nu\lambda} \Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\xi} - \Gamma^{\xi}{}_{\mu\lambda} \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\xi}] \, . \end{aligned}$$

Für den ersten Term ergibt sich mit der Kovarianz der Metrik:

$$\begin{aligned} g_{\kappa\kappa'} \partial_\mu \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} &= \partial_\mu (g_{\kappa\kappa'} \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda}) - (\partial_\mu g_{\kappa\kappa'}) \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu [g_{\kappa\kappa'} g^{\kappa'\xi} (\partial_\nu g_{\lambda\xi} + \partial_\lambda g_{\nu\xi} - \partial_\xi g_{\nu\lambda})] \\ &\quad - (\Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa} g_{\xi\kappa'} + \Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa'} g_{\kappa\xi}) \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu (\partial_\nu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\nu\lambda}) - g_{\xi\kappa'} \Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} - g_{\kappa\xi} \Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} \, , \end{aligned}$$

und analog ergibt sich für den zweiten Term mit $\mu \leftrightarrow \nu$:

$$g_{\kappa\kappa'} \partial_\nu \Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) - g_{\xi\kappa'} \Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa} \Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} - g_{\kappa\xi} \Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} \, .$$

Damit folgt für $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu (\partial_\nu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\nu\lambda}) - g_{\xi\kappa'} \Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} - g_{\kappa\xi} \Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) + g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} + g_{\kappa\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa'}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} \\
&+ g_{\kappa\kappa'}(\Gamma^{\xi}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\xi} - \Gamma^{\xi}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\xi}) \\
= &\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\mu\partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\kappa} + \partial_\nu\partial_\kappa g_{\mu\lambda}) \\
&+ g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} - g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} \ ,
\end{aligned}
$$

da

$$
\begin{aligned}
-g_{\kappa\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa'}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} + g_{\kappa\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\xi} &= -g_{\kappa\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa'}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} + g_{\kappa\xi}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa'} = 0 \ , \\
+g_{\kappa\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa'}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} - g_{\kappa\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\xi} &= +g_{\kappa\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa'}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} - g_{\kappa\xi}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa'} = 0 \ .
\end{aligned}
$$

Die Antisymmetrie der Koeffizienten des Krümmungstensors in den beiden letzten Indizes, also $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ folgte ja bereits aus der Definition des Krümmungstensors (siehe 10.6.3).

Die beiden zusätzlichen Symmetrien 10.11.8 und 10.11.9 gelten nur in einem Levi-Civita Zusammenhang, denn sie stützen sich auf die obige Darstellung von $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ und auf $\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}$ und $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$:

$$
\begin{aligned}
R_{\lambda\kappa\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\nu\partial_\kappa g_{\mu\lambda} + \partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\kappa}) \\
&\quad + g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\kappa} - g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\kappa} \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\mu\partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\kappa} + \partial_\nu\partial_\kappa g_{\mu\lambda}) \\
&\quad - (g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\kappa}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\lambda} - g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\lambda}) \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\mu\partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\kappa} + \partial_\nu\partial_\kappa g_{\mu\lambda}) \\
&\quad - (g_{\kappa'\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} - g_{\kappa'\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda}) \\
&= -R_{\kappa\lambda\mu\nu} \ .
\end{aligned}
$$

Ebenso folgt

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}(\partial_\kappa\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\kappa\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\lambda\partial_\mu g_{\kappa\nu}) \\
&\quad + g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\kappa'}{}_{\kappa\nu} - g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\kappa\mu}\Gamma^{\kappa'}{}_{\lambda\nu} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\kappa\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\kappa\partial_\nu g_{\lambda\mu})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\kappa'}{}_{\kappa\nu}\Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu} - g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\kappa\mu}\Gamma^{\kappa'}{}_{\lambda\nu} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\mu\partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\kappa} + \partial_\nu\partial_\kappa g_{\mu\lambda}) \\
&+ g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\kappa}\Gamma^{\kappa'}{}_{\mu\lambda} - g_{\xi\kappa'}\Gamma^{\xi}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\kappa'}{}_{\nu\lambda} \\
&= R_{\kappa\lambda\mu\nu} \; . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Korollar 10.11.2 *Wenn es in jedem Punkt p der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M stets m nichtverschwindene, linear unabhängige Tangentialvektoren aus T_pM gibt, dann ist der Riemannsche Krümmungstensor $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$.*

Beweis. Wenn die Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik g ausgestattet ist, so kann man an jedem Punkt $p \in M$ im Tangentialraum $T_p(M)$ auch mittels einer linearen Abbildung von einer *nichtverschwindenden* Koordinatenbasis $\{\partial_\mu\}$ zu einer orthonormalen Nichtkoordinatenbasis $\{e_a\}$ übergehen (siehe 10.9.1, 10.9.2):

sei $e_a{}^\mu \in GL(m, \mathbb{R})$ mit $\det(e_a{}^\mu) > 0$ eine lineare, reelle, invertierbare und orientierungserhaltende m-dimensionale Abbildung, dann wird die Nichtkoordinatenbasis $\{e_a\}$ definiert als

$$e_a := e_a{}^\mu \partial_\mu \; .$$

Weiter verlangt man von $e_a{}^\mu$ noch, daß die $\{e_a\}$ orthonormal in Bezug auf g sein sollen, d.h.

$$g_{ab} := g(e_a, e_b) = g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu = \begin{cases} \delta_{ab} & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases}$$

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu \theta^a \otimes \theta^b = \begin{cases} \delta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases}$$

Wegen 10.11.4 sind dann die Christoffelsymbole $\Gamma^a{}_{bc} = 0$ und wegen 10.11.6 ist auch der Riemannsche Krümmungstensor $R_{abcd} = 0$. □

Ein Standardbeispiel für eine randlose, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit verschwindender Krümmung ist der Torus $T^2 := S^1 \times S^1$. Man kann T^2 folgendermaßen parametrisieren

$$T(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} (1 - r\cdot\cos(\varphi))\cos(\vartheta) \\ (1 - r\cdot\cos(\varphi))\sin(\vartheta) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix} \; , \quad 0 \le \varphi < 2\pi \; , \; 0 \le \vartheta < 2\pi \; . \tag{10.11.10}$$

Die beiden Vektorfelder

$$\frac{\partial T(\varphi,\vartheta)}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} r\cdot\sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ r\cdot\sin(\varphi))\sin(\vartheta) \\ r\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial T(\varphi,\vartheta)}{\partial\vartheta} = \begin{pmatrix} (1-r\cdot\cos(\varphi))(-\sin(\vartheta)) \\ (1-r\cdot\cos(\varphi))\cos(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

verschwinden auf T^2 nicht und damit kann man zu einer orthonormalen Nichtkoordinatenbasis übergehen und erhält eine flache Metrik mit verschwindender Krümmung. Dies gilt analog auch für m-dimensionale Tori T^m.

Mit Hilfe dieser Symmetrien läßt sich nun leicht die Zahl der unabhängigen Komponenten $F(n)$ des Krümmungstensors angeben:

- der allgemeinste Krümmungstensor mit $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$: $F(n) = n^2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$. Für $n=4$ ergeben sich für $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ also gerade 96 unabhängige Komponenten.
- ein torsionsfreier und ansonst allgemeiner Krümmungstensor erfüllt zusätzlich Bianchi-1 (10.8.10). Wenn 2 Indizes in $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ gleich sind, so ist Bianchi-1 aufgrund der Symmetrien automatisch erfüllt, liefert also keine zusätzlichen Nebenbedingungen, denn
  $R_{\kappa\kappa\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\kappa} = 0$ und $R_{\kappa\lambda\kappa\nu} + R_{\kappa\lambda\nu\kappa} = 0$. Dies ist bei $n<4$ immer der Fall. Für $n\geq 4$ liefert Bianchi-1 zusätzliche Nebenbedingungen, und zwar gerade die Anzahl der Auswahl 4 verschiedener Indizes aus der Menge der n möglichen Indizes, also

  $$\binom{n}{4} = \frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{24}(n^4-6n^3+11n^2-6n)\ .$$

  $$F(n) = n^2\cdot\frac{n(n-1)}{2} - \binom{n}{4}\ .$$

  Für $n=4$ ergeben sich für $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ also gerade 95 unabhängige Komponenten.
- ein Krümmungstensor bei einem Levi-Civita-Zusammenhang führt für $n<4$ zu

  $$F(n) = \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} i = \frac{1}{2}(\frac{n(n-1)}{2}+1)(\frac{n(n-1)}{2}) = \frac{1}{8}(n^4-2n^3+3n^2-2n)$$

  bzw. für $n\geq 4$ zu

  $$F(n) = \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} i - \binom{n}{4} = \frac{1}{2}(\frac{n(n-1)}{2}+1)(\frac{n(n-1)}{2}) - \binom{n}{4} = \frac{1}{12}n^2(n^2-1)\ . \tag{10.11.11}$$

  Für $n=4$ ergeben sich für $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ also gerade 20 unabhängige Komponenten.

Der Ricci-Tensor $Ric_{\lambda\nu} = R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu}$ ist in einem Levi-Civita Zusammenhang wegen $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ ebenfalls symmetrisch: $Ric_{\lambda\nu} = Ric_{\nu\lambda}$. Für $n = 4$ ergeben sich für $Ric_{\lambda\nu}$ also gerade 10 unabhängige Komponenten.

Auch läßt sich der Ricci-Tensor $Ric_{\lambda\nu}$ nochmals zum sog. Ricci-Skalar $\mathcal{R}$ kontrahieren:

$$\mathcal{R} := Ric^{\nu}{}_{\nu} = g^{\nu\lambda} Ric_{\lambda\nu} \ . \tag{10.11.12}$$

Wenn man die Ricci-Identität 10.8.14 kontrahiert, so folgt mit der Kovarianz der Metrik $\nabla_{\xi} g^{\nu\lambda} = g^{\nu\lambda} \nabla_{\xi}$:

$$\begin{aligned}
0 &= g^{\nu\lambda}[(\nabla_{\xi} Ric)_{\lambda\nu} - (\nabla_{\nu} Ric)_{\lambda\xi} + (\nabla_{\kappa} R)^{\kappa}{}_{\lambda\nu\xi}] \\
&= g^{\nu\lambda}[(\nabla_{\xi} Ric)_{\lambda\nu} - (\nabla_{\nu} Ric)_{\lambda\xi} - (\nabla_{\kappa} R)_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\nu\xi}] \\
&= \nabla_{\xi}(g^{\nu\lambda} Ric_{\lambda\nu}) - (\nabla_{\nu} Ric)^{\nu}{}_{\xi} - (\nabla_{\kappa} R)^{\nu\kappa}{}_{\nu\xi} \\
&= \nabla_{\xi}(\mathcal{R}) - (\nabla_{\nu} Ric)^{\nu}{}_{\xi} - (\nabla_{\kappa} Ric)^{\kappa}{}_{\xi} \\
&= \nabla_{\nu}(\mathcal{R}\delta^{\nu}{}_{\xi}) - (\nabla_{\nu} Ric)^{\nu}{}_{\xi} - (\nabla_{\nu} Ric)^{\nu}{}_{\xi} \\
&= \nabla_{\nu}[\mathcal{R}\delta - 2Ric]^{\nu}{}_{\xi} \ .
\end{aligned} \tag{10.11.13}$$

Weil die Divergenz dieser Kombination aus Ricci-Tensor und Ricci-Skalar verschwindet hat Einstein diesen, später nach ihm als *Einstein-Tensor* benannten Tensor in einer vierdimensionalen Raumzeit an den divergenzfreien Energieimpuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ gekoppelt und so zur Grundlage seiner *Allgemeinen Gravitationstheorie* gemacht:

$$G^{\mu\nu} := Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R} \overset{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}(g) \ . \tag{10.11.14}$$

Die Konstante vor dem Energieimpuls-Tensor mit der Gravitationskonstanten G und der Lichtgeschwindigkeit c ist gerade so gewählt, daß sich im nichtrelativistischen Grenzfall wieder die klassische Newtonsche Physik ergibt. Eine etwaige additive *kosmologische Konstante* $g^{\mu\nu}\Lambda$ auf der linken Seite verschiebt man heute zumeist auf die rechte Seite der Gleichung und interpretiert sie als Vakuum-Anteil des Energieimpuls-Tensors:

$$T^{\mu\nu}(g) = T^{\mu\nu}_{klasssich}(g) + T^{\mu\nu}_{Vakuum}(g) \ , \quad T^{\mu\nu}_{Vakuum}(g) := -\frac{c^4}{8\pi G} g^{\mu\nu}\Lambda \ . \tag{10.11.15}$$

Ricci-Tensor und Ricci-Skalar hängen über die Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ nur von der Metrik $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen ab (10.11.4). Da der Ricci-Tensor und der Energieimpuls-Tensor symmetrisch sind und beide Funktionen des metrischen Tensors g und dessen Ableitungen sind, erhält man also im Vierdimensionalen 10 gekoppelte nichtlineare partielle Differentialgleichungen für das Metrikfeld $g^{\mu\nu}$. Wenn $Ric^{\mu\nu} = 0$ ist, d.h. eine *Ricci-flache* Raumzeit vorliegt, so sind die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen einfach die Vakuumlösungen $T^{\mu\nu}(g) = 0$.

10.12 Riemannsche Normalkoordinaten und Exponentialabbildung

Bereits Gauß hatte in $\mathbb{E}^3$ ein Koordinatensystem eingeführt, in welchem $e_z \in T_p\mathbb{E}^3$ ein Einheitsvektor entlang einer Geodäten ist und gezeigt, daß zwei zu e_z orthogonale Vektoren e_x und e_y bei einer Parallelverschiebung entlang der Geodäten auch orthogonal zu e_z bleiben (Gauß Lemma).

Riemann hat diesen Gedanken dann für einen m-dimensionalen Raum verallgemeinert. Mit den heutigen Bezeichnungsweise können wir Riemanns Gedanken folgendemaßen darstellen. Für einen metrisch-affinen Zusammenhang haben wir gefunden, daß der Winkel zwischen zwei Vektoren X und Y erhalten bleibt, wenn X und Y entlang eines dritten Vektors $Z = Z^\lambda \partial\lambda$ parallel verschoben werden, denn per Definition der Parallelverschiebung $\nabla_Z X = \nabla_Z Y = 0$ folgt mit 10.10.3

$$Z\, g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = 0 \ ,$$

und damit bleibt $g(X,Y)$ und also auch der Winkel zwischen X und Y erhalten.

Die Geodätengleichung in lokalen Koordinaten $x(t)$ lautet nach 7.0.6:

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 0 \ .$$

Diese nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf für die Anfangswerte $p = x(0) \in M$ und $k = \frac{d}{dt}x(0) \in T_pM$ in einer geeigneten Umgebung von p eine eindeutige Lösung $x_k(t)$ (siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238). Bei einer affinen Transformation $t' = at + b$ geht die Geodäte in sich selbst über und speziell gilt $x_{ak}(t) = x_k(at)$, bzw. $x_k(t) = x_{kt}(1)$.

Die Abbildung der Geraden durch den Ursprung kt in die Geodäte $x_k(t) = x_{e_k}(kt)$ nennt man auch die *geodäische Exponential-Abbildung*:

$$\exp_p : T_pM \to M \quad \text{mit} \quad \exp_p(kt) := x_k(t) = x_{kt}(1) \ .$$

Mehr zu den Gründen für die Begriffsbildung Exponential-Abbildung folgt unten. Zunächst sollen jedoch die Riemannschen Normalkoordinaten erläutert werden. An der Stelle $p \in M$, bzw. $t = 0$, gilt für das Differential der Exponential-Abbildung

$$\exp_*(\frac{d}{dt}kt)|_{t=0} = \frac{d}{dt}x_k(t)|_p = k \ , \quad \text{d.h.} \quad \exp_* : k \to k \ .$$

Also ist $\exp_p$ in einer Umgebung von p ein Diffeomorphismus und kann invertiert werden:

$$y_k(t) := \exp_p^{-1}(x_k(t)) = kt \ .$$

Diese $y_k(t)$ stellen jetzt die Riemannschen Normalkoordinaten dar. Wählen wir für k einen Satz orthonormaler Vektoren $e_i \in T_pM$, dann sind auch die $\exp_*^{-1}(e_i) = e_i$ orthonormal und wir erhalten für die Metrik am Punkt $t = 0$ im y-Koordinatensystem

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \ .$$

Die Geodätengleichung im y-Koordinatensystem bei $t = 0$ liefert nun

$$\frac{d^2y^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu}\frac{dy^\mu}{dt}\frac{dy^\nu}{dt} = \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu}\frac{dy^\mu}{dt}\frac{dy^\nu}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu}(0) = 0 \ ,$$

und in einem torsionsfreien metrisch-affinen Zusammenhang, d.h. einem Levi-Civita Zusammenhang, können wir daraus mit 10.11.4 weiter folgern:

$$\frac{d}{dy^\mu}g_{ij}(0) = 0 \ .$$

Warum spricht man bei der oben eingeführten Abbildung $\exp_p : T_pM \to M$ von einer Exponentialbbildung? Eine Untergruppe der affinen Gruppe auf der Geodäte $x_k(t)$ sind Translationen, und diese stellen eine abelsche 1-Parametergruppe dar, denn sei L_t eine Links-Translation auf der Geodäte $x_k(t)$, dann gilt:

$$L_t : M \to M \quad \text{mit} \quad p = x_k(0) \ , \ q = x_k(s) \in M \ , \ L_tq = L_tx_k(s) := x_k(s+t) \quad \Rightarrow$$

$$L_{s+t}p = x_k(s+t) = L_tx_k(s) = L_tL_sx_k(0) = L_tL_sp \ ,$$

$$L_0p = L_0x_k(0) = x_k(0) = p \quad \Rightarrow \quad L_0 = \mathbb{1} \ .$$

$$L_{-t}L_tp = L_{-t}L_tx_k(0) = x_k(0) \quad \Rightarrow \quad L_{-t} = (L_t)^{-1} \ .$$

Nun ist der Tangentialvektor an die Geodäte an der Stelle $p = x_k(0)$ ja gerade

$$\frac{d}{dt}|_0 = k = k^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_0$$

und damit ergibt sich $x_k(t)$ zu

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_k(0) + t(\frac{d}{dt})x_k(t)|_0 + \frac{t^2}{2!}(\frac{d}{dt})^2x_k(t)|_0 + \ldots \\ &= [1 + tk + \frac{t^2}{2!}k^2 + \ldots]x_k(t)|_0 \\ &= \exp(kt)x_k(t)|_0 = \exp(kt)\, p =: \exp_p(kt) \ . \end{aligned}$$

Damit ist $\exp_p(kt) : M \to M$ ein Differentialoperator auf der Geodäte.

Als Standardbeispiel für die Exponentialabbildung dient üblicherweise die Lie-Gruppe der rellen n-dimensionalen Matrizen $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Sie wird erzeugt durch die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := T_e G$. Sei jetzt $x_A(t)$ mit $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ eine 1-Parameter-Untergruppe von G, d.h. $x_A : \mathbb{R} \to G$ und $A = \frac{d}{dt} x_A(t)|_0$, dann gilt wie oben

$$x_A(t) = x_A(0) + t(\frac{d}{dt}) x_A(t)|_0 + \frac{t^2}{2!}(\frac{d}{dt})^2 x_A(t)|_0 + \dots$$

$$= [\mathbb{1} + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots] = \exp(At) \; .$$

10.13 Geometrie in einer 2-dim. Riemannschen Mannigfaltigkeit

Die Zusammenhang-1-Form in einer allgemeinen, d.h. nichtholonomen, Orthonormalbasis ist nach 10.8.1 $\hat{\omega}^a{}_b = \hat{\omega}^a{}_{cb} \theta^c$. Wir bezeichnen in diesem Abschnitt die nichtholonomen Variablen mit einem Zirkumflex ˆ zur Unterscheidung von den entsprechenden holonomen Variablen ohne Zirkumflex. In einem metrisch-affinen Zusammenhang gilt $\hat{\omega}_{ab} = -\hat{\omega}_{ba}$ (10.10.4). In 2 Dimensionen folgt also:

$$\hat{\omega}_{11} = \hat{\omega}_{22} = 0 \; , \quad \hat{\omega}_{12} = -\hat{\omega}_{21} \; . \tag{10.13.1}$$

Die Metrik in einer nichtholonomen Orthonormalbasis einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist gemäß 10.9.2 einfach $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ und daraus folgt:

$$\hat{\omega}^1{}_1 = \delta^{1e} \hat{\omega}_{e1} = 0 \; , \; \hat{\omega}^2{}_2 = 0 \; ,$$

$$\hat{\omega}^1{}_2 = \delta^{1e} \hat{\omega}_{e2} = \hat{\omega}_{12} = -\hat{\omega}_{21} = -\hat{\omega}^2{}_1 \; .$$

Aus der Cartanschen Strukturgleichung für die Krümmungs-2-Form (10.8.5) folgt sofort, daß diese im 2-dimensionalen eine exakte Form ist:

$$\hat{R}^a{}_b = d\hat{\omega}^a{}_b + \hat{\omega}^a{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_b = d\hat{\omega}^a{}_b \; , \tag{10.13.2}$$

denn

$$\hat{\omega}^1{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_1 = \hat{\omega}^1{}_1 \wedge \hat{\omega}^1{}_1 + \hat{\omega}^1{}_2 \wedge \hat{\omega}^2{}_1 = -\hat{\omega}^1{}_2 \wedge \hat{\omega}^1{}_2 = 0 \; ,$$

$$\hat{\omega}^2{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_2 = -\hat{\omega}^2{}_1 \wedge \hat{\omega}^2{}_1 = 0 \; , \; \hat{\omega}^1{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_2 = 0 \; .$$

Also liegt es nahe nach dem Stokeschen Satz (siehe: 17.1.1) zu folgern, daß das Integral von $\hat{R}^a{}_b$ über eine orientierbare geschlossene (d.h. kompakte und randlose) Manningfaltigkeit M gleich Null sein sollte:

$$\int_M \hat{R}^a{}_b = \int_M d\hat{\omega}^a{}_b = \int_{\partial M=\emptyset} \hat{\omega}^a{}_b = 0 \ .$$

Aber **Vorsicht**! Wenn etwa die Mannigfaltigkeit eine 2-dim. Kugeloberfläche ist, d.h. $M = S^2$, dann steht diese Aussage im Widerspruch zum Satz von Gauß-Bonnet, den wir im nächsten Kapitel beweisen werden. Wo liegt der Gedankenfehler? Es gibt bei der 2-dim. Kugeloberfläche keine Orthonormalbasis, welche die ganze Kugeloberfläche abdeckt, zumindest zwei verschiedene Orthonormalbasen sind erforderlich und das führt dann zu

$$\int_{S^2} \hat{R}^a{}_b \neq 0 \ .$$

Dies ist ein schönes Beispiel für die Notwendigkeit sorgfältiger topologischer Betrachtungen beim Übergang von lokalen zu globalen Aussagen.

Da die Zusammenhang-1-Form $\hat{\omega}^a{}_b$ nur durch die eine von Null verschiedene Komponente $\hat{\omega}^1{}_2 = -\hat{\omega}^2{}_1$ bestimmt ist, wird also auch die Krümmungs-2-Form wegen $\hat{R}^a{}_b = d\hat{\omega}^a{}_b$ nur durch $\hat{R}^1{}_2 = -\hat{R}^2{}_1$ eindeutig charakterisiert.

Der Übergang von $\hat{R}^1{}_2$ in einer nichtholonomen Orthonormalbasis zu $R^1{}_2$ in einer holonomen Orthonormalbasis geschieht mit dem Zweibein $e_a{}^\kappa \in SO(2)$:

$$e_a{}^\kappa = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \ . \tag{10.13.3}$$

Ab hier setzen wir zusätzlich voraus, daß der Zusammenhang torsionsfrei ist, daß also die Symmetrieeigenschaften 10.11.8, 10.11.9 für $R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ erfüllt sind.

$$\begin{aligned}
\hat{R}^1{}_2 &= \delta^{1c}\hat{R}_{c2} = \hat{R}_{12} \\
&= e_1{}^\kappa e_2{}^\lambda R_{\kappa\lambda} = e_1{}^\kappa e_2{}^\lambda \frac{1}{2} R_{\kappa\lambda\mu\nu}\, \theta^\mu \wedge \theta^\nu = e_1{}^\kappa e_2{}^\lambda R_{\kappa\lambda 12}\, \theta^1 \wedge \theta^2 \\
&= (\cos\varphi) e_2{}^\lambda R_{1\lambda 12}\, \theta^1 \wedge \theta^2 + (\sin\varphi) e_2{}^\lambda R_{2\lambda 12}\, \theta^1 \wedge \theta^2 \\
&= (\cos\varphi)(-\sin\varphi) R_{1112}\, \theta^1 \wedge \theta^2 + (\cos\varphi)^2 R_{1212}\, \theta^1 \wedge \theta^2 \\
&\quad - (\sin\varphi)^2 R_{2112}\, \theta^1 \wedge \theta^2 + (\sin\varphi)(\cos\varphi) R_{2212}\, \theta^1 \wedge \theta^2 \\
&= (\cos\varphi)^2 R_{1212}\, \theta^1 \wedge \theta^2 + (\sin\varphi)^2 R_{1212}\, \theta^1 \wedge \theta^2 \\
&= R_{1212}\, \theta^1 \wedge \theta^2 = K \cdot g\, \theta^1 \wedge \theta^2 \ ,
\end{aligned} \tag{10.13.4}$$

mit $K := R^{12}{}_{12} =$ Gaußscher Krümmung und $g := \det(g_{\mu\nu})$, denn

$$R_{1212} = g_{1\kappa} g_{2\lambda} R^{\kappa\lambda}{}_{12}$$

$$= g_{11}g_{21}R^{11}{}_{12} + g_{11}g_{22}R^{12}{}_{12} + g_{12}g_{21}R^{21}{}_{12} + g_{12}g_{22}R^{22}{}_{12}$$

$$= (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})R^{12}{}_{12} = R^{12}{}_{12} \cdot g = K \cdot g \; . \tag{10.13.5}$$

Für den Ricci-Tensor folgt:

$$Ric_{\lambda\nu} = R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu} = g^{\kappa\kappa'}R_{\kappa'\lambda\kappa\nu} \quad \Rightarrow$$

$$Ric_{11} = g^{11}R_{1111} + g^{12}R_{2111} + g^{21}R_{1121} + g^{22}R_{2121} = g^{22}R_{2121} \; ,$$

$$Ric_{22} = g^{11}R_{1212} + g^{12}R_{2212} + g^{21}R_{1222} + g^{22}R_{2222} = g^{11}R_{1212} \; ,$$

$$Ric_{12} = g^{11}R_{1112} + g^{12}R_{2112} + g^{21}R_{1122} + g^{22}R_{2122} = g^{12}R_{2112} \; ,$$

$$Ric_{21} = Ric_{12} \; .$$

$$Ric_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{21} & g^{11} \end{pmatrix} \cdot R_{1212} \; , \tag{10.13.6}$$

und für den Ricci-Skalar:

$$\mathcal{R} = Ric^{\nu}{}_{\nu} = g^{\nu\lambda}Ric_{\lambda\nu}$$

$$= g^{11}Ric_{11} + g^{12}Ric_{21} + g^{21}Ric_{12} + g^{22}Ric_{22}$$

$$= (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21} - g^{21}g^{12} + g^{22}g^{11}) \cdot R_{1212}$$

$$= 2g^{-1} \cdot R_{1212} = 2g^{-1} \cdot g \cdot K = 2K \; , \tag{10.13.7}$$

und für den Einstein-Tensor:

$$G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}$$

$$= \begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{21} & g^{11} \end{pmatrix} \cdot R_{1212} - \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{g} \cdot R_{1212} = 0 \; , \tag{10.13.8}$$

denn mit $g_{\mu\lambda} \cdot g^{\lambda\nu} = \mathbb{1}^{\mu}{}_{\nu}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} \frac{1}{g} \; , \quad \text{bzw.} \tag{10.13.9}$$

$$\begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{21} & g^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{g} \; . \tag{10.13.10}$$

und damit wird der Einstein-Tensor gerade Null. Die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen in 2-Dimensionen entsprechen also stets den Vakuum-Einstein-Gleichungen, ohne daß dazu die Raumzeit *Ricci-flach*, d.h. $Ric_{\mu\nu} = 0$, sein müßte:

$$G_{\mu\nu} = 0 = T_{\mu\nu} \; . \tag{10.13.11}$$

10.14 Gauß-Krümmung in m Dimensionen

Wir hatten in Kapitel 9.3 gesehen, daß Gauß die nach ihm benannte Krümmung ursprünglich mittels seiner *Normalenabbildung* definiert hat. Diese Normalenabbildung $n : M \to S^2$ mit $n(x) := \mathbf{N}(x)$, die jedem Punkt $x \in M$ seinem jeweiligen Normalenvektor $\mathbf{N}(x)$ entsprechend einen Punkt auf der Kugeloberfläche S^2 zuordnet, läßt sich nun ohne Probleme auf den m-dimensionalen Fall verallgemeinern.

Sei M eine m-dimensionale Hyperfläche in $\mathbb{E}^{m+1}$ und $n : M \to S^m$ mit $n(x) := \mathbf{N}(x)$ die verallgemeinerte Gaußsche Normalenabbildung. Die *Zweite Fundamentalform von Gauß* beschreibt die Änderung des Tangentialraums von M, bzw. des Normalenvektors im umgebenden Raum $\mathbb{E}^{m+1}$ bei einer Änderung des Punktes $x(u)$ beschreibt (9.2.10):

$$b_{ij}(u) := \langle \frac{\partial}{\partial u^i} e_j(u) \mid N(u) \rangle = \langle \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} x(u) \mid N(u) \rangle \ , \ i, j \in 1, \ldots, m \ . \tag{10.14.1}$$

Die Gaußsche Krümmung $K(u)$ am Punkt $u \in \mathbb{E}^m$ wird dann definiert als (9.3.2):

$$K(u) := \det({b^i}_j(u)) = \frac{\det(b_{ij}(u))}{\det(g_{kl}(u))} \ . \tag{10.14.2}$$

Wie im 2-dimensionalen Fall gilt auch im m-dimensionalen Fall für eine kleine Umgebung U um den Punkt $u \in \mathbb{E}^m$:

Satz 10.14.1

$$n^* \operatorname{vol}_{S^m} = K(u) \operatorname{vol}_M \ , \quad \textit{bzw.} \tag{10.14.3}$$

$$\lim_{U \to 0} \frac{\operatorname{vol}(n(U))}{\operatorname{vol}(U)} = \lim_{U \to 0} \frac{\int\limits_{n(U)} \operatorname{vol}_{S^m}}{\int\limits_U \operatorname{vol}_M} = K \ . \tag{10.14.4}$$

Beweis.

Wir gehen wegen $T_{x(u)}(\mathbb{E}^{m+1}) \sim \mathbb{E}^{m+1}$ wieder vom Tangentialraum $T_{x(u)}(\mathbb{E}^{m+1})$ an $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ im Punkt $x(u) \in \mathbb{E}^{m+1}$ mit

$$T_{x(u)}(\mathbb{E}^3) = \{ \frac{\partial x^k(u)}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \ , \ i = 1 \ldots m, \ k = 1, \ldots, m+1 \}$$

zum Tangentialraum

$$\tilde{T}_{x(u)}(\mathbb{E}^{m+1}) = \mathbb{E}^{m+1} = \{ e_i(u) = x_{u^i} = \frac{\partial x(u)}{\partial u^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1(u)}{\partial u^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^{m+1}(u)}{\partial u^i} \end{pmatrix} \ , \ i = 1, \ldots, m \}$$

über. Nun führen wir die zu $\{e_i(u)\}$ duale Basis des Kotangentialraums $\tilde{T}^*_{x(u)}(\mathbb{E}^{m+1})$ ein mit

$$\tilde{T}^*_{x(u)}(\mathbb{E}^{m+1}) = \mathbb{E}^{m+1} = \{de^i(u) \,|\, de^i(e_j)|_u = \delta^i_j\} \ .$$

Seien also die $m{+}1$ Basisvektoren $e_1, \ldots, e_m, \mathbf{N}$ auf $\mathbb{E}^{m+1}$ in einer positiven Orientierung gegeben. Seien weiter M und S^m beide in den gleichen Raum $\mathbb{E}^{m+1}$ eingebettet, dann kann man die Tangentialräume T_xM und $T_{n(x)}S^m$ miteinander identifizieren. Damit sind dann auch die entsprechenden Flächenformen bei x, bzw. $n(x)$ identisch:

$$\omega := \mathrm{vol}_{S^m} = \mathrm{vol}_M = \sqrt{g}\,\frac{1}{m!}\epsilon_{i^1\ldots i^m}\, de^{i^1} \wedge \cdots \wedge de^{i^m} = \sqrt{g}\, de^{i^1} \cdots de^{i^m} \ .$$

Für die Tangentialabbildung n_* gilt dann:

$$n_*(e_i) = n_*(x_{u^i}) = n_*(\frac{\partial x}{\partial u^i}) = \frac{\partial N}{\partial u^i} \ .$$

Für den Rücktransport (pullback) der Flächenform $\omega = \mathrm{vol}_{S^m}$ von S^m nach M ergibt sich mit 9.2.16:

$$\begin{aligned}
n^* \mathrm{vol}_{S^m} &= n^*\omega(e_1, \ldots, e_m) = \omega(n_* x_{u^1}, \ldots, n_* x_{u^m}) = \omega(\frac{\partial N}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial N}{\partial u^m}) \\
&= \omega(-b^{k^1}_{\ 1} x_{u^{k^1}}, \ldots, -b^{k^m}_{\ m} x_{u^{k^m}}) = (-1)^m b^{k^1}_{\ 1} \cdot \ldots \cdot b^{k^m}_{\ m} \omega(e_{k^1}, \ldots, e_{k^m}) \\
&= (-1)^m b^{k^1}_{\ 1} \cdot \ldots \cdot b^{k^m}_{\ m} \epsilon_{k^1\ldots k^m} \omega(e_1, \ldots, e_m) = (-1)^m \det(b^i_{\ j}) \omega(e_1, \ldots, e_m) \\
&= (-1)^m \frac{\det(b_{ij})}{\det(g)} \omega(e_1, \ldots, e_m) = (-1)^m K(u)\,\mathrm{vol}_M \ .
\end{aligned}$$

Für ungerades m kann man mittels $\mathbf{N} \to -\mathbf{N}$ die Orientierung der Basis wechseln und erhält

$$n^* \mathrm{vol}_{S^m} = K(u)\,\mathrm{vol}_M \ .$$

Sei nun $U \subset M$, dann folgt wie behauptet

$$\lim_{U\to 0} \frac{\mathrm{vol}(n(U))}{\mathrm{vol}(U)} = \lim_{U\to 0} \frac{\int\limits_{n(U)} \mathrm{vol}_{S^m}}{\int\limits_{U} \mathrm{vol}_M} = K \ . \qquad \square$$

Wenn nun die Dimension m der Hyperfläche M geradzahlig ist, so kann man eine wichtige Verbindung der Gaußschen Krümmung mit dem Riemannschen Krümmungstensor herstellen und damit das Gaußschen *Theorema Egregium* auch für diesen m-dimensionalen Fall verallgemeinern. Dies geschieht folgendermaßen.

Wegen der Geradzahligkeit von m kann man die Determinante von b in ein Produkt von 2×2 Determinanten faktorisieren und diese 2×2 Determinanten mit einer Komponente des Riemannschen Krümmungstensors der entsprechenden Unterräume identifizieren. Diese Darstellung der Gaußschen Krümmung ist im Zusammenhang mit verallgemeinerten Indexsätzen von großer Bedeutung. Wir folgen Spivak (1979), IV, S. 98 ff.

Satz 10.14.2 *Sei* $p \in M$ *und* $\dim M = m$ *geradzahlig, dann gilt*

$$K(p) = \frac{1}{2^{m/2} m!} \sum_{\substack{i_1 \ldots i_m = 1 \\ j_1 \ldots j_m = 1}}^{m} R_{i_1 i_2 j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot R_{i_{m-1} i_m j_{m-1} j_m} \frac{\epsilon^{i_1 \ldots i_m}}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\epsilon^{j_1 \ldots j_m}}{\sqrt{\det(g)}} \ . \tag{10.14.5}$$

Beweis. Sei $V := T_p(M)$ ein m-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{e_i\}$, $V^* := T_p^* M$ der zu V entsprechende Dualraum mit Basis $\{e^j\}$, $b : V \to V$ eine lineare Abbildung, $b^* : V^* \to V^*$ der Rücktransport von b, dann ist nach 6.2.5

$$\det(b) \cdot e^1 \wedge \ldots \wedge e^m = b^*(e^1 \wedge \ldots \wedge e^m) = b^*(e^1) \wedge \ldots \wedge b^*(e^m) \ .$$

Jetzt ist

$$b(e_i) = \sum_{j=1}^{m} b^j_{\ i} e_j \quad \Rightarrow \quad b^*(e^i) = \sum_{j=1}^{m} b^i_{\ j} e^j \ ,$$

und damit folgt für $\det(b)$

$$\begin{aligned}
\det(b) \cdot e^1 \wedge \ldots \wedge e^m &= [b^*(e^1) \wedge b^*(e^2)] \wedge \ldots \wedge [b^*(e^{m-1}) \wedge b^*(e^m)] \\
&= [(\sum_{j_1=1}^{m} b^1_{\ j_1} e^{j_1}) \wedge (\sum_{j_2=1}^{m} b^2_{\ j_2} e^{j_2})] \wedge \ldots \\
&= [\sum_{j_1 < j_2 = 1}^{m} (b^1_{\ j_1} b^2_{\ j_2} - b^2_{\ j_1} b^1_{\ j_2}) e^{j_1} \wedge e^{j_2}] \wedge \ldots \\
&= [\frac{1}{2} \sum_{j_1 j_2 = 1}^{m} (b^1_{\ j_1} b^2_{\ j_2} - b^2_{\ j_1} b^1_{\ j_2}) e^{j_1} \wedge e^{j_2}] \wedge \ldots \\
&= \frac{1}{2^{m/2}} [\sum_{j_1 \ldots j_m = 1}^{m} (b^1_{\ j_1} b^2_{\ j_2} - b^2_{\ j_1} b^1_{\ j_2}) \cdot \ldots \cdot (b^{m-1}_{\ \ j_{m-1}} b^m_{\ j_m} - b^m_{\ j_{m-1}} b^{m-1}_{\ \ j_m})] e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_m} \\
&= \frac{1}{2^{m/2}} [\sum_{j_1 \ldots j_m = 1}^{m} (b^1_{\ j_1} b^2_{\ j_2} - b^2_{\ j_1} b^1_{\ j_2}) \cdot \ldots \cdot (b^{m-1}_{\ \ j_{m-1}} b^m_{\ j_m} - b^m_{\ j_{m-1}} b^{m-1}_{\ \ j_m})] \\
&\quad \cdot \epsilon^{j_1 \ldots j_m} \cdot e^1 \wedge \ldots \wedge e^m \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\det(b) = \frac{1}{2^{m/2}} [\sum_{j_1 \ldots j_m = 1}^{m} (b^1_{\ j_1} b^2_{\ j_2} - b^2_{\ j_1} b^1_{\ j_2}) \cdot \ldots \cdot (b^{m-1}_{\ \ j_{m-1}} b^m_{\ j_m} - b^m_{\ j_{m-1}} b^{m-1}_{\ \ j_m})] \epsilon^{j_1 \ldots j_m}$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}m!}[\sum_{\substack{i_1\dots i_m=1\\ j_1\dots j_m=1}}^{m} (b^{i_1}_{\ j_1}b^{i_2}_{\ j_2} - b^{i_2}_{\ j_1}b^{i_1}_{\ j_2}) \cdot \ldots \cdot (b^{i_{m-1}}_{\ j_{m-1}}b^{i_m}_{\ j_m} - b^{i_m}_{\ j_{m-1}}b^{i_{m-1}}_{\ j_m})]\epsilon^{i_1\dots i_m}\epsilon^{j_1\dots j_m} \ .$$

$$K(p) = \det(b^i{}_j(p)) = \frac{\det(b_{ij}(p))}{\det(g_{kl}(p))}$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}m!}[\sum_{\substack{i_1\dots i_m=1\\ j_1\dots j_m=1}}^{m} (b_{i_1j_1}b_{i_2j_2} - b_{i_2j_1}b_{i_1j_2}) \cdot \ldots \cdot (b_{i_{m-1},j_1}b_{i_mj_2} - b_{i_mj_1}b_{i_{m-1},j_2})]\frac{\epsilon^{i_1\dots i_m}\epsilon^{j_1\dots j_m}}{\det(g)} \ .$$

Mit der Gauß-Integrabilitätsbedingung 9.4.5 können wir die 2×2 Determinaten der b_{ij} als eine Komponente des Riemannschen Krümmungstensors schreiben ($b_{ij} = b_{ji}$):

$$R_{nkij}(u) = b_{jk}(u)b_{ni}(u) - b_{ik}(u)b_{nj}(u) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} R_{j_2j_1i_2i_1}(u) &= b_{i_1j_1}(u)b_{j_2i_2}(u) - b_{i_2j_1}(u)b_{j_2i_1}(u) \\ &= b_{i_1j_1}(u)b_{i_2j_2}(u) - b_{i_2j_1}(u)b_{i_1j_2}(u) \ . \end{aligned}$$

Da wir in $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ einen Levi-Civita Zusammenhang vorliegen haben gilt $R_{j_2j_1i_2i_1} = R_{i_1i_2j_1j_2}$ und damit folgt

$$K(p) = \frac{1}{2^{m/2}m!} \sum_{\substack{i_1\dots i_m=1\\ j_1\dots j_m=1}}^{m} R_{i_1i_2j_1j_2} \cdot \ldots \cdot R_{i_{m-1}i_mj_{m-1}j_m} \cdot \frac{\epsilon^{i_1\dots i_m}\epsilon^{j_1\dots j_m}}{\det(g)} \ . \qquad \square$$

Wir hatten in 9.4.4 gesehen, daß $R^n{}_{kij}(u)$ nur von den Christoffelsymbolen und deren ersten Ableitungen abhängt, und damit nach 9.4.2 also nur von $g_{ij}(p)$ und deren ersten und zweiten Ableitungen. Damit hängt also die Gaußsche Krümmung $K(p)$ einer m-dimensionalen Hyperfläche $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ mit ganzzahligem m nur von $g_{ij}(p)$ und deren ersten und zweiten Ableitungen ab und ist eine intrinsische Größe der Hyperfläche M und zugleich eine isometrische Invariante der Fläche, d.h. $K(p)$ bleibt unter Metrik-erhaltenden Abbildungen unverändert. Dies ist also eine Verallgemeinerung des berühmten Gaußschen *Theorema Egregium*.

11 Die Einstein-Cartan Theorie

11.1 Albert Einstein (1879 - 1955)

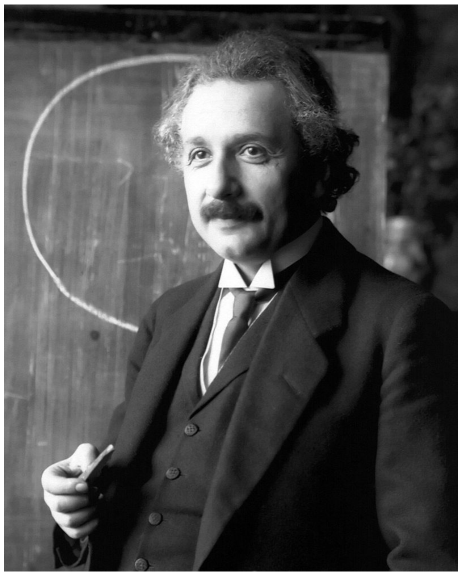

Abbildung 11.1: A. Einstein
F. Schmutzer (Wien, 1921), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/
Albert_Einstein]

Albert Einstein wurde 1879 in Ulm geboren und wuchs in einer schwäbischen deutsch-jüdischen Familie auf. Die Eltern zogen kurz nach Albert Einsteins Geburt nach München und der Vater gründete dort mit einem Bruder einen Betrieb zur Gas- und Wasserinstallation und später eine Fabrik für elektrotechnische Geräte. So kam der Sohn schon früh in seinem Leben mit den Phänomenen des Elektromagnetismus in Berührung. Im Jahr 1894 schlossen der Vater und sein Bruder ihre Fabrik in München und übersiedelten nach Mailand um in Oberitalien am Ausbau der dortigen Stromversorgung mitzuarbeiten. Albert Einstein blieb zunächst in München auf dem Gymnasium, geriet aber bald mit dem autoritären Schulleiter in Konflikte, verließ das Gymnasium ohne Abschluß und folgte seiner Familie nach Mailand. Als 16-jähriger bewarb er sich zum Physik-Studium an der heutigen ETH Zürich, bestand die Aufnahmeprüfung in den naturwissenschaftlichen Fächern mit 'sehr gut', scheiterte aber an der Französisch-Prüfung. Daher besuchte er die aargauische Kantonsschule in Aarau in der Schweiz, um dort sein reguläres Abitur (Matura) nachzuholen. Im Jahr 1896 begann er sein Studium an der Schule für Fachlehrer des Polytechnikums Zürich und schloß dieses 1900 mit einem Diplom als Fachlehrer für Mathematik und Physik ab. Da er keine Assistentenstelle fand, begann er als Hauslehrer zu arbeiten bis er 1902 durch die Vermittlung seines Mathematiker-Freundes Grossmann eine Anstellung als *technischer Experte 3. Klasse* beim Schweizer Patentamt in Bern fand.

Die weiteren privaten und beruflichen Stationen waren:

- 1903: Heirat mit Mileva Marić, 3 Kinder,
- 1908: Habilitation an der Universität Bern,

- 1909: Dozent und später außerplanmäßiger Professor für theoretische Physik an der Universität Zürich,
- 1911: ordentlicher Professor für theoretische Physik an der deutschen Universität Prag,
- 1912: ordentlicher Professor an der ETH Zürich,
- 1914: auf das Engagement von Max Planck hin die Berufung als hauptamtlich besoldetes Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin,
- 1917-1933: Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik in Berlin,
- 1919: Scheidung von Milena und Heirat seiner Cousine Elsa Löwenthal,
- 1933: wegen der NS-Diktatur in Deutschland Emigration in die USA und Mitglied des Institute for Advanced Study in Princeton bis zu seinem Tod im Jahr 1955.

Das Jahr 1905 wurde für Einstein und für die Geschichte der Physik zu einem *annus mirabilis*. Einstein veröffentlichte 3 fundamentale Arbeiten zu 3 völlig verschiedenen Gebieten der Physik:

- Lichtquantenhypothese beim photoelektrischer Effekt:
  Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichts betreffenden heuristischen Gesichtspunkt.
  Diese Veröffentlichung gilt als einer der Startpunkte der Quantentheorie und für diese Arbeit erhielt Einstein 1922 den Nobelpreis.
- Dissertation zur Bestimmung der Avogadro-Konstanten aus der Brownschen Molekularbewegung, eingereicht bei der Universität Zürich: *Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen.*
  Als Folgerung aus dieser Dissertation veröffentlichte Einstein eine grundlegende Arbeit zur Brownschen Molekularbewegung und etablierte damit endgültig die Boltzmannsche Atomhypothese, die seinerzeit noch von vielen Physikern bezweifelt wurde:
  Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.
- Spezielle Relativitätstheorie:
  Zur Elektrodynamik bewegter Körper.
  Diese Veröffentlichung war der Beginn eines neuen Nachdenkens in der Physik über die Struktur von Raum und Zeit. In einem Nachtrag lieferte Einstein zum ersten Mal (implizit) die Formel $E = mc^2$.

Einstein verfolgte die Gedanken der Speziellen Relativitätstheorie weiter in Bezug auf die Gravitation, denn nach Newton müßte sich eine Änderung der Gravitationskraft ja unmittelbar im ganzen Universum auswirken, wohingegen die Spezielle Relativitätstheorie keine Ausbreitung einer Wirkung schneller als die Lichtgeschwindigkeit erlaubte. Der Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie war äußerst mühsam und langwierig und gelang auch nur mit der Unterstützung des Mathematiker-Freundes Marcel Grossmann, der Einstein mit Riemanns Differentialgeometrie vertraut machte. Im November 1915 konnte Einstein seine Feldgleichungen für das Gravitationsfeld in der Preußischen Akademie der Wissenschaften in vier aufeinanderfolgenden Sitzungen vortragen. Die lange Geschichte der Entwicklung dieser Theorie ist sehr schön in dem Artikel von Janssen u. Renn (2015) in *Spektrum der Wissenschaft* nachgezeichnet.

Ganz interessant ist hierbei auch die Geschichte der sog. *Kosmologischen Konstanten* in Einsteins Feldgleichungen.
Zunächst gab es für Einstein keine kosmologische Konstante in den Feldgleichungen, doch dann entdeckte er, daß die Feldgleichungen ohne einen solchen Term zu einer Ausdehnung oder Zusammenziehung des Universums führen müßten. Da Einstein aber aufgrund der seinerzeitigen experimentellen Situation an ein statisches Universum glaubte, führte er die Kosmologische Konstante ein. Als dann Hubble 1925 die Expansion des Universums anhand der Galaxienflucht entdeckte und Friedmann und Lemaître kosmologische, expandierende Lösungen der Feldgleichungen vorlegten, verwarf Einstein die Idee der kosmologischen Konstanten wieder und bezeichnete sie als die „größte Eselei meines Lebens". Seit 1998 hat die kosmologische Konstante aber eine Renaissance erlebt, da astronomische Beobachtungen eine beschleunigte Ausdehnung des Universums zeigen, die sich sehr gut mit einer positiven kosmologischen Konstante beschreiben läßt. Dabei bleibt aber die Frage nach mikroskopischen Ursachen dieser kosmologischen Konstanten, wie möglicherweise die Energie von Quanten-Vakuum-Fluktuationen, weiterhin offen.

Die Einsteinschen Feldgleichungen erlauben neben so exotischen und singulären Lösungen wie Schwarzen Löchern auch Schwingungen der Raumzeit in Form von Gravitationswellen. Einstein selbst glaubte wegen der Winzigkeit von Gravitationswellen-Amplituden nicht, daß diese jemals experimentell verifiziert werden könnten. Umso eindrücklicher und schöner ist daher der im Jahr 2016 erstmalig gelungene Nachweis von Gravitationswellen bei der Verschmelzung zweier schwarzer Löcher!

Im Jahr 1954 berichtete Yang in einem Gespräch mit Einstein diesem von seiner Arbeit mit nichtabelschen Eichtheorien, aber zu diesem Zeitpunkt waren weder Yang noch Einstein die geometrischen Aspekte von Yangs Arbeiten bewußt. Vielleicht hätte diese Einsicht Einsteins Bemühungen in seinen späten Jahren um eine Einheitliche Feldtheorie wesentlich vorangebracht - aber die Zeit war dafür noch nicht reif.

Auch wenn Einstein sich selbst primär als Forscher verstanden und kein Interesse an der Lehre und der Förderung von Schülern gezeigt hat, so gibt es doch einige großartige theoretische Physiker, wie etwa Archibald Wheeler, Lee Smolin, Carlo Rovelli u.a., die mit ihrer Liebe zur Einsteinschen Gravitationstheorie und ihrer philosophisch geprägten Herangehensweise an die Physik zu Recht als Söhne und Enkel Einsteins betrachtet werden dürfen.

Als der Autor dieser Schrift anfangs der 1970'er Jahre in seinem Physik-Studium die Allgemeine Relativitätstheorie erstmalig kennenlernen durfte war der „MTW", das Riesenwerk von Misner, Thorne und Wheeler mit dem Namen *Gravitation* unser aller Kultbuch (Misner u. a. (1973)! :-) Kürzer und moderner und eine sehr gute Empfehlung für heutige Studenten ist das Lehrbuch von Wald (1984).

Insgesamt verwandte Einstein aber nach eigenen Aussagen einen größeren Teil seiner

Arbeitszeit auf Fragen der neuen Quantentheorie (Heisenberg, Schrödinger, Bohr) als auf die Allgemeine Relativitätstheorie.

> „Ich habe hundertmal so viel über Quantenprobleme nachgedacht wie über die Allgemeine Relativitätstheorie." (Einstein (1997), S. 152).

Berühmt sind Einsteins kritische Anfragen an die Quantentheorie auf der Solvay-Konferenz in Brüssel im Jahr 1930 und anschließend in seinen vielen Briefwechseln mit Niels Bohr. Auch wenn Einstein keine Antworten für eine tiefere Fundierung der Quantentheorie vorlegen konnte, so waren und sind seine Fragen z.B. nach dem Meßprozeß, nach dem Zusammenhang von Mikrophysik und Makrophysik und seine berühmte EPR-Arbeit (Einstein-Podolski-Rosen, in Einsteins Worten „die spukhafte Fernwechselwirkung der Quantentheorie") nach wie vor offene und inspirierende Fragen. Die 'Kopenhagener Interpretation' der Quantentheorie nach Niels Bohr mit dem 'Kollaps der Wellenfunktion bei einer makroskopischen Messung' gilt heute in der Physik ganz im Sinne Einsteins als obsolet und Forschungen zu den Grundlagen der Quantentheorie, wie die experimentellen Arbeiten aus den Gruppen um Serge Haroche, Anton Zeilinger und anderen, sowie die theoretische Arbeiten zur Dekohärenz (Joos u. a. (2003),Schlosshauer (2008)) sind spannende aktuelle Forschungsgebiete, die bereits jetzt zu bedeutsamen Ergebnissen geführt haben. Und auch zur Nichtlokalität der Quantentheorie gibt es neue Gedanken von Lee Smolin et al. (Smolin (2013), S. 172, Kap. 15 „The Emergence of Space", und dort angegebene Originalarbeiten).

Neben seiner physikalischen Arbeit engagierte Einstein sich intensiv für den Pazifismus, für Initiativen zum Weltfrieden, für einen liberalen Sozialismus und für den Zionismus, wobei er dessen spätere Militanz durch Politiker wie Menachem Begin scharf kritisierte. Siehe hierzu Einsteins Bücher Einstein (1998), Einstein (1984) und die schöne Sammlung von Zitaten: *Einstein sagt* Einstein (1997).

Entspannen konnte sich Einstein beim Studium seines Lieblings-Philosophen Spinoza, beim Geigenspiel (Bach, Mozart) und besonders beim Segeln. Wenn er auf seine 'Genialität' angesprochen wurde, so entgegenete er häufig mit einem Spruch von Thomas Alva Edison: "*Genius is one per cent inspiration, ninety-nine per cent perspiration.*" Und in Einstein (1997), S. 147, lesen wir:

> „Das eine ist sicher, daß ich mich in meinem Leben noch nicht annähernd so geplagt habe und daß ich große Hochachtung für die Mathematik eingeflößt bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt für puren Luxus gehalten habe."

Quellen: Wikipedia-Einstein (2017), Einstein (1998), Einstein (1984), Einstein (1997).

11.2 Die Einstein-Cartan Theorie

Die Einstein-Cartan Theorie (EC-Theorie) ist eine Erweiterung von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie (AR-Theorie), in welcher Élie Cartan zusätzlich zur Krümmung der Raumzeit auch eine nichtverschwindende Torsion berücksichtigte. Cartan veröffentlichte seine Erweiterung um 1922, doch dieser Gedanke fand bei Einstein kein Interesse, vielleicht, weil zu jener Zeit der Spin der Elementarteichen noch nicht entdeckt war, vielleicht auch, weil durch die zusätzlichen Freiheitsgrade die Theorie nochmals deutlich komplexer wurde. Erst in den 1960'er Jahren nahmen Sciama und Kibble den Gedanken von Cartan wieder auf, da sich inzwischen nachdrücklich die Frage stellte, wie eigentlich die Fermionen-Spins an das Gravitationsfeld koppeln und die Freiheitsgrade einer Torsion der Raumzeit sich für diese Kopplung anbieten. Wegen der Beiträge von Sciama und Kibble zur Einstein-Cartan Theorie spricht man häufig auch von der Einstein-Cartan-Sciama-Kibble Theorie (ECSK-Theorie). Als Einführung in diese Theorie ist insbesondere der grundlegende Übersichtsartikel von Hehl u. a. (1976) zu nennen. Neben diesem Artikel stützen wir uns in unserer kleinen Einführung insbesondere auf die hervorragende Arbeit von Socolovsky (2011). Ein von Poplawsky (2011) vorgelegtes interessantes Ergebnis der Einstein-Cartan Theorie ist, daß durch die minimale Ankoppelung eines Dirac-Feldes die Singularität eines Schwarzen Lochs durch einen Big Bounce in ein neues Baby-Universum ersetzt wird. Jedoch zeigt sich, daß die Einstein-Cartan Theorie nicht mehr eichinvariant ist, wenn man ein Maxwell- oder Yang-Mills-Feld minimal an die Einstein-Cartan Theorie mit nichtverschwindender Torsion ankoppelt. Eine mögliche Lösung dieses Problems hat de Sabbata (1998) vorgelegt: das quantenelektrodynamische Photonenfeldes läßt sich eichinvariant an die Einstein-Cartan Theorie ankoppeln, wenn die virtuelle e^+e^--Paar-Erzeugung berücksichtigt wird. Im klassischen Grenzfall bricht dann durch die Abwesenheit der virtuellen fermionischen Freiheitsgrade die Eichinvarianz zusammen.

Hilbert hatte im November 1917 nach Einsteins Veröffentlichung der Allgemeinen Relativitätstheorie ein Variationsprinzip zur Ableitung der Einstein-Gleichungen vorgeschlagen. Die entsprechende Wirkungsfunktion heißt heute *Einstein-Hilbert Wirkung.* Diese Wirkung soll ein Integral über einen Skalar sein, soll möglichst einfach und sie soll in den abgeleiteten Feldgleichungen eine Dynamik der Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ beschreiben. Der einfachste Gedanke, der sich hier anbietet ist ein Integral über den Ricci-Skalar $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{S}_{EH} := \kappa_g \int \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x := \frac{c^3}{16\pi G_N}\int \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x \ . \tag{11.2.1}$$

Hierbei sind c die Lichtgeschwindigkeit und G_N die newtonsche Gravitationskonstante. Diese Konstanten stellen bei flachen Raumzeiten gerade den korrekten Grenzfall zur Newtonschen Gravitationstheorie her.

Im Fall der einfachen AR-Theorie betrachtet man die Wirkung als ein Funktional der Metrik $g_{\mu\nu}(x)$, oder äquivalent dazu als ein Funktional des Vierbeins ${e_a}^{\mu}(x)$. Im Fall der EC-Theorie betrachtet man die Wirkung zusätzlich auch als ein Funktional des Zusammenhangs ${\omega^a}_{db}(x)$, also:

$$\mathcal{S}_{AR} := \mathcal{S}_{EH}[{e_a}^{\mu}] \ , \tag{11.2.2}$$

$$\mathcal{S}_{EC} := \mathcal{S}_{EH}[{e_a}^{\mu}, {\omega^a}_{db}] \ . \tag{11.2.3}$$

Vor der Ableitung der Feldgleichungen der EC-Theorie durch die Variation von $\mathcal{S}_{EC}$ benötigen wir noch einige einfache Zusammenhänge, die in folgendem Lemma zur Verfügung gestellt werden.

Lemma 11.2.1

$$1.\quad \partial_\rho g_{\mu\nu} = -g_{\mu\kappa}(\partial_\rho g^{\kappa\lambda})g_{\lambda\nu}\ , \tag{11.2.4}$$

$$2.\quad \partial_\rho g_{det} = g_{det} g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}\ , \tag{11.2.5}$$

$$3.\quad \delta\sqrt{-g_{det}} = -\sqrt{-g_{det}}\, e_\mu{}^a \delta e_a{}^\mu\ , \tag{11.2.6}$$

$$4.\quad \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \mu\rho \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}}\partial_\rho\sqrt{-g_{det}}\ . \tag{11.2.7}$$

Beweis. 1. Einerseits ist $\partial_\rho(g_{\mu\kappa}g^{\kappa\lambda}) = \partial_\rho\delta_\mu{}^\lambda = 0$, andererseits ist

$$\partial_\rho(g_{\mu\kappa}g^{\kappa\lambda}) = (\partial_\rho g_{\mu\kappa})g^{\kappa\lambda} + g_{\kappa\mu}(\partial_\rho g^{\kappa\lambda}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\partial_\rho g_{\mu\kappa})g^{\kappa\lambda} = -g_{\kappa\mu}(\partial_\rho g^{\kappa\lambda})\ ,$$

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = (\partial_\rho g_{\mu\kappa})\delta^\kappa{}_\nu = (\partial_\rho g_{\mu\kappa})g^{\kappa\lambda}g_{\lambda\nu} = -g_{\kappa\mu}(\partial_\rho g^{\kappa\lambda})g_{\lambda\nu}\ .$$

2. Für diese Behauptung nutzt man die Beziehung $\ln(g_{det}) = \ln(\det\, g_{\mu\nu}) = \mathrm{tr}(\ln g_{\mu\nu})$ aus, die man für diagonale Matrizen $g_{\mu\nu}$ sofort verifizieren kann, und da $g_{\mu\nu}$ symmetrisch ist und nur innerhalb einer Determinante oder Spur vorkommt, darf man hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit von einem diagonalen $g_{\mu\nu}$ ausgehen. Auf der linken Seite von $\ln(g_{det}) = \mathrm{tr}(\ln g_{\mu\nu})$ erhalten wir:

$$\partial_\rho(\ln g_{det}) = \frac{1}{g_{det}}\partial_\rho g_{det}$$

und auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned}\partial_\rho(\mathrm{tr}(\ln g_{\mu\nu}) &= \mathrm{tr}(\partial_\rho \ln g_{\mu\nu}) = \mathrm{tr}(\sum_\kappa (g^{-1})_{\mu\kappa}\partial_\rho g_{\kappa\nu}) \\ &= \mathrm{tr}(g^{\mu\kappa}\partial_\rho g_{\kappa\nu}) = g^{\nu\kappa}\partial_\rho g_{\kappa\nu} = g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}\ .\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{1}{g_{det}}\partial_\rho g_{det} = g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \partial_\rho g_{det} = g_{det}g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}\ .$$

3. Aus 2. folgt

$$\partial_\rho\sqrt{-g_{det}} = \frac{-1}{2\sqrt{-g_{det}}}\partial_\rho g_{det} = \frac{1}{2\sqrt{-g_{det}}}(-g_{det})g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g_{det}}g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}\ .$$

$$\delta\sqrt{-g_{det}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g_{det}}g^{\mu\nu}(\partial_\rho g_{\mu\nu})dx^\rho = \frac{1}{2}\sqrt{-g_{det}}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\ .$$

$$g^{\mu\nu} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \eta^{ab} \quad \text{und}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = (\delta e_\mu{}^{a'})e_\nu{}^{b'}\eta_{a'b'} + e_\mu{}^{a'}(\delta e_\nu{}^{b'})\eta_{a'b'} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} &= e_a{}^\mu e_b{}^\nu \eta^{ab}(\delta e_\mu{}^{a'})e_\nu{}^{b'}\eta_{a'b'} + e_a{}^\mu e_b{}^\nu \eta^{ab} e_\mu{}^{a'}(\delta e_\nu{}^{b'})\eta_{a'b'} \\ &= e_a{}^\mu \eta^{ab}(\delta e_\mu{}^{a'})\eta_{a'b} + e_b{}^\nu \eta^{ab}(\delta e_\nu{}^{b'})\eta_{ab'} \\ &= e_a{}^\mu \delta e_\mu{}^a + e_b{}^\nu \delta e_\nu{}^b = 2e_a{}^\mu \delta e_\mu{}^a\ . \end{aligned}$$

Aus $e_a{}^\mu e_\mu{}^b = \delta_a{}^b$ folgt $e_a{}^\mu(\delta e_\mu{}^b) = -(\delta e_a{}^\mu)e_\mu{}^b$ und mit den obigen Zeilen folgt

$$\delta\sqrt{-g_{det}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g_{det}}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \sqrt{-g_{det}}e_a{}^\mu \delta e_\mu{}^a = -\sqrt{-g_{det}}e_\mu{}^a \delta e_a{}^\mu\ .$$

4. Aus 10.10.8 folgt

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_\mu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\rho g_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}(g^{\mu\lambda}\partial_\mu g_{\rho\lambda} - g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\rho g_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}(g^{\mu\lambda}\partial_\mu g_{\rho\lambda} - g^{\lambda\mu}\partial_\lambda g_{\rho\mu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\rho g_{\mu\lambda} = \frac{1}{2g_{det}}(g_{det}g^{\mu\lambda}\partial_\rho g_{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2g_{det}}\partial_\rho g_{det} = \frac{1}{2(-g_{det})}\partial_\rho(-g_{det}) = \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}}\partial_\rho\sqrt{-g_{det}}\ . \end{aligned}$$

□

Satz 11.2.2 *Sei* $\mathcal{S}_{EC} = \mathcal{S}_{EH}[e_a{}^\mu, \omega^a{}_{db}] = \frac{c^3}{16\pi G_N}\int \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x$ *die Einstein-Hilbert-Wirkung als Funktional des Vierbeins* $e_a{}^\mu$ *und des metrisch affinen Zusammenhangs* $\omega^a{}_{db}$*, dann folgen*

$$\textit{Einstein-Gleichungen:} \quad \delta_e\mathcal{S}_{EC} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} = 0\ , \tag{11.2.8}$$

$$\textit{Cartan-Gleichungen:} \quad \delta_\omega\mathcal{S}_{EC} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad T^\nu{}_{\rho\sigma} + \delta_\rho{}^\nu T^\mu{}_{\sigma\mu} - \delta_\sigma{}^\nu T^\mu{}_{\rho\mu} = 0\ . \tag{11.2.9}$$

Beweis. Wir folgen im Wesentlichen dem Beweis in Socolovsky (2011), S. 41 ff., jedoch in unseren Bezeichnungen.

1. Einstein-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = Ric^{\nu}{}_{\nu} = Ric^{c}{}_{\nu}e_c{}^{\nu} = Ric_{b\nu}\eta^{bc}e_c{}^{\nu}\\ = \eta^{bc}R^{\mu}{}_{b\mu\nu}e_c{}^{\nu} = \eta^{bc}R^{a}{}_{b\mu\nu}e_a{}^{\mu}e_c{}^{\nu}\ .\end{aligned}$$

Mit den Symmetrien 10.6.3 und 10.10.6 für den Krümmungstensor ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta_e\mathcal{R} &= \eta^{bc}R^{a}{}_{b\mu\nu}(\delta e_a{}^{\mu})e_c{}^{\nu} + \eta^{bc}R^{a}{}_{b\mu\nu}e_a{}^{\mu}(\delta e_c{}^{\nu})\\ &= R^{a\nu}{}_{\mu\nu}\delta e_a{}^{\mu} + R^{\mu c}{}_{\mu\nu}\delta e_c{}^{\nu} = (R^{a\nu}{}_{\mu\nu} + R^{\nu a}{}_{\nu\mu})\delta e_a{}^{\mu}\\ &= 2R^{\nu a}{}_{\nu\mu}\delta e_a{}^{\mu} = 2Ric^{a}{}_{\mu}\delta e_a{}^{\mu}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_e\mathcal{S}_{EC} &= \kappa_g\int[(\delta\mathcal{R})\sqrt{-g_{det}} + \mathcal{R}(\delta\sqrt{-g})]d^4x\\ &= \kappa_g\int[2Ric^{a}{}_{\mu}\delta e_a{}^{\mu} - \mathcal{R}e_{\mu}{}^{a}\delta e_a{}^{\mu}]\sqrt{-g_{det}}d^4x\\ &= \kappa_g\int[2Ric^{a}{}_{\mu} - \mathcal{R}e_{\mu}{}^{a}]\delta e_a{}^{\mu}\sqrt{-g_{det}}d^4x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Ric^{a}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}e_{\mu}{}^{a} = 0 \quad \Rightarrow\\ &e^{\kappa}{}_{a}(Ric^{a}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}e_{\mu}{}^{a}) = Ric^{\kappa}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}e^{\kappa}{}_{a}e_{\mu}{}^{a}) = Ric^{\kappa}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\delta^{\kappa}{}_{\mu} = 0 \quad \Rightarrow\\ &g_{\nu\kappa}(Ric^{\kappa}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\delta^{\kappa}{}_{\mu}) = Ric_{\nu\mu} - \frac{1}{2}g_{\nu\mu}\mathcal{R} = 0 \quad \Rightarrow\\ &Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} = 0\ .\end{aligned}$$

2. Cartan-Gleichungen:

Bei der Variation δ_ω nutzt man die Tatsache aus, daß, obwohl ω selbst kein Tensor ist, $\delta\omega^{c}{}_{bd}$ als die Differenz zweier Zusammenhänge ω' und ω dennoch ein Tensor ist (siehe 10.9.10). Wir beginn mit der Darstellung des Krümmunstensors 10.6.2:

$$R^{a}{}_{bcd} = e_c\omega^{a}{}_{db} - e_d\omega^{a}{}_{cb} + \omega^{e}{}_{db}\omega^{a}{}_{ce} - \omega^{e}{}_{cb}\omega^{a}{}_{de} - c_{cd}{}^{e}\omega^{a}{}_{eb} \quad \Rightarrow$$

$$R^{a}{}_{b\mu\nu} = (\partial_\mu\omega^{a}{}_{\nu b} + \omega^{e}{}_{\nu b}\omega^{a}{}_{\mu e}) - (\partial_\nu\omega^{a}{}_{\mu b} + \omega^{e}{}_{\mu b}\omega^{a}{}_{\nu e}) - c_{\mu\nu}{}^{e}\omega^{a}{}_{eb}\ .$$

Nun sind in einer Koordinatenbasis die Strukturkonstanten $c_{\mu\nu}{}^e = 0$ (siehe 10.2.5). Damit folgt für die Variation

$$\begin{aligned}
\delta_\omega R^a{}_{b\mu\nu} &= [\partial_\mu \delta\omega^a{}_{\nu b} + (\delta\omega^e{}_{\nu b})\omega^a{}_{\mu e} + \omega^e{}_{\nu b}(\delta\omega^a{}_{\mu e})] \\
&\quad - [\partial_\nu \delta\omega^a{}_{\mu b} + (\delta\omega^e{}_{\mu b})\omega^a{}_{\nu e} + \omega^e{}_{\mu b}(\delta\omega^a{}_{\nu e})] \\
&= [\partial_\mu \delta\omega^a{}_{\nu b} + \omega^a{}_{\mu e}(\delta\omega^e{}_{\nu b}) - \omega^e{}_{\mu b}(\delta\omega^a{}_{\nu e})] \\
&\quad - [\partial_\nu \delta\omega^a{}_{\mu b} + (\delta\omega^e{}_{\mu b})\omega^a{}_{\nu e} - \omega^e{}_{\nu b}(\delta\omega^a{}_{\mu e})] \\
&= [\partial_\mu \delta\omega^a{}_{\nu b} + \omega^a{}_{\mu e}(\delta\omega^e{}_{\nu b}) - \omega^e{}_{\mu b}(\delta\omega^a{}_{\nu e})] - \omega^\rho{}_{\mu\nu}\delta\omega^a{}_{\rho b} \\
&\quad - [\partial_\nu \delta\omega^a{}_{\mu b} + (\delta\omega^e{}_{\mu b})\omega^a{}_{\nu e} - \omega^e{}_{\nu b}(\delta\omega^a{}_{\mu e})] + \omega^\rho{}_{\mu\nu}\delta\omega^a{}_{\rho b} \\
&= \nabla_\mu(\delta\omega^a{}_{\nu b}) \\
&\quad - [\partial_\nu \delta\omega^a{}_{\mu b} + (\delta\omega^e{}_{\mu b})\omega^a{}_{\nu e} - \omega^e{}_{\nu b}(\delta\omega^a{}_{\mu e})] + \omega^\rho{}_{\nu\mu}\delta\omega^a{}_{\rho b} \\
&\quad + \omega^\rho{}_{\mu\nu}\delta\omega^a{}_{\rho b} - \omega^\rho{}_{\nu\mu}\delta\omega^a{}_{\rho b} \\
&= \nabla_\mu(\delta\omega^a{}_{\nu b}) - \nabla_\nu(\delta\omega^a{}_{\mu b}) + T^\rho{}_{\mu\nu}\delta\omega^a{}_{\rho b} \; .
\end{aligned}$$

Für die kovariante Ableitung gilt einerseits $\nabla_\mu \eta_{ab} = 0$, weil η_{ab} konstant ist, und andererseits $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ wegen der geforderten Kovarianz der Metrik (10.10.1). Daraus folgt dann auch $\nabla_\mu e^a{}_\nu = 0$, denn:

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_\mu g_{\nu\rho} = \nabla_\mu(e^a{}_\nu e^b{}_\rho \eta_{ab}) \\
&= [(\nabla_\mu e^a{}_\nu)e^b{}_\rho + e^a{}_\nu(\nabla_\mu e^b{}_\rho)]\eta_{ab} = [(\nabla_\mu e^a{}_\nu)e^b{}_\rho + e^b{}_\nu(\nabla_\mu e^a{}_\rho)]\eta_{ab} \quad \Rightarrow \\
0 &= [(\nabla_\mu e^a{}_\nu)e^b{}_\rho + e^b{}_\nu(\nabla_\mu e^a{}_\rho)]e_b{}^\rho = (\nabla_\mu e^a{}_\nu)\delta_\rho{}^\rho + (\nabla_\mu e^a{}_\rho)\delta_\nu{}^\rho \\
&= (\nabla_\mu e^a{}_\nu)(n+1) \quad \Rightarrow \quad \nabla_\mu e^a{}_\nu = 0 \; .
\end{aligned}$$

Jetzt soll die Variation von $\mathcal{S}_{EC}$ bezüglich des Zusammenhangs ω bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\delta_\omega \mathcal{S}_{EC} &= \kappa_g \int [\delta\mathcal{R}]\sqrt{-g_{det}}d^4x = \kappa_g \int [\delta(R^a{}_{b\mu\nu}\eta^{bc}e_a{}^\mu e_c{}^\nu)]\sqrt{-g_{det}}d^4x \\
&= \kappa_g \int [\nabla_\mu(\delta\omega^a{}_{\nu b}) - \nabla_\nu(\delta\omega^a{}_{\mu b}) + \delta\omega^a{}_{\rho b}T^\rho{}_{\mu\nu}]\eta^{bc}e_a{}^\mu e_c{}^\nu \sqrt{-g_{det}}d^4x \\
&= \kappa_g \int [\nabla_\mu(\delta\omega^a{}_{\nu b}\eta^{bc}e_a{}^\mu e_c{}^\nu) - \nabla_\nu(\delta\omega^a{}_{\mu b}\eta^{bc}e_a{}^\mu e_c{}^\nu) \\
&\quad + \delta\omega^a{}_{\rho b}T^\rho{}_{\mu\nu}\eta^{bc}e_a{}^\mu e_c{}^\nu]\sqrt{-g_{det}}d^4x
\end{aligned}$$

$$= \kappa_g \int [\nabla_\mu (\delta\omega^a{}_{\nu b} \eta^{bc} e_a{}^\mu e_c{}^\nu) - \nabla_\nu (\delta\omega^a{}_{\mu b} \eta^{bc} e_a{}^\mu e_c{}^\nu)$$

$$+ \delta\omega^a{}_\rho{}^c T^\rho{}_{ac}] \sqrt{-g_{det}} d^4x$$

$$= \kappa_g \int [\nabla_\mu (\delta\omega^a{}_\nu{}^c (e_a{}^\mu e_c{}^\nu - e_a{}^\nu e_c{}^\mu)) + \delta\omega^a{}_\rho{}^c T^\rho{}_{ac}] \sqrt{-g_{det}} d^4x \ .$$

Nun ist $\delta\omega^a{}_\nu{}^c$ ein Tensor und deshalb ist der Klammerausdruck nach dem ∇_μ ein Vektor:

$$V^\mu := \delta\omega^a{}_\nu{}^c (e_a{}^\mu e_c{}^\nu - e_a{}^\nu e_c{}^\mu) \ .$$

Mit 10.4.9, 10.10.7, 10.10.9 und dem obigen Lemma Teil 4 erhalten wir

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\rho V^\rho + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} V^\rho + K^\mu{}_{\mu\rho} V^\rho$$

$$= \partial_\rho V^\rho + \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} (\partial_\rho \sqrt{-g_{det}}) V^\rho + K^\mu{}_{\mu\rho} V^\rho$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} (\partial_\rho \sqrt{-g_{det}} V^\rho) + K^\mu{}_{\mu\rho} V^\rho$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} (\partial_\rho \sqrt{-g_{det}} V^\rho) + \frac{1}{2} (T^\mu{}_{\mu\rho} + T_\mu{}^\mu{}_\rho + T_\rho{}^\mu{}_\mu) V^\rho \ .$$

Nun ist

$$T_\rho{}^\mu{}_\mu = g_{\rho\kappa} T^{\kappa\mu}{}_\mu = g_{\rho\kappa} g^{\mu\lambda} T^\kappa{}_{\lambda\mu}$$

$$= \frac{1}{2} g_{\rho\kappa} (g^{\mu\lambda} T^\kappa{}_{\lambda\mu} + g^{\lambda\mu} T^\kappa{}_{\lambda\mu})$$

$$= \frac{1}{2} g_{\rho\kappa} g^{\mu\lambda} (T^\kappa{}_{\lambda\mu} + T^\kappa{}_{\mu\lambda}) = 0 \ ,$$

und damit folgt

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} (\partial_\rho \sqrt{-g_{det}} V^\rho) + T^\mu{}_{\mu\rho} V^\rho$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} (\partial_\rho \sqrt{-g_{det}} V^\rho) - T^\mu{}_{\rho\mu} V^\rho \ .$$

Somit ergibt sich für die Variation $\delta_\omega \mathcal{S}_{EC}$:

$$\delta_\omega \mathcal{S}_{EC} = \kappa_g \int [\nabla_\mu V^\mu + \delta\omega^a{}_\rho{}^c T^\rho{}_{ac}] \sqrt{-g_{det}} d^4x$$

$$= \kappa_g \int [\frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} \partial_\rho (\sqrt{-g_{det}} V^\rho) - T^\mu{}_{\rho\mu} V^\rho + \delta\omega^a{}_\rho{}^c T^\rho{}_{ac}] \sqrt{-g_{det}} d^4x \ .$$

Wie üblich vernachlässigt man den Oberflächenterm $\int \partial_\rho(\sqrt{-g_{det}}V^\rho)d^4x$ und erhält damit

$$\begin{aligned}
\delta_\omega \mathcal{S}_{EC} &= \kappa_g \int [-T^\mu{}_{\rho\mu}V^\rho + \delta\omega^a{}_\rho{}^c T^\rho{}_{ac}]\sqrt{-g_{det}}d^4x \\
&= \kappa_g \int [-T^\mu{}_{\rho\mu}\delta\omega^a{}_\nu{}^c e_a{}^\rho e_c{}^\nu + T^\mu{}_{\rho\mu}\delta\omega^a{}_\nu{}^c e_a{}^\nu e_c{}^\rho \\
&\quad + \delta\omega^a{}_\rho{}^c T^\rho{}_{ac}]\sqrt{-g_{det}}d^4x \\
&= \kappa_g \int [-e_c{}^\nu \delta\omega^a{}_\nu{}^c T^\mu{}_{a\mu} + e_a{}^\nu \delta\omega^a{}_\nu{}^c T^\mu{}_{c\mu} + \delta\omega^a{}_\rho{}^c T^\rho{}_{ac}]\sqrt{-g_{det}}d^4x \\
&= \kappa_g \int \delta\omega^a{}_\nu{}^c[-e_c{}^\nu T^\mu{}_{a\mu} + e_a{}^\nu T^\mu{}_{c\mu} + T^\nu{}_{ac}]\sqrt{-g_{det}}d^4x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$T^\nu{}_{ac} + e_a{}^\nu T^\mu{}_{c\mu} - e_c{}^\nu T^\mu{}_{a\mu} = 0 \ ,$$

und dies multiplizieren wir noch mit $e_\rho{}^a e_\sigma{}^c$ und erhalten

$$T^\nu{}_{\rho\sigma} + \delta_\rho{}^\nu T^\mu{}_{\sigma\mu} - \delta_\sigma{}^\nu T^\mu{}_{\rho\mu} = 0 \ . \qquad \square$$

Die obigen Ausführungen waren nun bislang reine Differentialgeometrie. Der grundlegende Gedanke von Einstein war es nun, das metrische Feld $g_{\mu\nu}$ an den Energie-Impulstensor der Materie und Strahlung zu koppeln:

$$Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} \stackrel{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}(g) \ . \tag{11.2.10}$$

Eine etwaige additive *kosmologische Konstante* $g^{\mu\nu}\Lambda$ auf der linken Seite verschiebt man heute zumeist auf die rechte Seite der Gleichung und interpretiert sie als Vakuum-Anteil des Energieimpuls-Tensors:

$$T^{\mu\nu}(g) = T^{\mu\nu}_{klasssich}(g) + T^{\mu\nu}_{Vakuum}(g) \ , \quad T^{\mu\nu}_{Vakuum}(g) := -\frac{c^4}{8\pi G}g^{\mu\nu}\Lambda \ . \tag{11.2.11}$$

Wegen 10.11.4 sind dies bei $n = 4$ also 10 gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungen für $g_{\mu\nu}$.

Auf analoge Weise schlug Cartan nun vor, einen Spindrehimpulstensor der Materie $S^\nu{}_{\rho\sigma} = -S^\nu{}_{\sigma\rho}$ an die Torsion zu koppeln:

$$T^\nu{}_{\rho\sigma} + \delta_\rho{}^\nu T^\mu{}_{\sigma\mu} - \delta_\sigma{}^\nu T^\mu{}_{\rho\mu} = \kappa_s S^\nu{}_{\rho\sigma} \ . \tag{11.2.12}$$

Diese Cartan-Gleichungen sind nun im Gegensatz zu den Einstein-Gleichungen aber keine Differentialgleichungen, sondern ein System rein algebraischer Gleischungen. Und dies heißt insbesondere, daß mit den Cartan-Gleichungen keine dynamischen Änderungen der Torsion der Raumzeit beschrieben werden können. Wenn man eine Dynamik der Torsion der Raumzeit beschreiben möchte benötigt man infolgedessen eine komplexere Wirkungsfunktion.

Wir setzen jetzt in 11.2.12 $\sigma = \nu$, summieren über über ν und erhalten

$$T^{\nu}{}_{\rho\nu} + T^{\mu}{}_{\rho\mu} - nT^{\mu}{}_{\rho\mu} = \kappa_s S^{\mu}{}_{\rho\mu} \quad \Rightarrow$$

$$(2-n)T^{\mu}{}_{\rho\mu} = \kappa_s S^{\mu}{}_{\rho\mu} \ .$$

Jetzt unterscheidet man die beiden Fälle $n \neq 2$ und $n = 2$:

1. $n \neq 2$:

$$T^{\mu}{}_{\rho\mu} = \frac{\kappa_s}{2-n} S^{\mu}{}_{\rho\mu} \quad \Rightarrow$$

$$T^{\nu}{}_{\rho\sigma} = \kappa_s [S^{\nu}{}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2-n}(\delta_{\rho}{}^{\nu} S^{\mu}{}_{\sigma\mu} - \delta_{\sigma}{}^{\nu} S^{\mu}{}_{\rho\mu})] \ . \tag{11.2.13}$$

Im Spinmaterie-freien Raum mit $n = 4$ ist die Torsion also 0 und damit stimmen in diesem Fall die AR- und die EC-Theorie überein.

2. $n = 2$:

$$S^{\mu}{}_{\rho\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} S^{0}{}_{00} + S^{1}{}_{01} = S^{1}{}_{01} = -S^{1}{}_{10} = 0 \\ S^{0}{}_{10} + S^{1}{}_{11} = S^{0}{}_{10} = -S^{0}{}_{01} = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad S^{\nu}{}_{\rho\sigma} = 0 \ .$$

Für $n = 2$ haben die Cartan-Gleichungen also nur im Spinmaterie-freien Raum eine Lösung.

Ohne Beweis sei hier nur kurz angemerkt, daß sich für ein klassisches Dirac-Feld ψ folgender Ausdruck für $S^{\mu}{}_{\rho\mu}$ ergibt (siehe z.B. Socolovsky (2011), S. 45):

$$S^{\mu}{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}\bar{\psi}\{\gamma^{\mu}, \frac{i}{4}[\gamma_{\rho}, \gamma_{\sigma}]\}\psi \ . \tag{11.2.14}$$

12 Der Satz von Gauß-Bonnet

12.1 Pierre Ossian Bonnet (1819 - 1892)

Pierre Ossian Bonnet wurde 1819 in Montpellier geboren. Er studierte ab 1838 Ingenieurwissenschaften an der École Polytechnique und an der École des Ponts et des Chaussées in Paris. Nach seinem Studienabschluß lehnte er jedoch eine angebotete Ingenieurstelle ab und wurde 1844 Repetitor an der École Polytechnique, um seinen mathematischen Studien nachgehen zu können. In Anerkennung seiner ersten Publikationen erhielt Bonnet 1844 eine Assistentenstelle an der École Polytechnique. 1862 folgte die Aufnahme in die französische Académie des Sciences, 1871 wurde er Directeur d´Études an der École Polytechnique, 1878 Professor für Astronomie an der Sorbonne. Kurz nach 1883 wurde er aufgrund von Denunziationen all seiner Ämter enthoben. Bonnet war verheiratet, Vater von drei Söhnen und lebte ein bescheidenes und zurückgezogenes Leben. Er starb 1892 in Paris.

Abbildung 12.1: P. O. Bonnet
unbekannt, PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_Ossian_Bonnet]

Bonnet veröffentlichte 1843 als seine erste Arbeit eine Untersuchung über Konvergenzkriterien bei unendlichen Reihen. Eine weitere Arbeit aus diesem Bereich wurde 1849 von der Brüsseler Akademie der Wissenschaften ausgezeichnet. Aber bereits im Jahr 1844 hatte Bonnet für sich die Differentialgeometrie entdeckt und publizierte 1848 seine erste Arbeit mit dem Titel "Sur quelques propriétiés générals des surfaces". In dieser Arbeit führte er den Begriff der geodätischen Krümmung und der Torsion ein und bewies den berühmten und heute nach ihm benannten Gauß-Bonnet Satz. Die Differentialgeometrie wurde für Bonnet lebenslang zu seinem liebsten und wichtigsten Forschungsthema, obwohl er daneben auch in den Gebieten der Kartographie, Algebra, Mechanik und der mathematischen Physik publizierte.

[Quellen: Wikipedia-Bonnet (2013), Pilet u. Struik (1970)].

12.2 Der Umlaufsatz von Hopf

Für den im Folgenden angeführten Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet benötigen wir den Umlaufsatz von Hopf. Wir orientieren uns an Spivak (1979), Bd. II, S. 26 ff., und Eschenburg u. Jost (2007), S. 24 und S. 212.

Zunächst definiert man den Begriff der Gesamtkrümmung $\bar{\kappa}$ einer Kurve $c(s)$ in $\mathbb{E}^2$:

Definition 12.2.1 *Sei $c : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in $\mathbb{E}^2$ und $\kappa(s)$ mit $s \in [s_0, s_1] \subseteq [a,b]$ die Krümmung entlang von c. Dann ist die Gesamtkrümmung definiert als*

$$\bar{\kappa}(s_0, s_1) := \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds \ . \tag{12.2.1}$$

Durch Vorgabe der Krümmung $\kappa(s)$ und der Anfangswerte von Ort $p_0 = c(s_0)$ und Tangente $T_0 = c'(s_0)$ ist die Kurve $c(s)$ vollständig bestimmt, denn mit 5.1.8 und 5.1.10 folgt:

$$c''(s) = \kappa(s)N(s) = \kappa(s)Jc'(s) \quad \Leftrightarrow \quad T'(s) = \kappa(s)N(s) = \kappa(s)JT(s) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi(s_1) := \int\limits_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds \ , \\ T(s_1) = c'(s_1) = T_0(\cos\varphi(s_1), \sin\varphi(s_1))^T \ , \text{ mit } |T_0| = 1 \ , \\ c(s) = p_0 + \int\limits_{s_0}^{s} c'(s_1) ds_1 \ . \end{cases}$$

Beweis. Da die Kurve $c(s)$ nach Bogenlänge parametrisiert sein soll, ist der Tangentialvektor $T(s) = c'(s)$ ein Einheitsvektor. Aus $|T| = 1$ folgt in $\mathbb{E}^2$ also, daß wir $T = T_0(\cos\varphi(s_1), \sin\varphi(s_1))^T$ mit $|T_0| = 1$ setzen können.

$$T'(s) = \kappa(s)JT(s) \quad \Rightarrow$$

$$T'(s) = T_0 \begin{pmatrix} -\sin\varphi(s) \\ \cos\varphi(s) \end{pmatrix} \varphi'(s) = \kappa(s)JT_0 \begin{pmatrix} \cos\varphi(s) \\ \sin\varphi(s) \end{pmatrix} = \kappa(s)T_0 \begin{pmatrix} -\sin\varphi(s) \\ \cos\varphi(s) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi'(s) = \kappa(s) \quad \Rightarrow \quad \varphi(s_1) := \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds \ . \qquad \square$$

Damit ergibt sich für die Gesamtkrümmung

$$\bar{\kappa}(s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds = \varphi(s_1) - \varphi(s_0) \ . \tag{12.2.2}$$

In $\mathbb{E}^2$ können Tangenten unverändert verschoben werden. Daher kann man die Tangenten $T(s_1)$ und $T(s_0)$ miteinander vergleichen, bzw. den Winkel zwischen ihnen bestimmen (den Außenwinkel, wenn $s_1 > s_0$):

$$\arccos \frac{\langle T(s_1) \mid T(s_0)\rangle}{||T(s_1)|| \cdot ||T(s_0)||} = \arccos(\cos\varphi(s_1)\cos\varphi(s_0) + \sin\varphi(s_1)\sin\varphi(s_0))$$

$$= \arccos(\cos(\varphi(s_1) - \varphi(s_0))) = \varphi(s_1) - \varphi(s_0)\ .$$

Weiter kann man problemlos eine Krümmung für stetige aber nicht differenzierbare Knickstellen von $c(s)$ an der Stelle s_0 mittels des Außenwinkels $\varphi_A(s_0) := \lim_{\epsilon\to 0}(\varphi(s_0+\epsilon) - \varphi(s_0-\epsilon))$ definieren:

$$\kappa(s_0) := \delta(s-s_0)\lim_{\epsilon\to 0}(\varphi(s_0+\epsilon) - \varphi(s_0-\epsilon)) = \delta(s-s_0)\,\varphi_A(s_0)\ . \qquad (12.2.3)$$

Definition 12.2.2 *Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$ heißt geschlossen, wenn $c(a) = c(b)$ und $c'(a) = c'(b)$ gilt.*

Eine nach Bogenlänge parametrisierte geschlossene Kurve $c : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$ heißt einfach geschlossen, wenn c auf $[a,b]$ injektiv ist, d.h. wenn die Kurve sich nicht selbst schneidet.

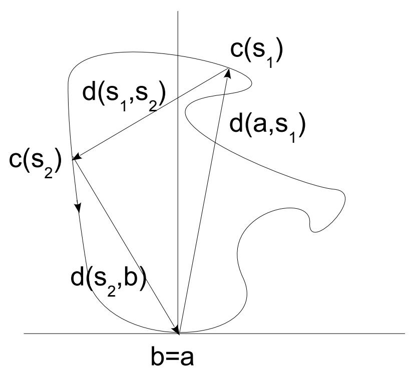

Abbildung 12.2: zum Umlaufsatz von Hopf

Satz 12.2.3 (Umlaufsatz von Hopf) *Für eine einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{E}^2$ ist die Gesamtkrümmung $\bar{\kappa}(a,b)$ bei einem einmaligen Umlauf gerade 2π.*

Beweis. Habe die einfach geschossene Kurve $c(s)$ in $\mathbb{E}^2$ als eine Funktion von x und y in einem $x-y$ Koordinatensystem ihr y-Minimum in dem Punkt $c(a) = c(b)$, so legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in diesen Punkt $c(a) = c(b) = (0,0)$. Damit liegt $c(s)$ nicht unterhalb der x-Achse. Wir führen die Sekante $d(s_1,s_2)$ zwischen zwei Punkt $c(s_1)$ und $c(s_2)$ ein und den Einheitsvektor $d_0(s_1,s_2)$ im Punkt $c(s_1)$ in Richtung der Sekanten $d(s_1,s_2)$. Hierbei sei der Einheitsvektor im Punkt $(0,0)$ in x-Richtung e_x.

$$d(s_1,s_2) := c(s_2) - c(s_1)\ , \quad d_0(s_1,s_2) := \frac{d(s_1,s_2)}{|d(s_1,s_2)|}\ ,$$

$$d_0(s,s) := c'(s) ,$$

$$d_0(a,a) = d_0(b,b) := e_x , \quad d_0(a,b) := \lim_{\epsilon\to 0} d_0(a+\epsilon,b) = -e_x .$$

Da $|d_0(s_1,s_2)| = 1$ können wir ohne Beschränkung schreiben

$$d_0(s_1,s_2) = d_{0c}(\cos\varphi_d(s_1,s_2), \sin\varphi_d(s_1,s_2))^T \quad \text{mit } |d_{0c}| = 1 .$$

Mit 12.2.2 ergibt sich für die Gesamtkrümmung von $c(s)$

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(a,b) &= \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi_d(b,b) - \varphi_d(a,a)\\ &= \varphi_d(b,b) - \varphi_d(a,b) + \varphi_d(a,b) - \varphi_d(a,a) .\end{aligned}$$

Nun zeigt für $s \in [a,b]$ der Sekanten-Einheitsvektor $d_0(a,s)$ stets in die obere Halbebene und beschreibt einen Winkel von $d_0(a,a) = e_x$ bis zu $d_0(a,b) = -e_x$, also gerade π. Der Sekanten-Einheitsvektor $d_0(s,b)$ zeigt stets in die untere Halbebene und beschreibt einen Winkel von $d_0(a,b) = -e_x$ bis zu $d_0(b,b) = e_x$, also ebenfalls gerade π. Somit ist $\bar{\kappa}(a,b) = 2\pi$. □

Jetzt stellt sich die Frage, ob man dieses Ergebnis des Hopfschen Umlaufsatzes von $\mathbb{E}^2$ auf eine 2-dimensionale Fläche in $\mathbb{E}^3$ verallgemeinern kann?

Korollar 12.2.4 *Sei $M \subset \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit in $\mathbb{E}^3$, dann gilt auch hier der Umlaufsatz von Hopf.*

Beweis. Den Beweis führt man mit einem Homotopie-Argument unter der Voraussetzung, daß in dem Bereich $U \subseteq M \subset \mathbb{E}^3$, in dem die Kurve $c(s)$ liegt, die Riemannsche Metrik g regulär ist. Wenn g_0 die euklidische Metrik in $\mathbb{E}^2$ ist, dann führen wir eine stetige Deformation von g_0 in g durch:

$$g_t := t \cdot g + (1-t) \cdot g_0 \quad t \in [0,1] .$$

Nun kann die Gesamtkrümmung einer einfach geschlossenen Kurve nur ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, also $\bar{\kappa}(a,b) = 2\pi n$. Für die euklidische Metrik g_0 ist $n = 1$. Bei einer stetigen Deformation von g_0 über g_t zu g bleibt nun $n = 1$ erhalten. Dies gilt natürlich nur, solange g_t nicht für irgendeinen Wert von t eine Singularität hat. □

Die Erweiterung des Hopfschen Umlaufsatzes auf eine 2-dimensionale glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit M in $\mathbb{E}^3$ kann insoweit als *intrinsisch* gelten, als ja nur von der Metrik g als einer *inneren Größe* von M Gebrauch gemacht wurde.

12.3 Der lokale Satz von Gauß-Bonnet

Gauß war dem später so genannten Satz von Gauß-Bonnet bereits nahe gekommen, wie seine 50 Jahre nach seinem Tod (1855) veröffentlichten Privataufzeichnungen gezeigt haben (siehe: Blaschke u. Reichardt (1960), S. 48-49). Aber Gauß hatte, wie es so häufig seine Gewohnheit gewesen war, zu diesem Thema nichts publiziert, weil er seine Überlegungen nach seinen eigenen Kriterien noch nicht für vollkommen und abgeschlossen hielt. So ist also dieser wichtige Satz zuerst von Bonnet im Jahr 1848 veröffentlicht worden. Der bedeutende österreichische Mathematiker Wilhelm Blaschke (1885-1962) führte dann um 1920 den Namen „Satz von Gauß-Bonnet" ein.

Ein Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet mit einfachen Hilfsmitteln findet sich etwa in Eschenburg u. Jost (2007), S. 209 ff. Wir folgen hier jedoch einem Beweis von Spivak (1979), Bd. III, S. 386 ff. in der Sprache der Differentialformen von Élie Cartan. Cartans Darstellung ist auf natürliche Weise der *Integration auf Mannigfaltigkeiten* angepaßt und sein Begriff der *Zusammenhangsformen* läßt sich sehr schön auf Mannigfaltigkeiten von Lie-Gruppen verallgemeinern. Und die Theorie der *Prinzipalbündel (Hauptfaserbündel)* von Liegruppen über der Raumzeit ist ja die Grundlage der modernen physikalischen Eichtheorien.

Wir betrachten eine 2-dimensionale, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^3$ mit einem Levi-Civita Zusammenhang und einer Gaußschen Krümmung K. Diese Krümmung $K = R^{12}{}_{12}$ ist die einzige unabhängigen Komponente des Riemannschen Krümmungstensors in 2 Dimensionen (bei einem Levi-Civita Zusammenhang). Weiter enthalte M eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $N \subset M$ mit einem zusammenhängenden Rand ∂N, so daß $c : [a, b] \to \partial N$ eine geschlossene, positiv orientierte Kurve in M ist. Wir wählen ein orthonormales Koordinatensystem und damit sind die Strukturkonstanten $c_{ab}{}^c = 0$ (siehe 10.2.5).

Die Zusammenhang-1-Form $\omega^a{}_b$ in einer Orthonormalbasis $\{e_a\}$ transformiert sich beim Übergang zu einer anderen Orthonormalbasis $\{e'_a\}$ mit einer Matrix $\Lambda^a{}_b \in SO(2)$, siehe 10.9.9, bzw. 10.9.10:

$$\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \ , \quad (\Lambda^{-1})^a{}_b = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \ , \quad \Rightarrow$$

$$d\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi \ .$$

In einer nichtholonomen Orthogonalbasis $\{e_a\}$ gilt $g^{ab} = \delta^{ab}$ und damit folgt:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega^1{}_1 & \omega^1{}_2 \\ \omega^2{}_1 & \omega^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1{}_2 \\ -\omega^1{}_2 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\text{mit} \ \ \omega^a{}_b = \omega_{ab} = -\omega_{ba} = -\omega^b{}_a \ .$$

Für die Basistransformation von $\{e_a\}$ nach $\{e'_a\}$ gilt also:

$$\omega'^a{}_d = \Lambda^a{}_b \omega^b{}_c (\Lambda^{-1})^c{}_d - (d\Lambda^a{}_c)(\Lambda^{-1})^c{}_d \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \omega'^1{}_2 &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega^1{}_2 \\ -\omega^1{}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \omega^1{}_2 \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\omega^1{}_2 + d\varphi) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\omega'^1{}_2 = \omega^1{}_2 + d\varphi \; . \tag{12.3.1}$$

Sei jetzt $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Tangente $c'(s) = T(s)$. Da $c(s)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $|c'(s)| = |T(s)| = 1$. Dann hatten wir die geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ in 7.0.3 als die Projektion von $c''(s) = \frac{dT(s)}{ds}$ in die Tangentialebene von M am Punkt $c(s)$ definiert:

$$\kappa_g(s) := c''^T(s) = (\frac{dT(s)}{ds})^T = \frac{\nabla T(s)}{ds} = \nabla_T T\,|_{c(s)} \; . \tag{12.3.2}$$

Aufgrund dieser Definition ist $\kappa_g(s)$ ein Vektor in der Tangentialebene von M, der senkrecht zur Tangente $T(s)$ am Punkt $c(s)$ steht. Wir wählen nun die Orientierung der Kurve $c(s)$ so, daß $T(s)$ und $\kappa_g(s)$ ein positiv orientiertes Koordinatensystem bilden und nennen die entsprechenden Einheitsvektoren $e'_1(s) = T(s)$ und $e'_2(s) = \kappa_g(s)/|\kappa_g(s)|$. Also gilt für den Betrag der geodätischen Krümmung (mit 10.4.5 und 10.8.1:

$$\begin{aligned}
|\kappa_g(s)| &= \langle \nabla_{e'_1} e'_1 \mid e'_2 \rangle = \langle \omega'^\gamma{}_{11} e'_\gamma \mid e'_2 \rangle = \omega'^2{}_{11} \\
&= \omega'^2{}_{\alpha 1} \theta'^\alpha(e'_1) = \omega'^2{}_1(e'_1) = \omega'^2{}_1(c'(s)) \; .
\end{aligned} \tag{12.3.3}$$

In Bezug auf unsere Standard-Orthonormalbasis $\{e_a\}$ ergibt sich mit 12.3.1 für die geodätische Krümmung:

$$\begin{aligned}
|\kappa_g(s)| &= \omega'^2{}_1(c'(s)) = \omega^2{}_1(c'(s)) + d\varphi(c'(s)) \\
&= \omega^2{}_1(c'(s)) + \frac{d\varphi(c(s))}{ds}
\end{aligned} \tag{12.3.4}$$

Satz 12.3.1 (Gauß-Bonnet-lokal) *Sei $M \subset \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem Levi-Civita Zusammenhang, einer Gaußschen Krümmung K und einem 2-dimensionalen Flächenelement dF. M enthalte eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $N \subset M$ mit einem zusammenhängenden Rand ∂N, so daß $c : [a,b] \to \partial N$ eine geschlossene, positiv orientierte Kurve in M ist und $|\kappa_g(s)|$ der Betrag der geodätischen Krümmung auf dem Rand, dann gilt:*

$$\int\limits_N K\,dF + \int\limits_{\partial N} |\kappa_g(s)|\,ds = 2\pi\ . \tag{12.3.5}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\int\limits_N K\,dF &= \int\limits_N K\,\theta^1 \wedge \theta^2 = \int\limits_N R^{12}{}_{12}\,\theta^1 \wedge \theta^2 = \int\limits_N R^1{}_{212}\,\theta^1 \wedge \theta^2 \\
&= \frac{1}{2}(\int\limits_N R^1{}_{212}\,\theta^1 \wedge \theta^2 + \int\limits_N R^1{}_{221}\,\theta^2 \wedge \theta^1) \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_N R^1{}_{2\gamma\delta}\,\theta^\gamma \wedge \theta^\delta = \int\limits_N R^1{}_2 \\
&= \int\limits_N d\omega^1{}_2 = -\int\limits_N d\omega^2{}_1 = -\int\limits_{\partial N} \omega^2{}_1 \\
&= -\int\limits_a^b \omega^2{}_1(c'(s))\,ds = -\int\limits_a^b |\kappa_g(s)|\,ds + \int\limits_a^b \frac{d\varphi(c(s))}{ds}\,ds \\
&= -\int\limits_a^b |\kappa_g(s)|\,ds + \varphi(b) - \varphi(a)\ .
\end{aligned}$$

Nach dem zuvor bewiesenen Umlaufsatz von Hopf ist $\varphi(b) - \varphi(a)$ für $c(b) = c(a)$ und einen einmaligen Umlauf gerade 2π, und damit folgt:

$$\int\limits_N K\,dF + \int\limits_{\partial N} |\kappa_g(s)|\,ds = 2\pi\ . \qquad \square$$

Korollar 12.3.2 *Wenn sich die differenzierbare Kurve $c(s) = \partial N$ zusammensetzt aus n differenzierbaren Teilstücken ∂N_i und n stetigen, nicht differenzierbaren Knickstellen an den Stellen s_i, mit den Außenwinkeln $\varphi_A(s_i)$, $i \in 1 \ldots n$, dann lautet die Gauß-Bonnet-Formel mit 12.2.3:*

$$\int\limits_N K\,dF + \sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\,ds + \varphi_A(s_i)\right] = 2\pi\ , \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_N K\,dF + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\,ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{n}\varphi_A(s_i)\ , \tag{12.3.6}$$

bzw. mit den Innenwinkeln $\varphi_I(s_i) := (\pi - \varphi_A(s_i))$

$$\int\limits_N K\,dF + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\,ds = (2-n)\pi + \sum_{i=1}^{n}\varphi_I(s_i)\ . \tag{12.3.7}$$

Diese Gauß-Bonnet-Formel enthält als Spezialfälle viele der historisch früher gefundenen geometrischen Flächenformeln:

- Euklids Winkelsumme im ebenen Dreieck (3.2.4):

$$K = 0\ ,\ |\kappa_g(s)| = 0\ ,\ n = 3\ ,\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{3}\varphi_I(s_i) = \pi\ . \tag{12.3.8}$$

- Harriot und Girards Fläche von geodätisch sphärischen Dreiecken (4.0.3):

$$K = \frac{1}{r^2}\ ,\ |\kappa_g(s)| = 0\ ,\ n = 3\ ,\ \Rightarrow\ \frac{F}{r^2} + \sum_{i=1}^{3}\varphi_A(s_i) = 2\pi\ . \tag{12.3.9}$$

- das Gaußsche *theorema elegantissimum*, d.h.
  die Fläche von geodätischen Dreiecken auf 2-dim. Flächen:

$$\int\limits_N K\,dF = (2-3)\pi + \sum_{i=1}^{3}\varphi_A(s_i). = \sum_{i=1}^{3}\varphi_A(s_i) - \pi. \tag{12.3.10}$$

12.4 Der globale Satz von Gauß-Bonnet

Euler hatte für Polyeder in $\mathbb{E}^3$ seine berühmte Polyeder-Formel $\chi = e - k + f = 2$ gefunden (siehe 8.0.5). Hierbei bezeichnen e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten, f die Anzahl der Flächen und die Invariante χ heißt *Euler-Charakteristik*. Es zeigt sich nun, daß diese Euler Charakteristik eine topologische Invariante ist und mit dem Satz von Gauß-Bonnet eng zusammenhängt.

Es ist ein relativ schwierig zu beweisender Satz, daß jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine Überdeckung mit Simplexen (im 2-dim. also Dreiecken) gestattet, eine sog.

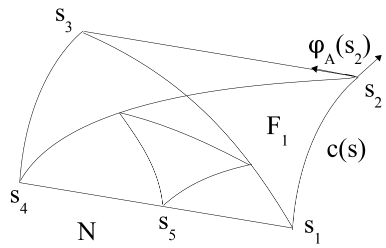

Abbildung 12.3: Triangulierung einer 2-dim. Fläche

Triangulierung. Für eine allgemeine Diskussion ohne Beweis siehe Spivak (1979), Bd. I, S. 579 ff.; für einen Beweis in $\mathbb{R}^n$ siehe Bär (2010), S. 263 ff., und für einen Beweis in beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten siehe Munkres (1966), S. 69 ff. Wir setzen im Folgenden die Existenz einer Triangulierung der 2-dim. Fläche M voraus.

Satz 12.4.1 (Gauß-Bonnet-global) *Sei $M \subset \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem Levi-Civita Zusammenhang, einer Gaußschen Krümmung K und einem 2-dimensionalen Flächenelement dF. M enthalte eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $N \subseteq M$ mit der Euler-Charakteristik $\chi(N)$ mit einem zusammenhängenden Rand ∂N, so daß $c : [a, b] \to \partial N$ eine geschlossene, positiv orientierte Kurve in M ist und $|\kappa_g(s)|$ der Betrag der geodätischen Krümmung auf dem Rand mit e_R Knickpunkten, dann gilt:*

$$\int_N K\, dF + \sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\, ds + \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) = 2\pi\chi(N)\ . \tag{12.4.1}$$

Beweis. Die meisten Autoren, so auch Spivak (1979), Bd. III, S. 400 ff., erleichtern sich die Arbeit, indem sie diesen Satz nur für geschlossene, d.h. randlose, kompakte Flächen N beweisen. Wir wollen hier den allgemeinen Fall für eine Fläche N mit einem Rand ∂N beweisen (siehe auch do Carmo (1976), S. 268 ff.).

Sei f die Anzahl der Dreiecke der Triangulierung von N und $k = k_I + k_R$ die Summe von inneren und äußeren Kanten. Dann gilt $3f = 2k_i + k_R$, denn ein Dreieck hat 3 Kanten und die inneren Kanten werden beim Summieren über alle Dreiecke doppelt gezählt, da sie zwei Dreiecke beranden. Da der Rand geschlossen ist, gilt für die Randkanten und Randecken auch $k_R = e_R$.

Sei $\varphi_{I,mn}$ der n-te Innenwinkel des Dreiecks F_m, dann folgt aus 12.3.7:

$$\int_N K\, dF = \sum_{m=1}^{f} \int_{F_m} K\, dF$$

$$= -\sum_{m=1}^{f} \int_{\partial F_m} |\kappa_g(s)|\, ds + \sum_{m=1}^{f} \sum_{n=1}^{3} \varphi_{I,mn} + \sum_{m=1}^{f} (2-3)\pi\ .$$

Für alle inneren Kanten verschwindet die Summe über das Integral der geodätischen Krümmung, da jede innere Kante zweifach und mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen wird. Wir numerieren die Flächen mit m und die Kanten mit m' und erhalten:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{f} \int\limits_{\partial F_m} |\kappa_g(s)|\, ds &= \sum_{m'=1}^{k} \int\limits_{\partial F_{m'}} |\kappa_g(s)|\, ds \\
&= \sum_{m'=1}^{k_I} \int\limits_{\partial F_{m'}} |\kappa_g(s)|\, ds + \sum_{m'=1}^{k_R} \int\limits_{\partial F_{m'}} |\kappa_g(s)|\, ds = \\
&= \sum_{m'=1}^{k_R} \int\limits_{\partial F_{m'}} |\kappa_g(s)|\, ds = \sum_{i=1}^{e_R} \int\limits_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\, ds \;.
\end{aligned}$$

Was ist nun mit der Summe über alle Innenwinkel? Wir formen die Summe über alle Dreiecke in eine Summe über alle Eckpunkte um. Dabei sei f_p die Anzahl der Dreicksflächen, die im p-ten Eckpunkt zusammentreffen, $\tilde{\varphi}_{I,pq}$ der q-te Innenwinkel im p-ten Eckpunkt. Weiter unterscheiden wir zwischen inneren Eckpunkten und Rand-Eckpunkten $e = e_I + e_R$.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{f} \sum_{n=1}^{3} \varphi_{I,mn} &= \sum_{p=1}^{e} \sum_{q=1}^{f_p} \tilde{\varphi}_{I,pq} \\
&= \sum_{p=1}^{e_I} \sum_{q=1}^{f_p} \tilde{\varphi}_{I,pq} + \sum_{p=1}^{e_R} \sum_{q=1}^{f_p} \tilde{\varphi}_{I,pq} \;.
\end{aligned}$$

An jedem inneren Eckpunkt summieren sich die Innenwinkel gerade zu 2π, an jedem Rand-Eckpunkt ist die Summe der Innenwinkel plus dem Außenwinkel $\varphi_A(s_p)$ plus π gerade gleich 2π:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{f} \sum_{n=1}^{3} \varphi_{I,mn} &= 2\pi e_I + 2\pi e_R - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) - \pi e_R \\
&= 2\pi e - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) - \pi k_R \;.
\end{aligned}$$

Und damit folgt für das Integral über die Krümmung:

$$\int\limits_N K\, dF = -\sum_{i=1}^{e_R} \int\limits_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\, ds - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) + 2\pi e - \pi k_R - 3\pi f + 2\pi f$$

$$= -\sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\, ds - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) + 2\pi e - \pi k_R - \pi(2k_I + k_R) + 2\pi f$$

$$= -\sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\, ds - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) + 2\pi e - 2\pi k + 2\pi f \quad \Rightarrow$$

$$\int_N K\, dF + \sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)|\, ds + \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) = 2\pi\chi(N) \; . \qquad \square$$

Die Euler-Charakteristik $\chi(N)$ einer 2-dimensionalen, kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{E}^3$ wurde oben rein topologisch als $\chi(N) = e - k + f$ mit der Anzahl der Ecken e, Kanten k und Flächen f einer Triangulierung von N bestimmt. Poincaré hat nun 1895 bewiesen, daß diese Eulercharakteristik $\chi(N)$ gerade gleich der Summe der Indizes von isolierten Nullstellen eines tangentialen Vektorfeldes auf N ist. Dies ist nun ein höchst bemerkenswertes Ergebnis, denn ein Vektorfeld auf N ist ja ein differentialgeometrisches, bzw. analytisches Objekt. Hier zeigt sich also zum ersten Mal deutlich, wie ein *Indexsatz* die mathematischen Gebiete der Topologie und der Analysis verbindet!

Was ist der Index einer isolierten Nullstelle eines tangentialen Vektorfeldes auf einer Mannigfaltigkeit? Da die Nullstelle p_i des Vektorfeldes nach Voraussetzung isoliert ist kann man eine ϵ-Umgebung $D_i(\epsilon)$ um p_i legen, auf deren Rand das Vektorfeld nicht verschwindet. Wenn man jetzt im positiven Umlaufsinn auf dem Rand $\partial D_i(\epsilon)$ einmal die Nullstelle umläuft, so wird das Vektorfeld $k \in \mathbb{Z}$ Umläufe gemacht haben, und diese Zahl nennt man $\mathrm{ind}(p_i) := k$, d.h. den Index des Vektorfeldes an der Stelle p_i. Mehr zu diesem Konzept findet sich im Kapitel 13.3.

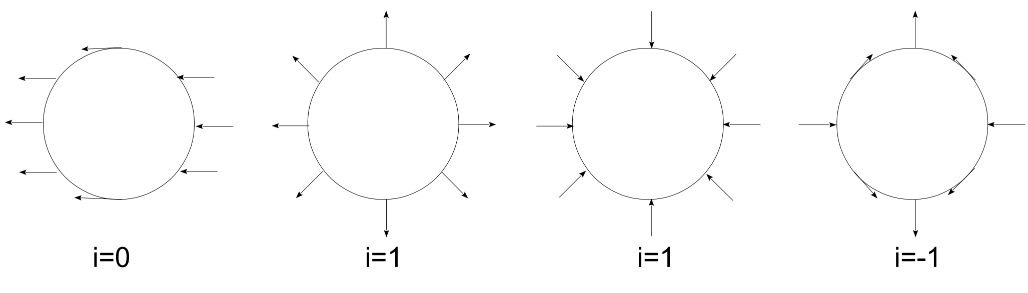

Abbildung 12.4: Beispiele von Indizes eines Vektorfeldes auf einer 2-dim. Fläche

Satz 12.4.2 (Poincaré) *Sei $N \subset \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale, orientierbare, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand mit einem Levi-Civita Zusammenhang, einer Gaußschen Krümmung K und einem 2-dimensionalen Flächenelement dF. Sei $X \in$*

T_pN ein tangentiales Vektorfeld auf N mit den isolierten, endlich vielen Nullstellen p_i, $i = 1 \dots n$ mit den Indizes $\mathrm{ind}(p_i)$, *dann ist*

$$\chi(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ind}(p_i) \; . \tag{12.4.2}$$

Beweis. Die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand N sei kompakt und orientierbar. Da die Nullstellen des Vektorfeldes X nach Voraussetzung isoliert sind, kann es wegen der Kompaktheit nur endlich viele Nullstellen p_i, $i = 1 \dots n$, geben. Es soll jetzt $\int_N K\, dF$ mittels des Vektorfelds X bestimmt werden. Wir wählen um jedes p_i herum eine ϵ-Umgebung $D_i(\epsilon)$.

Auf der abgeschlossenen Menge $N(\epsilon) := N - \cup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{D}_i(\epsilon)$ ist $||X|| \neq 0$, also kann man dort mit $X_1 := X/||X||$ ein Feld von Einheitsvektoren definieren und senkrecht dazu und positiv orientiert ein weiteres Feld von Einheitsvektoren X_2. Die Vektorfelder X_1 und X_2 stellen also auf $N(\epsilon)$ eine Orthonormalbasis dar und bezüglich dieser Basis sei ${\omega^2}_1$ die Zusammenhang-1-Form. Beim Beweis von 12.3.5 hatten wir für das Integral über die Gauß-Krümmung gefunden:

$$\int\limits_{N(\epsilon)} K\, dF = \int\limits_{N(\epsilon)} d{\omega^1}_2 \; .$$

Mit dem Satz von Stokes wird daraus

$$\int\limits_{N(\epsilon)} K\, dF = \int\limits_{N(\epsilon)} d{\omega^1}_2 = \int\limits_{\partial N(\epsilon)} {\omega^1}_2 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i(\epsilon)} {\omega^1}_2 \; .$$

Jetzt können wir auf ganz N ein zusätzliches festes Orthonormalsystem $\{X_1', X_2'\}$ einführen. Wenn der Winkel zwischen X_1' und X_1 mit φ bezeichnet werde, dann hängen gemäß 12.3.1 die Zusammenhang-1-Formen folgendermaßen zusammen: ${\omega'^1}_2 = {\omega^1}_2 + d\varphi$. Aus der Sicht des Inneren von $D_i(\epsilon)$ kehrt sich eine von außen als positiv betrachtete Umlaufrichtung jedoch um, so daß wir ${\omega'^1}_2 = {\omega^1}_2 - d\varphi$ erhalten und damit:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{N(\epsilon)} K\, dF &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i(\epsilon)} {\omega^1}_2 = \sum_{i=1}^{n} \{ \int\limits_{\partial D_i(\epsilon)} d\varphi + \int\limits_{\partial D_i(\epsilon)} {\omega'^1}_2 \} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{ 2\pi \cdot \mathrm{ind}(p_i) + \int\limits_{\partial D_i(\epsilon)} {\omega'^1}_2 \} \; .
\end{aligned}$$

Da ${\omega'^1}_2$ überall auf N fixiert ist, also auch im Innern von $D_i(\epsilon)$, können wir den Grenzübergang $\epsilon \to 0$ problemlos durchführen und erhalten:

$$\int\limits_{N} K\, dF = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \cdot \mathrm{ind}(p_i) \; . \tag{12.4.3}$$

Die Anwendung des globalen Satzes von Gauß-Bonnet im Fall einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit N ohne Rand (12.4.1) ergibt

$$\int_N K\, dF = 2\pi\chi(N)$$

und also ist $\chi(N) = \sum_{i=1}^n \operatorname{ind}(p_i)$. □

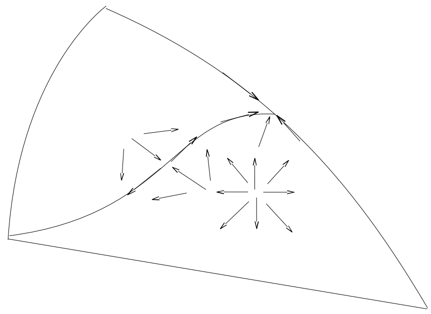

Abbildung 12.5: Konstruktion eines speziellen Vektorfeldes auf einer 2-dim. Fläche

Man kann nun mit dem Ergebnis 12.4.3 auch zurückschließen auf die topologische Definition der Euler-Charakteristik. Dazu trianguliert man die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und konstruiert ein Vektorfeld X, das in der Mitte jedes Dreiecks eine Quelle, in der Mitte jeder Kante einen Sattelpunkt und an jeder Ecke eine Senke hat (siehe Zeichnung). Die Indizes sind dann

$$\operatorname{ind}(Quelle_i) = 1\ , \quad \operatorname{ind}(Sattelpunkt_i) = -1\ , \quad \operatorname{ind}(Ecke_i) = 1\ .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \operatorname{ind}(p_i) &= \sum_{i=1}^e \operatorname{ind}(Ecke_i) + \sum_{i=1}^k \operatorname{ind}(Sattelpunkt_i) + \sum_{i=1}^f \operatorname{ind}(Quelle_i)\\ &= e - k + f = \chi(N)\ . \end{aligned} \tag{12.4.4}$$

13 Der Abbildungsgrad von Brouwer

13.1 Der Satz von Brouwer

Heute sind zwei recht gegensätzliche Darstellungen des Abbildungsgrades von Brouwer sehr verbreitet, der Zugang der nichtlinearen Funktionalanalysis, incl. der Verallgemeinerung von Leray-Schauder auf Banach-Räume (siehe etwa Růžička (2004), Deimling (1985), Zeidler (1986)) und der geometrisch-topologische Zugang. Dies ist natürlich ein Hinweis darauf, daß gewisse Teile der Funktionalanalysis und der geometrischen Topologie sehr eng miteinander verwandt sind. Explit sichtbar wird diese innere Verbundenheit letztlich in den Indexsätzen zu elliptischen Pseudodifferential-Operatoren von Atiyah und Singer. Wir folgen hier dem geometisch-topologischen Zugang zum Abbildungsgrad von Brouwer nach Milnor (1965), S.27 ff. und Guillemin u. Pollack (1974), S.188 ff. Für die Erweiterungen im Fall von Mannigfaltigkeiten mit Rand folgen wir Choquet-Bruhat u. a. (1978), S. 477 ff.

Das dünne Büchlein von Milnor (1965) mit dem Titel '*Topology from the Differentiable Viewpoint*' ist mit seinen nur 69 Seiten in seiner Eleganz ein kleines mathematisches Juwel! Allerdings bleiben für Anfänger bei Milnor (1965) doch einige Fragen offen und so haben Guillemin u. Pollack (1974) in ihrem Buch eine ausführlichere und manchmal leichter zugängliche Darstellung des gleichen Themas vorgelegt. Diese beiden Darstellungen waren für Jahrzehnte die Standardlektüre für alle Novizen im Gebiet der Differentialtopologie. Erst kürzlich hat der Autor dieser Arbeit das sehr schöne moderne Lehrbuch von Shastri (2011) entdeckt, das in seiner Ausführlichkeit und Klarheit insbesondere Anfängern sehr entgegenkommt und vermutlich für längere Zeit eine neue Standardlektüre werden dürfte.

Weil der Brouwersche Abbildungsgrad eine ganze Zahl ist, sprechen Physiker bei Anwendungen im Kontext der Quantentheorie auch von einer *topologischen Quantenzahl*.

Seien M und N zwei kompakte, orientierbare, m-dimensionale Mannigfaltigkeiten (ohne Rand), $f : M \to N$ eine C^∞ Abbildung, $\{\partial_{u^i}\}$, bzw. $\{\partial_{x^i}\}$ mit $i = 1, \ldots, m$ lokale Koordinatensysteme von M, bzw. N, dann gilt für den Rücktransport einer k-Form ω eines Diffeomorphismus f nach 6.4.1

$$\int_{U\subset M} f^*\omega = \mathrm{sgn}(\det \frac{\partial f^i}{\partial u^j})_{u_0\in U} \int_{f(U)\subset N} \omega = \pm \int_{f(U)\subset N} \omega \;, \tag{13.1.1}$$

wobei sich das $\pm$ darauf bezieht, ob f orientierungserhaltend ist oder nicht.

Brouwer hat nun die topologische Frage gestellt, wie sich bei geschlossenen (d.h. kompakten und randlosen) Mannigfaltigkeiten mit der Volumenform ω auf N und nichtinvertierbaren Abbildungen f die Volumenintegrale $\int_M f^*\omega$ und $\int_N \omega$ zueinander verhalten.

Der Satz von Brouwer basiert auf dem folgenden Lemma, das auch in anderen Zusammenhängen immer wieder hilfreich ist.

Lemma 13.1.1 *Seien M und N differenzierbare m-dimensionale Mannigfaltigkeiten und M der Rand einer kompakten Menge W, also $M = \partial W$. Wenn sich jetzt die C^∞ Funktion $f : M \to N$ zu einer C^∞ Funktion $F : W \to N$ auf ganz W erweitern läßt, dann verschwindet das Integral $\int_M f^*\omega$ für jede m-Form ω, und damit gilt für den im Folgenden durch $\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega$ definierten Abbildungsgrad* $\deg(f) = 0$.

Beweis. Wir setzen hier das Ergebnis des *Whitneyschen Einbettungssatzes* voraus, der aussagt, daß jede m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{2m}$ eingebettet werden kann. Guillemin u. Pollack (1974) (S. 48 ff.) zeigen eine leichter beweisbare Fassung dieses schwierigen Satzes für die Einbettung von M in $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Aufgrund dieser Einbettungsmöglichkeit von M dürfen wir also annehmen, daß M der Rand einer kompakten Menge $W \subset \mathbb{R}^{2m}$ ist, also $M = \partial W$. *Wenn* sich jetzt die C^∞-Funktion $f : M \to N$ zu einer C^∞-Funktion $F : W \to N$ auf ganz W erweitern läßt, dann verschwindet das Integral $\int_M f^*\omega$ für jede m-Form ω, denn mit dem Satz von Stokes folgt:

$$\int_M f^*\omega = \int_M F^*\omega = \int_{\partial W} F^*\omega = \int_W d(F^*\omega) = \int_W F^* d\omega = 0 \, ,$$

weil $d\omega$ ja eine $m+1$ Form auf der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit N und damit Null ist. □

Mit diesem Ergebnis läßt sich nun der wichtige Satz von Brouwer über den Abbildungsgrad von Funktionen beweisen.

Satz 13.1.2 (Brouwer) *Seien M und N zwei differenzierbare, kompakte, einfach zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) der Dimension m, seien $f : M \to N$ eine C^∞ Abbildung und ω eine m-Form auf N, dann gilt*

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega \quad \mathit{mit} \quad \deg(f) \in \mathbb{Z} \, . \tag{13.1.2}$$

Sei $w \in N$ ein regulärer Wert von f und $\{v_1, \ldots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ die Urbildmenge zu w, dann ist der Abbildungsgrad $\deg(f)$ *für alle Punkte $w \in N$ gleich und es gilt:*

$$\deg(f) := \deg(f, w) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(\det \frac{\partial f_i}{\partial x^j})_{v_i} \, . \tag{13.1.3}$$

Wenn $f_0 : M \to N$, $f_1 : M \to N$ zwei homotope C^∞-Funktionen sind, dann ist $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.

Der Brouwersche Satz sagt also, daß sich global betrachtet die Mannigfaltigkeit M unter der Abbildung f stets ganzzahlig, nämlich mit $\deg(f)$, 'um N herumwickelt'. Wenn f ein globaler Diffeomorphismus ist, so ist $\deg(f)$ natürlich ± 1, je nachdem, ob f die Orientierung erhält oder umkehrt. Dieser Brouwersche Satz ist ein höchst bemerkenswerter Satz und letztlich die Grundlage für viele Indexsätze!

Beweis. 1. Seien jetzt f_0 und f_1 zwei homotope C^∞ Abbildungen von $M \to N$, dann gilt

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega \, ,$$

denn wenn $F : I \times M \to N$ mit $I := [0,1]$ und $F(0,p) := f_0(p)$ und $F(1,p) := f_1(p)$ eine Homotopie ist, dann folgt

$$\partial(I \times M) = (1 \times M) \cup (-0 \times M) = M_1 \cup (-M_0) \, .$$

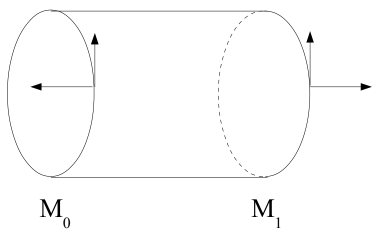

Abbildung 13.1: Definitionsbereich von $F : I \times M \to N$

Das Minuszeichen bei M_0 berücksichtigt hier die zu M_1 entgegengesetzte Orientierung der Basis (siehe Zeichnung).

$$\int_M F^* \omega = \int_{\partial(I \times M)} F^* \omega = \begin{cases} 0 & \text{wegen 13.1.1} \, , \\ \int_{M_1} F^* \omega - \int_{M_0} F^* \omega = \int_M f_1^* \omega - \int_M f_0^* \omega \, , & \end{cases}$$

also ist

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega \, .$$

2. Wir setzen hier das Ergebnis des *Satzes von Sard* voraus. Dazu benötigen wir zunächst die Begriffe der *regulären Werte* und *regulären Punkte*. Ein Wert $w = f(v) \in N$ heißt genau dann ein *regulärer Wert*, wenn die Urbildmenge $\{f^{-1}(w)\}$ leer ist oder aus *regulären Punkten* besteht. Wenn $w \in N$ kein regulärer Wert ist, so heißt w ein *kritischer Wert*. Und ein Punkt $v \in M$ heißt genau dann ein *regulärer Punkt*, wenn

die Tangentialabbildung f_* von T_vM surjektiv auf $T_{f(v)}N$ abbildet. Wenn $v \in M$ kein regulärer Punkt ist, so heißt v ein *kritischer Punkt*.

Der Satz von Sard sagt nun, daß die regulären Werte einer hinreichend differenzierbaren Funktion f in N dicht liegen (für einen Beweis siehe z.B. Milnor (1965), S. 10 ff., Guillemin u. Pollack (1974), S. 39 ff.).

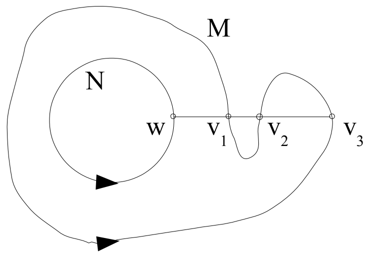

Abbildung 13.2: Urbildmenge $\{f^{-1}(w)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Aus diesem Satz von Sard können wir nun zusammen mit der Kompaktheit von M folgern, daß die Urbildmenge $\{f^{-1}(w)\} \subset M$ eines regulären Werts $w \in N$ nur aus endlich vielen Punkten $\{v_i\}$ besteht. Um einen Widerspruchsbeweis zu führen nehmen wir also an, daß die Urbildmenge $\{f^{-1}(w)\}$ aus unendlich vielen Punkten bestehe. Kompaktheit von M bedeutet, daß jede unendliche Folge aus $\{f^{-1}(w)\} \subset M$ eine konvergente Teilfolge $\{v_i\} \subset \{f^{-1}(w)\}$ enthält. Die v_i mögen also gegen $v_\infty \in \{f^{-1}(w)\}$ konvergieren. Dann ist v_∞ ein regulärer Punkt mit $f(v_\infty) = w$ und die Tangentialabbildung f_* an der Stelle v_∞ ist ein Isomorphismus. Aufgrund des Satzes über inverse Funktionen (siehe z.B. Guillemin u. Pollack (1974), S.13 ff.) gibt es eine Umgebung $U_{v_\infty} \subset M$ um v_∞ herum, in welcher f ein Diffeomorphismus ist. Da nun aber die v_i gegen v_∞ konvergieren, gibt es in jeder Umgebung um v_∞ herum unendlich viele v_i , die ebenso wie v_∞ durch f auf w abgebildet werden und dies steht im Widerspruch dazu, daß f in U_{v_∞} ein Diffeomorphismus ist. Also enthält die Urbildmenge jedes regulären Wertes $w \in N$ nur endlich viele reguläre Punkte $\{v_i\} \subset M$.

3. Sei jetzt $w \in N$ ein regulärer Wert von f und $\{v_1, \ldots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ die Urbildmenge zu w. Dann gibt es nach 2. eine Umgebung $U_w \subset N$ um w, so daß alle Umgebungen $U_{v_i} \subset M$ mit $f(U_{v_i}) = U_w$ disjunkt sind und f auf jedem U_{v_i} ein Diffeomorphismus ist. Wenn nun ω eine m-Form auf N mit Träger (Support) $\mathrm{supp}(\omega) = U_w$ ist, dann haben wir sofort eine lokale Version des Satzes von Brouwer:

$$\int\limits_M f^*\omega = \sum_{i=1}^k \int\limits_{U_{v_i}} f^*\omega = \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}(\det \frac{\partial f^i}{\partial u^j})_{U_{v_i}} \int\limits_{U_w} \omega = \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}(\det \frac{\partial f^i}{\partial u^j})_{v_i} \int\limits_N \omega$$

$$=: \deg(f) \int\limits_N \omega \,.$$

4. Nun gilt es, dieses lokale Ergebnis auf ganz M und N auszudehnen. Hierzu kann man das sog. Homogenitäts-Lemma (Milnor (1965), S. 22 ff.), bzw. Isotopie-Lemma

(Guillemin u. Pollack (1974), S. 142 ff.), verwenden. Eine Homotopie überführt auf stetige Weise 2 Funktionen ineinander, eine Isotopie auf glatte und invertierbare Weise. Weil unsere Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^{2m}$ eingebettet sind, können wir ohne Einschränkung in $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{2m}$ arbeiten.

Die Aussage dieses Lemmas ist: Seien y und z zwei beliebige innere Punkte einer zusammenhängenden, differenzierbaren Mannigfaltigkeit N, dann gibt es einen Diffeomorphismus $h : N \to N$, der y in z überführt und der isotop zur identische Abbildung $\mathrm{id} : N \to N$ ist.

Zum Beweis wird zunächst die folgende Funktion $h_t : N \to N$ konstruiert, die alle Punkte außerhalb einer $n-1$ dimensionalen, offenen ϵ-Kugel S_ϵ mit $\epsilon > 0$ auf sich selbst abbildet, und den Punkt $y \in S_\epsilon$ in den Punkt $z \in S_\epsilon$ abbildet. Sei jetzt $x \in N$ und $\varphi : N \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 \geq \epsilon^2 \ , \\ \exp(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2 - x^2}) & \text{für } x^2 < \epsilon^2 \ , \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(0) = 1 \ , \quad \lim_{\substack{x^2 \to \epsilon^2 \\ x^2 < \epsilon^2}} \varphi(x) = 0 \ .$$

Mit dieser Funktion φ können wir eine Funktion $h_t^{(0)}$ definieren, die den Ursprung von S_ϵ nach $z \in S_\epsilon$ abbildet und alle Punkte außerhalb von S_ϵ unverändert läßt:

$$h_t^{(0)}(x) := x + t\varphi(x) \cdot z \ , \quad \Rightarrow$$

$$h_0^{(0)}(x) = \mathrm{id}(x) = x \ , \quad h_1^{(0)}(0) = z \ .$$

Damit ist $h_t^{(0)}$ eine Homotopie. Um die Invertierbarkeit von $h_t^{(0)}$ zu zeigen, verwenden wir in $\mathbb{R}^n$ ein orthogonales Koordinatensystem $\{e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ und legen die e_1-Achse durch Nullpunkt und den Punkt z. Damit erhalten wir für die e_1-Komponente

$$\frac{\partial}{\partial x^1} h_t^{(0)}(x) = 1 + t \frac{\partial}{\partial x^1} \varphi(x) \cdot z \ .$$

Nun ist $0 \leq t \leq 1$ und $\frac{\partial}{\partial x^1}\varphi(x)$ beschränkt. Wenn $\epsilon > 0$ entsprechend klein gewählt wird, dann ist

$$|t \frac{\partial}{\partial x^1} \varphi(x) \cdot z| \leq |\frac{\partial}{\partial x^1} \varphi(x) \cdot z| < 1 \ , \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^1} h_t^{(0)}(x) > 0 \ ,$$

und mit dem Satz über inverse Funktionen folgt die Existenz und Glattheit von $(h_t^{(0)})^{-1}$. Damit ist $h_t^{(0)}$ eine Isotopie.

Mit einer Anpassung der Koordinaten erhalten wir aus h_t^0 die Funktion h_t, die $y \in S_\epsilon$ nach $z \in S_\epsilon$ abbildet und alle Punkte außerhalb von S_ϵ unverändert läßt:

$$h_t(x) := x + t\varphi(x - y) \cdot (z - y) \ , \quad \Rightarrow$$

$$h_0(x) = \mathrm{id}(x) = x \ , \quad h_1(y) = z \ , \quad h_{t_2+t_1}(x) = h_{t_2} \circ h_{t_1}(x) \ .$$

Die Funktion h_t überführt also einen beliebigen Punkt $y \in S_\epsilon$ in einen beliebigen anderen Punkt $z \in S_\epsilon$ und ist isotop zur Identität id.

Weil N zusammenhängend ist, können wir mit überlappenden S_{ϵ_i} Kugeln ganz N überdecken und so h_t auf ganz M fortsetzen. Diese Fortsetzung kann man, wie bei Homotopien üblich, folgendermaßen realisieren: Seien S_{ϵ_1} und S_{ϵ_2} zwei ϵ-Kugeln mit nichtleerem Durchschnitt $DS_{12} := S_{\epsilon_1} \cap S_{\epsilon_2}$ und $y \in S_{\epsilon_1} \setminus DS_{12}$, $z_1 \in DS_{12}$, $z_2 \in S_{\epsilon_2} \setminus DS_{12}$. Seien weiter $h_t^{(1)}$ eine Isotopie in S_{ϵ_1} und $h_t^{(2)}$ eine Isotopie in S_{ϵ_2}, mit $h_1^{(1)}(y) = z_1$ und $h_1^{(2)}(z_1) = z_2$, dann können wir eine zusammengesetzte Isotopie definieren, die y in z_2 überführt:

$$h_t^{(12)} := (h^{(2)} * h^{(1)})_t := \begin{cases} h_{2t}^{(1)} & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \ , \\ h_{2t-1}^{(2)} & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ . \end{cases}$$

Damit ist

$$h_0^{(12)}(x) = h_0^{(1)}(x) = \mathrm{id}(x) = x \ , \quad h_1^{(12)}(y) = h_1^{(2)}(h_1^{(1)}(y)) = h_1^{(2)}(z_1) = z_2 \ .$$

Auf diese Weise können wir einen Diffeomorphismus h auf ganz N konstruieren, der einen beliebigen Punkt $y \in N$ in einen beliebigen anderen Punkt $z \in N$ überführt und isotop zur identische Abbildung $\mathrm{id} : N \to N$ ist.

5. Sei jetzt $w \in N$ ein regulärer Wert von f und $U_w \subset N$ eine Umgebung um w, für welche nach 3. der lokale Satz von Brouwer gilt. Dann gibt es nach 4. einen Diffeomorphismus h_t^k isotop zur identischen Abbildung id, der w in jeden beliebigen Punkt $z \in N$ überführt. Die Menge $\{h_1^i(U_w) \,|\, i \in \mathit{Indexmenge}\}$ ist eine Überdeckung von N mit offenen Mengen. Weil N kompakt ist, gibt es in $\{h_1^i(U_w) \,|\, i \in \mathit{Indexmenge}\}$ eine endliche Überdeckung von N, also $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$. Mittels einer *Zerlegung der Einheit* können wir jede Differentialform ω als eine endliche Summe von Differentialformen ω_i mit Träger auf $h_1^i(U_w)$ schreiben:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \quad \text{mit} \quad \mathrm{supp}(\omega_i) = h_1^i(U_w) \quad \text{und} \quad \mathrm{supp}((h_1^i)^* \omega_i) = U_y .$$

Der entscheidende Punkt ist nun, daß wir wegen der Homotopie-Invarianz aus 2. die Integration von ω_i über $h_1^i(U_w)$ auf eine Integration von $(h_1^i)^*\omega_i$ über U_w zurückführen können und für diesen Fall die lokale Version des Satzes von Brouwer in 3. schon bewiesen haben:

$$\int_M f^*\omega_i \overset{!}{=} \int_M (h_1^i \circ f)^*\omega_i = \int_M f^*({h_1^i}^*\omega_i)$$

$$= \deg(f) \int_N ({h_1^i}^*\omega_i) = \deg(f)\ \deg(h_1^i) \int_N \omega_i \ .$$

Nun ist $\deg(h_1^i) = 1$, da h_1^i ein Diffeomorphismus ist. Die Aufsummation über i liefert wegen der Linearität von f^* das gewünschte Ergebnis:

$$\int\limits_M f^*\omega = \deg(f) \int\limits_N \omega \; . \qquad \square$$

Für eine zusammengesetzte Abbildung $f = g_2 \circ g_1 : M \to N_1 \to N_2$ gilt $\deg(f) = \deg(g_1 \cdot \deg(g_2)$, denn mit $w \in N_2$, $g_2^{-1}(w) = \{v_1, \ldots, v_k\} \in N_1$ und $g_1^{-1}(v_i) = \{u_1, \ldots, v_l\} \in M$ gilt

$$\int\limits_M f^*\omega = \int\limits_M (g_2 \circ g_1)^*\omega = \int\limits_M g_1^*(g_2^*\omega) = \deg(g_1) \int\limits_{N_1} (g_2^*\omega) = \deg(g_1) \cdot \deg(g_2) \int\limits_{N_2} \omega \; .$$

Für die konstante Abbildung $f : M \to N$ mit $f(u) = w_0 = \text{const.}$ ist $\deg(f) = 0$, denn für alle $w \in N$ mit $w \neq w_0$ ist $f^{-1}(w) = \emptyset$.

Für die identische Abbildung $id : M \to M$ folgt sofort, daß $\deg(id) = 1$ ist, denn

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_M (id)^*\omega = \deg(id) \int\limits_M \omega \; .$$

Für die antipodale Abbildung
$(id^-) : S^m \to S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ mit $id^-(x) := -x = (x^1, \ldots, x^{m+1})$ folgt

$$\deg(id^-) = \operatorname{sgn}(\det \frac{\partial(-x^i)}{\partial x^j}) = (-1)^{m+1} \; .$$

Satz 13.1.3 (Igelsatz von Poincaré-Brouwer) *Auf der Sphäre S^m gibt es nur für ungerade m nicht verschwindende, glatte Tangential-Vektorfelder. Speziell für $m = 2$ heißt das: einen Igel, topologisch homöomorph zu S^2, kann man nicht glatt und nullstellenfrei kämmen.*

Beweis. Sei $v(x) \in T_xS^m$ ein glattes, tangentiales Vektorfeld auf S^m ohne Nullstellen. Dann ist $\hat{v}(x) := v(x)/|v(x)|$ ein glattes, tangentiales, nicht verschwindendes Einheitsvektorfeld auf S^m. Zudem steht $\hat{v}(x)$ senkrecht auf x, d.h. $\langle \hat{v}(x) \mid x \rangle = 0$. Wir können nun eine Homotopie zwischen der identischen Abbildung id und der antipodalen Abbildung id^- auf S^m konstruieren:

$$h_t : S^m \times I \to S^m \; , \quad h_t(x) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\hat{v}(x) \quad \text{für } t \in [0,1] \; ,$$

$$h_0(x) = x = id(x) \; , \quad h_1(x) = -x = id^-(x) \; .$$

Weil jetzt id und id^- homotop auf S^m sind, müssen sie den gleichen Abbildungsgrad haben. Das ist aber wegen $\deg(id^-) = (-1)^{m+1}$ nur dann der Fall, wenn m ungerade ist. Falls m gerade ist, muß also die Voraussetzung, daß $v(x)$ nullstellenfrei ist, falsch sein. $\square$

Wenn man den obigen Beweis des Satzes von Brouwer im Detail nachvollzieht, dann sieht man, daß man diesen Satz leicht auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern kann. Sei jetzt $\bar{D} \subseteq M$ eine solche Mannigfaltigkeit mit dem Rand ∂D und $f(\bar{D}) \subseteq N$ das entsprechende Bild. Damit man den obigen Beweis des Satzes von Brouwer anwenden kann, muß man jetzt nur Sorge dafür tragen, daß der Punkt $w \in f(\bar{D})$, an welchem $\deg(f, w)$ bestimmt werden soll, kein Randpunkt ist, d.h. $w \notin f(\partial D)$, denn nur in diesem Fall existiert eine Umgebung $U_w \subset f(\bar{D})$, in welcher sich ein Diffeomorphismus zu den entsprechenden Umgebungen U_{v_i} der Urbildpunkte $\{v_1, \ldots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ definieren läßt. Also gilt die folgende Erweiterung des Satzes von Brouwer:

Satz 13.1.4 *Seien $\bar{D} \subseteq M$ und $f(\bar{D}) \subseteq N$ zwei differenzierbare, kompakte, einfach zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand der Dimension m, seien $f : M \to N$ eine C^∞ Abbildung und ω eine m-Form auf N, dann gilt für reguläre Werte $w \in f(D)$, die nicht auf dem Rand liegen, d.h. $w \notin f(\partial D)$:*

$$\int\limits_{\bar{D}} f^*\omega = \deg(f, D, w) \int\limits_{f(\bar{D})} \omega \quad \textit{mit} \quad \deg(f, D, w) \in \mathbb{Z} \quad \textit{für}\ w \notin f(\partial D) \ . \tag{13.1.4}$$

Sei $w \in f(D)$ ein regulärer Wert von f und $\{v_1, \ldots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ die Urbildmenge zu w, dann ist der Abbildungsgrad $\deg(f, D, w)$ *für alle Punkte $w \in f(D)$ gleich und es gilt:*

$$\deg(f, D, w) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(\det \frac{\partial f_i}{\partial x^j})_{v_i} \ . \tag{13.1.5}$$

Im Falle $w \notin f(\bar{D})$ definiert man $\deg(f, D, w) := 0$.

Anmerkung: Der Satz von Brouwer auf Mannigfaltigkeiten mit Rand wird häufig in der Analysis und Funktionalanalysis angewandt. In diesem Zusammenhang ist es natürlich sinnvoll, die Anforderungen an die Differenzierbarkeit so schwach als möglich vorauszusetzen. Da man beim Beweis des Satzes von Brouwer nur die einfache Differenzierbarkeit benötigt, kann man den Satz also für alle Funktionen $f \in C^0(\partial D) \cap C^1(D)$ verwenden. Man kann sogar jede stetige Funktion $f \in C^0(\bar{D})$ als Grenzwert von $C^0(\partial D) \cap C^1(D)$ Funktionen darstellen, ohne daß sich der Abbildungsgrad ändert (siehe z.B. Choquet-Bruhat u. a. (1978), S. 480 ff.).

Der nächste Satz zeigt, daß der Abbildungsgrad einer Funktion zwischen zwei berandeten m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten eindeutig von den Randwerten bestimmt wird.

Satz 13.1.5 *Seien $\bar{D} \subseteq M$ und $f(\bar{D}) \subseteq N$ zwei differenzierbare, kompakte, einfach zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand der Dimension m, seien $f, g : M \to N$ zwei C^∞ Abbildungen, die auf ∂D übereinstimmen, und sei ω eine m-Form auf N, dann gilt für reguläre Werte $w \in f(D)$, die nicht auf dem Rand liegen, d.h.:*

$$w \notin f(\partial D) = g(\partial D) \quad \Rightarrow \quad \deg(f, D, w) = \deg(g, D, w) \ . \tag{13.1.6}$$

Beweis. Wir setzen wieder das Ergebnis des *Whitneyschen Einbettungssatzes* voraus, der aussagt, daß jede m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{2m}$ eingebettet werden kann und konstruieren eine Homotopie $h_t : M \to N$ zwischen f und g:

$$h_t := tf + (1-t)g \;, \quad t \in [0,1] \;.$$

Auf ∂D gilt $f = g = h_t$. Aus $w \notin f(\partial D)$ folgt also $w \notin h_t(\partial D)$ und also haben f und g als homotope Funktionen den gleichen Abbildungsgrad. □

Wegen

$$\deg(f, D, w) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(\det \frac{\partial f_i}{\partial x^j})_{v_i}$$

addieren sich die Abbildungsgrade von zwei disjunkten Gebieten D_1 und D_2, die auf ein zusammenhängendes Gebiet $f(D_1 \cup D_2)$ abgebildet werden:

$$\deg(f, D_1 \cup D_2, w) = \deg(f, D_1, w) + \deg(f, D_2, w) \;.$$

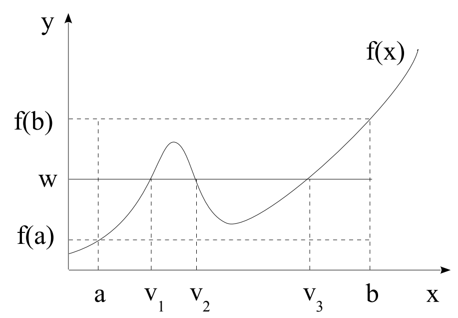

Abbildung 13.3: $\deg(f, [a,b], w) = 1$ einer Funktion f auf einem Gebiet mit Rand

Aus dem Satz von Brouwer für Mannigfaltigkeiten mit Rand lassen sich nun zahllose Existenzbeweise des folgenden Typs gewinnen: wenn w ein regulärer Wert von f ist mit $w \in f(D)$, $w \notin f(\partial D)$, $\deg(f, D, w) \neq 0$, dann ist die Urbildmenge $\{v_1, \ldots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ zu w nicht leer, d.h. es existieren Lösungen der Gleichung $f(v) = w$.

Als ein Beispiel möge hier der Fixpunktsatz von Brouwer dienen.

Satz 13.1.6 (Fixpunktsatz von Brouwer) *Sei $f : \bar{B} \to \bar{B}$ eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Kugel $\bar{B} \subset \mathbb{R}^m$ in sich selbst. Dann existiert mindestens ein Fixpunkt von f, d.h. ein $x \in \bar{B}$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit möge der Mittelpunkt der Kugel $\bar{B}$ im Ursprung liegen. Wenn f einen Fixpunkt auf dem Rand ∂B hat, sind wir fertig. Wenn f keinen Fixpunkt auf dem Rand ∂B hat, dann gilt $f(x) - x \neq 0$ für $x \in \partial B$. Wir konstruieren die folgende Homotopie $h_t : \bar{B} \to \mathbb{R}^m$

$$h_t(x) := x - tf(x) \ , \quad t \in [0,1] \ .$$

Jetzt ist $h_t(x) \neq 0$ für $x \in \partial B$, denn für $t = 1$ gilt dies nach Voraussetzung und für $t < 1$ muß $tf(x)$ im Innern von $\bar{B}$ liegen, also nicht auf dem Rand ∂B. Also gilt wegen der Homtopie-Invarianz des Abbildungsgrades

$$\deg(h_0, B, 0) = \begin{cases} \deg(x, B, 0) = 1, \\ \deg(h_1, B, 0) = \deg(x - f(x), B, 0). \end{cases} \qquad \square$$

Damit existiert mindestenes ein $x \in B$ mit $x - f(x) = 0$.

13.2 Die Windungszahl

Sei γ eine kompakte, orientierte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$, also eine geschlossene C^∞-Kurve in $\mathbb{R}^2$. Sei nun $f : \gamma \to \mathbb{R}^2$ eine C^∞-Abbildung der Kurve γ und sei $z_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, der nicht auf $f(\gamma)$ liegt, d.h. $z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\gamma)$. Wegen $z_0 \neq f(\gamma)$ können wir $f(u) - z_0$ mit $u \in \gamma$ auf S^1 abbilden. Dabei gehen wir zusätzlich noch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$ von $u = (x, y)$ zu Polarkoordinaten $\bar{u} = (\varphi, r)$ mit Nullpunkt z_0 über:

$$\hat{f} : \gamma \to S^1 \ , \quad \hat{f}(\bar{u}) := \frac{f(\bar{u}) - z_0}{|f(\bar{u}) - z_0|} = \begin{pmatrix} \phi(\bar{u}) \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{13.2.1}$$

Wenn $d\phi$ jetzt das Differential auf S^1 bezeichnen möge, dann gilt für $\hat{f}^* d\phi$ auf γ:

$$\hat{f}^* d\phi \Big|_\gamma = \det \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)_{S^1} d\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\Big|_{S^1} d\varphi \ . \tag{13.2.2}$$

Für das Wegintegral über γ folgt also einerseits

$$\int_\gamma \hat{f}^* d\phi = \int_\gamma \frac{\partial \phi(\varphi, r)}{\partial \varphi} d\varphi = \phi(\varphi_E, r_0) - \phi(\varphi_A, r_0) = m \cdot 2\pi \ , \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z} \ ,$$

wobei mit $u_{EA} = (\varphi_E, r_0) = (\varphi_A, r_0)$ der Anfangs- und der Endpunkt eines Umlaufs auf γ bezeichnet werde. Hierbei ist $m = 0$, wenn z_0 außerhalb der geschlossenen Kurve von γ liegt.

Andererseits folgt mit dem Satz von Brouwer:

$$\int_\gamma \hat{f}^* d\phi = \deg(\hat{f}, z_0) \cdot \int_{S^1} d\phi = \deg(\frac{f - z_0}{|f - z_0|}) \cdot \int_{S^1} d\phi = \deg(\frac{f - z_0}{|f - z_0|}) \cdot 2\pi \ .$$

Die Windungszahl der Abbildung f auf der Kurve γ in Bezug auf den Punkt z_0 ist jetzt definiert als:

$$W(f,z_0) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} \hat{f}^* d\phi \quad \Rightarrow \quad W(f,z_0) = \deg(\hat{f},z_0) = \deg(\frac{f-z_0}{|f-z_0|},z_0)\ . \tag{13.2.3}$$

Beispiel: Sei $z_0 = 0$, $\gamma = S^1$, $f(u) = (\phi,1)^t = (m\varphi(u),1)^t$, $m \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(u) = f(u)$, dann ist

$$\frac{\partial\phi(\varphi,r)}{\partial\varphi} = m\ , \quad \Rightarrow \quad W(f,z_0) = \deg(\hat{f},z_0) = m\ . \tag{13.2.4}$$

□

Dieser Begriff der Windungszahl kann jetzt auf höherdimensionale Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Wir folgen Guillemin u. Pollack (1974) (S. 144 ff.) und Katok u. Hasselblatt (2009) (S. 318 ff.).

Sei M eine kompakte, orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{m+1}$. Sei nun $f : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ eine C^∞-Abbildung der Mannigfaltigkeit M und sei $z_0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ ein Punkt, der nicht auf $f(M)$ liegt, d.h. $z_0 \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus f(M)$. Dann definiert man wie oben die Windungszahl der Abbildung f auf der Mannigfaltigkeit M in Bezug auf den Punkt z_0 als den Abbildungsgrad der Funktion $\hat{f}$:

$$\hat{f} : M \to S^m\ , \quad \hat{f}(u) := \frac{f(u)-z_0}{|f(u)-z_0|}\ ,$$

$$W(f,z_0) := \deg(\hat{f},z_0) = \deg(\frac{f-z_0}{|f-z_0|},z_0)\ . \tag{13.2.5}$$

Sei jetzt M der Rand einer kompakten Menge $W \subset \mathbb{R}^{m+1}$, also $M = \partial W$. Wenn $z_0 \notin W$, dann definiert man wie in 13.1.4 $W(f,z_0) = 0$. Wenn andererseits $z_0 \in \overset{\circ}{W}$ und sich die C^∞-Funktion $\hat{f}$ auf ∂W zu einer einer C^∞-Funktion $\hat{F}$ auf ganz W fortsetzen läßt, dann ist nach 13.1.1 $W(f,z_0) = 0$. Interessant und von Null verschieden ist der Windungsgrad also gerade in den Fällen, in denen $F - z_0$, also die Fortsetzung von $f - z_0$ in $\overset{\circ}{W}$, eine Nullstelle hat, also z.B. bei Fixpunkt-Problemen $f(u) - u = 0$.

13.3 Der Kronecker-Index eines Vektorfeldes

Wir wollen hier das Konzept der Windungszahl auf die Behandlung von isolierten nichtentarteten Nullstellen $\{u_1,\dots,u_k\}$ von Vektorfeldern auf M anwenden, also $f : M \to \mathcal{T}^0_1(M)$ mit $f(u) \in T_uM \subset \mathbb{R}^{m+1}$ und $f(u_i) = 0$. Wir folgen wieder Guillemin u. Pollack (1974) (S. 144 ff.) und Katok u. Hasselblatt (2009) (S. 318 ff.).

Sei $u_i \in M$ eine isolierte Nullstelle des Vektorfelds f. Dann kann man um u_i eine kleine Kugeloberfläche S^m_ϵ mit Mittelpunkt u_i und Radius ϵ legen. Auf dieser Oberfläche existiert

$$\hat{f} : S^m_\epsilon \to S^m \ , \quad \hat{f}(u) := \frac{f(u)}{|f(u)|} \ .$$

Im Zusammenhang mit isolierten nichtentarteten Nullstellen von Vektorfeldern spricht man nicht wie oben von der Windungszahl $W(f, 0)$, sondern vom Index, bzw. Kronecker-Index, $\mathrm{ind}(f, u_i)$ des Vektorfelds f an der Stelle u_i :

$$\mathrm{ind}(f, u_i) := \deg(\hat{f}, 0) = \deg(\frac{f}{|f|}, 0) \ . \tag{13.3.1}$$

Satz 13.3.1 *Für den Index eines Vektorfeldes $f : M \to \mathcal{T}^0_1(M)$ an einer isolierten nichtentarteten Nullstelle u_i gilt, wenn mit λ_j die Eigenwerte von $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$ bezeichnet werden:*

$$\mathrm{ind}(f, u_i) = \deg(\hat{f}, 0) = \mathrm{sgn}\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}\right) = (-1)^{\mathrm{card}\{j|\lambda_j<0\}} \ . \tag{13.3.2}$$

Wenn das Vektorfeld $f : \bar{D} \subset M \to f(\bar{D}) \subseteq \mathcal{T}^0_1(M)$ nun k isolierte nichtentartete Nullstellen $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset D$ hat, so gilt

$$\deg(\hat{f}, \partial D, 0) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ind}(f, u_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{sgn}\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}\right) \ . \tag{13.3.3}$$

Beweis. 1. Wenn die Abbildung f linear ist, also $f(u) = Au$ mit einer $m+1$ dimensionalen Matrix A, dann ist auch $\hat{f} = \frac{Au}{|Au|}$ linear und man kann $\hat{f}$ unverändert statt auf S^m_ϵ auch auf S^m definieren. Also können wir schreiben $\hat{f} : S^m \to S^m$, und das heißt $|u| = 1$. Da f an der Nullstelle u_i als nichtentartet vorausgesetzt wurde ist A invertierbar und es folgt:

$$\hat{f}(u) = \hat{f}(v) \quad \Rightarrow \quad Au = \lambda Av \quad \text{mit } \lambda := \frac{|Au|}{|Av|} > 0 \quad \Rightarrow \quad u = \lambda v \ ,$$

und wegen $|u| = |v| = 1$ folgt $\lambda = +1$, d.h. $u = v$.

Also gilt $\hat{f}(u) = \hat{f}(v) \ \Rightarrow \ u = v$ und damit ist $\hat{f}$ ein Diffeomorphismus von S^m nach S^m und damit ist $\deg(\hat{f}, 0) = 1$ und damit

$$\mathrm{ind}(f, u_i) = \deg(\hat{f}, 0) = \mathrm{sgn}\det A \ .$$

2. Wenn jetzt die Abbildung f nicht linear ist und die Ableitungen von f am Punkt u_i nicht verschwinden, so können wir f auf S^m_ϵ mit hinreichend kleinem ϵ linearisieren, d.h. durch $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$ ersetzen und damit folgt sofort

$$\mathrm{ind}(f, u_i) = \deg(\hat{f}, 0) = \mathrm{sgn}\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}\right) \ .$$

3. Der Index des Vektorfelds $\mathrm{ind}(f, u_i)$ wird durch die Anzahl der negativen Eigenwerte von $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$ bestimmt, denn seien $\{\lambda_i\,,\, i \in 1, \ldots, m+1\}$ die Eigenwerte von $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$,dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}\right) &= \operatorname{sgn}\prod_{j=1}^{m+1}\lambda_j = \operatorname{sgn}\prod_{\lambda_j>0}\lambda_j \cdot \operatorname{sgn}\prod_{\lambda_j<0}\lambda_j \cdot \operatorname{sgn}\prod_{\lambda_j\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\lambda_j \\ &= (-1)^{\mathrm{card}\{j|\lambda_j<0\}}\,,\end{aligned}$$

da die komplexen Eigenwerte ja alle zusammen mit den jeweils konjugiert komplexen Eigenwerten vorkommen und $\lambda_j \cdot \lambda_j^* > 0$ ist.

4. Seien $\bar{D} \subseteq M$ und $f(\bar{D}) \subseteq N := \mathcal{T}_1^0(M)$ zwei differenzierbare, kompakte, einfach zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand der Dimension m, sei $f : \bar{D} \to f(\bar{D}) \subseteq N$ ein Vektorfeld mit k isolierten nichtentarteten Nullstellen $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset D$, und sei $w = 0 \notin f(\partial D)$. Wir legen jetzt um jedes u_i eine ϵ-Kugel $B_{i,\epsilon} \subset D$ mit der Kugeloberfläche $S^m_{i,\epsilon}$ und bilden die Menge $E := \bar{D} \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{i,\epsilon}$. Die Funktion $\hat{f} = \frac{f}{|f|}$ kann jetzt differenzierbar von ∂E auf ganz E ausgedehnt werden und also verschwindet wegen 13.1.1 ihr Abbildungsgrad auf ∂E. Daraus folgt

$$\begin{aligned}0 = \deg(\hat{f}, \partial E) &= \deg(\hat{f}, \partial D) - \deg(\hat{f}, \partial\bigcup_{i=1}^k B_{i,\epsilon}) \\ &= \deg(\hat{f}, \partial D) - \deg(\hat{f}, \bigcup_{i=1}^k S_{i,\epsilon}) = \deg(\hat{f}, \partial D) - \sum_{i=1}^k \deg(\hat{f}, S_{i,\epsilon}) \\ &= \deg(\hat{f}, \partial D) - \sum_{i=1}^k \mathrm{ind}(f, u_i)\,.\end{aligned}$$

Also folgt:

$$\deg(\hat{f}, \partial D, 0) = \sum_{i=1}^k \mathrm{ind}(f, u_i) = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}\right)\,. \qquad \square$$

14 Anfänge der Homotopie und Fundamentalgruppen

14.1 Jules Henri Poincaré (1854 - 1912)

Henri Poincaré wurde 1854 als Sohn eines Medizinprofessors in Nancy geboren. Ab 1873 studierte er Mathematik an der École Polytechnique und der École des Mines in Paris. Danach arbeitete er zunächst als Bergbau-Ingenieur und anschließend als Mathematikdozent an der Universität Caen. Schon zwei Jahre nach seiner Dissertation wurde Poincaré im Jahr 1881 auf eine Professur für mathematische Physik an die Sorbonne in Paris berufen, wo er bis zu seinem Tod im Jahr 1912 verblieb. Seit 1887 war er Mitglied der Académie des Sciences, seit 1908 auch der Académie Française.

Abbildung 14.1: J. H. Poincaré
E. Pirou (1887), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré]

Poincarés Arbeiten umfassen mehr als 30 Bücher und viele wissenschaftliche Einzelpublikationen aus einem weiten Bereich der Mathematik und theoretischen Physik. Besonders bedeutend waren seine grundlegenden Beiträge zur kombinatorischen Topologie, Homotopie, Homologie, zu Differentialformen, automorphen Funktionen, n-Körper-Problemen, frühen Denkansätzen zur Morse-Theorie, symplektischen Geometrie, speziellen Relativitätstheorie und zum deterministischen Chaos. Für die Erkenntnistheorie wichtig war auch Poincarés Buch *Wissenschaft und Hypothese.*

Als Geburtsstunde der Topologie gilt Poincarés Artikel *Analysis Situs* aus dem Jahr 1895. Viele seiner dort formulierten Begriffe und Ergebnisse sind aus heutiger Sicht nicht rigoros genug, aber Poincarés Intuitionen und Gedanken waren in jeder Hinsicht außergewöhnlich und ihrer Zeit weit voraus. Wie tiefgründig seine Ideen waren, und wie schwer beweisbar, das zeigt sich etwa an dem erst im Jahr 2002 durch Grigori Perelman gelungenen Beweis der sog. Poincaré-Vermutung: „Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre S^3".

[Quelle: Wikipedia-Poincaré (2016), Wikipedia-Poincaré-Vermutung (2015)]

14.2 Grundgedanken der Homotopie

Wir folgen hier Nakahara (2003) und Nash u. Sen (1983). Poincaré hat die Begriffe der Homotopie und der Fundamentalgruppe 1895 in seiner wegweisenden Arbeit *Analysis situs* eingeführt. Sein Ausgangspunkt war die Frage, wie man die Zusammenhangs-Verhältnisse in einem topologischen Raum klären kann?

Wir führen hier nur in die Grundgedanken der Homotopie und der Fundamentalgruppen π_1 ein, da wir diese Grundlagen später für die Diskussion der Universellen Überlagerungsgruppe von Liegruppen benötigen. Einige schöne physikalische Anwendungen der Homotopie-Gruppen zeigt Nakahara (2003), S. 153-168.

Die Homotopie-Gruppen sind sehr starke topologische Invarianten, allerdings sind die höheren Homotopiegruppen π_k mit $k > 1$ im allgemeinen äußerst schwierig zu berechnen. So sind z.B. bis heute die $\pi_k(S^2)$ nicht für alle $k \in \mathbb{N}$ bekannt. Dies ist der Grund dafür, daß in Räumen höherer Dimensionen häufig den Homologie- und Kohomologie-Gruppen der Vorzug vor den höheren Homotopie-Gruppen gegeben wird. Insbesondere gibt es algorithmische Verfahren zur Berechnung der höheren Homologie-Gruppen.

Wir setzen für das Folgende voraus, daß unsere topologischen Räume (fast immer) Hausdorff-Räume und wegzusammenhängend sind. Zur Erinnerung: ein topologischer Raum ist ein Hausdorff-Raum, wenn für je zwei verschiedene Punkte des Raums disjunkte offene Umgebungen existieren.

Definition 14.2.1 *Sei X ein topologischer Raum und I ein Einheitsintervall $I := [0,1] \in \mathbb{R}$. Dann heißt die stetige Abbildung $\alpha : I \to X$ ein Weg mit dem Anfangspunkt $\alpha(0) = x_0$ und dem Endpunkt $\alpha(1) = x_1$. Wenn der Anfangs- und der Endpunkt in $x_0 = x_1$ zusammenfallen spricht man von einer Schleife mit dem Basispunkt x_0. Wenn $\epsilon(t) = x_0$ für alle $t \in I$ ist, spricht man von einem konstanten Weg $\epsilon_{x_0} = x_0$.*

Auf der Menge solcher Wege kann man nun unschwierig eine Produktstruktur einführen:

Definition 14.2.2 *Seien $\alpha, \beta : I \to X$ zwei Wege in X mit $\alpha(1) = \beta(0)$, dann kann man als Produkt die Verkettung der Wege definieren:*

$$\alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{\textit{für}}\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\ , \\ \beta(2t-1) & \text{\textit{für}}\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1\ . \end{cases} \tag{14.2.1}$$

Der zu $\alpha(t)$ inverse Weg wird dann als $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t)$ definiert.

Jetzt definiert man eine Homotopie zweier Wege relativ zu zwei festen, verschiedenen Endpunkten, wenn es eine stetige Abbildung gibt, welche die beiden Wege ineinander überführt:

Definition 14.2.3 *Seien $\alpha, \beta : I \to X$ zwei Wege zwischen den Punkten x_0 und x_1 in X, dann heißt eine stetige Abbildung H, welche α in β überführt, eine Homotopie zwischen α und β relativ zu den Punkten x_0 und x_1:*

$$H : I \times I \to X \quad \textit{mit} \quad \begin{cases} H(t,0) = \alpha(t)\ ,\ H(t,1) = \beta(t) & \textit{für alle } t \in I\ , \\ H(0,s) = x_0\ ,\ H(1,s) = x_1 & \textit{für alle } s \in I\ . \end{cases} \tag{14.2.2}$$

14.3 Fundamentalgruppen

Zwei Schleifen heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung gibt, welche die beiden Schleifen ineinander überführt:

Definition 14.3.1 *Seien $\alpha, \beta : I \to X$ zwei Schleifen mit Basispunkt x_0 in X, dann heißt eine stetige Abbildung H, welche α in β überführt, eine Homotopie zwischen α und β, und α und β heißen homotop:*

$$H : I \times I \to X \quad \textit{mit} \quad \begin{cases} H(t,0) = \alpha(t)\ ,\ H(t,1) = \beta(t) & \textit{für alle } t \in I\ , \\ H(0,s) = H(1,s) = x_0 & \textit{für alle } t \in I\ . \end{cases} \tag{14.3.1}$$

Eine Homotopie zwischen zwei Schleifen $\alpha, \beta : I \to X$ mit Basispunkt x_0 in X ist eine Äquivalenzrelation, kurz $\alpha \sim \beta$, denn es gilt

- Reflexivität: $\alpha \sim \alpha$,
- Symmetrie: $\alpha \sim \beta$, also $H(t,0) = \alpha(t),\ H(t,1) = \beta(t)$, wir definieren $H'(t,s) := H(t, 1-s)$ und erhalten $H'(t,0) = \beta(t)\ ,\ H(t,1) = \alpha(t)$, also $\beta \sim \alpha$,
- Transitivität: $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$, also $H(t,0) = \alpha(t),\ H(t,1) = \beta(t)$ und $H'(t,0) = \beta(t),\ H'(t,1) = \gamma(t)$, dann kann man eine Homotopie zwischen α und γ folgendermaßen definieren:

$$H''(t,s) := \begin{cases} H(t, 2s) & \text{für } 0 \le s \le \frac{1}{2}\ , \\ H'(t, 2s-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le s \le 1\ . \end{cases} \tag{14.3.2}$$

Diese Äquivalenzrelation führt zu Äquivalenzklassen. Zwischen den Wegen hatten wir eine Multiplikation definiert und daher kann man auch auf natürliche Weise eine Multiplikation auf den Äquivalenzklassen erklären:

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]\ . \tag{14.3.3}$$

Mit dieser Multiplikation hat die Menge der Äquivalenzklassen eine Gruppenstruktur mit dem neutralen Element $e_{x_0} := [\epsilon_{x_0}]$, denn

- die folgende Funktion $H(t,s)$ ist eine Homotopie zwischen $H(t,0) = \alpha(t) * \epsilon_{x_0}$ und $H(t,1) = \alpha(t)$

$$H(t,s) := \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}) & \text{für } 0 \le t \le \frac{s+1}{2}\ , \\ x_0 & \text{für } \frac{s+1}{2} \le t \le 1\ , \end{cases}$$

  und damit folgt $[\alpha * \epsilon_{x_0}] = [\alpha] * [\epsilon_{x_0}] = [\alpha]$,

- ebenso ist die folgende Funktion $H(t,s)$ eine Homotopie zwischen $H(t,0) = \alpha(t) * \alpha^{-1}(t)$ und $H(t,1) = \alpha(0) = \epsilon_{x_0}$

$$H(t,s) := \begin{cases} \alpha(2t(1-s)) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\ , \\ \alpha(2(1-t)(1-s)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\ , \end{cases}$$

und damit folgt $[\alpha * \alpha^{-1}] = [\alpha] * [\alpha^{-1}] = [\epsilon_{x_0}] \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$,

- weiter erfüllt diese Multiplikation auch das Assoziativitätsgesetz, denn wir können folgendermaßen eine Homotopie zwischen $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$ und $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ konstruieren:

$$(\alpha * \beta) * \gamma(t) = \begin{cases} \alpha * \beta(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\ , \\ \gamma(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\ , \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(4t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\ , \\ \beta(4t-1) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}\ , \\ \gamma(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\ . \end{cases}$$

$$\alpha * (\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\ , \\ \beta * \gamma(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\ , \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\ , \\ \beta(4t-2) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}\ , \\ \gamma(4t-3) & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1\ . \end{cases}$$

Eine Homotopie $H(t,s)$ zwischen diesen beiden Schleifen ist

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{s+1}) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}\ , \\ \beta(4t-s-1) & \text{für } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}\ . \\ \gamma(\frac{4t-2-s}{2-s}) & \text{für } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1\ . \end{cases}$$

Definition 14.3.2 *Die Menge der Äquivalenzklassen der Schleifen mit Basispunkt x_0 in einem topologischen Raum X nennt man die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$.*

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ heißt trivial, wenn für alle Punkte $x_0 \in X$ jede Schleife mit Basispunkt x_0 homotop zu x_0 ist (d.h. wenn die Schleife mit Basispunkt x_0 stetig nach x_0 zusammengezogen werden kann), wenn also gilt $\pi_1(X,x_0) = [\epsilon_{x_0}] = e_{x_0}$.

Satz 14.3.3 *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum mit $x_0, x_1 \in X$, dann sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(X,x_0)$ und $\pi_1(X,x_1)$ isomorph und man kann also von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ sprechen.*

Beweis. Sei $\gamma : I \to X$ ein Weg von x_0 nach x_1, also $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$ und sei α eine Schleife mit Basispunkt x_0. Dann ist $\alpha' = \gamma * \alpha * \gamma^{-1}$ eine Schleife mit Basispunkt x_1. Dann ist

$$P_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1) \quad \text{mit} \quad P_\gamma([\alpha]) = [\alpha'] = [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$$

ein Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} P_\gamma([\alpha] * [\beta]) &= [\gamma] * [\alpha] * [\beta] * [\gamma^{-1}] = \\ &= [\gamma] * [\alpha] * [\gamma^{-1}] * [\gamma] * [\beta] * [\gamma^{-1}] = \\ &= P_\gamma([\alpha]) * P_\gamma([\beta]) \ . \end{aligned}$$

P_γ ist auch bijektiv und damit ein Isomorphismus, denn sei

$$Q_\gamma : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0) \quad \text{mit} \quad Q_\gamma([\alpha']) = [\alpha] = [\gamma^{-1} * \alpha' * \gamma]$$

dann ist $Q_\gamma = P_\gamma^{-1}$, denn

$$\begin{aligned} Q_\gamma P_\gamma([\alpha]) &= Q_\gamma([\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]) = [\gamma^{-1} * \gamma * \alpha * \gamma^{-1} * \gamma] = [\alpha] \ , \\ P_\gamma Q_\gamma([\alpha']) &= P_\gamma([\gamma^{-1} * \alpha' * \gamma]) = [\gamma * \gamma^{-1} * \alpha' * \gamma * \gamma^{-1}] = [\alpha'] \ , \end{aligned}$$

und damit ist P_γ bijektiv. □

Die Homotopie von Wegen und Schleifen kann auf beliebige stetige Abbildungen zwischen zwei topologischen Räumen verallgemeinert werden:

Definition 14.3.4 *Seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen den topologischen Räumen X und Y. Wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ gibt, die f in g überführt, d.h. $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$, dann heißen f und g homotop zueinander, kurz $f \sim g$.*

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y mit $f(x) = y$. Dann induziert f einen Homomorphismus der entsprechenden Fundamentalgruppen $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$, mit $f_*([\alpha]) := [f(\alpha)]$, denn seien α, β Schleifen in X mit Basispunkt x, dann sind $f(\alpha), f(\beta)$ Schleifen in Y mit Basispunkt y. Dann folgt wegen der Stetigkeit von f

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] * [\beta]) &= [f(\alpha * \beta)] = [f(\alpha) * f(\beta)] = [f(\alpha)] * [f(\beta)] \\ &= f_*([\alpha]) * f_*([\beta]) \ . \end{aligned} \tag{14.3.4}$$

Die Frage, wie zwei homotope, stetige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ zusammenhängen, beantwortet das folgende Lemma.

Lemma 14.3.5 *Seien X, Y zwei wegzusammenhängende topologische Räume, $f_1, f_2 : X \to Y$ zwei homotope, stetige Abbildungen mit $f_i(x_0) = y_i$, $i \in \{1, 2\}$, und*

$$f_{i*} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_i)$$

die entsprechenden induzierten Homomorphismen, seien weiter α eine Schleife in X mit Basispunkt x_0, und γ ein Weg in Y von y_1 nach y_2, und P_γ der Isomorphismus zwischen $\pi_1(Y, y_1)$ und $\pi_1(Y, y_2)$, d.h.

$$P_\gamma : \pi_1(Y, y_1) \to \pi_1(Y, y_2) \quad \textit{mit} \quad P_\gamma([f_1(\alpha)]) = [\gamma * f_1(\alpha) * \gamma^{-1}] \ ,$$

dann gilt

$$f_{2*} = P_\gamma * f_{1*} \ . \tag{14.3.5}$$

Beweis. Sei $H : X \times I \to Y$ die Homotopie zwischen f_1 und f_2. Dann betrachten wir die Homotopie $H(\alpha(t), s)$ zwischen den beiden Schleifen $f_1(\alpha(t))$ und $f_2(\alpha(t))$ in Y als eine Funktion

$$G : I \times I \to Y \quad \text{mit} \quad G(t, s) := H(\alpha(t), s) \ .$$

Nun ist jede Schleife in $I \times I$ auf einen Punkt kontrahierbar und G ist stetig, also muß auch das Bild jeder Schleife in $I \times I$ unter G auf einen Punkt kontrahierbar sein, also homotop zum konstanten Weg in Y.

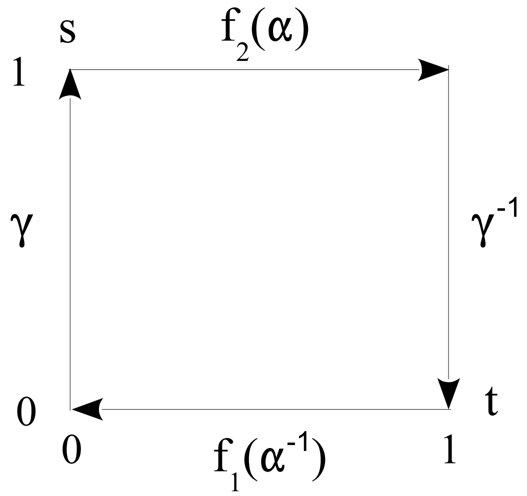

Abbildung 14.2: eine Schleife in $I \times I$, homotop zu einem Punkt

Also ist die folgende Schleife (siehe die obige Abb.) homotop zu ϵ_{y_2}:

$$f_2(\alpha) * \gamma * f_1(\alpha^{-1}) * \gamma^{-1} \sim \epsilon_{y_2} \quad \Rightarrow$$

$$[f_2(\alpha) * \gamma * f_1(\alpha^{-1}) * \gamma^{-1}] = e_{y_2} = e \quad \Rightarrow$$

$$[f_2(\alpha)] = [\gamma * f_1(\alpha) * \gamma^{-1}] = P_\gamma([f_1(\alpha)]) \quad \Rightarrow$$

$$f_{2*} = P_\gamma * f_{1*} \ .$$

□

Zwei topologische Räume X, Y sind homöomorph, wenn es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit der Eigenschaft $f \circ g = Id_Y$ und $g \circ f = Id_X$ gibt. Diese Eigenschaft der Homöomorphie zwischen X und Y kann man nun abschwächen, indem man nur noch Homotopie verlangt.

Definition 14.3.6 *Zwei topologische Räume X, Y heißen vom gleichen Homotopie-Typ, wenn es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit der Eigenschaft $f \circ g \sim Id_Y$ und $g \circ f \sim Id_X$ gibt.*

Klarerweise sind homöomorphe Räume auch vom gleichen Homotopie-Typ, aber die Umkehrung gilt nicht. Zum Beispiel ist ein Punkt $\{x\}$ auf der reellen Linie $\mathbb{R}$ vom gleichen Homotopie-Typ wie $\mathbb{R}$, aber natürlich nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Satz 14.3.7 *Seien X, Y zwei wegzusammenhängende topologische Räume vom gleichen Homotopie-Typ, dann sind ihre Fundamentalgruppen isomorph zueinander.*

Beweis. Seien $g : X \to Y$ und $h : Y \to X$ zwei stetige Funktionen zwischen den topologischen Räumen X, Y vom gleichen Homotopie-Typ, dann gilt $g \circ h \sim Id_Y$. Mit dem obigen Lemma und $f_1 := Id_Y$ und $f_2 := g \circ h$ folgt

$$(g \circ h)_* = P_\gamma((Id_Y)_*) \quad \Rightarrow \quad g_* \circ h_* = P_\gamma(Id_{Y*}) \; .$$

Ebenso folgt mit $f_1 := Id_X$ und $f_2 := h \circ g$

$$(h \circ g)_* = P_\gamma^{-1}((Id_X)_*) \quad \Rightarrow \quad h_* \circ g_* = P_\gamma^{-1}(Id_{X*}) \; . \qquad \square$$

Da P_γ ein Isomorphismus ist sind also auch $g_* \circ h_*$ und $h_* \circ g_*$ Isomorphismen, und damit sind auch f_* und g_* Isomorphismen, und d.h. $\pi_1(X, x_0)$ ist isomorph zu $\pi_1(Y, g(x_0))$.

Dies ist nun ein sehr wichtiger Satz, denn er sagt ja u.a., daß die Fundamentalgruppen invariant unter Homöomorphismen und damit topologische Invarianten sind!

Gelegentlich ist es interessant, einen topologischen Raum X auf einen Unterraum A stetig 'zusammenzuziehen'. Zwei Varianten kommen hier häufiger vor.

Definition 14.3.8 *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Unterraum, dann definiert man:*

1. *Retrakt: eine stetige Abbildung $f : X \to A$ mit $f|_A = Id_A$ heißt ein Retrakt.*
2. *Deformationsretrakt: eine Homotopie $H : X \times I \to X$ zwischen Id_X und Id_A, d.h.*

$$H(x, 0) = x \; , \quad H(x, 1) \in A \quad \textit{für alle } x \in X \; ,$$

$$H(a, s) = a \; , \quad \textit{für alle } a \in A \subset X \textit{ und alle } s \in I .$$

Sofern ein topologischer Raum triangulierbar ist, kann man die Fundamentalgruppe dieses Raums systematisch mittels der Fundamentalgruppe eines Polyeders bestimmen - siehe dazu etwa Nakahara (2003), S. 134 ff.

Wir wollen hier die Fundamentalgruppe des Kreises S^1, ein theoretisch wichtiges Beispiel, mithilfe der Methode der universellen Überlagerungsgruppe (siehe unten) bestimmen. Wir folgen der Ableitung von Nakahara (2003), S. 131 ff. Dabei betrachten wir $\mathbb{R}$ als eine additive topologische Gruppe, und damit einen toplogischen Raum, der zudem einfach wegzusammenhängend ist. Da man $S^1 \simeq \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ schreiben kann, ist $\mathbb{R}$ die universelle Überlagerungsgruppe von S^1.

Satz 14.3.9 *Die Fundamentalgruppe des Kreises S^1 ist isomorph zu $\mathbb{Z}$, kurz $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Da der Kreis wegzusammenhängend ist hängt die Fundamentalgruppe nicht vom Basispunkt ab.*

Klarer werden die Zusammenhänge des folgenden Beweises mit einem Bild.

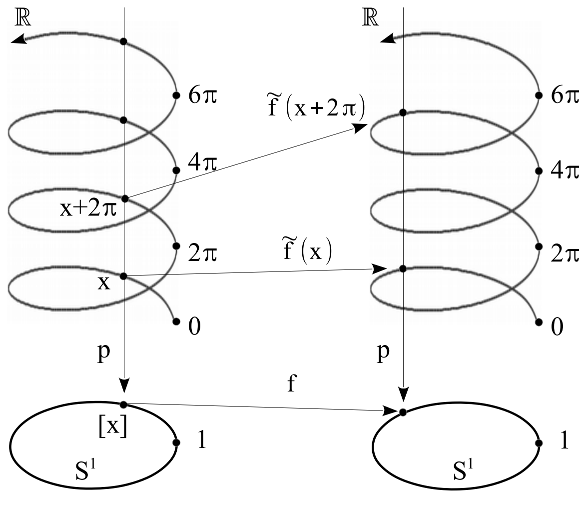

Abbildung 14.3: $\mathbb{R}$ als universelle Überlagerungsgruppe von S^1

Beweis. Wir betrachten S^1 als Kreis in $\mathbb{C}$, also $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Die Projektion p von $\mathbb{R}$ in S^1 definieren wir als $p(x) := \exp(ix)$. Wir nennen zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ äquivalent, $x \sim y$, wenn $x - y = 2\pi m \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt. Alle zu $x \in \mathbb{R}$ äquivalenten Punkte werden mittels p auf den Punkt $[x] \in S^1$ projiziert.

Um die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ zu bestimmen, möchte man Schleifen auf S^1 untersuchen. Zu diesem Zweck wählen wir den Umweg über die Überlagerungsgruppe $\mathbb{R}$ und betrachten den Lift einer Schleife auf S^1 nach $\mathbb{R}$. Wir konstruieren also eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x+2\pi) = \tilde{f}(x)+2\pi n$. Die Abbildung zweier äquivalenter Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ unter $\tilde{f}$ ist wiederum äquivalent, denn

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y + 2\pi m) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y) + 2\pi mn - \tilde{f}(y) = 2\pi mn \;.$$

Wenn man nun $\tilde{f}(x)$ mittels p herunter auf S^1 projiziert, dann definiert der entstehende Punkt auf S^1 eine Abbildung $f : S^1 \to S^1$ mit $f([x]) := p \circ \tilde{f}(x)$. Wegen $\tilde{f}(0) = 0$ ist $f(1) = 1$ fixiert. Wenn man umgekehrt eine Abbildung $f : S^1 \to S^1$ mit $f(1) = 1$ vorgibt, dann ist der Lift $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x+2\pi) = \tilde{f}(x)+2\pi n$ eindeutig bestimmt. Diese Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt $\deg(f)$, der Abbildungsgrad oder die Windungszahl der Funktion f, denn wenn $[x]$ den Kreis einmal umrundet, so umrundet $f([x])$ den Kreis n mal.

Die für die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ interessierenden Schleifen auf S^1 sind also gerade die Abbildungen $f : S^1 \to S^1$ mit einer festen Windungszahl $\deg(f)$. Diese Schleifen weisen eine Gruppenstruktur auf, denn wenn $f_1, f_2 : S^1 \to S^1$ zwei Schleifen mit dem Lift $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\deg(f_1) = n_1$, $\deg(f_2) = n_2$ sind, dann gilt für das Produkt $f_1 * f_2$, d.h. die Hintereinanderausführung der Schleifen:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(x + 2\pi) &:= \tilde{f}_1(x * 2\pi) + \tilde{f}_2(x * 2\pi) \\ &= \tilde{f}_1(x) + 2\pi n_1 + \tilde{f}_2(x) + 2\pi n_2 \\ &= \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(x) + 2\pi(n_1 + n_2) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_1 * f_2([x] + 2\pi) = p \circ (\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(x + 2\pi)) = p \circ (\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(x) + 2\pi(n_1 + n_2)) = f_1 * f_2([x]) \ ,$$

und damit $\deg(f_1 * f_2) = \deg(f_1) + \deg(f_2)$.

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ existiert auch eine Schleife $f : S^1 \to S^1$ mit $\deg(f) = n$, denn z.B. $\tilde{f}(x) := nx$ liefert gerade

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = n(x + 2\pi) = nx + 2\pi n = \tilde{f}(x) + 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \deg(f) = n \ .$$

Weiter sind zwei Schleifen $f_1, f_2 : S^1 \to S^1$ genau dann homotop, wenn $\deg(f_1) = \deg(f_2)$ gilt, denn:

a) seien $\deg(f_1) = \deg(f_2) = n$ und $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Lifte von f_1, f_2, dann ist $\tilde{F}(x,t) := t\tilde{f}_1(x)+(1-t)\tilde{f}_2(x)$ eine Homotopie zwischen $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$. Jetzt projiziert man diese Homotopie mittels p herunter auf S^1:

$$\begin{aligned} F(x,t) &:= p \circ \tilde{F}(x,t) = \exp(i(t\tilde{f}_1(x) + (1-t)\tilde{f}_2(x))) \\ &= \exp(it\tilde{f}_1(x)) \cdot \exp(i(1-t)\tilde{f}_2(x)) = f_1([x])^t \cdot f_2([x])^{(1-t)} \ , \end{aligned}$$

mit $\deg(F(x,t)) = n$ und $f(x,0) = f_2([x])$ und $f(x,1) = f_1([x])$. Also ist $F(x,t)$ eine Homotopie zwischen f_1 und f_2.

b) sei umgekehrt $F([x],t)$ eine Homotopie zwischen $f_1, f_2 : S^1 \to S^1$ mit $F(1,t) = 1$. Dann kann man diese Homotopie nach $\mathbb{R}$ liften und erhält eine Homotopie $\tilde{F}(x,t)$ zwischen $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{F}(0,t) = 0$ und $\tilde{F}(x + 2\pi, t) = \tilde{F}(x,t) + 2\pi n$. Also ist $\deg(F) = n$ und damit auch $\deg(f_1) = \deg(f_2) = n$.

Die verschiedenen Klassen der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ bestehen damit aus den Schleifen $f : S^1 \to S^1$ mit verschiedenem $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, also ist $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. $\square$

Mit der Fundamentalgruppe des Kreises kann man unschwer auch die Fundamentalgruppe eines Torus berechnen, denn:

Lemma 14.3.10 *Seien X, Y wegzusammenhängende topologische Räume, dann gilt*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) \ . \qquad (14.3.6)$$

Beweis. Seien $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ Projektoren auf X, bzw. Y. Wenn nun α eine Schleife in $X \times Y$ mit Basispunkt (x_0, y_0) ist, dann sind $\alpha_1 = p_1(\alpha)$ und $\alpha_2 = p_2(\alpha)$ Schleifen mit den Basispunkten x_0, bzw. y_0. Umgekehrt bestimmen zwei Schleifen α_1 und α_2 in X, bzw. Y, mit den Basispunkten x_0, bzw. y_0, eindeutig eine Schleife $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)$ in $X \times Y$ mit Basispunkt (x_0, y_0). Nun kann man eine Abbildung der Schleifen-Klassen definieren

$$\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) \quad \text{mit}$$

$$\varphi([\alpha]) := ([\alpha_1], [\alpha_2]) \ .$$

Da dieser Homomorphismus nach Konstruktion umkehrbar ist, stellt er also einen Isomorphismus dar. □

Sei also z.B. $T^2 := S^1 \times S^1$ ein Torus, dann ist $\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.

Im Gegensatz zu S^1 ist die Fundamentalgruppe von S^n für $n \geq 2$ trivial. Dies ist eine sehr wichtige Aussage, die u.a. hilft, um für die in der Physik wichtige Gruppe $SU(2)$ nachzuweisen, daß diese einfach zusammenhängend ist. Für den Beweis soll hier die stereographische Projektion verwendet werden, die im folgenden Lema eingeführt wird.

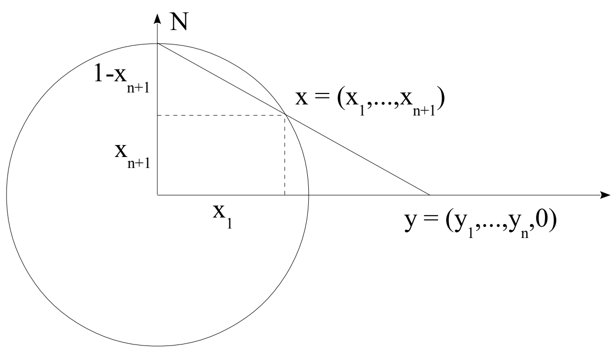

Abbildung 14.4: Stereographische Projektion von S^n nach $\mathbb{R}^n$:
$x_1/(1 - x_{n+1}) = y_1/1 = y_1$.

Lemma 14.3.11 *Für alle $n \geq 0$ ist die Sphäre S^n, bei der der Nord- oder Südpol entfernt wurde, homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Für die Sphäre $S^0 := \{+1, -1\}$ gilt $S^0 \setminus N = \{-1\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^0$. Ebenso ist $S^1 \setminus N \simeq]0, 2\pi[$ homöomorph zu $\mathbb{R}$. Für $n \geq 2$ führen wir die stereographische Projektion von S^n nach $\mathbb{R}^n$ ein:

$$f : S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) \; . \tag{14.3.7}$$

Das heißt, ein Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \setminus N$ wird auf einen Punkt $y := (f(x), 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ abgebildet. Dieser Punkt y liegt gerade dort liegt, wo die Gerade von N durch x auf den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ trifft. Jetzt sieht man unschwierig, daß die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus N \quad \text{mit} \quad g(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{||y||^2 + 1}(2y_1, \ldots, 2y_n, ||y||^2 - 1) \tag{14.3.8}$$

die Umkehrabbildung zu f ist, denn mit $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ f(x))_1 &= \frac{2y_1(x)}{||y(x)||^2 + 1} = \frac{2x_1}{1 - x_{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})^2} + 1} \\ &= 2x_1 \frac{(1 - x_{n+1})}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1 - 2x_{n+1} + x_{n+1}^2} = 2x_1 \frac{(1 - x_{n+1})}{2 - 2x_{n+1}} = x_1 \; ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f(x))_{n+1} &= \frac{||y(x)||^2 - 1}{||y(x)||^2 + 1} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})^2} - 1}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})^2} + 1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (1 - 2x_{n+1} + x_{n+1}^2)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + (1 - 2x_{n+1} + x_{n+1}^2)} = \frac{2x_{n+1} - 2x_{n+1}^2}{2 - 2x_{n+1}} = x_{n+1} \; .\end{aligned}$$

$$(f \circ g(y))_1 = \frac{2y_1}{||y||^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{||y||^2 - 1}{||y||^2 + 1}} = \frac{2y_1}{||y||^2 + 1 - (||y||^2 - 1)} = y_1 \; .$$

Also ist $S^1 \setminus N$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. □

Satz 14.3.12 *Die Einheitssphäre S^n ist für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend, mit anderen Worten, die Fundamentalgruppe von S^n ist für $n \geq 2$ trivial, d.h. $\pi_1(S^n) = [\epsilon] = e$. Da S^n für $n \geq 2$ wegzusammenhängend ist hängt die Fundamentalgruppe nicht vom Basispunkt ab.*

Beweis. Zunächst scheint der Beweis dieses Satzes mittels des obigen Lemmas zur stereographischen Projektion recht trivial zu sein. Man nehme eine Schleife auf S^n, die zumindest einen Punkt von S^n nicht berührt, erkläre diesen Punkt zum Nordpol N und bilde mittels der stereographischen Projektion S^n homöomorph auf $\mathbb{R}^n$ ab. Nun ist $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend und damit ist es der homöomorphe Raum S^n auch. Fertig.

Allerdings ist die Topologie immer wieder für Überraschungen gut. Die folgende Argumentation verdankt der Autor einer Vorlesung von Lee (2012). Im Jahr 1890 hat der italienische Mathematiker Guiseppe Peano eine stetige surjektive Abbildung von $f : I \to I \times I$ vorgestellt, welche den Namen *raumfüllende Kurve*, oder *Peano-Kurve* trägt. Das Quadrat $I \times I$ kann man nun homöomorph auf die Einheitsscheibe D abbilden und diese wiederum surjektiv auf S^2 abbilden. Also kann man eine Schleife als Peano-Kurve konstruieren, die ganz S^2 ausfüllt, so daß kein Punkt übrig bleibt, den man zum Nordpol erklären könnte. Das Entsprechende gilt natürlich auch für S^n.

In diesem Fall geht man so vor, daß man einfach einen beliebigen Punkt von S^n zum Nordpol N erklärt und alle Wegstücke der Schleife, welche durch N führen auf einem kleinen Wegintervall homotop verändert, so daß sie nicht mehr durch N gehen. Anschließend kann man wieder wie oben S^n homöomorph auf $\mathbb{R}^n$ abbbilden. Da die Fundamentalgruppe eines Raums nicht von einzelnen Schleifen abhängt, sondern nur von deren Homotopie-Klassen, gilt also auch für Schleifen von Peano-Kurven auf S^n, daß $\pi_1(S^n) = [\epsilon] = e$ ist, daß also S^n einfach zusammenhängend ist. $\square$

15 Das Konzept der Überlagerungsräume

15.1 Topologische Überlagerungsräume

Wir folgen Hausner u. Schwartz (1968), S. 12 ff. und dem schönen Buch über algebraische Topologie von Fulton (1995), S. 153 ff. Wir setzen für das Folgende wieder voraus, daß unsere topologischen Räume Hausdorff-Räume sind und wegzusammenhängend. Zur Erinnerung: ein topologischer Raum ist ein Hausdorff-Raum, wenn für je zwei verschiedene Punkte des Raums disjunkte offene Umgebungen existieren.

Definition 15.1.1 *Seien X, Y topologische Räume, dann heißt der Raum Y eine Überlagerung von X, wenn es eine stetige, surjektive Abbildung $p : Y \to X$, die sog. Überlagerungsabbildung oder Projektion, mit der Eigenschaft gibt, daß für alle Punkte $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ existiert, so daß $p^{-1}(U) \subset Y$ aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Vereinigung paarweise disjunkter offener Mengen U_α besteht, die (jede einzeln für sich) mittels p homöomorph auf U abgebildet werden.*

Für ein $x \in X$ heißt die Menge der endlich oder abzählbar unendlich vielen Punkte $p^{-1}(x)$ die Faser von x und die offenen Mengen U_α heißen die Blätter.

Die Überlagerung Y heißt trivial, wenn $Y = X \times T$ mit einer Menge T mit diskreter Topologie ist.

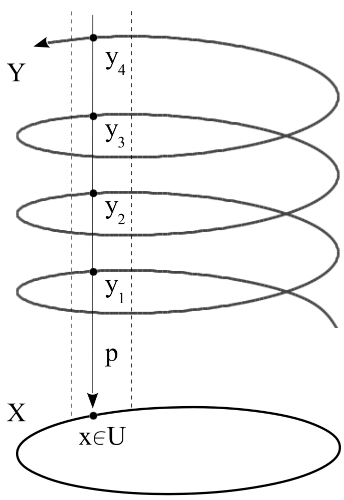

Abbildung 15.1: $Y = \mathbb{R}$ als Überlagerungsraum von $X = S^1$

Das obige Bild stellt nochmals das Beispiel des vorherigen Kapitels einer Überlagerung von S^1 durch $\mathbb{R}$ dar.

Jetzt ist man an Wegen in X und ihren Liften in Y interessiert. Zunächst einmal wollen wir die Eindeutigkeit solcher Lifte zeigen.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Lemma 15.1.2 *Seien $p : Y \to X$ eine Überlagerung, Z ein zusammenhängender topologischer Raum, $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung, und $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ zwei stetige Lifte von f, also $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Z \to Y$ mit $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$. Wenn $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ in einem Punkt $z \in Z$, dann gilt $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ auf ganz Z.*

Beweis. Wir wollen zeigen, daß die Untermenge $Z_= \subset Z$ mit $z \in Z_=$, auf der $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ übereinstimmen, eine offene Menge ist. Seien $w \in Z_=$ und $x := p \circ \tilde{f}_1(w) = p \circ \tilde{f}_2(w)$ und U eine Umgebung von $x \in X$, so daß $p^{-1}(U) \subset Y$ aus einer Vereinigung paarweise disjunkter offener Mengen U_α besteht, die mittels p homöomorph auf U abgebildet werden. Sei nun V eine Umgebung von $w \in Z_=$, dann muß aufgrund der Stetigkeit von $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ dieses V in das gleiche U_{α_0} abgebildet werden. Da $p : U_{\alpha_0} \to U$ ein Homöomorphismus ist und nach Voraussetzung $p \circ \tilde{f}_1(w') = p \circ \tilde{f}_2(w')$ gilt, muß $\tilde{f}_1(w') = \tilde{f}_2(w')$ für alle $w' \in V$ sein. Damit liegt also mit $w \in Z_=$ auch dessen Umgebung V in $Z_=$, also ist $Z_=$ offen.

Sei nun umgekehrt $w \in Z_{\neq}$, also ein Element der Menge auf welcher $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ nicht übereinstimmen und V eine Umgebung von $w \in Z_{\neq}$, dann wird V von $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ auf zwei verschiedene und damit disjunkte U_α abgebildet, und damit ist mit $w \in Z_{\neq}$ auch dessen Umgebung V in $Z_{\neq}$, also ist auch $Z_{\neq}$ offen. Gleichzeitig muß aber $Z_{\neq}$ als Komplement zu $Z_=$ abgeschlossen sein. Da $Z_=$ den Punkt z enthält ist also $Z_=$ nicht leer und also muß $Z_{\neq}$ als gleichzeitig offene und abgeschlossenen Menge leer sein, und damit ist $Z = Z_=$.□

Lemma 15.1.3 *Seien $p : Y \to X$ eine Überlagerung, $f : I \to X$ mit $I = [0, 1] \in \mathbb{R}$ ein nicht notwendigerweise geschlossener Weg in X, $x_0 = f(0) \in X$ und $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = x_0$, dann gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde{f} : I \to Y$ des Wegs f, d.h. ein eindeutiges $\tilde{f}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.*

Beweis. Das obige Lemma nutzt man nun mit $Z := I = [0, 1] \in \mathbb{R}$, um Pfade der Form $f : I \to X$ in Pfade $\tilde{f} : I \to Y$ des Überlagerungsraums Y zu liften, und erhält also die Eindeutigkeit eines solchen Lifts, wenn ein Punkt in Y vorgegeben ist. Die Existenz eines solchen Lifts folgt aus der Kompaktkeit des Pfads $f(I) \subset X$, denn dadurch können wir den Pfad mit endlich vielen Umgebungen $U \subset X$ überdecken, und in jedem U stellt die Projektion p einen lokalen Homöomorphismus dar mit dem sich f nach $\tilde{f}$ liften läßt. □

Lemma 15.1.4 *Wenn zwei nicht notwendigerweise geschlossene Wege in X homotop sind, dann sind auch ihre Lifte in Y homotop.*

Beweis. Sei $H : I \times I \to X$ eine Homotopie zwischen f_1 und f_2, also

$$H(t,0) = f_1(t)\ ,\ H(t,1) = f_2(t)\ , \quad H(0,s) = f_1(0) = f_2(0)\ ,\ H(1,s) = f_1(1) = f_2(1)\ ,$$

dann kann man jeden Weg $H(t,s)$ mit festem s eindeutig in einen Weg $\tilde{H}(t,s)$ in Y liften. Den Parameterbereich von $I \times I = [0,1] \times [0,1]$ kann man mit dem Kompaktheitsargument wieder mit endlich vielen Umgebungen überdecken, auf denen p einen lokalen Homöomorphismus darstellt und damit ist $\tilde{H}(t,s)$ eine stetige Funktion mit

$$\tilde{H}(t,0) = \tilde{f}_1(t)\ ,\ \tilde{H}(t,1) = \tilde{f}_2(t)\ , \quad \tilde{H}(0,s) = \tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0)\ ,\ \tilde{H}(1,s) = \tilde{f}_1(1) = \tilde{f}_2(1)\ ,$$

mit $p \circ \tilde{H}(t,s) = H(t,s)$. □

Definition 15.1.5 *Seien $p : Y \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0) \subset Y$ und $\pi_1(X)$ die Fundamentalgruppe von X. Nun kann man folgendermaßen eine transitive Operation auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ definieren: zu einem nicht notwendigerweise geschlossenen Pfad f in X mit $f(0) = x_0$ und $f(1) = x_1$ existiert ein eindeutiger Lift $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(0) = y_0$, $\tilde{f}(1) = y_1$ und $p \circ \tilde{f} = f$, also insb. $p(y_1) = x_1$. Dann definiert man für $[f] \in \pi_1(X)$:*

$$y_0 * [f] := y_1\ .$$

Mit $e_{x_0} = [\epsilon_{x_0}]$ gilt $y_0 * e_{x_0} = y_0$ und es gilt die Transitivität $(y_0 * [f_1]) * [f_2] = y_0 * [f_1 * f_2]$. Wenn nun $y_1, y_2 \in Y$ über x_0 liegen, dann gibt es, da Y pfadzusammenhängend ist, einen Pfad $\tilde{f}$ von y_1 nach y_2 und die Projektion dieses Pfades nach X ergibt einen geschlossenen Pfad f mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $f(0) = f(1) = x_0$.

Wenn X einfach zusammenhängend ist, also $\pi_1(X) = e$, dann folgt daraus sofort, daß $y_0 * e = y_0$ ist, d.h. die Faser $p^{-1}(x_0)$ besteht nur aus einem Blatt und damit ist p ein Homöomorphismus.

Lemma 15.1.6 *Seien $p : Y \to X$ eine Überlagerung und $\pi_1(X)$, $\pi_1(Y)$ die Fundamentalgruppen von X, Y, dann ist die Abbildung $p_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ eine injektive Abbildung.*

$\pi_1(Y)$ ist isomorph zu einer Untergruppe $G \subset \pi_1(X)$, wobei G aus genau jenen Elementen $\alpha \in \pi_1(X)$ besteht, welche den Basispunkt $y_0 \in Y$ invariant lassen, d.h. $y_0 * \alpha = y_0$.

Beweis. Sei y_0 ein Basispunkt eines geschlossenen Pfades in Y über dem entsprechenden Basispunkt $x_0 \in X$. Sei $p_*[\tilde{f}_1] = p_*[\tilde{f}_2]$, dann ist nach Definition $[p \circ \tilde{f}_1] = [p \circ \tilde{f}_2]$, d.h. $p \circ \tilde{f}_1$ ist homotop zu $p \circ \tilde{f}_2$. Mit dem vorherigen Lemma sind dann auch die Lifte $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ homotop, d.h. $[\tilde{f}_1] = [\tilde{f}_2]$.

In der Umkehrung heißt das: $[\tilde{f}_1] \neq [\tilde{f}_2] \quad \Rightarrow \quad p_*[\tilde{f}_1] \neq p_*[\tilde{f}_2]$, also ist p_* injektiv.

Weiter folgt $G := p_*(\pi_1(Y))$. Da $\pi_1(Y)$ eine Fundamentalgruppe ist und injektiv auf $\pi_1(X)$ abgebildet wird, ist G eine Untergruppe von $\pi_1(X)$ und besteht gerade aus jenen Elementen $\alpha \in \pi_1(X)$, welche den Basispunkt $y_0 \in Y$ invariant lassen. □

Der folgende wichtige Satz klärt das Verhältnis verschiedener Überlagerungen eines topologischen Raums X und bereitet damit auch den Beweis der Eindeutigkeit von Überlagerungen mit der gleichen Fundamentalgruppe vor.

Satz 15.1.7 *Seien $p_1 : Z \to X$ und $p_2 : Y \to X$ zwei Überlagerungen von X. Es gibt genau dann eine eindeutige Überlagerungsabbildung $p : Z \to Y$ mit $p_1 = p_2 \circ p$, wenn für die entsprechenden projizierten Fundamentalgruppen $G_Z := p_{1*}(\pi_1(Z))$ und $G_Y := p_{2*}(\pi_1(Y))$ gilt $G_Z \subseteq G_Y$.*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend left, "p_1"] \arrow[rr, bend right, "G_Z"'] & Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[r, bend right, "G_Y"'] & X \end{tikzcd}$$

Beweis. 1. Seien $p : Z \to Y$ und $p_2 : Y \to X$ Überlagerungen, dann ist auch $p_1 = p_2 \circ p : Z \to X$ eine Überlagerung. Sei f eine Schleife in X mit Basispunkt x_0. Die Kurve können wir eindeutig in eine Kurve f_Y in Y mit Basispunkt y_0 liften, und diese wiederum eindeutig in eine Kurve f_Z in Z mit Basispunkt z_0. Jetzt nehmen wir an, daß $[f] \in G_Z$ ist, dann folgt mit dem obigen Lemma, daß auch f_Z eine Schleife in Z ist, d.h. $z_0 * [f] = z_0$, und damit ist auch $p \circ f_Z = f_Y$ eine Schleife in Y, d.h. $y_0 * [f] = y_0$, und damit ist $[f] \in G_Y$, also $G_Z \subseteq G_Y$.

2. Seien umgekehrt $p_1 : Z \to X$ und $p_2 : Y \to X$ Überlagerungen und G_Z, G_Y Untergruppen von $\pi_1(X)$ mit $G_Z \subseteq G_Y$. Jetzt soll gezeigt werden, daß sich eine eindeutige Überlagerungsabbildung $p : Z \to Y$ definieren läßt. Seien z_0 der Basispunkt in Z und z_1 ein weiterer Punkt in Z und f_Z eine Kurve in Z, die z_0 mit z_1 verbindet. Dann projizieren wir diese Kurve f_Z mittels p_1 nach X und erhalten eine Kurve f in X, die den Basispunkt $x_0 := p_1(z_0)$ mit $x_1 := p_1(z_1)$ verbindet. Jetzt können wir die Kurve f in X eindeutig nach Y liften und erhalten eine Kurve f_Y, die den Basispunkt y_0 mit einem Punkt $y_1 \in Y$ über $x_1 \in X$ und unter $z_1 \in Z$ verbindet. Wir definieren die Projektion $p : Z \to Y$ als $p(z_1) := y_1$. Diese Definition hängt jetzt nicht vom der speziellen Kurve f_Z ab, sondern nur vom Endpunkt, denn $[f_Z] \in G_Z \subseteq G_Y \subseteq \pi_1(X)$ impliziert $p(z_1) = y_0 * [f_Z]$. Diese Abbildung p ist stetig und erfüllt die Bedingung $p_1 = p_2 \circ p$. Da p_1 und p_2 Überlagerungen sind und $p = p_2^{-1} \circ p_1$ und $p^{-1} = p_1^{-1} \circ p_2$ in einer geeigneten Umgebung von y_1 gilt, ist also auch $p : Z \to Y$ eine Überlagerung. $\square$

Mit diesem Satz kann jetzt die Eindeutigkeit von Überlagerungen von X mit der gleichen Untergruppe G der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ gezeigt werden.

Lemma 15.1.8 *Seien $p_1 : Z \to X$ und $p_2 : Y \to X$ zwei Überlagerungen mit der gleichen Untergruppe $G_Z = G_Y = G \subseteq \pi_1(X)$ der Fundamentalgruppe von X, dann sind Z und Y homöomorph und für den Homöomorphismus $p : Z \to Y$ gilt $p_2 \circ p = p_1$.*

Beweis. Aufgrund des obigen Satzes gibt es eine Abbildung $p : Z \to Y$ mit $p_2 \circ p = p_1$. Zu zeigen ist, daß p tatsächlich ein Homöomorphismus ist, d.h. daß es über dem Basispunkt $y_0 \in Y$ nur einen Basispunkt $z_0 \in Z$ gibt. Wir nehmen nun an, daß es über $y_0 \in Y$ zwei Punkte $z_0, z_1 \in Z$ gäbe, die durch p auf $y_0 \in Y$ projiziert werden. Die Punkte z_0 und z_1 verbinden wir durch eine Kurve f_Z. Dann ist deren Projektion nach Y, die Kurve $f_Y = p \circ f_Z$ eine Schleife in Y, und deren Projektion nach X, die Kurve $f = p_1 \circ f_Z = p_2 \circ p \circ f_Z$ ist eine Schleife in X. Da f_Y gleichzeitig auch der eindeutige Lift von f nach Y ist, gilt $[f] = [p_1 \circ f_Z] \in G_Y = G$. Da nun aber auch $G_Z = G$ ist, so ist auch der Lift von f_Y nach Z geschlossen, also eine Schleife, und damit ist $z_0 = z_1$.□

Nachdem nun also die Eindeutigkeit der Überlagerungen geklärt ist, soll jetzt die Existenz von Überlagerungen durch Konstruktion bewiesen werden.

Satz 15.1.9 *Sei X ein topologischer Raum mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ und sei G eine Untergruppe von $\pi_1(X)$. Dann gibt es eine Überlagerung $p : Y \to X$, so daß G isomorph zu $\pi_1(Y)$ ist, d.h. $G = p_*(\pi_1(Y))$.*

Beweis. Sei $x_0 \in X$ unser Basispunkt in X und $x \in X$ ein davon verschiedener Punkt. Dann definieren wir eine Äquivalenzrelation zwischen zwei verschiedenen Pfaden f_1, f_2 von x_0 nach x_1, x_2:

$$(x_1, f_1) \sim (x_2, f_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 \text{ und } [f_1 * f_2^{-1}] \in G \;.$$

Wir schreiben die Äquivalenzklasse von (x, f) als $[x, f]$ und definieren Y als die Menge all dieser Äquivalenzklassen. Die Überlagerungsabbildung $p : Y \to X$ definiert man dann als $p([x, f]) := f(1) = x$. Jetzt gilt es zu zeigen, daß wir diesen Raum Y zu einem wegzusammenhängenden und lokal einfach zusammenhängenden Hausdorff-Raum machen können, dessen Fundamentalgruppe isomorph zu G ist. Zu diesem Zweck konstruieren wir eine offene Umgebung $\tilde{U}_{[f]}$ um (x, f): sei $U \subset X$ eine offene einfach zusammenhängende Umgebung von $x \in X$ und $y \in U$ ein beliebiger Punkt und g ein Pfad von x nach y, dann liften wir diesen Pfad nach Y und erhalten

$$\tilde{U}_{[f]} := \{[y, f * g] \,|\, y \in U,\; f \,\text{Pfad von}\, x_0 \,\text{nach x},\; g \,\text{Pfad von}\, x \,\text{nach}\, y\} \;.$$

Diese $\tilde{U}_{[f]}$ eignen sich tatsächlich als offene Umgebungen, denn aus $U_1 \subset U_2$ bei festem f folgt $\tilde{U}_{[f],1} \subset \tilde{U}_{[f],2}$, und wenn f_1 und f_2 zwei nichthomotope Pfade von x_0 nach x sind, dann ist nach Definition $\tilde{U}_{[f],1} \cap \tilde{U}_{[f],2} = \emptyset$. Mit diesen $\tilde{U}$ als offenen Umgebungen wird Y zu einem topologischen Hausdorff-Raum. Weiter ist die Projektion $p : \tilde{U} \to U$ stetig, und sogar ein Homöomorphismus, denn:

- zu jedem Punkt $y \in U$ gibt es einen Pfad g von x nach y, und da U einfach zusammenhängend ist sind zwei verschiedene Pfade g_1 und g_2 von x nach y homotop und führen also zum gleichen Punkt $[y, f * g_1] = [y, f * g_2] \in \tilde{U}_{[f]}$, also existiert $p^{-1} : U \to \tilde{U}_{[f]}$,

- und dieses p^{-1} auf U ist wegen $U_1 \subset U_2$ bei festem $f \;\Rightarrow \tilde{U}_1 \subset \tilde{U}_2$ auch stetig.

Die Projektion $p : \tilde{U} \to U$ ist tatsächlich eine Überlagerungsabbildung, weil $p^{-1}(U)$ zu einer abzählbaren Zahl offener $\tilde{U}_{[f]}$ gemäß der Äquivalenzklassen von f in G führt.

Der Pfad $f := f_1 * f_2^{-1}$ ist eine Schleife bzgl. des Basispunkts $x_0 \in X$ mit $[f] \in G$. Diese Schleife können wir eindeutig nach Y liften und erhalten eine Schleife $[\tilde{f}] \in \pi_1(Y)$ und damit ist $\pi_1(Y)$ isomorph zu G. □

Dieses Ergebnis erlaubt jetzt die Definition des sog. Universellen Überlagerungsraums.

Definition 15.1.10 *Sei X ein topologischer Raum mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ und sei $e_{x_0} = [\epsilon_{x_0}]$ das neutrale Element von $\pi_1(X)$. Dann heißt die Überlagerung $p : Y \to X$, so daß e_{x_0} isomorph zu $\pi_1(Y)$ ist, d.h. $e_{x_0} = p_*(\pi_1(Y))$, Universeller Überlagerungsraum. Da alle Schleifen in Y homöomorph zur trivialen Schleife sind, d.h. sich auf den nach Y gelifteten Punkt von x_0 zusammenziehen lassen, ist Y einfach zusammenhängend.*

In der Physik verwendet man den Universellen Überlagerungsraum insbesondere im Zusammenhang mit Lie-Gruppen und spricht dort von der Universellen Überlagerungsgruppe. Lie-Gruppen haben ja neben ihrer Gruppenstruktur auch die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und sind also spezielle topologische Gruppen. Daher ist es sinnvoll, statt einer nicht einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe ihre einfach zusammenhängende Universelle Überlagerungsgruppe zu betrachten. Zum Beispiel ist $SU(2)$ die Universelle Überlagerungsgruppe zu $SO(3)$.

Da die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe aus geometrischer Sicht einfach der Tangentialraum der Lie-Gruppe an der Stelle der Identität ist, stimmen die Lie-Algebren einer nicht einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe und ihrer Universellen Überlagerungsgruppe überein.

15.2 G-Räume und G-Überlagerungen

Sei X ein topologischer Raum (wie immer hier in diesem Kapitel ein Hausdorff-Raum) und G eine (topologische oder diskrete) Gruppe, deren Elemente von links als Homöomorphismen auf X wirken, d.h.

$$w : G \times X \to X \quad \text{mit} \quad w(g,x) \mapsto gx \;, \tag{15.2.1}$$

$$g(hx) = (gh)x \quad \text{und} \quad ex = x \qquad \text{für } g,h,e \in G,\ eg = g,\ x \in X \;,$$

dann heißt X ein G-Raum.

Zwei Punkte $x, x' \in X$ heißen im selben *Orbit*, wenn es ein Element $g \in G$ gibt mit $x' = gx$. Da G eine Gruppe ist, ist die die Orbit-Beziehung eine Äquivalenzrelation und der Raum der Orbitale ist der Raum der Äquivalenzklassen $Y := X/G$.

Weiter kann man eine Projektion $p : X \to Y$ einführen, die jeden Punkt $x \in X$ in sein Orbital $[x] \in Y$ abbildet. Den Raum Y kann man mit der Quotiententopologie ausstatten, indem man $V \in Y$ als offen definiert, wenn $p^{-1}(V) \in X$ offen ist.

Im Folgenden betrachten wir nur sogenannte *freie* und *eigentlich diskontinuierliche* Wirkungen w der Gruppe G auf X. Eine Wirkung heißt w heißt *frei*, falls aus $gx = x$ für ein $x \in X$ folgt, dass g das neutrale Element $e \in G$ ist. Eine Wirkung w heißt *eigentlich diskontinuierlich*, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ gibt, so daß $gU \cap U \neq \emptyset$ nur für endlich viele $g \in G$ ist. Hieraus folgt, daß es für zwei verschiedene Elemente $g, h \in G$ eine Umgebung $U \subset X$ gibt, so daß gU und hU disjunkt sind.

Lemma 15.2.1 *Wenn eine Homöomorphismengruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich auf einen topologischen Raum X wirkt, dann ist die Projektion $p : X \to X/G$ eine Überlagerung.*

Beweis. 1. Die Abbildung p ist stetig. Wenn $U \subset X$ eine offene Umgebung in X ist, dann sind auch alle gU mit $g \in G$ offen und damit ist $p^{-1}(p(U)) = \{g'\}U$ mit $\{g'\} \subseteq G$ eine Vereinigung offener Mengen. Wenn U so gewählt wurde, daß es die Bedingung der Definition für freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkungen von G erfüllt, dann ist die Vereinigung der offenen Mengen von $p^{-1}(p(U))$ eine Vereinigung disjunkter offener Mengen.

2. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß für eine solche Umgebung U die Abbildung von jedem gU in $p(U)$ eine Bijektion ist. Da $x \in U$ und $gx \in gU$ im selben Orbit $[x]$ liegen, gilt $p(gx) = p(x)$ für alle $x \in U$ und somit werden alle Äquivalenzklassen von $p(U)$ erreicht und p ist surjektiv. Wenn andererseits für $x_1, x_2 \in U$ gilt $p(gx_1) = p(gx_2)$, dann gibt es ein Element $h \in G$ mit $hgx_1 = gx_2$, bzw. $(g^{-1}hg)x_1 = x_2$ und wegen der Bedingung der freien und eigentlich diskontinuierlichen Wirkung muß $g^{-1}hg = e$ und damit $x_1 = x_2$ sein. Oder in der Negation: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow p(gx_1) \neq p(x_2)$ und damit ist p auch injektiv, insgesamt also bijektiv. □

Natürlich stellt sich jetzt die Frage, ob es einen Zusammenhang zwischen der Gruppe G einer G-Überlagerung und den Fundamentalgruppen der beteiligten Räume gibt? Diese Frage beantwortet der folgende Satz sehr schön.

Satz 15.2.2 *Sei G eine Homöomorphismengruppe, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X wirkt, sei $p : X \to X/G$ die entsprechende Überlagerung und $x_0 \in X$, dann gilt*

$$\frac{\pi_1(X/G, p(x_0))}{p_*(\pi_1(X, x_0))} \simeq G \,. \tag{15.2.2}$$

Beweis. Wir folgen (mit unseren Bezeichnungen) im wesentlichen dem Beweis von Wilkins (2008), Section 4, S. 42 ff.
Wir werden 1. eine surjektive Abbildung $\lambda : \pi_1(X/G, p(x_0)) \to G$ konstruieren, 2. zeigen, daß die Abbildung λ ein Homomorphismus ist, und 3. zeigen, daß der Kern von λ gerade $p_*(\pi_1(X, x_0))$ ist.

1. Sei $f : [0,1] \to X/G$ eine Schleife in X/G mit Basispunkt $p(x_0) = f(0) = f(1)$. Dann gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde{f} : [0,1] \to X$ in X mit $\tilde{f}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{f} = f$. Nun gilt $p(\tilde{f}(0)) = f(0) = f(1) = p(\tilde{f}(1))$, also gehören $\tilde{f}(0)$ und $\tilde{f}(1)$ zur gleichen Äquivalenzklasse, d.h. dem gleichen Orbit, und infolgedessen gibt es ein Element $g \in G$ mit $\tilde{f}(1) = g\tilde{f}(0)$. Weil G frei und eigentlich diskontinuierlich auf X wirkt ist g eindeutig bestimmt. Sei nun $f_2 : [0,1] \to X/G$ eine zweite Schleife in X/G mit Basispunkt $p(x_0) = f_2(0) = f_2(1)$, dann ist auch für diesen Lift $\tilde{f}_2 : [0,1] \to X$ wieder $\tilde{f}_2(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{f}_2 = f_2$. Wenn jetzt f und f_2 zur gleichen Äquivalenzklasse gehören, d.h. wenn $[f] = [f_2] \in \pi_1(X/G, p(x_0))$, dann sind auch die Endpunkte der Lifte gleich, d.h. $\tilde{f}(1) = \tilde{f}_2(1)$. Also ist λ eine eindeutige Funktion von $[f]$, d.h.

$$\lambda : \pi_1(X/G, p(x_0)) \to G \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(1) = g\tilde{f}(0) = \lambda([f])\, x_0 \ .$$

Diese Abbildung λ ist surjektiv, denn: sei $g \in G$, dann gibt es einen Weg $\tilde{f}$ von x_0 nach gx_0 in X, da X wegzusammenhängend ist. Nun ist $f := p \circ \tilde{f}$ eine Schleife in X/G mit Basispunkt $p(x_0)$ und $g = \lambda([f])$.

2. Seien $f_1 : [0,1] \to X/G$ und $f_2 : [0,1] \to X/G$ zwei Schleifen mit dem Basispunkt $p(x_0)$ in X/G, und seien $\tilde{f}_1 : [0,1] \to X$ und $\tilde{f}_2 : [0,1] \to X$ die eindeutigen Lifte von f_1 und f_2 mit dem Startpunkt $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = x_0 \in X$. Dann gilt für die Endpunkte der Lifte $\tilde{f}_1(1) = \lambda([f_1])\, x_0$ und $\tilde{f}_2(1) = \lambda([f_2])\, x_0$. Da die Schleifen f_1 und f_2 im Punkt $p(x_0)$ beginnen und enden kann man die Schleifen auf die übliche Weise verketten:

$$f_1 * f_2(t) := \begin{cases} f_1(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}\ , \\ f_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1\ . \end{cases}$$

Nun gibt es auch einen eindeutigen Lift von f_2 mit Startpunkt $f_1(1) = p(x_0)$, nämlich $\lambda([f_1])\, \tilde{f}_2$, und damit können wir den verketteten Pfad $f_3 := f_1 * f_2$ nach X liften:

$$\tilde{f}_3(t) := \begin{cases} \tilde{f}_1(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}\ , \\ \lambda([f_1])\, \tilde{f}_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1\ . \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda([f_1] * [f_2])\, x_0 = \lambda([f_1 * f_2])\, x_0 = \tilde{f}_3(1) &= \lambda([f_1])\, \tilde{f}_2(1) \\ &= \lambda([f_1])\lambda([f_2])\, x_0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lambda([f_1] * [f_2]) = \lambda([f_1])\lambda([f_2])\ ,$$

also ist λ ein Homomorphismus.

3. Jetzt soll der Kern der Abbildung λ bestimmt werden. Sei $f : [0,1] \to X/G$ eine Schleife in X/G mit Basispunkt $p(x_0)$ und sei $[f] \in \ker \lambda$. Dann ist $\tilde{f}(1) = e\, x_0 = x_0$ und somit $\tilde{f}$ eine Schleife in X mit Basispunkt x_0, für welche gilt: $[f] = p_*([\tilde{f}])$ und somit $[f] \in p_*(\pi_1(X, x_0))$. Sei umgekehrt $[f] \in p_*(\pi_1(X, x_0))$, dann ist gibt es eine Schleife $\tilde{f}$

mit $f = p \circ \tilde{f}$ zum Basispunkt $x_0 = \tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = \lambda([f])\, x_0$. Also ist $\lambda([f]) = e$ und somit $[f] \in \ker \lambda$. Damit ist $\ker \lambda = p_*(\pi_1(X, x_0))$.

Der Kern des surjektiven Homomorphismus $\lambda : \pi_1(X/G, p(x_0)) \to G$ kommutiert mit allen anderen Elementen von $\pi_1(X/G, p(x_0))$, ist also eine normale Untergruppe. Und damit ist die Gruppe $\pi_1(X/G, p(x_0))$ modulo $\ker \lambda$ isomorph zu G:

$$\frac{\pi_1(X/G, p(x_0))}{p_*(\pi_1(X, x_0))} \simeq G \; . \qquad \square$$

Korollar 15.2.3 *Besonders häufig kommt der Fall vor, daß X die Universelle Überlagerung von X/G ist und in diesem Fall ist die Fundamentalgruppe von X trivial, so daß das einfache und schöne Ergebnis gilt:*

$$\pi_1(X/G, p(x_0)) \simeq G \; . \tag{15.2.3}$$

Ein Standardbeispiel ist der reelle projektive Raum $RP^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ für $n \geq 2$. Dieser wird konstruiert, indem die Einheitsvektoren x und $-x$ aus $\mathbb{R}^{n+1}$, die ja gerade die Sphäre S^n definieren, miteinander identifiziert werden. Nun ist S^n einfach zusammenhängend und $RP^n = S^n/\{+1, -1\} = S^n/\mathbb{Z}_2$, also ist S^n die Universelle Überlagerungsgruppe von RP^n und für dessen Fundamentalgruppe gilt $\pi_1(RP^n) = \mathbb{Z}_2$.

Lemma 15.2.4 *Der reelle projektive Raum RP^n ist homöomorph zu der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(n)$, d.h. $RP^n \simeq SO(n)$ und damit gilt auch $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$.*

Beweis. 1. Aus $RP^n = S^n/\{+1, -1\}$ folgt, daß RP^n als der 'nördliche' Teil der Sphäre S^n betrachtet werden kann, bei welcher die gegenüberliegenden Punkte des 'Äquators' S^{n-1} miteinander identifiziert werden. Wir nennen den 'nördlichen' Teil der Sphäre ohne den 'Äquator' S^n_+ und erhalten somit also $RP^n \simeq S^n_+ \cup (S^{n-1}/\{+1, -1\})$. Nun ist der 'nördliche Teil der Sphäre S^n_+ homöomorph zur offenen 'Scheibe' $\overset{\circ}{D}{}^n$ und damit erhalten wir $RP^n \simeq \overset{\circ}{D}{}^n \cup (S^{n-1}/\{+1, -1\})$.

2. Jedes Element von $SO(n)$ kann als eine Rotation um einen Winkel θ mit $0 < \theta \leq \pi$ mit einen Einheitsvektor $n \in \mathbb{R}^n$ als Drehachse betrachtet werden. Man ordnet also jeder Drehung den Vektor $\Omega = \theta n$ zu und hat damit eine Abbildung von $SO(n)$ nach der Kugel $D^n := \{\Omega \,|\, 0 < |\Omega| \leq \pi\}$ konstruiert. Für $\theta < \pi$ ist diese Abbildung eindeutig, aber für $\theta = \pi$ gibt es eine Doppeldeutigkeit, denn πn und $\pi(-n)$ führen zum gleiche Punkt. Also identifiziert man diese beiden Punkte miteinander, oder anders gesagt, alle einander gegenüberliegenden Punkte auf der Kugeloberfläche S^{n-1} der Kugel D^n werden miteinander identifiziert, also $SO(n) \simeq \overset{\circ}{D}{}^n \cup (S^{n-1}/\{+1, -1\})$.

3. Also ist $RP^n \simeq SO(n)$ und $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$. $\square$

In der Physik sehr häufig vorkommende G-Überlagerungen sind jene mit der Gruppe $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{+1, -1\}$,. z.B. ist $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ - siehe Kapitel 21.6

16 Simpliziale Homologie

16.1 Grundgedanken der Homologie

Das ganze 19. Jahrhundert hindurch haben zahlreiche Mathematiker versucht, Eulers Polyederformel (8.0.1) tiefer zu verstehen und zu verallgemeinern. Aus diesem Bemühen entstand die Topologie. Frühe Gedanken zum topologischen Teilgebiet der Homologie finden sich bereits in einer Arbeit von Enrico Betti aus dem Jahr 1871, aber erst Poincaré hat dieses Thema ab 1900 ausführlicher studiert. Dabei standen zunächst die *Betti-Zahlen* und *Torsions-Koeffizienten* von *simplizialen Komplexen* im Vordergrund. Erst etwa ab dem Jahr 1920 wurde der abstraktere Gesichtspunkt der *Homologie-Gruppen* von simplizialen Komplexen durch Emmy Noether und unabhängig von Walther Mayer und Leopold Vietoris entwickelt. Und dann dauerte es nochmals bis zum Jahr 1944, bis Eilenberg die endgültige Definition der *singulären Homologie* vorlegte.

Heute ist der Name *Homologie* ein Oberbegriff für zahlreiche mathematische Theorien, die topologischen Räumen abelsche Gruppen zuordnen und üblicherweise über die *Eilenberg-Steenrod-Axiome* (siehe Eilenberg u. Steenrod (1952)) und deren modernere Erweiterungen definiert werden.

Wir beschränken uns hier auf einen allereinfachsten Zugang und beschreiben nur kurz die simpliziale Homologie, die Bettizahlen und die Euler-Charakteristik. Dabei folgen wir im Prinzip dem Programm von Nash u. Sen (1983) und Nakahara (2003), greifen aber für tiefergehende Aspekte und Details recht häufig auf die schöne Darstellung „Algebraische Topologie" von Stöcker u. Zieschang (1994) zurück. Das darauf folgenden Kapitel über singuläre Homologie gibt einen ersten Eindruck über einige typische Methoden und Ergebnisse der algebraischen Topologie - die auch im Kapitel über Kohomologie für den Beweis des Satzes von de Rahm benötigt werden.

Der Grundgedanke der Homologie ist es, topologische Räume anhand ihrer 'Löcher' unterschiedlicher Dimensionen zu klassifizieren. Betrachten wir etwa ein gefülltes und ein leeres Dreieck in $\mathbb{R}^2$ als zwei verschiedene topologische Räume und nennen die Dreiecksseiten eine *geschlossene 1-Kette*, oder einen *1-Zyklus*, dann ist im Fall des gefüllten Dreiecks der 1-Zyklus zugleich eine *berandende Kette*, oder *Randkette*, im Fall des leeren Dreiecks ist der 1-Zyklus aber keine Randkette. Wir erkennen also das 'Loch' im leeren Dreieck daran, daß es einen 1-Zyklus gibt, der keine Randkette ist.

16.2 Simplexe

Ein Simplex ist eine höherdimensionale Verallgemeinerung eines Dreiecks in $\mathbb{R}^m$ und damit ein Baustein eines konvexen Polyeders. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^m$ heißt konvex, wenn mit zwei Punkten p_0, $p_1 \in X$ auch alle Punkte der Verbindungsstrecke $\overline{p_0 p_1} := \{p \,|\, p = (1-t)p_0 + tp_1 \,,\, 0 \le t \le 1\}$ in X liegen.

Lemma 16.2.1 *Wenn $X \subset \mathbb{R}^m$ konvex und kompakt und nicht leer ist, dann ist X homöomorph zu einer m-dimensionalen Kugel (Ball) B^m und der Rand ∂X homöomorph zu einer $(m-1)$-dimensionalen Kugeloberfläche (Sphäre) S^{m-1}.*

Beweis. Sei $p_0 \in \overset{\circ}{X}$, $p_\partial \in \partial X$, dann ist wegen der Konvexität von X der Punkt p_∂ der einzige Randpunkt auf der Strecke $\overline{p_0 p_\partial}$. Dann ist die Funktion

$$f : \partial X \to S^{m-1} \quad \text{mit} \quad f(p_\partial) := \frac{p_\partial - p_0}{|p_\partial - p_0|}$$

bijektiv und stetig, also ein Homöomorphismus. Diese Funktion f kann nun homöomorph auf alle Punkte p der Strecke $\overline{p_0 p_\partial}$, und damit auf ganz X, fortgesetzt werden:

$$p :=(1-t)p_0 + tp_\partial \,, \quad 0 \le t \le 1 \,,$$

$$f : X \to B^m \quad \text{mit} \quad f(p) = f((1-t)p_0 + tp_\partial) := t\frac{p_\partial - p_0}{|p_\partial - p_0|} \,. \qquad \square$$

Wir definieren Stöcker u. Zieschang (1994) folgend ein 0-Simplex als Vertex, also als einen Punkt aus $\mathbb{R}^m$, ein 1-Simplex als Linie ohne die beiden Randpunkte, und ein q-dimensionales Simplex, oder kurz q-Simplex, Δ_q, mit $q \le m$, als die offene, konvexe Menge innerhalb von q geometrisch unabhängigen Vertizes. Hierbei heißen die $p_0, \ldots, p_q \in \mathbb{R}^m$ geometrisch unabhängig, wenn die Vektoren $p_1 - p_0$, $p_2 - p_1$, …, $p_0 - p_q$ linear unabhängig sind.

$$\Delta_0 :=< p_0 > \quad \text{mit dem Vertex } p_0 \in \mathbb{R}^m \,,$$

$$\Delta_q :=< p_0 \ldots p_q > \quad \text{offene, konvexe Menge innerhalb der Vertizes } p_0, \ldots, p_q \in \mathbb{R}^m$$

$$:= \{p \in \mathbb{R}^m \mid p = \sum_{i=0}^{q} c_i p_i \,,\, \sum_{i=0}^{q} c_i = 1 \,,\, c_i > 0\} \,. \tag{16.2.1}$$

Entsprechend ist das abgeschlossene q-Simplex definiert als

$$\overline{\Delta_q} := \{p \in \mathbb{R}^m \mid p = \sum_{i=0}^{q} c_i p_i \,,\, \sum_{I=0}^{q} c_i = 1 \,,\, c_i \ge 0\} \,.$$

Wenn man aus dem Simplex $\Delta_q =< p_0 \ldots p_q >$ nun $r+1$ Punkte mit $r < q$ auswählt, so heißt das enstehende r-Simplex $\Delta_r =< p_{i_0} \ldots p_{i_r} >$ eine r-Seite von Δ_q, kurz $\Delta_r < \Delta_q$.

Nach dem obigen Lemma ist jeder q-Simplex homöomorph zu B^q und der Rand des q-Simplex homöomorph zu S^{q-1}.

Wir beschränken uns im Weiteren auf orientierbare Simplexe, die folgendermaßen definiert werden. Seien $\Delta_q =< p_0 \dots p_q >$ ein q-Simplex und $\{p_{i_0}, \dots, p_{i_q}\}$ eine Permutation von $\{p_0, \dots, p_q\}$, d.h.

$$\pi := \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_q \\ p_{i_0} & p_{i_1} & \dots & p_{i_q} \end{pmatrix} .$$

Diese Permutationen π können nun gerade oder ungerade sein. Die Äquivalenzklasse aller geraden Permutationen von $\{p_0, \dots, p_q\}$ nennen wir einen orientierten q-Simplex, der Einfachheit halber mit demselben Symbol Δ_q bezeichnet:

$$\Delta_q = (p_0 p_1 \dots p_q) \quad \text{mit} \quad \Delta_0 = (p_0) \quad \text{und}$$

$$(p_{i_0} \dots p_{i_q}) = \operatorname{sgn}(\pi) \Delta_q .$$

Ein simplizialer Komplex K ist eine Menge aus einer endlichen Anzahl von Simplexen, die so zusammengefügt sind, daß

1. jede Seite eines Simplex von K zu K gehört,
   d.h. $\Delta_q \in K$ und $\Delta_r \leq \Delta_q \ \Rightarrow \ \Delta_r \in K$,
2. der Durchschnitt zweier Simplexe ist entweder leer oder eine gemeinsame Seite,
   d.h. $\Delta_{q_1} \cap \Delta_{q_2} = \emptyset$ oder $[\Delta_{q_1} \cap \Delta_{q_2} < \Delta_{q_1}$ und $\Delta_{q_1} \cap \Delta_{q_2} < \Delta_{q_2}]$.

Die Dimension eines simplizialen Komplexes K wird definiert als die größte Dimension aller in K vorhandenen Simplexe. Ein Polyeder $|K|$ wird definiert als die Vereinigung der Punktmengen aller Simplexe von K. Ein Punkt $p \in K$ liegt dann in genau einem Simplex von K, genannt $\operatorname{supp}(p, K)$.

Beispiel: Die Menge aller Simplexe eines Dreiecks bildet einen simplizialen Komplex

$$K = \{(p_0), (p_1), (p_2), (p_0 p_1), (p_1 p_2), (p_2 p_0), (p_0 p_1 p_2)\} . \qquad \square$$

In diesem Fall ist $|K| = \overline{\Delta_2}$ und $\dim K = \dim |K| = 2$.

Ein topologischer Raum X heißt triangulierbar, wenn es einen Homöomorphismus f eines Polyeders $|K|$ eines simplizialen Komplexes K in X gibt, also $f : |K| \to X$. Es ist ein relativ schwierig zu beweisender Satz, daß jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine Überdeckung mit Simplexen gestattet, eine sog. Triangulierung. Für eine allgemeine Diskussion ohne Beweis siehe Spivak (1979), I, S. 579 ff.; für einen Beweis in $\mathbb{R}^n$ siehe Bär (2010), S. 263 ff., und für einen Beweis in beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten siehe Munkres (1966), S. 69 ff. Ob, und wenn ja unter welchen Bedingungen, jeder kompakte topologische Raum mit einer Dimension > 3 triangulierbar ist, ist eine schwierige und noch offene Frage (Stöcker u. Zieschang (1994), S.73). Wir setzen im Folgenden die Existenz einer Triangulierung der verwendeten topologischen Räume voraus.

Eine Abbildung $\varphi : K \to L$ zwischen zwei simplizialen Komplexen K und L mit $\dim K \geq \dim L$ heißt eine simpliziale Abbildung, wenn die Ecken jedes Simplex $\Delta_q \in K$ in die Ecken eines Simplex $\varphi(\Delta_q) \in L$ abgebildet werden. Eine solche simpliziale Abbildung ist recht starr, und wenn K über q_K Ecken verfügt und L über q_L Ecken, dann gibt es ${q_K}^{q_L}$ simpliziale Abbildungen.

Lemma 16.2.2 *Eine simpliziale Abbildung $\varphi : K \to L$ induziert eine stetige Abbildung*

$$|\varphi| : |K| \to |L| \quad mit \quad |\varphi|(\sum_{i=0}^{q} c_i p_i) := \sum_{i=0}^{q} c_i \varphi(p_i) \ .$$

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden: $p \in |K| \ \Rightarrow \ |\varphi|(p) \in |L|$. Sei also $p \in \Delta_q :$ $= \operatorname{supp}(p, K)$, wobei Δ_q durch die Vertizes $p_0, \ldots, p_i, \ldots, p_q$ bestimmt sei und $\varphi(\Delta_q)$ durch die Vertizes $\varphi(p_0), \ldots, \varphi(p_j), \ldots, \varphi(p_r)$ mit $0 \leq r \leq q$. Für alle p_i, welche auf $\varphi(p_j)$ abgebildet werden, definiert man die Koeffizienten $d_j := \sum_i c_i > 0$. Damit ist $\sum_{j=0}^r d_j = \sum_{i=0}^q c_i = 1$ und wir können $|\varphi|$ auf dem abgeschlossenen Simplex $\overline{\Delta_q}$ definieren als

$$|\varphi| : \overline{\Delta_q} \to |L| \quad \text{mit} \quad |\varphi|(p) = |\varphi|(\sum_{i=0}^{q} c_i p_i) := \sum_{i=0}^{q} c_i \varphi(p_i) = \sum_{j=0}^{r} d_j \varphi(p_j) \in |L| \ .$$

Diese Abbildung $|\varphi|$ ist auf jedem abgeschlossenen Simplex $\overline{\Delta_q}$ stetig. Da $|K|$ eine endliche Vereinigung abgeschlossener Simplexe ist, ist $|\varphi|$ also auch auf $|K|$ stetig. □

16.3 Simpliziale Approximation

Jeder Simplex Δ_q mit seinen Vertizes $\{p_0, \ldots, p_q\}$ und all seine Seiten $\Delta_r < \Delta_q$ sind offene Mengen und können daher in kleinere Simplexe zerlegt werden. Üblich ist die sog. baryzentrische Unterteilung, bei welcher als zusätzliche Vertizes die Schwerpunkte der Simplexe eingeführt werden. Die Koordinaten des Schwerpunkts p' eines Simplex Δ_q nennt man die baryzentrischen Koordinaten

$$p' := \frac{1}{q+1}(p_0 + \ldots + p_q) \ .$$

Wenn man alle Simplexe eines simplizialen Komplexes K auf diese Weise unterteilt und die so neu entstehenden Vertizes zu den ursprünglichen Vertizes hinzufügt und daraus neue Simplexe konstruiert, so entsteht ein Simplizialkomplex $K^{(1)}$, die1. baryzentrische Unterteilung von K. Dabei ändert sich nichts am Polyeder $|K|$, d.h. $|K| = |K^{(1)}|$ und $m := \dim |K| = \dim |K^{(1)}|$.

Da die Simplexe im $\mathbb{R}^m$ liegen, können wir die Größe eines Simplex Δ_q mit den Vertizes $\{p_0, \ldots, p_q\}$ folgendermaßen definieren:

$$d(\Delta_q) := \max_{0 \leq i,j \leq q} |p_i - p_j| \ .$$

Lemma 16.3.1 *Sei K ein Simplizialkomplex der Dimension $m := \dim(K)$ und $K^{(1)}$ die1. baryzentrische Unterteilung von K, dann gilt für die Größe der Simplexe von $K^{(1)}$*

$$d(\Delta^{(1)}) \le \frac{m}{m+1} \max\{d(\Delta) \,|\, \Delta \in K\} \ .$$

Beweis. Seien p' und p'' Schwerpunkte von gewissen Seiten von Δ_q mit

$$p' := \frac{1}{r+1}(p_0 + \ldots + p_r) \ , \quad p'' := \frac{1}{s+1}(p_0 + \ldots + p_s) \ , \quad 0 \le r < s \le q \ .$$

Aus $s \le m$ folgt sofort $\frac{s}{s+1} \le \frac{m}{m+1}$, denn

$$\frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \le 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1} \ .$$

Damit folgt

$$|p' - p''| = \frac{1}{r+1}|(p_0 - p'') + \ldots + (p_r - p'')| \le \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r} |p_i - p''| \le \max_{0\le i\le r} |p_i - p''| \ .$$

$$|p_i - p''| = \frac{1}{s+1}|(p_i - p_0) + \ldots + (p_i - p_s)| \le \frac{1}{s+1}\sum_{j=0}^{s} |p_i - p_j| \le \frac{s}{s+1} \max_{0\le j\le s} |p_i - p_j| \ .$$

$$|p' - p''| \le \frac{s}{s+1} \max_{\substack{0\le i\le r \\ 0\le j\le s}} |p_i - p_j| \le \frac{s}{s+1} d(\Delta) \le \frac{m}{m+1} \max_{\Delta\in K} d(\Delta) \ . \qquad \square$$

Daraus folgt sofort durch Iteration der baryzentrische Unterteilung des simplizialen Komplexes K, daß $d(\Delta^{(n)})$ beliebig klein gemacht werden kann, d.h. für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{\Delta^{(n)}\in K^{(n)}} d(\Delta^{(n)}) \le (\frac{m}{m+1})^n \max_{\Delta\in K} d(\Delta) < \epsilon \ ,$$

da $\lim_{n\to\infty}(\frac{m}{m+1})^n = 0$.

Definition 16.3.2 *Seien K und L zwei simpliziale Komplexe und $f : |K| \to |L|$ eine stetige Abbildung zwischen den Polyedern $|K|$ und $|L|$. Dann heißt die simpliziale Abbildung $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Approximation an f, wenn die Abbildung von $p \in |K|$ nach $|\varphi|(p) \in |L|$ im abgeschlossenen Trägersimplex von $f(p)$ liegt, d.h.*

$$\varphi \textit{ ist eine simpliziale Approximation an } f \quad :\Leftrightarrow \quad |\varphi|(p) \in \overline{\mathrm{supp}(f(p), L)} \ .$$

Von großer Bedeutung für die Homologietheorie ist der folgende Satz, daß sich zu jeder stetigen Abbildung $f : |K| \to |L|$ zwischen zwei Polyedern $|K|$ und $|L|$ eine simpliziale Approximation φ auf einem ggf. feiner unterteilten simplizialen Komplex $K^{(q)}$ finden läßt. Diese simpliziale Approximation $\varphi : K^{(q)} \to L$ an f führt zu einer Homotopie zwischen f und $|\varphi|$

$$f \simeq |\varphi| : |K| \to |L| \ ,$$

denn da jedes Trägersimplex konvex ist gilt

$$f(p) \in \overline{\mathrm{supp}(f(p), L)} \ , \quad |\varphi|(p) \in \overline{\mathrm{supp}(f(p), L)} \quad \Rightarrow$$

$$h(t, p) := (1-t)f(p) + t|\varphi|(p) \in \overline{\mathrm{supp}(f(p), L)} \ ,$$

und damit ist $h : |K| \to |L|$ eine Homotpie zwischen f und $|\varphi|$.

Satz 16.3.3 *Zu jeder stetigen Abbildung $f : |K| \to |L|$ zwischen zwei Polyedern $|K|$ und $|L|$ gibt es eine q-te baryzentrische Unterteilung $K^{(q)}$ von K mit einem hinreichend großen q, so daß die simpliziale Abbildung $\varphi : K^{(q)} \to L$ eine simpliziale Approximation von f ist.*

Beweis. Zum Beweis führt man den Begriff eines Vertexsterns (oder Ecksterns) zu einem Vertex $p_i \in K$ eines simplizialen Komplexes K ein. Ein Vertexstern enthält die offene Menge aller Punkte aller Simplexe, für welche p_i einen Vertex darstellt, d.h.

$$St(p_i, K) := \{|\Delta| \,|\, p_i \in \overline{\Delta}\, ,\ p_i\,\text{Vertex von}\,K\} \ .$$

Seien $p_0, \ldots, p_i, \ldots, p_q$ die Vertizes von K, dann bilden die Vertexsterne $St(p_i, K)$ eine endliche, offene Überdeckung von $|K|$. Für jede beliebige endliche, offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$ gibt es eine Überdeckung durch Vertexsterne von $K^{(q)}$, die feiner ist als U, denn da U eine endliche, offene Überdeckung ist, gibt es ein $d_{min}(U) := \min_i d(U_i) > 0$, und damit gibt es ein hinreichend großes q, so daß alle Simplexe von $K^{(q)}$ einen Durchmesser kleiner als $d_{min}(U)/2$, und alle Vertexsterne einen Durchmesser kleiner als $d_{min}(U)$ haben.

Da f stetig ist, ist $U := \{f^{-1}(St(y, L) \,|\, y\,\text{Vertex von}\,L)\}$ eine offene Überdeckung von $|K|$. Wir wählen q so groß, daß die Überdeckung $\{St(x, K^{(q)}) \,|\, x\,\text{Vertex von}\,K^{(q)})\}$ feiner ist als jene von U. Damit gibt es für jeden Vertex $x_0 \in K^{(q)}$ einen festen Vertex $y_0 \in L$ mit $St(x_0, K^{(q)}) \subset f^{-1}(St(y_0, L))$, bzw. $f(St(x_0, K^{(q)})) \subset St(y_0, L)$. Wir zeigen nun, daß

$$\varphi : K^{(q)} \to L \quad \text{mit} \quad \varphi(x_0) := y_0$$

eine simpliziale Abbildung definiert. Dabei erinnern wir an den Zusammenhang $f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$, denn

$$f(U_1) = \{f(x) \,|\, x \in U_1\} \ , \quad f(U_2) = \{f(x) \,|\, x \in U_2\} \ , \quad \Rightarrow$$

$$f(U_1) \cap f(U_2) = \{f(x)\,|\,x \in U_1\} \cap \{f(x)\,|\,x \in U_2\} = \{f(x)\,|\,x \in U_1\,,\, x \in U_2\}$$
$$= \{f(x)\,|\,x \in U_1 \cap U_2\} = f(U_1 \cap U_2)\ .$$

Sei Δ ein r-Simplex mit den Vertizes x_i, $0 \le i \le r \le q$, dann folgt

$$x \in \Delta \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_i St(x_i, K^{(q)}) \quad \Rightarrow$$

$$f(x) \in f(\bigcap_i St(x_i, K^{(q)})) = \bigcap_i f(St(x_i, K^{(q)})) \subset St(y_i, L)\ ,$$

wobei die y_i die Vertizes des Simplex $\Delta' := \mathrm{supp}(f(x), L)$ sind. Also definiert $\varphi(\Delta) := \Delta'$ eine simpliziale Abbildung $\varphi : K^{(q)} \to L$. Zugleich ist φ auch eine simpliziale Approximation an f, denn

$$x \in |K| = |K^{(q)}| \quad \text{mit} \quad \Delta = \mathrm{supp}(x, K^{(q)}) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(\Delta) = \Delta' = \mathrm{supp}(f(x), L) \quad \Rightarrow \quad |\varphi|(x) \in \overline{\mathrm{supp}(f(x), L)}\ . \qquad \square$$

16.4 Simpliziale Homologie

Die grundlegende Idee von Emmy Noether, die sie zu den Homologiegruppen führte, war es nun, r-Simplexe eines simplizialen Komplexes mit einer additiven freien, abelschen Gruppe G in Verbindung zu bringen.

Definition 16.4.1 *Wenn K ein simplizialer Komplex ist der I_r Simplexe Δ_r enthält, dann wird eine r-Kette c von K bezüglich einer freien, abelschen Gruppe G definiert als:*

$$c := \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \quad \textit{mit } g_i \in G\ . \tag{16.4.1}$$

Die Menge aller r-Ketten bildet bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe, die r-Kettengruppe:

$$C_r(K) := \{c\,|\,c = \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \quad \textit{mit } g_i \in G\}\ . \tag{16.4.2}$$

$C_r(K)$ ist also eine additive abelsche Gruppe vom Rang I_r mit

$$C_r(K) \cong \underbrace{G \oplus G \oplus \cdots \oplus G}_{I_r}\ . \tag{16.4.3}$$

Nakahara (2003) und die üblichen toplogischen Lehrbücher verwenden für G die additive abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Diese Gruppe hat im Gegensatz zur additiven abelschen Gruppe $\mathbb{R}$ der reelen Zahlen die Eigenschaft, daß $\mathbb{Z}$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang 1 ist, d.h. ganz $\mathbb{Z}$ wird mit der Gruppenoperation der Addition aus dem einen, linear unabhängigen, Element 1 erzeugt. Dies hat dann den Vorteil, daß man mit den Homologiegruppen $H_r(K;\mathbb{Z})$ eine etwaige Torsion des topologischen Raums X 'sehen' kann. Da wir uns hier aber vornehmlich nicht für allgemeine topologische Räume X, sondern für differenzierbare Mannigfaltigkeiten M mit einem affinen Zusammenhang (d.h. mit einer kovarianten Ableitung) interessieren, haben wir über den aus dem affinen Zusammenhang folgenden Torsionstensor Zugang zu einer möglichen Torsion von M und können uns an dieser Stelle die Darstellung erleichtern, indem wir in den behandelten konkreten Fällen als additive abelsche Gruppe G die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ betrachten - wobei $\mathbb{R}$ nicht nur eine additive abelsche Gruppe ist, sondern zugleich auch ein Vektorraum.

Um r-dimensionale 'Löcher' in X zu finden, suchen wir r-Zyklen, die keine Randketten sind. Dazu müssen wir jetzt die 'Ränder' definieren. Der Rand-Operator ∂_r wird als ein linearer Operator auf $C_r(K;G)$ wie folgt definiert:

$$\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K) \quad \text{mit}$$

$$\partial_r \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} := \sum_{i=1}^{I_r} g_i (\partial_r \Delta_{r,i}) \quad \text{und} \tag{16.4.4}$$

$$\partial_0(\Delta_0) = \partial_0(p_0) := 0 \; ,$$

$$\partial_1 \Delta_1 = \partial_1(p_0 p_1) := (p_1) - (p_0) \; ,$$

$$\partial_r \Delta_r = \partial_r(p_0 p_1 \dots p_r) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p_i} \dots p_r) \; , \tag{16.4.5}$$

wobei $\hat{p_i}$ anzeigt, daß der Vertex p_i im Simplex $(p_0 p_1 \dots p_i \dots p_r)$ ausgelassen wird. Das alternierende Minuszeichen wird eingeführt, damit der Rand von $(p_0 p_1) \cup (p_1 p_2)$ wie gewünscht tatsächlich $(p_2) - (p_0)$ ist. Der Randoperator ∂_r ist wegen seiner Linearität ein Homomorphismus von $(C_r(K), +)$ in $(C_{r-1}(K), +)$, denn für $c, d \in C_r(K)$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_r(c+d) &= \partial_r(\sum_{i=1}^{I_r} g_{c,i} \Delta_{r,i} + \sum_{i=1}^{I_r} g_{d,i} \Delta_{r,i}) = \sum_{i=1}^{I_r} g_{c,i} \partial_r \Delta_{r,i} + \sum_{i=1}^{I_r} g_{d,i} \partial_r \Delta_{r,i} \\ &= (\partial_r c) + (\partial_r d) \; . \end{aligned}$$

Die grundlegende algebraische Eigenschaft des Randoperators ∂_r ist seine Idempotenz:

Lemma 16.4.2

$$\partial_r \partial_{r+1} \Delta_{r+1} = 0 \ . \tag{16.4.6}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\partial_r(\partial_{r+1}\Delta_{r+1}) &= \partial_r(\partial_{r+1}(p_0 p_1 \dots p_r p_{r+1})) = \partial_r \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 p_1 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \right\} \\
&= \sum_{\substack{i,j=0 \\ j<i}}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\
&\quad - \sum_{\substack{i,j=0 \\ j>i}}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \\
&= \sum_{\substack{i,j=0 \\ j<i}}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\
&\quad - \sum_{\substack{i,j=0 \\ j<i}}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

□

Sei K ein m-dimensionaler simplizialer Komplex, dann kann man den folgenden Ketten-Komplex $C(K)$ definieren:

$$0 \hookrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \ . \tag{16.4.7}$$

Definition 16.4.3 *Sei K ein m-dimensionaler simplizialer Komplex und $m \geq r$. Dann heißt eine r-Kette $c \in C_r(K)$ ein r-Zyklus, wenn sie keinen Rand hat, d.h. $\partial_r c = 0$.*

Die Menge der r-Zyklen $Z_r(K)$ ist eine Untergruppe der r-Ketten $C_r(K)$ und heißt r-Zyklengruppe.

Sei $m \geq r+1$. Dann heißt eine r-Kette $c \in C_r(K)$ eine r-Randkette, wenn es eine $(r+1)$-Kette $d \in C_{r+1}(K)$ gibt, für welche c der Rand ist, d.h. $c = \partial_{r+1} d$. Die Menge der r-Randketten $B_r(K)$ ist eine Untergruppe der r-Ketten $C_r(K)$ und heißt r-Randkettengruppe. Dabei setzt man $B_m(K) := 0$.

Wegen $\partial_0 c = 0$ für $c \in C_0(K)$ ist $Z_0(K) = C_0(K)$.

Aus der Definition der r-Zyklusgruppe und der r-Randkettengruppe folgt sofort:

$$Z_r = \ker \partial_r \ , \quad B_r = \operatorname{im} \partial_{r+1} \ . \tag{16.4.8}$$

Lemma 16.4.4

$$B_r(K) \subseteq Z_r(K) \ . \tag{16.4.9}$$

Beweis.

$$c \in B_r(K) \quad \Rightarrow \quad c = \partial_{r+1} d \quad \text{mit } d \in C_{r+1}(K) \quad \Rightarrow$$

$$\partial_r c = \partial_r \partial_{r+1} d = 0 \quad \Rightarrow \quad B_r(K) \subseteq Z_r(K) \ . \qquad \square$$

Damit können wir nun die r-Homologiegruppe $H_r(K)$ eines simplizialen Komplexes K als die Menge der r-Zyklen, die keine r-Randkette sind, definieren:

Definition 16.4.5 *Sei K ein m-dimensionaler simplizialer Komplex, $Z_r(K)$ eine r-Zyklengruppe und $B_r(K)$ eine r-Randkettengruppe, dann heißt die Quotientengruppe*

$$H_r(K) := \begin{cases} Z_r(K)/B_r(K) & \text{für } r = 0, \dots, m \\ \emptyset & \text{für } r < 0 \text{ oder } r > m \ . \end{cases} \tag{16.4.10}$$

die r-Homologiegruppe.

Im Fall der Gruppe $G = \mathbb{R}$ wird die r-te Bettizahl $b_r(K)$ definiert als $b_r(K) := \dim(H_r(K))$.

Die Homologiegruppe $H_r(K)$ besteht also aus Klassen von r-Zyklen, wobei zwei r-Zyklen homolog (d.h. äquivalent) sind, wenn sie sich nur um eine $r-$Randkette unterscheiden.

$$H_r(K) = \{[c] \,|\, c \in Z_r \ , \ [c] = c \cup B_r\} \ . \tag{16.4.11}$$

Da es bei einem m-dimensionalen Komplex K keine m-Randkettengruppe gibt, d.h. $B_m(K) = 0$ ist, folgt trivialerweise $H_m(K) = Z_m(K)$.

Mit diesen Homologiegruppen kann man nun also r-dimensionale 'Löcher' in einem topologischen Raum X bestimmen.

Poincaré hat nun die Euler-Charakteristik χ (siehe 8.0.1) auf den Fall von m-dimensionalen simplizialen Komplexen verallgemeinert:

Definition 16.4.6 *Sei K ein m-dimensionaler simplizialer Komplex der I_r Simplexe Δ^r enthält, dann ist die Euler-Charakteristik $\chi(K)$ definiert als*

$$\chi(K) := \sum_{r=0}^{m} (-1)^r I_r \ . \tag{16.4.12}$$

Beispiel: Sei K ein 2-dimensionaler simplizialer Komplex, dann folgt aus der obigen Formel für die Euler-Charakteristik sofort der *Eulersche Polyeder-Satz*:

$$\chi(\Delta^2) = \sum_{r=0}^{2} (-1)^r I_r = I_0 - I_1 + I_2 = e - k + f \ , \tag{16.4.13}$$

wenn e die Anzahl der Ecken (Vertizes, Δ_0), k die Anzahl der Kanten (Δ_1) und f die Anzahl der Flächen (Δ_2) bezeichne. □

Weiter hat Poincaré den folgenden Satz bewiesen, der diese verallgemeinerte Euler-Charakteristik mit den Betti-Zahlen in einen Zusammenhang bringt.

Satz 16.4.7 (Euler-Poincaré)

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r b_r(K) \ . \tag{16.4.14}$$

Um diesen Satz zu beweisen, erinnern wir an ein Lemma aus der linearen Algebra.

Lemma 16.4.8 *Seien V_1 und V_2 zwei endlichdimensionale Vektorräume und sei $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung, dann gilt*

$$\dim(V_1) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) \ . \tag{16.4.15}$$

Beweis. f ist eine lineare Abbildung, also sind $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ Vektor-Unterräume von V_1, bzw. V_2. Seien $\{x_1, \ldots, x_r\}$ eine Basis von $\ker f \subseteq V_1$ und $\{y_1, \ldots, y_s\}$ eine Basis von $\operatorname{im} f \subseteq V_2$. Für jedes $y_j \in \{y_1, \ldots, y_s\} \subset \operatorname{im} f$ existiert ein $z_j \in V_1$ mit $f(z_j) = y_j$. Jetzt soll gezeigt werden, daß $B := \{x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_s\}$ eine Basis von V_1 bildet. Die Vektoren aus B sind linear unabhängig, denn mit $a^i, b^j \in \mathbb{R}$; $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, s$; gilt:

$$\sum_{i=1}^{r} a^i x_i + \sum_{j=1}^{s} b^j z_j = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\sum_{i=1}^{r} a^i x_i + \sum_{j=1}^{s} b^j z_j) = \begin{cases} f(0) = 0 \ , \\ f(\sum_{j=1}^{s} b^j z_j) = b^j y_j \ , \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{alle } b^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} a^i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{alle } a^i = 0 \ .$$

B ist aber auch vollständig, denn sei $v \in V_1$ ein beliebiger Vektor, dann ist $f(v) \in \operatorname{im} f$, also

$$f(v) = \sum_{j=1}^{s} b^j y_j = \sum_{j=1}^{s} b^j f(z_j) \quad \Rightarrow \quad f(v) - f(\sum_{j=1}^{s} b^j z_j) = f(v - \sum_{j=1}^{s} b^j z_j) = 0 \ ,$$

und damit ist $(v - \sum_{j=1}^{s} b^j z_j) \in \ker f$, also

$$(v - \sum_{j=1}^{s} b^j z_j) = \sum_{i=1}^{r} a^i x_i \ , \quad \text{bzw.} \quad v = \sum_{i=1}^{r} a^i x_i + \sum_{j=1}^{s} b^j z_j \ . \qquad \square$$

Beweis. (Euler-Poincaré) Sei $\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$ der lineare Randoperator zwischen den linearen Räumen $C_r(K)$ und $C_{r-1}(K)$. Dann folgt dem obigen Lemma und mit $C_{-1}(K) = B_{-1}(K) = B_m(K) = \emptyset$

$$\begin{aligned} I_r &= \dim(C_r(K)) = \dim(\ker \partial_r) + \dim(\operatorname{im} \partial_r) \\ &= \dim(Z_r(K)) + \dim B_{r-1}(K) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_r(K) &= \dim(H_r(K)) = \dim(Z_r(K)/B_r(K)) \\ &= \dim(Z_r(K)) - \dim(B_r(K)) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r [\dim(Z_r(K)) + \dim(B_{r-1}(K))] \\ &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \dim(Z_r(K)) + \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \dim(B_{r-1}(K)) \\ &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \dim(Z_r(K)) + \sum_{r=-1}^{m-1} (-1)^{r+1} \dim(B_r(K)) \\ &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \dim(Z_r(K)) - \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \dim(B_r(K)) \\ &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r b_r(K) \ . \end{aligned} \qquad \square$$

Das Studium der Homologie ist deswegen so bedeutsam, weil bereits Poincaré erkannte, daß die Bettizahlen und die Euler-Charakteristik topologische Invarianten sind, d.h. invariant unter Homöomorphismen.

Satz 16.4.9 *Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, d.h. f und f^{-1} seien stetig, sei weiter K ein simplizialer Komplex in X und $f(K)$ ein simplizialer Komplex in Y, dann sind $H_r(K)$ und $H_r(f(K))$ isomorph.*

Beweis. Der Homöomorphismus $f : X \to Y$ induziert einen Homomorphismus f_* auf der r-Kettengruppe $C_r(K)$:

$$f_* : C_r(K) \to C_r(f(K)) \ , \quad \text{mit}$$

$$f_*(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i}) := \sum_{i=1}^{I_r} g_i f(\Delta_{r,i}) \quad \text{mit } g_i \in G\} \ .$$

Dann ist $\partial_r f_* = f_* \partial_r$ auf $C_r(f(K))$, denn für $\Delta_{r,i} = (p_{i_0}, \ldots, p_{i_r})$ folgt

$$\partial_r \Delta_{r,i} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j (p_{i_0}, \ldots, \hat{p_{i_j}}, \ldots, p_{i_r}) \quad \Rightarrow$$

$$f_* \partial_r (\sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i}) = f_*(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \partial_r \Delta_{r,i}) = f_*(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \sum_{j=0}^{r} (-1)^j (p_{i_0}, \ldots, \hat{p_{i_j}}, \ldots, p_{i_r}))$$

$$= \sum_{i=1}^{I_r} g_i \sum_{j=0}^{r} (-1)^j f(p_{i_0}, \ldots, \hat{p_{i_j}}, \ldots, p_{i_r})$$

$$= \sum_{i=1}^{I_r} g_i \sum_{j=0}^{r} (-1)^j (f(p_{i_0}), \ldots, \widehat{f(p_{i_j})}, \ldots, f(p_{i_r}))$$

$$= \partial_r \sum_{i=1}^{I_r} g_i f(\Delta_{r,i}) = \partial_r f_*(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i}) \ .$$

Daraus folgt dann sofort

$$z_r \in Z_r(K) \quad \Rightarrow \quad \partial_r f_*(z_r) = f_* \partial_r z_r = f_*(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_*(z_r) \in Z_r(f(K)) \ .$$

$$b_r \in B_r(K) \quad \Rightarrow \quad b_r = \partial_{r+1} c_{r+1} \quad \text{mit} \quad c_{r+1} \in C_{r+1}(K) \quad \Rightarrow$$

$$f_*(b_r) = f_*(\partial_{r+1} c_{r+1}) = \partial_{r+1} f_*(c_{r+1}) \quad \Rightarrow \quad f_*(b_r) \in B_r(f(K)) \ .$$

$$(z_r + B_r(K)) \in H_r(K) \quad \Rightarrow$$

$$f_*(z_r + B_r(K)) = f_*(z_r) + B_r(f(K)) \in H_r(f(K)) \ .$$

Also werden durch den Homomorphismus f_* die r-Zyklen von $Z_r(K)$ in die r-Zyklen von $Z_r(f(K))$ und die r-Randketten von $B_r(K)$ in die r-Randketten von $B_r(f(K))$ abgebildet, und damit auch die r-Homologiegruppen von $H_r(K)$ in die r-Homologiegruppen von $H_r(f(K))$.

Tatsächlich ist f_* sogar ein Isomorphismus, denn

$$f_*^{-1}(f_*(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i})) = f_*^{-1}(\sum_{i=1}^{I_r} g_i f(\Delta_{r,i})) = \sum_{i=1}^{I_r} g_i f^{-1}(f(\Delta_{r,i}))$$

$$= \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \ . \qquad \square$$

Wenn nun im obigen Satz für den Homöomorphismus $f : X \to X$ angenommen wird, dann sind für die beiden Triangulierungen K und $f(K)$ die Homologiegruppen $H_r(K)$ und $H_r(f(K))$ wieder isomorph, und daher kann man die simplizialen Homologiegruppen von X *definieren* als $H_r(X) := H_r(K)$.

Wenn der topologische Raum X eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M ist, dann können wir die Euler-Charakteristik anstatt über die Homologiegruppen und deren Betti-Zahlen auch über den Index eines speziellen Vektorfeldes V, d.h. mit $V_p : M_p \to T_pM$ an der Stelle $p \in M$, auf dem simplizialen Komplex K einer Triangulation von M berechnen. Da die Euler-Charakteristik eine topologische Invariante ist, hängt sie nicht von der Triangulierung und dem darauf konstruierten speziellen Vektorfeld ab.

Dies deutet bereits die innere Verbindung der Homologiegruppen mit den Kohomologiegruppen an.

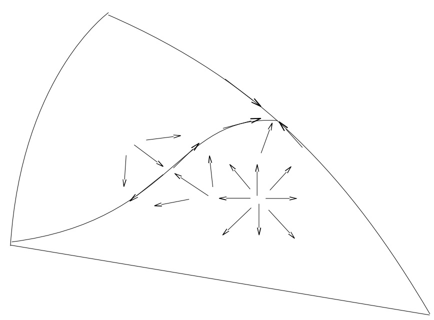

Abbildung 16.1: Konstruktion des Vektorfeldes V auf der Mannigfaltigkeit M

Wir konstruieren ein Vektorfeld V, das im Zentrum eines jeden Simplex eine isolierte, nichtentartete Nullstelle u_i hat. Die Anzahl der Nullstellen ist $s := \sum_{r=0}^{m} I_r$, also ist $i = 1, \ldots, s$. Hierbei zeige der Fluß von V_p von absouten Maxima im Zentrum der $\Delta_{m,i}$, $i = 1, \ldots, I_m$ und von Sattelpunkten im Zentrum der $\Delta_{r,j}$, $r = 1, \ldots, m-1$; $j = 1, \ldots, I_r$ hin zu Minima in den Vertizes $\Delta_{0,k}$, $k = 1, \ldots, I_0$.

In 13.3.2 hatten wir für den Index eines Vektorfeldes V an einer Nullstelle u_i gefunden

$$\operatorname{ind}(V, u_i) = \operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}\right) = (-1)^{\operatorname{card}\{j|\lambda_j<0\}} \ ,$$

wobei λ_j die Eigenwerte von $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$ sind. In den Maxima im Zentrum der $\Delta_{m,i}$ sind alle m Eigenwerte negativ, in den Sattelpunkten im Zentrum der $\Delta_{r,j}$ sind r Eigenwerte negativ und in Minima der Vertizes $\Delta_{0,k}$ sind 0 Eigenwerte negativ. Wenn wir jetzt die Summe über alle Nullstellen von V bilden erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{s} \mathrm{ind}(V, u_i) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{j=1}^{I_r} \mathrm{ind}(V, u_{i(r,j)}) = \sum_{r=0}^{m} I_r \cdot (-1)^r = \chi(K) = \chi(M) \; . \tag{16.4.16}$$

16.5 Berechnung simplizialer Homologiegruppen

Die Bestimmung der simplizialen Homologiegruppen wird mit zunehmender Dimension des simplizialen Komplexes rasch recht aufwendig und unübersichtlich. Daher sind einge allgemeine Sätze sehr hilfreich.

Satz 16.5.1 *Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen und $f : G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus, dann gilt:*

$$\ker f \textit{ ist eine Untergruppe von } G_1 \; ,$$

$$\mathrm{im}\, f \textit{ ist eine Untergruppe von } G_2 \; ,$$

$$\mathrm{im}\, f \cong G_1/\ker f \; .$$

Beweis. 1. $\ker f$ ist eine Untergruppe von G_1, denn

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in \ker f \quad &\Rightarrow \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x_1 + x_2) \in \ker f \; , \end{aligned}$$

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \in \ker f \; ,$$

$$0 = f(0) = f(x_1 - x_1) = f(x_1) + f(-x_1) = 0 + f(-x_1) \quad \Rightarrow \quad -x_1 \in \ker f \; .$$

2. $\mathrm{im}\, f$ ist eine Untergruppe von G_2, denn

$$\begin{aligned} y_1, y_2 \in \mathrm{im}\, f \quad &\Rightarrow \quad \exists\, x_1, x_2 \in G_1 \text{ mit } y_1 = f(x_1) \; , \; y_2 = f(x_2) \\ &\Rightarrow \quad y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in \mathrm{im}\, f \; , \end{aligned}$$

$$0 = f(0) \quad \Rightarrow \quad 0 \in \mathrm{im}\, f \; ,$$

$$\begin{aligned} y_1 = f(x_1) \quad &\Rightarrow \quad 0 = f(0) = f(x_1 - x_1) = f(x_1) + f(-x_1) \\ &\Rightarrow \quad -y_1 = -f(x_1) = f(-x_1) \in \mathrm{im}\, f \; . \end{aligned}$$

3. In der Gleichung $\operatorname{im} f \cong G_1/\ker f$ sind zunächst einmal beide Seiten dieser Gleichung Gruppen. Jetzt definieren wir eine Abbildung $\varphi : G_1/\ker f \to \operatorname{im} f$ mit $\varphi([x_1]) = f(x_1)$ für $x_1 \in G_1$. Dann gilt für $x_2 \in [x_1]$

$$x_2 = x_1 + h \text{ mit } h \in \ker f \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1) + f(h) = f(x_1)\ .$$

Weiter ist φ ein Homomorphismus, denn seien $x_1, x_2 \in G_1$ mit $[x_1] \neq [x_2]$, dann folgt

$$\varphi([x_1] + [x_2]) = \varphi([x_1 + x_2]) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi([x_1]) + \varphi([x_2])\ .$$

φ ist injektiv, denn

$$\begin{aligned} [x_1] \neq [x_2] \quad &\Rightarrow \quad [x_1 - x_2] \neq [0] \quad \Rightarrow \quad (x_1 - x_2) \notin \ker f \\ &\Rightarrow \quad \varphi([x_1]) - \varphi([x_2]) = \varphi([x_1 - x_2]) = f(x_1 - x_2) \neq 0\ , \end{aligned}$$

und φ ist auch surjektiv, denn für alle $y_1 \in \operatorname{im} f$ existiert ein $x_1 \in G_1$ mit $y_1 = f(x_1) = \varphi([x_1])$. Damit ist φ ein Isomorphismus. □

Für wegzusammenhängende simpliziale Komplexe, und damit für wegzusammenhängende topologische Räume, findet man eine wichtige allgemeine Aussage über $H_0(K)$.

Satz 16.5.2 *K ist genau dann ein wegzusammenhängender simplizialer Komplex, wenn gilt*

$$H_0(K) \simeq G\ . \tag{16.5.1}$$

Wenn K ein m-dimensionaler, simplizialer Komplex ist, der aus n disjunkten simplizialen Unterkomplexen besteht, die jeweils wegzusammenhängend sind, also

$$K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad \textit{mit } K_i \cap K_j = \emptyset \ \textit{ für } \ i, j = 1, \ldots, n\ ,$$

dann gilt

$$H_r(K) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_r(K_i) \quad \textit{für } r = 0, \ldots, m\ . \tag{16.5.2}$$

Beweis. 1. Sei K ein wegzusammenhängender simplizialer Komplex. Dann gibt es für zwei beliebige Vertizes (p_i) und (p_j) einen Weg von 1-Simplexen $(p_i p_{k_1}) + (p_{k_1} p_{k_2}) + \ldots + (p_{k_s} p_j)$, der (p_i) und (p_j) verbindet und dessen Randkette ist nun

$$\partial_1((p_i p_{k_1}) + (p_{k_1} p_{k_2}) + \ldots + (p_{k_s} p_j)) = (p_j) - (p_i)\ .$$

Also sind (p_i) und (p_j) homolog, d.h. $[p_i] = [p_j]$. Also ist jeder Vertex in K homolog zum 0-Simplex (p_1).

Sei jetzt z ein 0-Zyklus, also

$$z = \sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i) \ \in Z_0(K) \ .$$

Für die Homologie-Klasse $[z]$ gilt dann

$$[z] = [\sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i)] = \sum_{i=1}^{I_0} g_i[p_i] = [p_1] \sum_{i=1}^{I_0} g_i \ .$$

Wenn also $\sum_{i=1}^{I_0} g_i = 0$ ist, so folgt $[z] = 0$, und das bedeutet $z \in B_0(K)$.

Jetzt soll die Umkehrung gezeigt werden. Seien $\Delta_{1,j} = (p_{j,1}p_{j,2})$ mit $j = 1, \ldots, I_1$ nun 1-Simplexe in K, dann ist die 0-Randkettengruppe $B_0(K)$

$$\begin{aligned} B_0(K) &= \partial_1(\sum_{j=1}^{I_1} g_j \Delta_{1,j}) = \partial_1(\sum_{j=1}^{I_1} g_j(p_{j,1}p_{j,2})) \\ &= \sum_{j=1}^{I_1} g_j \partial_1(p_{j,1}p_{j,2}) = \sum_{j=1}^{I_1} g_j(p_{j,2} - p_{j,1}) \\ &= \sum_{i=1}^{2I_1} g_i(p_i) = \sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i) \ . \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir $p_{2i} := p_{j,2}$, $p_{2i-1} := p_{j,1}$, $g_{2i} = -g_{2i-1}$ gesetzt, und $I_0 := 2I_1$.

$$z \in B_0(K) \quad \Rightarrow \quad [z] = [\sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i)] = [p_1] \sum_{i=1}^{I_0} g_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{I_0} g_i = 0 \ .$$

Damit gilt

$$z \in B_0(K) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{I_0} g_i = 0 \ , g_i \in G \ .$$

Jetzt kann man einen surjektiven Homomorphismus $f : Z_0(K) \to G$ definieren durch

$$f(\sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i)) := \sum_{i=1}^{I_0} g_i \quad \Rightarrow$$

$$\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K) \ .$$

Da $Z_0(K)$ und $B_0(K)$ Gruppen sind, und $B_0(K)$ eine Untergruppe von $Z_0(K)$ ist, so folgt mit 16.5.1

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(Z) = Z_0(K)/\ker f \cong \operatorname{im} f = G \ .$$

2. Sei jetzt K ein m-dimensionaler, simplizialer Komplex, der aus n disjunkten Unterkomplexen besteht, die jeweils wegzusammenhängend sein mögen, also

$$K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad \text{mit } K_i \cap K_j = \emptyset \ \text{ für } \ i, j \in 1, \ldots, n \ .$$

Weil die r-Simplexe linear in den r-Ketten vorkommen ($r = 0, \ldots, m$), ist auch die r-Kettengruppe $C_r(K)$ eine direkte Summe der Unterkomplexe, d.h.

$$C_r(K) := \{c \,|\, c = \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \quad \text{mit } g_i \in G\} = \bigoplus_{i=1}^{n} C_r(K_i) \ .$$

Dies gilt nun natürlich auch für die Untergruppen $Z_r(K)$ und $B_r(K)$. Und weil für jeden einzelnen Unterkomplex wieder $B_r(K_i) \subset Z_r(K_i)$ gilt, kann man die Unterhomologiegruppen definieren als

$$H_r(K_i) = Z_r(K_i)/B_r(K_i) \ .$$

Und damit folgt für die Gesamthomologiegruppe

$$H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K) = (\bigoplus_{i=1}^{n} Z_r(K_i))/(\bigoplus_{i=1}^{n} B_r(K_i))$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n} (Z_r(K_i)/(B_r(K_i)) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_r(K_i) \ .$$

Speziell für $H_0(K)$ ergibt sich

$$H_0(K) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_0(K_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} G \ .$$

Wenn also $H_0(K) \cong G$, dann ist K wegzusammenhängend. □

Korollar 16.5.3 *Wenn ein m-dimensionaler simplizialer Komplex einfach zusammenhängend ist (d.h. 0-homotop) und also keine 'Löcher' besitzt, dann sind für $r = 1, \ldots, m$ alle r-Zyklen aus $Z_r(K)$ gleichzeitig auch r-Randketten aus $B_r(K)$ und damit die Homologiegruppen leer:*

$$K \text{ einfach zusammenhängend} \quad \Rightarrow \quad H_r(K) = \emptyset \quad \text{für } r > 0 \ . \tag{16.5.3}$$

Da in der Differentialgeometrie und Differentialtopologie häufig Abbildungen auf abgeschlossene Kugeln (Bälle) B^n oder Kugeloberflächen (Sphären) S^{n-1} vorkommen, sind deren Homologiegruppen von besonderer Bedeutung. Zuvor benötigen wir aber noch ein Lemma, das auch für sich betrachtet interessant ist.

Lemma 16.5.4 *Ein simplizialer Komplex K mit* $\dim(K) = m$ *liege in einem Teilraum $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Ein einzelner Punkt p sei von den Vertizes $p_0, \ldots, p_m$ von K geometrisch unabhängig, d.h. $p \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus M$. Man bildet jetzt aus den Vertizes $p, p_0, \ldots, p_r$ mit $0 \leq r \leq m$ den $(r+1)$-Simplex $p * \Delta_r$ und entsprechend den $(m+1)$-Simplizialkomplex*

$$p * K := K \cup \{p\} \cup \{p * \Delta_r \in K \, , \, 0 \leq r \leq m\} \; ,$$

welcher Kegel über K mit Spitze p heißt, und der offensichtlich zusammenhängend ist. Dann gilt

$$H_r(p * K) = 0 \; , \; \textit{für}\, r > 0.$$

Beweis. Sei $c_r \in C_r(K)$ ein r-Kette mit $r > 0$. Dann gilt

$$\partial_{r+1}(p * c_r) = c_r - p * \partial_r c_r \; .$$

Wegen der Linearität von ∂ genügt es, dies für $c_r = (p_0, \ldots, p_r)$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} \partial_{r+1}(p * c_r) &= \partial(p, p_0, \ldots, p_r) \\ &= (p_0, \ldots, p_r) - \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p, p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_r) \\ &= c_r - p * \partial_r c_r \; . \end{aligned}$$

Sei jetzt $z_r \in Z_r(p * K)$ mit $r > 0$ ein r-Zyklus. Dann ist z_r eine Linearkombination von c_r und $p * c_{r-1}$. Wegen der Linearität von ∂ genügt es ein $z_r = c_r + p * c_{r-1}$ zu untersuchen:

$$\begin{aligned} z_r = c_r + p * c_{r-1} &= \partial_{r+1}(p * c_r) + p * \partial_r c_r + p * c_{r-1} \\ &= \partial_{r+1}(p * c_r) + p * (\partial_r c_r + c_{r-1}) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\partial_r z_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_r(p * (\partial_r c_r + c_{r-1})) = 0 \; .$$

$\partial_r(p * c'_r)$ kann aber nur dann Null sein, wenn $c'_r = 0$ ist, also folgt

$$\partial_r c_r + c_{r-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_r = \partial_{r+1}(p * c_r) \quad \Rightarrow$$

$$z_r \in B_r(p * c_r) \quad \Rightarrow \quad Z_r(p * c_r) = B_r(p * c_r) \quad \Rightarrow \quad H_r(p * c_r) = 0 \; . \qquad \square$$

Der Simplizialkomplex $K(\Delta_m)$ aller Seiten eines m-Simplex Δ_m bildet einen Polyeder $|K(\Delta_m)| = \overline{\Delta_m}$ und dieser ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Kugel (Ball) B^m. Also sind Bälle triangulierbar.

Der Simplizialkomplex $K(\partial\Delta_m)$ aller eigentlichen Seiten eines m-Simplex Δ_m ist ein Simplizialkomplex mit $|K(\partial\Delta_m)| = \overline{\partial\Delta_m}$ und dieser ist homöomorph zu einer Kugeloberfläche (Sphäre) S^{m-1}. Also sind auch Sphären triangulierbar.

Satz 16.5.5
a. Für die Triangulierung einer abgeschlossene Kugel $K(B^m)$ gilt $H_r(K(B^m)) = 0$ für $r > 0$.

b. Für die Triangulierung einer Kugeloberfläche $K(S^{m-1})$ gilt $H_r(K(S^{m-1})) = 0$ für $0 < r < m-1$ und $H_{m-1}(K(S^{m-1})) \simeq G$.

c. Da $K(B^m)$ und $K(S^{m-1})$ wegzusammenhängend sind, gilt auch:

$$H_0(K(B^m)) \simeq G \ , \quad H_0(K(S^{m-1})) = H_{m-1}(K(S^{m-1})) \simeq G \ .$$

Beweis. a. Sei Δ_m ein m-Simplex, $K(\Delta_{m-1}) := \{\Delta_r \mid \Delta_r < \Delta_m\}$ der $(m-1)$-dimensionale simpliziale Komplex aller Seiten von Δ_m und $p \in \Delta_m \setminus K(\Delta_{m-1})$, dann ist $K(\Delta_m) = p * K(\Delta_{m-1})$. Mit dem obigen Lemma folgt sofort $H_r(K(\Delta^m)) = 0$ für $r > 0$ und wegen $\Delta_m \simeq K(B^m)$ folgt $H_r(K(B^m)) = 0$ für $r > 0$.

b. Sei Δ_m ein m-Simplex, $K(\Delta_m)$ der m-dimensionale simpliziale Komplex über Δ_m, $L(\Delta_{m-1}) := \partial K(\Delta_m)$ der $(m-1)$-dimensionale simpliziale Teilkomplex von K aller Seiten von Δ_m. Dann kann man die folgende Sequenz von r-Ketten bilden:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\emptyset & \to & C_m(K) & \xrightarrow{\partial_m} & C_{m-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_{r+2}} & C_{r+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r(K) & \xrightarrow{\partial_r} \dots \\
 & & & & = & & = & & = & \\
 & & \emptyset & \to & C_{m-1}(L) & \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_{r+2}} & C_{r+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r(L) & \xrightarrow{\partial_r} \dots
\end{array}$$

Wegen $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$ ist das Bild im $\partial_{r+1} C_{r+1}(K)$ eine Teilmenge des Kern $\ker \partial_r C_r(K)$. Zudem ist für $r < m$ die r-Kette $C_r(K) = C_r(L)$, da ja L aus allen Seiten von K besteht.

Sei jetzt y_r ein r-Zyklus der r-Kette $C_r(L)$ für $0 < r < m-1$, d.h. $y_r \in Z_r(L)$, dann ist auch $y_r \in Z_r(K)$, und da $H_r(K) = 0$ ist, existiert also ein $c_{r+1} \in C_{r+1}(K)$ mit $y_r = \partial c_{r+1}$. Dieses c_{r+1} ist aber auch ein Element von $C_{r+1}(L)$, so daß $y_r = \partial c_{r+1}$ auch bzgl. $C_{r+1}(L)$ und $C_r(L)$ gilt. Also ist $y_r \in B_r(L)$ und damit ist $H_r(L) = 0$.

Jetzt soll der Fall $m-1$ betrachtet werden. Sei $y_{m-1} \in Z_{m-1}(L) = Z_{m-1}(K)$. Wie oben existiert ein $c_m \in C_m(K)$ mit $y_{m-1} = \partial c_m$. Nun enthält aber K nur ein einziges m-Simplex, nämlich Δ_m, und damit ist $c_m = g \cdot (p_0, \dots, p_m)$ mit $g \in G$. Damit folgt

$$y_{m-1} = \partial c_m = g \cdot (p_0, \dots, p_m) = g \cdot \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (p_0, \dots, \hat{p_i}, \dots, p_m) \ .$$

Für die $C_{m-1}(L)$ Sequenz gilt: $B_{m-1}(L) = 0$, und damit ist

$$H_{m-1}(L) = Z_{m-1}(L) = Z_{m-1}(K) \simeq G \ . \qquad \square$$

16.6 Relative simpliziale Homologiegruppen

Manchmal erhält man in der Mathematik einfachere Strukturen indem man auf gewisse Informationen verzichtet. So ist es auch in der algebraischen Topologie immer wieder hilfreich einen topologischen Raum modulo eines Teilraums zu untersuchen. Im Fall der Homologiegruppen gelangt man so zu den *relativen* Homologiegruppen.

Definition 16.6.1 *Sei K ein Simplizialkomplex, $A \subset K$ ein nichtleerer, abgeschlossener, simplizialer Teilkomplex, dann heißt (K, A) ein Raumpaar. Eine stetige Abbildung $f : K \to L$ mit $A \subset K$, $B \subset L$ und $f(A) \subseteq B$ nennt man eine stetige Abbildung von Simplizialkomplex-Paaren $f : (K, A) \to (L, B)$.*

Sei K ein Simplizialkomplex, $A \subset K$ ein simplizialer Teilkomplex, $C_r(K)$ eine r-Kettengruppe, dann kann man eine relative r-Kettengruppe als die Ketten von K modulo der Ketten von A definieren, genauer gesagt

$$C_r(K, A) := C_r(K)/C_r(A) \ . \tag{16.6.1}$$

Die Elemente von $C_r(K, A)$ sind also die Klassen
$[s_r] := \{s_r + s_{r,A} \,|\, s_r \in C_r(K) \text{ fixiert}, \ s_{r,A} \in C_r(A)\}$.

Der Randoperator $\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$ wirkt per Definition auf Ketten von A in gleicher Weise $\partial_r : C_r(A) \to C_{r-1}(A)$ wie auf Ketten von K. Damit induziert er einen relativen Randoperator, den wir der Einfachheit halber auch wieder mit ∂_r bezeichnen, also

$$\partial_r : C_r(K, A) \to C_{r-1}(K, A) \ . \tag{16.6.2}$$

Da $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ für $C_r(K)$ und $C_r(A)$ gültig ist, gilt dies auch für die Klassen $[s_r]$, also für $C_r(A)$.

Relative r-Zyklen und relative r-Randketten werden dann definiert als:

$$Z_r(K, A) := \{\alpha \,|\, \alpha \in C_r(K), \ \partial_r \alpha \in C_{r-1}(A)\} \ , \tag{16.6.3}$$

$$B_r(K, A) := \{\beta = \partial_{r+1}\gamma + \delta \,|\, \gamma \in C_{r+1}(K), \ \delta = C_r(A)\} \ . \tag{16.6.4}$$

Damit kann man relative Homologiegruppen wie üblich definieren als:

$$H_r(K, A) := Z_r(K, A)/B_r(K, A) = \ker(\partial_r)/\operatorname{im}(\partial_{r+1}) \ . \tag{16.6.5}$$

Das heißt, die Klassen von $H_r(K, A)$ bestehen aus relativen r-Zyklen modulo relativen r-Randketten.

Einige Beispiele sind zu einem besseren Verständnis der relativen Homologiegruppen vielleicht hilfreich.

1. $C_r(K, K) = C_r(K)/C_r(K) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad H_r(K, K) = \emptyset$ für alle r.

2. $C_r(K,\emptyset) = C_r(K)/C_r(\emptyset) = C_r(K) \quad \Rightarrow \quad Z_r(K,\emptyset) = Z_r(K)$,
   $B_r(K,\emptyset) = B_r(K) \quad \Rightarrow H_r(K,\emptyset) = H_r(K)$ für alle r.
3. Sei K wegzusammenhängend und $\emptyset \neq A \subset K$ dann ist $H_0(K,A) = \emptyset$, denn: sei $x \in K$ ein 0-Simplex, dann gibt es ein 0-Simplex $a \in A$ und eine 1-Kette c_1 in K mit $\partial c_1 := (x - a)$. Also ist x ein Rand relativ zu A, und damit ist $\{x\} = Z_0(K,A) = B_0(K,A)$ und damit ist $H_0(K,A) = \emptyset$.
4. Im Beweis von 16.5.5 hatten wir die beiden folgenden simplizialen Ketten-Komplexe untersucht: Δ_m ein m-Simplex, $K(\Delta_m)$ der m-dimensionale simpliziale Komplex über Δ_m, $L(\Delta_{m-1}) := \partial K(\Delta_m) = K(\partial\Delta_m)$ der $(m-1)$-dimensionale simpliziale Teilkomplex von K aller Seiten von Δ_m. Wir hatten die folgende Sequenz von r-Ketten gebildet:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\emptyset \;\rightarrow & C_m(K) & \xrightarrow{\partial_m} & C_{m-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{m-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_{r+2}} & C_{r+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r(K) & \xrightarrow{\partial_r} \\
 & & & = & & = & & = & \\
 & \emptyset & \rightarrow & C_{m-1}(L) & \xrightarrow{\partial_{m-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_{r+2}} & C_{r+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r(L) & \xrightarrow{\partial_r}
\end{array}$$

   Wegen $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$ ist das Bild $\operatorname{im}\partial_{r+1}C_{r+1}(K)$ eine Teilmenge des Kerns $\ker\partial_r C_r(K)$. Zudem ist für $r < m$ die r-Kette $C_r(K) = C_r(L)$, da ja L aus allen Seiten von K besteht. Damit ist

$$C_r(K,L) = C_r(K)/C_r(L) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad H_r(K,L) = \emptyset \quad \text{für } r < m \; .$$

   Für den Fall $r = m$ hatten wir in 16.5.5 gezeigt, daß $C_m(K) \simeq G$ ist und damit folgt

$$C_m(K,L) = C_m(K)/C_m(L) = C_m(K)/\emptyset = C_m(K) \simeq G \; .$$

   Die Kette $(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in C_m(K)$ ist kein Zyklus in K, wohl aber ein Zyklus relativ zu L, denn

$$\partial_m(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in C_{m-1}(K) = C_{m-1}(L) \quad \Rightarrow$$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in Z_m(K,L) \simeq G \; .$$

$$B_m(K,L) = \emptyset \quad \text{weil } B_m(K) = \emptyset \quad \Rightarrow$$

$$H_m(K,L) \simeq G \; , \quad \text{bzw.} \quad H_m(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq G \; , \qquad (16.6.6)$$

   und $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ ist ein Generator von $H_m(K,L)$.

17 Singuläre Homologie

Obwohl Poincaré die Grundgedanken der *simplizialen Homologie* bereits im Jahr 1900 eingeführt hatte, dauerte es doch bis zum Jahr 1944 bis Eilenberg die endgültige Definition der *singulären Homologie* vorlegen konnte. Es ist nun kein Zufall, daß die Entwicklung von der simplizialen Homologie zur singulären Homologie so lange Zeit in Anspruch genommen hat, denn die simpliziale Homologie ist letztlich ein Teilgebiet der *kombinatorischen Topologie*. Und es hat sich dann in den Jahren nach Poincaré recht mühsam gezeigt, daß mit diesen Hilfsmitteln grundlegende Fragen der Homologie nicht ohne weiteres beantwortet werden können. Den Duchbruch in der Homologie-Theorie brachte erst die Anwendung algebraischer Methoden, also die Entwicklung der *algebraischen Topologie*. So wurde die singuläre Homologie zu einem der ersten großen Erfolge der neu entstehenden algebraischen Topologie.

Für Anfänger und insbesondere auch mathematische Physiker und Physikerinnen ist das Gebiet der algebraischen Topologie zunächst einmal gewöhnungsbedürftig: viele neue Begriffe und Definitionen tauchen auf, sowie viele sehr spezielle technische Werkzeuge mit langen und komplexen Lemmata, die schließlich zu mächtigen Sätzen führen. Doch wenn man sich etwas länger und geduldig genug mit diesem Gebiet beschäftigt, dann erschließen sich die Schönheit und Reichweite des Gebietes - und letztlich die tiefliegenden Verbindungen zwischen der Topologie und der Theorie der Pseudodifferential-Operatoren, die in die berühmten Atiyah-Singer-Indexsätze münden.

Dabei werden wir einige Standardwerkzeuge der algebraischen Topologie, wie *exakte Sequenzen* und das *Fünfer-Lemma* kennenlernen. Diese Werkzeuge werden sich auch später noch als sehr hilfreich herausstellen, wenn wir den Isomorphismus zwischen den Homologie- und den entsprechenden Kohomologie-Gruppen zeigen.

Wir folgen hier den beiden hervorragenden Darstellungen von Stöcker u. Zieschang (1994) und Hatcher (2001). Als Ergänzung bietet sich die im Internet verfügbare Vorlesung von Kriegl (2006) an, der sich auf Stöcker u. Zieschang (1994) stützt, aber zahlreiche Zusammenhänge ausführlicher, und damit verständlicher darstellt. Und Allen Hatcher hat uns sein schönes Buch erfreulicherweise zusätzlich zur gedruckten Ausgabe auch im Internet zur Verfügung gestellt.

17.1 Der Satz von Stokes

Die Integration einer Differentialform $\omega = a(x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^r \in \Omega^r(\mathbb{R}^n)$ mit $r \leq n$ über einen abgeschlossenen, orientierbaren Simplex $\overline{\Delta_r}$ wird definiert als

$$\int\limits_{\overline{\Delta_r}} \omega := \int\limits_{\overline{\Delta_r}} a(x_1, \ldots, x_n)\, dx^1 \cdot \ldots dx^r \ .$$

Jetzt möchte man aber gerne auch über andere geometrische Gebilde als nur über Simplexe im $\mathbb{R}^n$ integrieren. Daher definiert man einen sog. *singulären r-Simplex s_r* als die stetige Abbildung eines Simplex $\overline{\Delta_r}$ eines Simplizial-Komplexes K in einen topologischen Raum X.

Satz 17.1.1 (Stokes) *Sei ω eine $(r-1)$-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit $r \leq n$, also $\omega \in \Omega^{r-1}(M)$, und sei s_r ein singulärer r-Simplex mit $s_r(\overline{\Delta_r}) \subset M$, dann gilt:*

$$\int\limits_{s_r(\overline{\Delta_r})} d\omega = \int\limits_{\partial s_r(\overline{\Delta_r})} \omega \ . \tag{17.1.1}$$

Beweis. Wir folgen Nakahara (2003), S 228 ff.
Zunächst einmal folgt mit 6.3.4: $d(s_r^*\omega) = s_r^*(d\omega)$

$$\int\limits_{s_r(\overline{\Delta_r})} d\omega = \int\limits_{\overline{\Delta_r}} s_r^*(d\omega) = \int\limits_{\overline{\Delta_r}} d(s_r^*\omega) \ , \qquad \int\limits_{\partial s_r(\overline{\Delta_r})} \omega = \int\limits_{\partial\overline{\Delta_r}} s_r^*\omega \ .$$

Es genügt also den Satz im $\mathbb{R}^r$ auf einem orientierbaren Simplex $\overline{\Delta_r}$ zu beweisen, d.h.

$$\int\limits_{\overline{\Delta_r}} d(s_r^*\omega) \stackrel{!}{=} \int\limits_{\partial\overline{\Delta_r}} s_r^*\omega \ .$$

Wir wählen $\psi := s_r^*\omega \in \Omega^{r-1}(\mathbb{R}^r)$ in der Form $\psi := a(x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{r-1}$. Komplexere Differentialformen lassen sich distributiv aus solchen ψ bilden und die Integration ist ja auch ein distributiver Operator. Damit gilt für $d\psi$

$$d\psi = \frac{\partial a(x)}{\partial x^r}\, dx^r \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{r-1} = (-1)^{r-1} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{r-1} \wedge dx^r \ .$$

Die Integration einer 2-Form $\psi = dx^1 \wedge dx^2$ über einen 2-Simplex, also über ein Dreieck $\overline{\Delta_2}$, sieht ja folgendermaßen aus

$$\overline{\Delta_2} = [p_0 p_1 p_2] = [(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)] \ ,$$

$$x^i = \text{Koordinate auf der Strecke } \overline{p_{i-1}p_i}\ ,\ i \in \{1,2\}\ ,$$

$$\int\limits_{\overline{\Delta_2}} \psi = \int\limits_{\overline{\Delta_2}} dx^1 dx^2 = \int\limits_0^1 dx^1 \int\limits_0^{1-x^1} dx^2\ .$$

Die linke Seite der Stokes-Formel ergibt sich sofort als Verallgemeinerung der Integration von einem 2-Simplex auf einen r-Simplex:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\overline{\Delta_r}} d\psi &= (-1)^{r-1} \int\limits_{\overline{\Delta_r}} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1} \cdot dx^r \\
&= (-1)^{r-1} \int\limits_{\overline{\Delta_{r-1}}} dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1} \int_0^{1-\sum\limits_{i=1}^{r-1} x^i} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^r \\
&= (-1)^{r-1} \int\limits_{\overline{\Delta_{r-1}}} a(x^1, \ldots, x^{r-1}, 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x^i)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1} \\
&\quad - (-1)^{r-1} \int\limits_{\overline{\Delta_{r-1}}} a(x^1, \ldots, x^{r-1}, 0)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1}\ .
\end{aligned}$$

Nun zur rechten Seite. Hier muß man sich zunächst einmal über den Rand $\partial\overline{\Delta_r}$ klar werden. Der orientierte Simplex $\overline{\Delta_r} = [p_0 p_1 \ldots p_r]$ hat den Rand

$$\partial\overline{\Delta_r} = [p_1 \ldots p_r] - [p_0 p_2 \ldots p_r] + \ldots + (-1)^r [p_0 p_1 \ldots p_{r-1}]\ .$$

Nun ist $\psi(x) = 0$ auf Hyperflächen, auf denen ein x^i, $1 \le i \le r-1$ konstant ist. Dadurch fallen die meisten Beiträge im Randintergral über ψ weg:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\overline{\Delta_r}} \psi &= \int\limits_{[p_1 \ldots p_r] - [p_0 p_2 \ldots p_r] + \ldots + (-1)^r [p_0 p_1 \ldots p_{r-1}]} \psi \\
&= \int\limits_{[p_1 \ldots p_r]} \psi - \int\limits_{[p_0 p_2 \ldots p_r]} \psi + \ldots + (-1)^r \int\limits_{[p_0 \ldots p_{r-1}]} \psi \\
&= \int\limits_{[p_1 \ldots p_r]} \psi + (-1)^r \int\limits_{[p_0 \ldots p_{r-1}]} \psi \\
&= \int\limits_{[p_1 \ldots p_r]} a(x^1, \ldots, x^r)\, dx^2 \cdot \ldots \cdot dx^r
\end{aligned}$$

$$+ (-1)^r \int\limits_{[p_0 \dots p_{r-1}]} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1} \; .$$

Jetzt kann man statt über $[p_1 \dots p_r]$ auch über $[p_0 \dots p_{r-1}]$ integrieren, also geometrisch betrachtet die Hyperfläche $[p_1 \dots p_r]$ orientierungserhaltend auf die Hyperfläche $[p_0 \dots p_{r-1}]$ projizieren.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\overline{\Delta_r}} \psi &= \int\limits_{[p_0 \dots p_{r-1}]} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x^i)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1} \\
&\qquad - (-1)^{r-1} \int\limits_{[p_0 \dots p_{r-1}]} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1} \\
&= \int\limits_{\overline{\Delta_{r-1}}} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x^i)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1} \\
&\qquad - (-1)^{r-1} \int\limits_{\overline{\Delta_{r-1}}} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{r-1} \\
&= \int\limits_{\overline{\Delta_r}} d\psi \; .
\end{aligned}$$

□

17.2 Von Simplexen zu singulären Simplexen

Man definiert einen sog. *singulären r-Simplex* s_r als die stetige Abbildung eines Simplex $\overline{\Delta_r}$ eines Simplizial-Komplexes K in einen topologischen Raum X. Im Gegensatz zur simplizialen Homologie verwendet man in der singulären Homologie als Ausgangspunkt immer *abgeschlossene* Simplexe, also:

$$\overline{\Delta_r} := [p_0 p_1 \dots p_r] \; .$$

In der algebraischen Topologie verwendet man für s_r stetige Abbildungen, d.h. $s_r \in C^0$. Die Menge der singulären Simplexe S_r ist also keine Menge von einfachen Simplexen oder deren Bildern, sondern eine Menge von Abbildungen!

$$S_r := \{ s_r \,|\, s_r : K \to X \; , \; \overline{\Delta_r} \mapsto s_r(\overline{\Delta_r}) \; , \; s_r \in C^0 \} \; . \tag{17.2.1}$$

Mit $s_r \,|\, [p_0 p_1 \dots p_r]$ wird die Einschränkung von s_r auf den abgeschlossenen Simplex $[p_0 p_1 \dots p_r]$ bezeichnet.

Der singuläre s_r Simplex heißt singulär, weil zum ersten nicht verlangt wird, daß s_r invertierbar sein muß, und weil man zum zweiten in X nicht mehr wie in $\mathbb{R}^n$ von einer geometrischen Unabhängigkeit der Eckpunkte sprechen kann.

Wenn jetzt der topologische Raum X eine Mannigfaltigkeit M ist, dann kann man mittels dieser singulären Simplexe jetzt die Integration in einer Mannigfaltigkeit M verallgemeinern:

$$\int\limits_{s_r(\overline{\Delta_r})} \omega := \int\limits_{\overline{\Delta_r}} s_r^* \omega \ . \tag{17.2.2}$$

Weiter definiert man genau wie im Fall der simplizialen Homologie eine r-Kettengruppe $C_r(X)$, eine r-Zyklusgruppe $Z_r(X)$, einen Randoperator ∂_r, eine r-Randkettengruppe $B_r(X)$ und eine r-Homologiegruppe $H_r(X)$.

Die r-Kettengruppe $C_r(X)$ bezüglich einer abelschen Gruppe G definiert man als die *endliche* Summe über singuläre Simplexe s_r:

$$C_r(K) := \{c \,|\, c = \sum_k g_k s_{r,k} \quad \text{mit } g_k \in G\} \ . \tag{17.2.3}$$

Für einen Simplex Δ_r hatten wir den Randoperator in 16.4.5 definiert als

$$\partial_r \Delta_r = \partial_r (p_0 p_1 \dots p_r) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r) \ ,$$

wobei $\hat{p}_i$ anzeigt, daß der Vertex p_i im Simplex $\Delta_r := (p_0 p_1 \dots p_i \dots p_r)$ ausgelassen wird.

Entsprechend definiert man den singulären Randoperator eines singulären Simplex s_r als

$$\partial_0 s_0 := 0 \ , \tag{17.2.4}$$

$$\partial_r s_r = \partial_r (s_r \,|\, [p_0 p_1 \dots p_r]) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i s_{r-1} \,|\, [p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r] \quad \text{für } r > 0 \ . \tag{17.2.5}$$

Dies kann man, wenn man mag, Stöcker u. Zieschang (1994) folgend, noch etwas kompakter formulieren. Sei δ^i_{r-1} die Abbildung eines $(r-1)$-Standardsimplex $\overline{\Delta_{r-1}} = [p_0 p_1 \dots p_{r-1}]$ auf die i-te Randseite von $\overline{\Delta_r}$, also auf $\overline{\Delta^i_{r-1}} = [p'_0 p'_1 \dots \hat{p}'_i \dots p'_r]$:

$$\delta^i_{r-1} : \overline{\Delta_{r-1}} \to \overline{\Delta^i_{r-1}} \quad \text{mit}$$

$$\delta^i_{r-1} : [p_0 p_1 \dots p_i \dots p_{r-1}] \ \mapsto \ [p'_0 p'_1 \dots \hat{p}'_i \dots p'_r] \quad \text{mit} \tag{17.2.6}$$

$$p'_0 = p_0\,,\; p'_1 = p_1\,, \ldots,\; p'_{i-1} = p_{i-1}\,,\; p'_{i+1} = p_i\,, \ldots,\; p'_r = p_{r-1}\;.$$

Damit kann man den singulären Randoperator schreiben als

$$\partial_r : S_r(X) \to S_{r-1}(X) \quad \partial_r s_r := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (s_{r-1} \circ \delta^i_{r-1})\;, \tag{17.2.7}$$

$$\partial_r \sum_k g_k s_{r,k} := \sum_k g_k (\partial_r s_{r,k})\;.$$

Wie bei den einfachen Simplexen zeigt man leicht, daß ∂_r auch für singuläre Simplexe idempotent ist.

Lemma 17.2.1 *1. Für $r \geq 2$ und $0 \leq k < j \leq r$ gilt $\delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2} = \delta^k_{r-1} \circ \delta^{j-1}_{r-2}$.*
2. ∂_r ist idempotent, d.h. $\partial_{r-1}\partial_r s_r = 0$.

Beweis. 1. Sei $r \geq 2$ und $0 \leq k < j \leq r$, dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\delta^k_{r-2}([p_0 p_1 \ldots p_{k-1} p_k \ldots p_{r-2}]) \\
&\quad = [p'_0 p'_1 \ldots p'_{k-1} \hat{p}'_k p'_{k+1} \ldots p'_{r-1}] = [p_0 p_1 \ldots p_{k-1} \hat{p}'_k p_k \ldots p_{r-2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta^j_{r-1}([p'_0 p'_1 \ldots p'_{k-1} \hat{p}'_k p'_{k+1} \ldots p'_{j-1} p'_j p'_{j+1} \ldots p'_{r-1}]) \\
&\quad = [p''_0 p''_1 \ldots p''_{k-1} \hat{p}''_k p''_{k+1} \ldots p''_{j-1} \hat{p}''_j p''_{j+1} \ldots p''_r] \\
&\quad = [p_0 p_1 \ldots p_{k-1} \hat{p}''_k p_k \ldots p_{j-2} \hat{p}''_j p_{j-1} \ldots p_{r-2}]\;.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta^{j-1}_{r-2}([p_0 p_1 \ldots p_{j-2} p_{j-1} \ldots p_{r-2}]) \\
&\quad = [p'_0 p'_1 \ldots p'_{j-2} \hat{p}'_{j-1} p'_j \ldots p'_{r-1}] = [p_0 p_1 \ldots p_{j-2} \hat{p}'_{j-1} p_{j-1} \ldots p_{r-2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta^k_{r-1}([p'_0 p'_1 \ldots p'_{k-1} p'_k p'_{k+1} \ldots p'_{j-2} \hat{p}'_{j-1} p'_j \ldots p'_{r-1}]) \\
&\quad = [p''_0 p''_1 \ldots p''_{k-1} \hat{p}''_k p''_{k+1} \ldots p''_{j-1} \hat{p}''_j p''_{j+1} \ldots p''_r] \\
&\quad = [p_0 p_1 \ldots p_{k-1} \hat{p}''_k p_k \ldots p_{j-2} \hat{p}''_j p_{j-1} \ldots p_{r-2}]\;.
\end{aligned}$$

Also gilt $\delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2} = \delta^k_{r-1} \circ \delta^{j-1}_{r-2}$.

2.

$$\partial_{r-1}\partial_r s_r = \partial_{r-1}\Big(\sum_{j=0}^{r} (-1)^j (s_{r-1} \circ \delta^j_{r-1})\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r} (-1)^k (-1)^j (s_{r-2} \circ \delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2}) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ j \le k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2}) + \sum_{\substack{j=1 \\ k<j}}^{j=r} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2}) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ j \le k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2}) + \sum_{\substack{j=1 \\ k<j}}^{j=r} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta^k_{r-1} \circ \delta^{j-1}_{r-2}) \; .
\end{aligned}
$$

Jetzt ersetzt man im 2. Summanden $k \to j$, $j \to k+1$ und erhält:

$$
\begin{aligned}
\partial_{r-1}\partial_r s_r &= \sum_{\substack{k=0 \\ j \le k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2}) + \sum_{\substack{k+1=1 \\ j<k+1}}^{k+1=r} (-1)^{k+1+j} (s_{r-2} \circ \delta^j_{r-1} \circ \delta^{k+1-1}_{r-2}) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ j \le k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2}) + \sum_{\substack{k=0 \\ j \le k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k+1} (s_{r-2} \circ \delta^j_{r-1} \circ \delta^k_{r-2}) \\
&= 0 \; . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Die Gruppe der r-Zyklen $Z_r(X)$ ist die Untergruppe der r-Ketten $C_r(X)$ ohne Rand, d.h.

$$
Z_r(X) = \{c \mid c \in C_r(X),\ \partial_r c = 0\} = \ker(\partial_r) \; . \tag{17.2.8}
$$

Wegen $\partial_0 s_0 = 0$ ist die 0-Kette $C_0(X)$ stets ein Zyklus, also $C_0(X) = Z_0(X)$.

Die Gruppe der r-Randketten $B_r(X)$ ist die Untergruppe der r-Ketten $C_r(X)$, die Rand für eine $(r+1)$-Kette aus $C_{r+1}(X)$ sind, d.h.

$$
B_r(X) = \{c \mid c \in c \in C_r(X),\ c = \partial_{r+1} d \quad \text{mit } d \in C_{r+1}(X)\} = \operatorname{im}(\partial_{r+1}) \; . \tag{17.2.9}
$$

Die r-Homologiegruppe $H_r(X)$ ist dann wieder die Quotientengruppe

$$
H_r(X) := Z_r(X)/B_r(X) = \ker(\partial_r)/\operatorname{im}(\partial_{r+1}) \quad \text{für } r \ge 0 \; . \tag{17.2.10}
$$

Soweit, so einfach :-)

Doch während ein simplizialer Komplex K aus endlich vielen Basis-Simplexen erzeugt wird und daher $H_r(K) = 0$ ist für $r > m$, wenn m die Raumdimension von K ist, kann sich ein singulärer Komplex aus einer *sehr großen* Anzahl singulärer Simplexe zusammensetzen, kurzum: die Dimension der r-Kettengruppe $C_r(X)$ ist überabzählbar.

Es ist daher alles andere als trivial, daß die simplizialen und die singulären Homologiegruppen tatsächlich in irgendeiner Weise zueinander isomorph sein könnten! Diese Aussage soll am Ende dieses Kapitels über singuläre Homologie bewiesen werden.

Zuvor sollen aber noch einige Zusammenhänge gezeigt werden, die wir bereits bei der simplizialen Homologie gefunden hatten.

Lemma 17.2.2 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y, und sei $C_r(X)$ eine r-Kettengruppe, dann gilt für die induzierten Abbildungen $f_{r*} : C_r(X) \to C_r(Y)$ die Eigenschaft $f_*\partial = \partial f_*$, oder ausführlicher geschrieben $f_{r-1*}\partial_r = \partial_r f_{r*}$. Ein solches System von Abbildungen f_{r*} mit dieser Kommutativität bzgl. der Randoperatoren ∂_r heißt eine Kettenabbildung.*

Beweis.

$$\partial_r(f_{r*}s_r) = \partial_r(f_r \circ s_r) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(f_{r-1} \circ s_{r-1}) \circ \delta^i_{r-1} = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(f_{r-1*}s_{r-1}) \circ \delta^i_{r-1} \; ,$$

$$f_{r-1*}(\partial_r s_r) = f_{r-1*}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\, s_{r-1} \circ \delta^i_{r-1} = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(f_{r-1*}s_{r-1}) \circ \delta^i_{r-1} \; . \qquad \square$$

Lemma 17.2.3 *Sei $P := \{p_0\}$ ein topologischer Raum, der nur aus dem Punkt p_0 bestehe. Dann ist*

$$H_0(P) = G \; , \quad H_r(P) = \emptyset \quad \textit{für } \; r > 0\} \; . \tag{17.2.11}$$

Beweis. Für $r < 0$ ist $H_r(P) = \emptyset$ per Definition. Für $r \geq 0$ gibt es nur ein einziges singuläres Simplex $s_r : \overline{\Delta_r} \to P$, nämlich die konstante Abbildung. Also folgt für $r > 0$:

$$\partial_r s_r = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(s_{r-1} \circ \delta^i_{r-1}) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i s_{r-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } r \text{ ungerade} \; , \\ s_{r-1} & \text{für } r > 0 \text{ und } r \text{ gerade} \; . \end{cases}$$

Für $r > 0$ und r ungerade ist s_r wegen $\partial_r s_r = 0$ ein Zyklus, und wegen $\partial_{r+1}s_{r+1} = s_r$ gleichzeitig eine Randkette, also ist $H_r(P) = \emptyset$. Für $r > 0$ und r gerade ist der $\ker(\partial_r) = 0$ und damit ist $Z_r(P) = \emptyset$ und damit auch $H_r(P) = \emptyset$.

Im Fall $r = 0$ gilt $B_0(P) = \mathrm{im}(\partial_1) = \emptyset$ und $Z_0(P) = \{\sum_k g_k s_{0,k} \quad \text{mit } g_k \in G\} = \{g s_0\} \simeq G$. Also ist $H_0(P) \simeq G$. $\square$

Für wegzusammenhängende topologische Räume X findet man wie im Fall der simplizialen Komplexe K eine wichtige allgemeine Aussage über $H_0(X)$.

Satz 17.2.4 *X ist genau dann ein wegzusammenhängender topolgischer Raum, wenn gilt*

$$H_0(X) \simeq G\ . \tag{17.2.12}$$

Wenn X ein toplogischer Raum ist, der aus n disjunkten Teilmengen besteht, die jeweils wegzusammenhängend sind, also

$$X := \bigcup_{i=1}^{n} X_i \quad \textit{mit}\ X_i \cap X_j = \emptyset\ \ \textit{für}\ \ i,j = 1,\ldots,n\ ,$$

dann gilt

$$H_r(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} H_r(X_i) \quad \textit{für}\ r \geq 0\ . \tag{17.2.13}$$

Beweis. Sei $s_r : \overline{\Delta}_r \to X$, dann ist $s_r(\overline{\Delta}_r) \subset X_i$ für genau ein $i \in \{1,\ldots,n\}$, da $\overline{\Delta}_r$wegzusammenhängend und s_r stetig ist. Also kann man jede r-Kette $c \in C_r(X)$ eindeutig als Summe über endlich viele Summanden $c_i \in C_r(X_i)$ schreiben, d.h.

$$\bigoplus_{i=1}^{n} C_r(X_i) = C_r(X)\ .$$

Der Randoperator $\partial_r : C_r(X_i) \to C_{r-1}(X_i)$ erhält diese Zerlegung in die verschiedenen X_i und daher folgt

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Z_r(X_i) = Z_r(X) \quad \text{und} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} B_r(X_i) = B_r(X)\ ,$$

$$\begin{aligned} H_r(X) &= Z_r(X)/B_r(X) = (\bigoplus_{i=1}^{n} Z_r(X_i))/(\bigoplus_{i=1}^{n} B_r(X_i)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n}(Z_r(X_i)/B_r(X_i)) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} H_r(X_i)\ . \end{aligned}$$

Wenn nun X nur aus einer einzigen wegzusammenhängenden Komponente besteht, dann soll jetzt $H_0(X) \simeq G$ gezeigt werden. Wegen $\partial_0 = 0$ ist $Z_0(X) = C_0(X)$ und also $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = C_0(X)/\operatorname{im}\partial_1$. Man definiert einen Homomorphismus

$$\epsilon : C_0(X) \to G \quad \text{mit} \quad \epsilon(\sum_k g_k s_{0,k}) = \sum_k g_k\ , \quad \text{wobei die } g_k \in G \text{ sind.}$$

Zunächst beweist man, daß $\ker(\epsilon) = \operatorname{im}(\partial_1)$ ist:

1. $\mathrm{im}(\partial_1) \subset \ker(\epsilon)$: denn sei $s_1 : \Delta_1 \to X$, dann gilt

$$\epsilon(\partial_1 s_1) = \epsilon(s_1|p_1 - s_1|p_0) = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{im}(\partial_1) \subset \ker(\epsilon) \ .$$

2. $\ker(\epsilon) \subset \mathrm{im}(\partial_1)$: denn sei $\epsilon(\sum_k g_k s_{0,k}) = 0$, dann ist auch $\sum_k g_k = 0$. Die Bilder $s_{0,k}(p_i)$ sind einfach Punkte in X, also kann man sich einen festen Punkt x_0 nehmen und einen singulären 0-Simplex $s_{0,0}$, dessen Bild von p_0 gerade x_0 ist, d.h. $x_0 = s_{0,0}(p_0)$, als Ausgangspunkt für die folgenden Pfade $\tau_k : [p_0, p_1] \to X$ von $s_{0,0}(p_0)$ nach $s_{0,k}(p_1)$ wählen. Diese Pfade τ_k sind nun singuläre 1-Simplexe und es gilt

$$\partial_1(\tau_k \,|\, [p_0, p_1] = s_{0,k}|p_1 - s_{0,0}|p_0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \partial_1(\sum_k g_k \tau_k) &= \sum_k g_k s_{0,k}|p_1 - \sum_k g_k s_{0,0}|p_0 = \sum_k g_k s_{0,k}|p_1 - s_{0,0}|p_0 \sum_k g_k \\ &= \sum_k g_k s_{0,k}|p_1 \ . \end{aligned}$$

Damit ist $\sum_k g_k s_{0,k}|p_1$ ein Rand und also $\ker(\epsilon) \subset \mathrm{im}(\partial_1)$.

Aus 1. und 2, folgt $\ker(\epsilon) = \mathrm{im}(\partial_1)$. Nun gilt für die Abbildung $\epsilon : C_0(X) \to G$, daß die Abbildung $C_0(X)/\ker(\epsilon) \to G$ ein Isomorphismus ist und damit folgt

$$H_0(X) = C_0(X)/\,\mathrm{im}\,\partial_1 = C_0(X)/\ker(\epsilon) \simeq G \ .$$

Wenn also X aus n wegzusammenhängenden Teilmengen X_i besteht, dann folgt

$$H_0(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} H_0(X_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} G \ ,$$

und damit gilt $H_0(X) \simeq G$ genau dann, wenn X wegzusammenhängend ist. □

In der simplizialen Homologie hatten wir für m-dimensionale, wegzusammenhängende, simpliziale Komplexe K gefunden, daß die höheren Homologiegruppen alle leer sind, daß also $H_r(K) = \emptyset$ für $r = 1, \ldots, m$. Dies beruhte aber nicht zuletzt darauf, daß die entsprechenden Polyeder $|K|$ alle Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ waren. Für beliebige topologische Räume X und die singuläre Homologie können wir dies nicht beweisen.

Definition 17.2.5 *Wegzusammenhängende topologische Räume X mit der Eigenschaft $H_r(X) = \emptyset$ für $r > 0$ nennt man azyklische Räume, weil es keine Zyklen gibt, die nicht gleichzeitig auch Ränder sind.*

Für konvexe Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^m$ jedoch können wir jedoch wie in der simplizialen Homologie mittels der Kegelkonstruktion zeigen, daß $H_r(A) = \emptyset$ für $r > 0$ gilt, d.h. das solche A azyklisch sind.

Definition 17.2.6 *Seien* $\overline{\Delta_r} = [p_0, \ldots, p_r]$ *ein* r*-dimensionaler Simplex,* $p \in \mathbb{R}$, $\overline{\Delta_{r+1}} = [p'_0, p'_1, \ldots, p'_{r+1}] = [p, p_0, \ldots, p_r]$ *ein* $(r+1)$*-dimensionaler Simplex und* $p * \overline{\Delta_r}$ *der simpliziale Kegel mit Spitze* p*:*

$$p* : \overline{\Delta_r} \to \overline{\Delta_{r+1}} \quad mit \quad p * [p_0, \ldots, p_r] := (1-t)p + t\delta^0_r(\overline{\Delta_r}) \quad mit\, t \in [0,1]. \quad (17.2.14)$$

Seien weiter $A \subset \mathbb{R}^m$ *konvex,* $s_r : \overline{\Delta_r} \to A$*, und* $x \in A$*, dann definiert man den singulären Kegel über* s_r *mit Spitze* x *als*

$$x * s_r : \overline{\Delta_{r+1}} \to A \quad mit$$

$$(x * s_r)((1-t)p + t\delta^0_r(\overline{\Delta_r})) := (1-t)x + ts_r(\overline{\Delta_r}) \quad mit\, t \in [0,1]. \qquad (17.2.15)$$

Entsprechend definiert man einen Kegel über einer r*-Kettengruppe* $c \in C_r(X)$ *als*

$$x * c := \sum_k g_k(x * s_{r,k}) \quad mit\, g_k \in G\ .$$

Mit Hilfe dieser Kegelkonstruktion kann man nun beweisen, daß konvexe Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^m$ azyklisch sind.

Lemma 17.2.7 *1. Sei* $A \subset \mathbb{R}^m$*,* $x \in A$*,* $c \in C_r(A)$ *dann gilt*

$$\partial_{r+1}(x * c) = \begin{cases} c - x & \text{für}\, r = 0\ , \\ c - x * \partial_r c & \text{für}\, r > 0\ . \end{cases} \qquad (17.2.16)$$

2. Wenn $A \subset \mathbb{R}^m$ *und* A *konvex ist, dann gilt*

$$A \text{ ist azyklisch, d.h. } H_r(A) = \emptyset \text{ für } r > 0\ . \qquad (17.2.17)$$

Beweis. 1. Wegen der Linearität von ∂_r genügt es, diese Aussage für $s_r : \overline{\Delta_r} \to A$ zu beweisen. Sei zunächst $r = 0$, dann ist $x * s_0 : \overline{\Delta_1} \to A$ ein Weg von x nach $s_0(p_0)$ und damit ist

$$\partial_1(x * s_0) = s_0 - x\ .$$

Für $r > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\partial_{r+1}(x * s_r) &= \sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i((x * s_r)\,|\,[p'_0, \ldots, \hat{p'_i}, \ldots, p'_{r+1}]) \\
&= (x * s_r)\,|\,[\hat{p'_0}, p'_1, \ldots, p'_{r+1}] + \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i((x * s_r)\,|\,[p'_0, p'_1, \ldots, \hat{p'_i}, \ldots, p'_{r+1}]) \\
&= (s_r)\,|\,[p'_1, \ldots, p'_{r+1}] + x * \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i((s_r)\,|\,[p'_1, \ldots, \hat{p'_i}, \ldots, p'_{r+1}])
\end{aligned}$$

$$= (s_r) \,|\, [p_0, \ldots, p_r] + x * (-1) \sum_{i=0}^{r} (-1)^i ((s_r) \,|\, [p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_r])$$

$$= s_r - x * \partial_r s_r \ .$$

2. Sei $r > 0$ und $c \in Z_r(A)$ ein Zyklus, d.h. $\partial_r c = 0$. Dann gilt für den Rand des Kegels über c: $\partial_{r+1}(x * c) = c$. Also ist jeder Zyklus ein Rand, d.h. $Z_r(A) = B_r(A)$ und damit ist $H_r(A) = Z_r(A)/B_r(A) = \emptyset$. □

17.3 Exakte Sequenzen und Diagrammjagd

Zu den Standardwerkzeuge der algebraischen Topologie gehören die sog. *exakten Sequenzen* und das *Fünfer-Lemma*. Diese Werkzeuge werden sich auch später noch als sehr hilfreich herausstellen, wenn wir den Isomorphismus zwischen den Homologie- und den entsprechenden Kohomologie-Gruppen zeigen werden.

Eine Sequenz von Homomorphismen

$$\ldots \longrightarrow A_{r+1} \xrightarrow{\alpha_{r+1}} A_r \xrightarrow{\alpha_r} A_{r-1} \longrightarrow \ldots$$

heißt *exakt*, wenn $\ker(\alpha_r) = \mathrm{im}(\alpha_{r+1})$ ist.

Wenn es sich bei der Sequenz um eine r-Kettengruppe $C_r(K)$ handelt, bei der die Abbildungen α_r die Randoperatoren ∂_r seien, dann gilt wegen $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ ja grundsätzlich $\mathrm{im}\,\alpha_{n+1} \subset \ker \alpha_n$. Und wenn dann auch die Umkehrung $\ker \alpha_r \subset \mathrm{im}\,\alpha_{r+1}$ gelten sollte, dann ist ja jeder r-Zyklus aus $Z_r(K)$ zugleich eine r-Randketten aus $B_r(K)$ und damit ist die r-Homologiegruppe trivial, d.h.$H_r(K) = 0$.

Einige einfache Beispiele:

1. $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B$ exakt $\quad\Leftrightarrow\quad \ker(j) = \mathrm{im}(i) = 0,$ d.h. j injektiv ; (17.3.1)
2. $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} 0$ exakt $\quad\Leftrightarrow\quad B = \ker(k) = \mathrm{im}(j),$ d.h. j surjektiv ;
3. $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} 0$ exakt $\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{im}(i) = B,$ j injektiv & surjektiv=isomorph ;
4. $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} 0$ exakt $\quad\Leftrightarrow\quad j$ injektiv, k surjektiv, $\ker(k) = \mathrm{im}(j)$.

Im Beispiel 4 induziert k einen Isomorphismus $k_\# : B/\mathrm{im}(j) \to C$. Wenn nun $j : A \to B$ eine Einbettung ist, dann ist $A \simeq \mathrm{im}(j)$ und $k_\# : B/A \to C$ ist ein Isomorphismus.

Eine solche exakte Sequenz wie in 4., also

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j_\#} B/A \to 0 \tag{17.3.2}$$

heißt eine *kurze exakte Sequenz* und ist ein Standardelement für die folgenden Betrachtungen.

Wenn im folgenden Diagramm die Zeilen exakte Sequenzen sind und die Spalten Kettenkomplexe, dann ist das Diagramm kommutativ und heißt *kurze exakte Sequenz eines Ketten-Komplexes*:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \\
0 \arrow[r] & A_{r+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{r+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{r+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_r \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_r \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_r \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{r-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{r-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise haben wir im obigen Bild und im folgenden Text die Abbildungen $i_r, j_r, \ldots$ einfach zu $i, j, \ldots$ abgekürzt.

Dieser kurzen exakten Sequenz eines Ketten-Komplexes entspricht eine *lange exakte Sequenz* der entsprechenden Homologiegruppen:

$$
\ldots \to H_r(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(B) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(C) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(B) \to \ldots \to 0 \tag{17.3.3}
$$

Beweis. 1. Nach Voraussetzung sind die oben definierten Abbildungen i, j Ketten-Abbildungen. Sie induzieren daher die Abbildungen $i_\bullet, j_\bullet$ zwischen den entsprechenden Homologiegruppen. Der zentrale Punkt ist jedoch die Konstruktion der Abbildung $\partial_\bullet : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$, womit wir beginnen wollen. Sei $c \in C_n$ ein Zyklus, d.h. $\partial c = 0$. Da j surjektiv ist existiert ein $b \in B_n$ mit $c = j(b)$ und dafür gilt

$$
j(\partial b) = \partial(j(b)) = \partial c = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial b \in B_{n-1} \text{ mit } \partial b \in \ker(j) \ .
$$

Wegen der Exaktheit, d.h. wegen $\ker(j) = \mathrm{im}(i)$, gibt es ein $a \in A_{n-1}$ mit $\partial b = i(a)$. Wegen

$$
i(\partial a) = \partial(i(a)) = \partial(\partial b) = 0 \quad \text{und}\, i \,\text{injektiv} \quad \Rightarrow \quad \partial a = 0 \ .
$$

Also ist $a \in A_{n-1}$ ein Zyklus. Damit kann man $\partial_\bullet$ definieren als die Abbildung, welche die Klasse $[c] \in H_n(C)$ in die Klasse $[a] \in H_{n-1}(A)$ abbildet, also $\partial_\bullet[c] = [a]$.

Daß diese Definition eindeutig ist, sieht man folgendermaßen:

$$c' \in [c] \quad \Leftrightarrow \quad c' = c + \partial c_0 \quad \text{mit} \quad c_0 = j(b_0) \quad \text{für ein} \quad b_0 \in B_n \quad \Rightarrow$$

$$c' = c + \partial c_0 = c + \partial j(b_0) = j(b) + j(\partial b_0) = j(b + \partial b_0)\ .$$

Nun ist allerdings die Zuordnung von $c = j(b)$ nicht eindeutig, denn da j surjektiv ist könnte es zusätzlich zu b auch ein oder mehrere $b' \in B_n$ mit $c = j(b')$ geben.

$$c = j(b) = j(b') \quad \Rightarrow \quad j(b - b') = 0 \quad \Rightarrow \quad (b - b') \in \ker(j) = \operatorname{im}(i)\ ,$$

also gibt es ein $a_0 \in A_n$ mit $(b - b') = i(a_0)$. Damit ist die allgemeine Form von c'

$$c' = j(b' + i(a_0) + \partial b_0) \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}\partial(b' + i(a_0) + \partial b_0) &= \partial(b') + \partial i(a_0) + \partial\partial b_0 = \partial(b') + i(\partial a_0)\\ &= i(a') + i(\partial a_0) = i(a' + \partial a_0)\ .\end{aligned}$$

d.h. verschiedene $c' \in [c]$ werden in die gleiche Klasse $[a]$ abgebildet.

2. $\partial_\bullet : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ ist ein Homomorphismus, denn seien $b_1, b_2 \in B_n$, $c_1, c_2 \in C_n$, $a_1, a_2 \in A_{n-1}$ Elemente wie in der obigen Konstruktion von $\partial_\bullet$, dann gilt ja $\partial_\bullet[c_1] = [a_1]$ und $\partial_\bullet[c_2] = [a_2]$. Es folgt

$$i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial(b_1) + \partial(b_2) = \partial(b_1 + b_2)$$

$$j(b_1 + b_2) = j(b_1) + j(b_2) = c_1 + c_2 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\bullet([c_1] + [c_2]) = \partial_\bullet[(c_1 + c_2)] = [(a_1 + a_2)] = [a_1] + [a_2] = \partial_\bullet[c_1] + \partial_\bullet[c_2]\ .$$

3. Jetzt soll gezeigt werden, daß die obige lange Sequenz tatsächlich exakt ist.

a. $\operatorname{im}(i_\bullet) \subset \ker(j_\bullet)$: die Sequenz $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$ ist exakt und daraus folgt

$$\ker(j) = \operatorname{im}(i) \quad \Rightarrow \quad j\,i = 0 \quad \Rightarrow \quad j_\bullet\, i_\bullet = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{im}(i_\bullet) \subset \ker(j_\bullet)\ .$$

b. $\operatorname{im}(j_\bullet) \subset \ker(\partial_\bullet)$: aus der Injektivität von i folgt

$$[b] \in H_n(B) \quad \Rightarrow \quad \partial b = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial b = i(a) = 0 \quad \text{mit } a \in A_{n-1} \quad \Rightarrow \quad a = 0\ ,$$

$$\partial_\bullet j_\bullet[b] = [a] = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{im}(j_\bullet) \subset \ker(\partial_\bullet)\ .$$

c. $\operatorname{im}(\partial_\bullet) \subset \ker(i_\bullet)$:

$$[b] \in H_n(B) \;\Rightarrow\; \partial b = 0\;,\; [c] \in H_n(C)\;,\; [a] \in H_{n-1}(A) \quad \text{und}$$

$$[c] \xrightarrow{\partial_\bullet} [a] \xrightarrow{i_\bullet} i_\bullet[a] = [i(a)] = [\partial b] = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{im}(\partial_\bullet) \subset \ker(i_\bullet)\;.$$

d. $\ker(j_\bullet) \subset \operatorname{im}(i_\bullet)$: sei $[b] \in \ker(j_\bullet) \subseteq H_n(B)$, dann ist b ein Zyklus aus B_n, der durch j auf eine Randkette $j(b) \in C_n$ abgebildet wird, denn $[j(b)] = 0 = \ker(j_\bullet)$. Wegen der Kommutativität des Kettenkompexes gibt es ein $c' \in C_{n+1}$ mit $j(b) = \partial c'$. Weil j surjektiv ist gibt es aber auch ein $b' \in B_{n+1}$ mit $c' = j(b')$. Damit folgt

$$j(b - \partial b') = j(b) - j(\partial b') = j(b) - \partial j(b') = j(b) - \partial c' = j(b) - j(b) = 0\;.$$

Also ist $b - \partial b' \in \ker(j) = \operatorname{im}(i)$ und damit gibt es ein $a \in A_n$ mit $i(a) = b - \partial b'$. Weil b ein Zyklus ist folgt

$$i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0\;.$$

Weil i injektiv ist folgt $\partial a = 0$ und damit ist $a \in A_n$ ein Zyklus. Also gilt für $[b] \in \ker(j_\bullet)$

$$[b] = [b - \partial b'] = [i(a)] = i_\bullet[a] \quad \Rightarrow \quad \ker(j_\bullet) \subset \operatorname{im}(i_\bullet)\;.$$

e. $\ker(\partial_\bullet) \subset \operatorname{im}(j_\bullet)$: sei $[c] \in \ker(\partial_\bullet) \subseteq H_n(C)$, dann gilt für $[a] = \partial_\bullet[c] \in H_{n-1}(A)$, daß a eine Randkette in A_{n-1} ist, d.h. es gibt ein $a' \in A_n$ mit $a = \partial a'$. Weiter gilt aufgrund der Konstruktion von $\partial_\bullet$ für $b \in B_n$ der Zusammenhang $\partial b = i(a)$ und damit folgt:

$$\partial(b - i(a')) = \partial b - \partial i(a') = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0\;.$$

Also ist $b - i(a')$ ein Zyklus in B_n, und wegen

$$j(b - i(a')) = j(b) - ji(a') = j(b) = c \in C_n \quad \Rightarrow$$

$$j_\bullet : [b - i(a')] \mapsto [c] \quad \Rightarrow \quad \ker(\partial_\bullet) \subset \operatorname{im}(j_\bullet)\;.$$

f. $\ker(i_\bullet) \subset \operatorname{im}(\partial_\bullet)$: sei $[a] \in \ker(i_\bullet) \subseteq H_{n-1}(A)$ mit einem Zyklus $a \in A_{n-1}$. Deshalb und wegen der Konstruktion von $\partial_\bullet$ gibt es ein $b \in B_n$ mit $\partial b = i(a)$. Dann ist

$$\partial j(b) = j(\partial b) = j(i(a)) = 0$$

und damit ist $j(b)$ ein Zyklus aus C_n mit

$$\partial_\bullet : [j(b)] \mapsto [a] \quad \Rightarrow \quad \ker(i_\bullet) \subset \operatorname{im}(\partial_\bullet)\;. \qquad \square$$

Das folgende berühmte *Fünfer-Lemma* der algebraischen Topologie sieht zunächst einmal nur recht technisch aus, stellt aber in vielen Zusammenhängen ein starkes Werkzeug dar und erleichtert zahlreiche Beweise. Wir werden dieses Lemma u.a. beim Beweis des Isomorphismus von simplizialen und singulären Homologiegruppen anwenden.

Lemma 17.3.1 (Fünfer-Lemma)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & D' \arrow[r, "l'"] & E' \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm sei ein kommutatives Diagramm zwischen den additiven, abelschen Gruppen $A, A', B, B', C, C', D, D', E, E'$, wobei beide Zeilen exakte Sequenzen seien. Weiter seien von den fünf Gruppenhomomorphismen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ gerade $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ Isomorphismen. Dann ist auch γ ein Isomorphismus.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in 2 Teile und ist ein schönes Beispiel für die sog. *Diagrammjagd*:

1. γ ist surjektiv, wenn β, δ surjektiv und ϵ injektiv sind,
2. γ ist injektiv, wenn β, δ injektiv und α surjektiv sind.

1. Sei $c' \in C'$, dann gibt es ein $d \in D$ mit $k'(c') = \delta(d)$, da δ surjektiv ist. Weiter ist $\epsilon l(d) = l'\delta(d) = l'k'(c') = 0$, da die untere Zeile exakt ist, d.h. $\mathrm{im}(k') = \ker(l')$. Da ϵ injektiv ist, ist also auch $l(d) = 0$. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile, d.h. $\mathrm{im}(k) = \ker(l)$, gibt es also eine $c \in C$ mit $d = k(c)$. Jetzt betrachtet man $c' - \gamma(c)$ unter dem Homomorphismus k' und erhält

$$k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - k'(\gamma(c)) = k'(c') - \delta(k(c)) = k'(c') - \delta(d) = 0\ .$$

Wegen der Exaktheit der unteren Zeile, d.h. $\mathrm{im}(j') = \ker(k')$, gibt es also ein $b' \in B'$ mit $c' - \gamma(c) = j'(b')$. Weil β surjektiv ist gibt es ein $b \in B$ mit $b' = \beta(b)$. Weil γ ein Homomorphismus ist folgt

$$\gamma(c + j(b)) = \gamma(c) + \gamma(j(b)) = \gamma(c) + j'(\beta(b)) = \gamma(c) + j'(b') = c'\ ,$$

d.h. zu jedem $c' \in C'$ existiert mit $(c+j(b)) \in C$ ein Element aus C das auf c' abgebildet wird und also ist γ surjektiv.

2. Sei jetzt $c \in \ker(\gamma)$, also $\gamma(c) = 0$. Weiter ist $\delta(k(c)) = k'(\gamma(c)) = 0$ und da δ injektiv ist folgt $k(c) = 0$. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile, d.h. $\mathrm{im}(j) = \ker(k)$, gibt es ein $b \in B$ mit $c = j(b)$. Für β(b) gilt dann

$$j'(\beta(b)) = \gamma(j(b)) = \gamma(c) = 0\ .$$

Wegen der Exaktheit der unteren Zeile, d.h. $\mathrm{im}(i') = \ker(j')$, gibt es ein $a' \in A'$ mit $\beta(b) = i'(a')$. Da α surjektiv ist gibt es ein $a \in A$ mit $a' = \alpha(a)$.

$$\beta(i(a) - b) = \beta(i(a)) - \beta(b) = i'(\alpha(a)) - \beta(b) = i'(\alpha') - \beta(b) = 0\ .$$

Weil β injektiv ist folgt $i(a) - b = 0$, oder $b = i(a)$. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile, d.h. $\mathrm{im}(i) = \ker(j)$, folgt $c = j(b) = j(i(a)) = 0$. Damit besteht der $\ker(\gamma)$ nur aus $c = 0$ und also ist γ injektiv. $\square$

17.4 Relative singuläre Homologiegruppen

Wir wiederholen zunächst die einführenden Sätze aus dem Abschnitt über relative simpliziale Homologiegruppen, die hier bei relativen singulären Homologiegruppen gleichermaßen gültig sind.

Manchmal erhält man in der Mathematik einfachere Strukturen indem man auf gewisse Informationen verzichtet. So ist es auch in der algebraischen Topologie immer wieder hilfreich einen topologischen Raum modulo eines Teilraums zu untersuchen. Im Fall der Homologiegruppen gelangt man so zu den *relativen* Homologiegruppen.

Definition 17.4.1 *Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein nichtleerer, abgeschlossener Teilraum, dann heißt (X, A) ein Raumpaar. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $A \subset X$, $B \subset Y$ und $f(A) \subseteq B$ nennt man eine stetige Abbildung von Raumpaaren $f : (X, A) \to (Y, B)$.*

Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein Teilraum, $C_r(X)$ eine r-Kettengruppe, dann kann man eine relative r-Kettengruppe als die Ketten von X modulo der Ketten von A definieren, genauer gesagt

$$C_r(X, A) := C_r(X)/C_r(A) \ . \tag{17.4.1}$$

Die Elemente von $C_r(X, A)$ sind also die Klassen
$[s_r] := \{s_r + s_{r,A} \,|\, s_r \in C_r(X) \text{ fixiert}, \ s_{r,A} \in C_r(A)\}$.

Der Randoperator $\partial_r : C_r(X) \to C_{r-1}(X)$ wirkt per Definition auf Ketten von A in gleicher Weise $\partial_r : C_r(A) \to C_{r-1}(A)$ wie auf Ketten von X. Damit induziert er einen relativen Randoperator, den wir der Einfachheit halber auch wieder mit ∂_r bezeichnen, also

$$\partial_r : C_r(X, A) \to C_{r-1}(X, A) \ . \tag{17.4.2}$$

Da $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ für $C_r(X)$ und $C_r(A)$ gültig ist, gilt dies auch für die Klassen $[s_r]$, also für $C_r(X, A)$.

Relative r-Zyklen und relative r-Randketten werden dann definiert als:

$$Z_r(X, A) := \{\alpha \,|\, \alpha \in C_r(X), \ \partial_r \alpha \in C_{r-1}(A)\} \ , \tag{17.4.3}$$

$$B_r(X, A) := \{\beta = \partial_{r+1}\gamma + \delta \,|\, \gamma \in C_{r+1}(X), \ \delta = C_r(A)\} \ . \tag{17.4.4}$$

Damit kann man relative Homologiegruppen wie üblich definieren als:

$$H_r(X, A) := Z_r(X, A)/B_r(X, A) = \ker(\partial_r)/\operatorname{im}(\partial_{r+1}) \ . \tag{17.4.5}$$

Das heißt, die Klassen von $H_r(X, A)$ bestehen aus relativen r-Zyklen modulo relativen r-Randketten.

Wenn man jetzt die folgende kurze Sequenz

$$0 \to C_r(A) \xrightarrow{i} C_r(X) \xrightarrow{j} C_r(X,A) \to 0 \tag{17.4.6}$$

betrachtet, dann stellt man fest, daß dies eine kurze exakte Sequenz analog zu 17.3.2 ist, denn die Inklusion $i : C_r(A) \hookrightarrow C_r(X)$ ist injektiv und die Projektion $j : C_r(X) \to C_r(X,A) = C_r(X)/C_r(A)$ ist surjektiv. Wenn man mittels ∂ aus dieser kurzen exakten Sequenz für C_r den entsprechenden kurzen exakten Kettenkomplex macht:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_r(A) & \xrightarrow{i} & C_r(X) & \xrightarrow{j} & C_r(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_{r-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{r-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{r-1}(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

dann entspricht diesem die folgende lange exakte Sequenz der Homologiegruppen (siehe 17.3.3):

$$\ldots \to H_r(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X,A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \to \ldots \to 0 \tag{17.4.7}$$

In diesem konkreten Fall erkennt man auch leicht die Bedeutung des Randoperators $\partial_\bullet : H_r(X,A) \to H_{r-1}(A)$:

$$[\alpha_0] \in H_r(X,A) \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \alpha + \partial_{r+1}\gamma + \delta$$

$$\text{mit } \alpha \in C_r(X),\ \partial_r\alpha \in C_{r-1}(A),\ \gamma \in C_{r+1}(X),\ \delta = C_r(A)\ ,$$

$$\partial_r\alpha_0 = \partial_r\alpha + \partial_r\partial_{r+1}\gamma + \partial_r\delta = (\partial_r\alpha + \partial_r\delta) \in C_{r-1}(A)\ ,$$

d.h. $\partial_{r\bullet}[\alpha_0] = [\partial_r\alpha_0] \in H_{r-1}(A)$.

Beispiel: Wir hatten in 17.2.11 für einen topologischen Raum $P = \{p_0\}$, der nur aus dem Punkt p_0 besteht, gefunden, daß für alle Homologiegruppen mit $r > 0$ gilt: $H_r(P) = 0$. Zusammen mit 17.4.7 ergibt sich für $r > 0$:

$$\ldots \to H_r(P) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X,P) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(P) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \to \ldots \to 0 \quad \text{d.h.}$$

$$\ldots \to 0 \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X,P) \xrightarrow{\partial_\bullet} 0 \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \to \ldots \to 0.$$

Weil diese lange Sequenz exakt ist gilt $\mathrm{im}(i_{r\bullet}) = \ker(j_{r\bullet}) = 0$, und das heißt, daß für $r > 0$ gilt:

$$H_r(X) \simeq H_r(X,P)\ . \tag{17.4.8}$$

□

Wir hatten oben gesehen, daß eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen den topologischen Räumen X und Y Kettenabbildungen $f_{r*} : C_r(X) \to C_r(Y)$ zwischen den entsprechenden r-Kettengruppen induziert, die mit dem Randoperator kommutieren: $f_*\partial = \partial f_*$, oder ausführlicher $f_{r-1*}\partial_r = \partial_r f_{r*}$. Dies läßt sich nun unschwierig auf den Fall der relativen Homologiegruppen verallgemeinern. Sei $f : (X,A) \to (Y,B)$, d.h. $f : X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$, dann folgt aus $f_{r*} : C_r(X) \to C_r(Y)$ auch $f_{r*} : C_r(A) \to C_r(B)$, also gibt es eine wohldefinierte Abbildung zwischen den Quotientenräumen, die wir wieder f_{r*} nennen:

$$f_{r*} : C_r(X)/C_r(A) = C_r(X,A) \to C_r(Y)/C_r(B) = C_r(Y,B)\ . \tag{17.4.9}$$

Eine andere Verallgemeinerung betrifft die Erweiterung von Raumpaaren (X,A) auf Raumtripel (X,A,B) mit $B \subset A \subset X$. Seien i und j die Inklusionen

$$i : (A,B) \hookrightarrow (X,B) \quad \text{und} \quad j : (X,B) \hookrightarrow (X,A)\ , \tag{17.4.10}$$

dann ist

$$0 \to C_r(A,B) \xrightarrow{i_*} C_r(X,B) \xrightarrow{j_*} C_r(X,A) \to 0 \tag{17.4.11}$$

eine kurze exakte Sequenz, denn $i_* : C_r(A)/C_r(B) \to C_r(X)/C_r(B)$ ist injektiv und $j_* : C_r(X)/C_r(B) \to C_r(X)/C_r(A)$ ist surjektiv. Also gibt es eine lange exakte Sequenz der Homologiegruppen (siehe 17.3.3):

$$\ldots \to H_r(A,B) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X,B) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X,A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A,B) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X,B) \to \ldots \tag{17.4.12}$$

Den konkreten Tripel-Randoperator $\partial_\bullet$ kann man aus den Abbildungen der folgenden beiden Homologiesequenzen für (X,A) und (A,B) bestimmen:

$$\ldots \to H_r(A) \xrightarrow{i_{1\bullet}} H_r(X) \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_r(X,A) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_{1\bullet}} H_{r-1}(X) \to \ldots$$

$$\ldots \to H_r(B) \xrightarrow{i_{2\bullet}} H_r(A) \xrightarrow{j_{2\bullet}} H_r(A,B) \xrightarrow{\partial_{2\bullet}} H_{r-1}(B) \xrightarrow{i_{2\bullet}} H_{r-1}(A) \to \ldots .$$

Daraus folgt

$$\partial_\bullet : H_r(X,A) \to H_{r-1}(A,B) \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\bullet = j_{2\bullet} \circ \partial_{1\bullet} : H_r(X,A) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_{r-1}(A) \xrightarrow{j_{2\bullet}} H_{r-1}(A,B)\ . \tag{17.4.13}$$

17.5 Der Homotopiesatz

Wir hatten in 16.4.9 festgestellt, daß die simplizialen Homologiegruppen $H_r(K)$ zweier homöomorpher topologischer Räume zueinander isomorph sind. Jetzt soll gezeigt werden, daß sogar die singulären Homologiegruppen zweier homotop-äquivalenter Räume zueinander isomorph sind. Dies ist einer der Hauptsätze im Gebiet der singulären Homologie.

Das Hilfsmittel zum Beweis des Homotopiesatzes ist die folgende Konstruktion der *Kettenhomotopie*. Die Kettengruppen C und C' und die Ketten-Homomorphismen ∂, f, g mögen einen kommutativen Kettenkomplex bilden. Wenn nun in diesem Kettenkomplex zusätzlich noch ein Homomorphismus $P_r : C_r \to C'_{r+1}$ existiert, dessen Wirkung im Ketten-Diagramm nicht kommutativ ist, sondern die folgende Bedingung erfüllt

$$f \simeq g \quad :\Leftrightarrow \quad \partial P_r(c) + P_{r-1}\partial(c) = f_r(c) - g_r(c) \quad \text{mit } c \in C_r \; , \tag{17.5.1}$$

dann heißen die Ketten-Homomorphismen f und g kettenhomotop.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\partial"] & C_{r+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, "f"', "g"] & C_r \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, "f"', "g"] & C_{r-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, "f"', "g"] & \dots \arrow[dl, "P"'] \\
\dots \arrow[r, "\partial"] & {C'}_{r+1} \arrow[r, "\partial"] & {C'}_r \arrow[r, "\partial"] & {C'}_{r-1} \arrow[r, "\partial"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Diese Kettenhomotopie ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Kettenabbildungen, denn wenn ein P existiert, so daß für beliebige f und g gilt: $f \simeq g$, dann gilt natürlich auch $f \simeq f$ und $g \simeq f$. Die Transitivität sieht man so:

$$f_r, g_r : C_r \to C'_r \quad \text{und} \quad \partial P_r + P_{r-1}\partial = f_r - g_r \quad \Rightarrow$$

$$f'_r : C'_r \to C''_r \quad \Rightarrow \quad f'_r \partial P_r + f'_r P_{r-1}\partial = f'_r \circ (f_r - g_r) \quad \Rightarrow$$

$$\partial f'_{r+1} P_r + f'_r P_{r-1}\partial = f'_r \circ f_r - f'_r \circ g_r \quad \Rightarrow$$

$$(f'_{r+1} P_r) : C_r \to C''_{r+1} \quad \text{mit} \quad f'_r \circ f_r \simeq f'_r \circ g_r \; .$$

Und ebenso:

$$f'_r, g'_r : C'_r \to C''_r \quad \text{und} \quad \partial P'_r + P'_{r-1}\partial = f'_r - g'_r \; ,$$

$$g_r : C_r \to C'_r \quad \Rightarrow \quad \partial P'_r g_r + P'_{r-1}\partial g_r = (f'_r - g'_r) \circ g_r \quad \Rightarrow$$

$$\partial P'_r g_r + P'_{r-1} g_{r-1}\partial = f'_r \circ g_r - g'_r \circ g_r \quad \Rightarrow$$

$$(P'_r g_r) : C_r \to C''_{r+1} \quad \text{mit} \quad f'_r \circ g_r \simeq g'_r \circ g_r \ .$$

Damit existiert ein $\tilde{P}_r := (f'_{r+1} P_r + P'_r g_r) : C_r \to C''_{r+1}$ mit

$$\partial \tilde{P}_r + \tilde{P}_{r-1} \partial = f'_r \circ f_r - f'_r \circ g_r + f'_r \circ g_r - g'_r \circ g_r = f'_r \circ f_r - g'_r \circ g_r \quad \Rightarrow$$

$$f'_r \circ f_r \simeq g'_r \circ g_r \ .$$

Warum interessiert man sich überhaupt für einen solchen Operator P, der eine Äquivalenzrelation unter den Kettenabbildungen $f, g : C \to C'$ vermittelt?

Lemma 17.5.1 *1. Sei $c \in C_r$ ein Zyklus für den die Bedingung der Kettenhomotopie*

$$\partial P_r(c) + P_{r-1} \partial(c) = \partial P_r(c) = f_r(c) - g_r(c)$$

erfüllt sei, dann gilt

$$f \simeq g \quad \Rightarrow \quad f_\bullet = g_\bullet : H_r(C) \to H_r(C') \ .$$

2. Man spricht von Kettenhomotopie-Äquivalenz, wenn es für beliebige $f : C \to C'$ eine homotopie-inverse Kettenabbildung $g : C' \to C$ gibt, d.h. wenn gilt

$$g \circ f \simeq \mathbb{1}_C \quad \textit{und} \quad f \circ g \simeq \mathbb{1}_{C'} \ .$$

Eine homotopie-äquivalente Abbildung f induziert eine isomorphe Abbildung $f_\bullet$ zwischen den entsprechenden Homologiegruppen, d.h. $f_\bullet : H_r(C) \to H_r(C')$ ist isomorph.

Beweis. 1. Sei $c \in C_r$ ein Zyklus, dann ist ja $\partial c = 0$, und dann wird aus der Bedingung für die Kettenhomotopie

$$\partial P_r(c) = f_r(c) - g_r(c) \ ,$$

d.h. $f_r(c) - g_r(c)$ ist ein Rand.
Also gilt für die Homologieklassen in $H_r(C') = Z_r(C')/B_r(C')$ in C' die Gleichheit $[f_r(c)] = [g_r(c)]$. Und das bedeutet

$$f \simeq g \quad \Rightarrow \quad f_\bullet = g_\bullet : H_r(C) \to H_r(C') \ .$$

2. Jetzt gebe es für $f : C \to C'$ eine homotopie-inverse Abbildung, d.h. es existiere ein $g : C' \to C$ mit

$$g \circ f \simeq \mathbb{1}_C \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \mathbb{1}_{C'} \ .$$

Daraus folgt

$$g \circ f \simeq \mathbb{1}_C \quad \Rightarrow \quad (g \circ f - \mathbb{1}_C) \text{ ist Rand} \quad \Rightarrow$$

$$[g \circ f]_C = [\mathbb{1}]_C \quad \Rightarrow \quad (g \circ f)_\bullet H_r(C) = (g_\bullet \circ f_\bullet) H_r(C) = H_r(C) \quad \Rightarrow$$

$$f_\bullet \text{ ist injektiv }, \quad g_\bullet \text{ ist surjektiv },$$

und ebenso

$$f \circ g \simeq \mathbb{1}_{C'} \quad \Rightarrow \quad (f \circ g - \mathbb{1}_{C'}) \text{ ist Rand} \quad \Rightarrow$$

$$[f \circ g]_{C'} = [\mathbb{1}]_{C'} \quad \Rightarrow \quad (f \circ g)_\bullet = (f_\bullet \circ g_\bullet) H_r(C') = H_r(C') \quad \Rightarrow$$

$$g_\bullet \text{ ist injektiv }, \quad f_\bullet \text{ ist surjektiv }.$$

Also ist $f_\bullet = g_\bullet^{-1}$ ein Isomorphismus. □

Satz 17.5.2 (Homotopiesatz) *Seien X und Y zwei topologische Räume und $f, g : X \to Y$ zwei stetige, homotope Abbildungen, $f_*, g_* : C_r(X) \to C_r(Y)$ die entsprechenden homotopen Kettenabbildungen. Dann induzieren f und g, bzw. f_* und g_*, den gleichen Homomorphismus $f_\bullet = g_\bullet : H_r(X) \to H_r(Y)$ zwischen den entsprechenden Homologiegruppen.*

Wenn $f : X \to Y$ eine Kettenhomotopie-Äquivalenz ist, d.h. wenn zur Kettenabbildung f_* die homotopie-inverse Kettenabbildung f_*^{-1}gibt, dann ist $f_\bullet : H_r(X) \to H_r(Y)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Wir folgen hier dem Beweis von Hatcher (2001), S. 110 ff., weil er etwas 'geometrischer' ist, als der entsprechende Beweis von Stöcker u. Zieschang (1994). Die Idee dieses Beweises ist es, von einem einfachen Simplex $\overline{\Delta_r}$ zunächst zu dem Produktraum $\overline{\Delta_r} \times I$ mit $I = [0, 1]$ überzugehen und dann diesen Produktraum in $(r+1)$ abgeschlossene Simplexe zu unterteilen, die nur Simplexflächen miteinander teilen.

1. Sei also $\overline{\Delta_r} \times I$ gegeben mit

$$\overline{\Delta_r} \times \{0\} := [v_0, \dots, v_r] \quad \text{und} \quad \overline{\Delta_r} \times \{1\} := [w_0, \dots, w_r] ,$$

und so daß die $\{v_i\}$ und die $\{w_i\}$ unter der Projektion $\overline{\Delta_r} \times I \to \overline{\Delta_r}$ das gleiche Bild haben, kurz gesagt also, daß alle w_i über v_i liegen. Jetzt kann man in $\overline{\Delta_r} \times I$ die folgenden Simplexe bilden

$$\Delta_{r,i} := [v_0, v_1, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_r] .$$

Nun hat $\Delta_{r,i}$ ja die folgende eindeutige Darstellung

$$\Delta_{r,i} = \{p \in \mathbb{R}^m \mid p = \sum_{k=0}^{i} c_k v_k + \sum_{k=i}^{r} c_{k+1} w_k , \quad \sum_{k=0}^{r+1} c_k = 1 , \ c_k \geq 0\} .$$

Damit kann man die folgende 'Höhenfunktion' auf den $\Delta_{r,i}$ definieren:

$$\varphi_{r,i} : \Delta_{r,i} \to I \quad \text{mit} \quad \varphi_{r,i}(\Delta_{r,i}) := \sum_{i+1}^{r} c_i \ .$$

Für die verschiedenen r-Simplexe $\Delta_{r,i}$ erhalten wir also diese Folge von Höhen

$$0 = \varphi_{r,r} \leq \varphi_{r,r-1} \leq \ldots \leq \varphi_{r,0} \leq \varphi_{r,-1} = 1 \ .$$

Zwischen den r-Simplexen $\Delta_{r,i}$ und $\Delta_{r,i-1}$ mit $\varphi_{r,i} \leq \varphi_{r,i-1}$ können wir nun den folgenden $(r+1)$-Simplex konstruieren

$$\Delta_{r+1,i} := [v_0, v_1, \ldots, v_i, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_r] \ .$$

All diese $(r+1)$ verschiedenen $\Delta_{r+1,i}$ sind nach Konstruktion bis auf gemeinsame Simplex-Seiten disjunkt, denn: sei p ein gemeinsamer Punkt von $\mathring{\Delta}_{r+1,i}$ und $\mathring{\Delta}_{r+1,j}$, mit $i \neq j$, dann gilt für p

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^{i-1} c_k v_k + c_i v_i + c_{i+1} w_i + \sum_{k=i+1}^{r} c_{k+1} w_k \\ &\overset{!}{=} \sum_{k=0}^{j-1} d_k v_k + d_j v_j + d_{j+1} w_j + \sum_{k=j+1}^{r} d_{k+1} w_k \ , \end{aligned}$$

$$\text{mit} \ \sum_{k=0}^{r+1} c_k = 1 \ , \ c_k > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{r+1} d_k = 1 \ , \ d_k > 0 \ .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellungen sind alle $c_k = d_k$, mit Ausnahme von $c_i, c_{i+1}, d_j, d_{j+1}$ und damit folgt

$$c_i v_i + c_{i+1} w_i = d_j v_j + d_{j+1} w_j$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da für $i \neq j$ die Strecken $\overline{v_i w_i}$ und $\overline{v_j w_j}$ disjunkt sind, also haben $\mathring{\Delta}_{r+1,i}$ und $\mathring{\Delta}_{r+1,j}$ keinen gemeinsamen Punkt p.

Da die $\varphi_{r,i}$ eine Zerlegung der 1 erzeugen, füllen die $\Delta_{r+1,i}$ auch $\overline{\Delta_r} \times I$ vollständig aus.

2. Der Gedanke ist nun, von $\overline{\Delta_r}$ überzugehen zu $\overline{\Delta_r} \times I$, dieses als Summe der $\Delta_{r+1,i}$ zu betrachten und hierauf die Homotopie zu erklären und zu untersuchen.

Sei s_r ein singulärer Simplex, also

$$s_r : \overline{\Delta_r} \to X \ , \quad \overline{\Delta_r} = [v_0, \ldots, v_r] \ ,$$

dann soll mit $s_r \,|\, \overline{\Delta_r} = s_r \,|\, [v_0, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_r]$ die Einschränkung von s_r auf $\overline{\Delta_r}$ bezeichnet werden. Weiter sei eine Homotopie $F : X \times I \to Y$ gegeben, d.h. $F(x, 0) := f(x)$ und $F(x, 1) := g(x)$.

$$F \circ (s_r \times \mathbb{1}) : \overline{\Delta_r} \times I \to F(X \times I) = Y \ ,$$

Mit Hilfe der Homotopie F wird nun der Prisma-Operator definiert als $P_r : C_r(X) \to C_{r+1}(Y)$ von der Kettengruppe $C_r(X)$ nach der Kettengruppe $C_{r+1}(Y)$.

$$P_r(s_r \,|\, [v_0, \ldots, v_r]) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, F \circ (s_r \times \mathbb{1}) \,|\, [v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_r] \ .$$

Jetzt soll $\partial P_r + P_{r-1}\partial = g_{*r} - f_{*r}$ gezeigt werden:

$$\begin{aligned}\partial P_r(s_r) = &\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{i} (-1)^i (-1)^j \, F \circ (s_r \times \mathbb{1}) \,|\, [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_r] \\ &+ \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=i}^{r} (-1)^i (-1)^{j+1} \, F \circ (s_r \times \mathbb{1}) \,|\, [v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_r] \ .\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Terme mit $i = j$ und stellen fest, daß sich alle diese Terme mit Ausnahme der beiden Randterme gegenseitig aufheben. Die beiden Randterme sind:

$$\begin{aligned}(-1)^0(-1)^0 \, F \circ (s_r \times \mathbb{1}) \,|\, [\hat{v}_0, w_0, \ldots, w_r] &= F \circ (s_r \times \{1\}) \,|\, [\hat{v}_0, w_0, \ldots, w_r] \\ &= g \circ s_r \,|\, [w_0, \ldots, w_r] = g_*(s_r) \,|\, [w_0, \ldots, w_r] \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^r(-1)^{r+1} \, F \circ (s_r \times \mathbb{1}) \,|\, [v_0, \ldots, v_r, \hat{w}_r] &= -F \circ (s_r \times \{0\}) \,|\, [v_0, \ldots, v_r, \hat{w}_r] \\ &= -f \circ s_r \,|\, [v_0, \ldots, v_r] = -f_*(s_r) \,|\, [v_0, \ldots, v_r] \ .\end{aligned}$$

Für $P_{r-1}\partial(s_r)$ ergibt sich:

$$\partial s_r \,|\, [v_0, \ldots, v_r] = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j s_r \,|\, [v_0, \ldots, \hat{v}_j, v_{j,+1} \ldots, v_r] \ ,$$

$$\begin{aligned}P_{r-1}\partial(s_r) = &\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1} (-1)^j \, F \circ (s_r \times \mathbb{1}) \,|\, [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots v_i, w_i, \ldots, w_r] \\ &+ \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=i+1}^{r} (-1)^i (-1)^j \, F \circ (s_r \times \mathbb{1}) \,|\, [v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_r] \ .\end{aligned}$$

Man würde ja eigentlich bei einem Prisma-Operator P_{r-1} eine Summation $\sum_{i=0}^{r-1}$ erwarten, und das könnte man natürlich leicht durch eine Umsortierung unter Auslassung von $\hat{v}_j$ und $\hat{w}_j$ erreichen. Man nimmt diese Umsortierung hier aber deshalb nicht vor, weil man ja im nächsten Schritt $P_r\partial(s_r)$ mit $\partial P_r(s_r)$ vergleichen möchte. Dabei zeigt sich sofort, daß $-P_{r-1}\partial(s_r)$ gleich den $\partial P_r(s_r)|_{i\neq j}$ Termen ist und damit folgt:

$$\partial P_r(s_r) + P_{r-1}\partial(s_r) = g_{r*}(s_r) - f_{r*}(s_r) \ .$$

Mit dem obigen Lemma zur Kettenhomotopie und einer Umbenennung $f \leftrightarrow g$ folgt die Behauptung. □

Folgerung: Sei $A \subset X$ ein Deformationsretrakt, dann ist die Einbettung $i : A \to X$ ein Isomorphismus, und dann folgt mit dem obigen Homotopie-Satz, daß $i_* : H_r(A) \to H_r(X)$ ein Isomorphismus ist. Wenn also ein topologischer Raum X wegzusammenhängend und damit homotop zu einem Unterraum $A := \{p_0\}$ ist, der nur aus dem Punkt $p_0 \in X$ besteht, dann folgt mit 17.2.11:

$$H_0(X) \simeq H_0(\{p_0\}) = G \ , \quad H_r(X) \simeq H_r(\{p_0\}) = \emptyset \quad \text{für } r > 0\} \ . \tag{17.5.2}$$

Korollar 17.5.3 *Der obige Homotopiesatz läßt sich auf relative Homologiegruppen verallgemeinern:*

seien X und Y zwei topologische Räume und $f, g : X \to Y$ zwei homotope Abbildungen, seien weiter $A \subset X$, $B \subset Y$ mit $f, g : A \to B$, dann induzieren f und g den gleichen Homomorphismus $f_\bullet = g_\bullet : H_r(X, A) \to H_r(Y, B)$ zwischen den entsprechenden relativen Homologiegruppen.

Beweis. Wenn man sich den obigen Beweis anschaut, dann sieht man, daß die Homotopie $F : X \times I \to Y$ mit $F(x, 0) := f(x)$ und $F(x, 1) := g(x)$ in gleicher Weise auch für die Einschränkung $F : A \times I \to B$ gilt. Daher läßt sich auch der Prisma-Operator $P_r : C_r(X) \to C_{r+1}(Y)$ auf $P_r : C_r(A) \to C_{r+1}(B)$ einschränken. Nun kann man eine neue Homotopie $\tilde{F} : (X/A) \times I \to (Y/B)$ mit $\tilde{F}(x, 0) := f(x)$ und $\tilde{F}(x, 1) := g(x)$ und einen neuen Prisma-Operator

$$\tilde{P}_r : C_r(X, A) = C_r(X)/C_r(A) \to C_{r+1}(Y, B) = C_{r+1}(Y)/C_{r+1}(B)$$

definieren und damit den Beweis $f_\bullet = g_\bullet : H_r(X, A) \to H_r(Y, B)$ wie oben führen. □

Wir hatten im obigen Homotopiesatz gesehen, daß die homotopen Kettenabbildungen $f_*, g_* : C_r(X) \to C_r(Y)$ den gleichen Homomorphismus $f_\bullet = g_\bullet : H_r(X) \to H_r(Y)$ zwischen den entsprechenden Homologiegruppen induzieren. Zentral für den Beweis war, daß man für die homotopen Kettenabbildungen f_*, g_* einen Operator $P_r : C_r \to C'_{r+1}$ mit

$$\partial P_r(c) + P_{r-1}\partial(c) = f_{r*}(c) - g_{r*}(c) \quad \text{mit } c \in C_r$$

konstruieren konnte. Stöcker u. Zieschang (1994) nutzen eine verwandte, aber rein algebraische Konstruktion, die nicht nur für den Beweis des Homotopiesatzes geeignet ist, sondern sich auch sehr schön beim Beweis des unten folgenden Ausschneidungssatzes anwenden läßt. Diese Aussage stellen wir im folgenden Lemma vor.

Lemma 17.5.4 *Seien $f_*, g_* : C(X) \to C(X \times I)$ sog. natürliche Kettenabbildungen, d.h. Kettenabbildungen für welche das folgende Diagramm für jede stetige Funktion $h : X \to Y$ kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r, "f_*", "g_*"'] \arrow[d, "h_*"'] & C(X\times I) \arrow[d, "(h\times\mathbb{1})_*"] \\ C(Y) \arrow[r, "f_*", "g_*"'] & C(Y\times I) \end{tikzcd}$$

Weiter gelte $f_\bullet = g_\bullet : H_0(X) \to H_0(X \times I)$ und $f_\bullet = g_\bullet : H_0(Y) \to H_0(Y \times I)$, dann sind f_* und g_* kettenhomotop, d.h. dann existiert ein natürlicher Homomorphismus $Q_r : C_r(X) \to C_{r+1}(X \times I)$ mit

$$\partial_{r+1} Q_r + Q_{r-1}\partial_r = f_* - g_* \quad \mathit{auf}\, C_r(X) \ .$$

Beweis. Der Beweis konstruiert zunächst Operatoren $Q_r : C_r(\overline{\Delta_r}) \to C_{r+1}(\overline{\Delta_r} \times I)$ mittels Induktion auf gewöhnlichen Simplexen $\overline{\Delta_r}$ und erweitert dann das Ergebnis mittels $s_r : \overline{\Delta_r} \to X$ auf X.

$$\begin{tikzcd} C_r(\overline{\Delta_r}) \arrow[r, "Q_r"] \arrow[d, "s_{r*}"'] & C_{r+1}(\overline{\Delta_r}\times I) \arrow[d, "(s_r\times\mathbb{1})_*"] \\ C_r(X) \arrow[r, "Q_r"] \arrow[d, "h_*"'] & C_{r+1}(X\times I) \arrow[d, "(h\times\mathbb{1})_*"] \\ C_r(Y) \arrow[r, "Q_r"] & C_{r+1}(Y\times I) \end{tikzcd}$$

Für $r < 0$ setzen wir $Q_r := 0$. Nun nehmen wir an, daß für alle $j < r$ die Q_j bereits konstruiert seien. Wir beginnen mit dem einfachen simplizialen Fall $X = \overline{\Delta_r}$. Sei $\varphi := f_* - g_*$. Gesucht wird ein Q_r mit

$$Q_r(\overline{\Delta_r}) = c_{r+1} \in C_{r+1}(\overline{\Delta_r} \times I) \quad \text{mit} \quad \partial_{r+1} c_{r+1} = -Q_{r-1}\partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r}) \ .$$

Für den Induktionsanfang $r = 0$ gilt nach Voraussetzung für die Klasse $[\varphi(\overline{\Delta_0})]$

$$[0] = [f_\bullet((\overline{\Delta_0})) - g_\bullet((\overline{\Delta_0}))] = [\varphi(\overline{\Delta_0})] \in H_0(\overline{\Delta_0} \times I) \quad \text{und}$$

$$c_0 := \varphi(\overline{\Delta_0}) \in [0] \quad \Rightarrow \quad c_0 \in Z_0(\overline{\Delta_0} \times I) \text{ und } c_0 \in B_0(\overline{\Delta_0} \times I) \ ,$$

also gibt es ein $c_1 \in C_1(\overline{\Delta_0} \times I)$ mit $\partial_1 c_1 = c_0$, also ist c_0 Zyklus und Rand.

Für $r > 0$ ist $C_{r+1}(\overline{\Delta_r} \times I)$ eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^{r+2}$ und also azyklisch, d.h. jeder Zyklus $c_r \in Z_r(\overline{\Delta_r} \times I)$ ist auch Rand. Um

$$\partial_{r+1} c_{r+1} = -Q_{r-1}\partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r})$$

induktiv zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß die rechte Seite, die wir c_r nennen wollen,

$$c_r := -Q_{r-1}\partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r})$$

ein Zyklus ist, und das sieht man folgendermaßen:

$$\text{nach Induktionsannahme gilt :} \quad \partial_r Q_{r-1} + Q_{r-2}\partial_{r-1} = \varphi \quad \Rightarrow$$

$$\partial_r(-Q_{r-1}\partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r})) = -(\varphi - Q_{r-2}\partial_{r-1})\partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi\partial_r(\overline{\Delta_r}) = 0 \ .$$

Jetzt soll $Q_r : C_r(\overline{\Delta_r}) \to C_{r+1}(\overline{\Delta_r} \times I)$ mittels $s_r : \overline{\Delta}_r \to X$ verallgemeinert werden auf $Q_r : C_r(X) \to C_{r+1}(X \times I)$. Sei also $c_r \in Z_r(\overline{\Delta_r} \times I)$ ein Zyklus, der zugleich Rand ist, d.h. es gibt ein $c_{r+1} \in C_{r+1}(\overline{\Delta_r} \times I)$ mit $\partial_{r+1} c_{r+1} = c_r$. Dann definiert man

$$s_r \times \mathbb{1} : \overline{\Delta}_r \times I \to X \times I \ ,$$

$$Q_r(s_r) := (s_r \times \mathbb{1})_*(c_{r+1}) \ .$$

Es bleibt zu zeigen, daß dieses Q_r auch tatsächlich eine Kettenhomotopie ist.

$$\begin{aligned}
\partial_{r+1} Q_r(s_r)(\overline{\Delta_r}) &= \partial_{r+1}(s_r \times \mathbb{1})_*(c_{r+1}) = (s_r \times \mathbb{1})_*(\partial_{r+1} c_{r+1}) \\
&= (s_r \times \mathbb{1})_*(c_r) = (s_r \times \mathbb{1})_*(-Q_{r-1}\partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r})) \\
&= -Q_{r-1} s_r \partial_r(\overline{\Delta_r}) + s_r\varphi(\overline{\Delta_r}) = -Q_{r-1}\partial_r s_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi s_r(\overline{\Delta_r}) \\
&= -Q_{r-1}\partial_r s_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi s_r(\overline{\Delta_r}) \quad \Rightarrow \\
\partial_{r+1} Q_r(s_r) &= -Q_{r-1}\partial_r s_r + \varphi s_r \ .
\end{aligned}$$

□

17.6 Der Ausschneidungssatz

Neben dem Homotopiesatz ist der Ausschneidungssatz der zweite grundlegende und wichtige Satz in der Theorie der singulären Homologiegruppen. Wir folgen wieder Stöcker u. Zieschang (1994) (S. 227 ff.).

Satz 17.6.1 (Ausschneidungssatz) *Seien $U \subset A \subset X$ topologische Räume, wobei die Abschießung von U im Innern von A liegen möge, d.h. $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, dann induziert die Abbildung $i : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen $i_\bullet : H_r(X \setminus U, A \setminus U) \to H_r(X, A)$.*

Nun gilt auf $X = A \cup (X \setminus U)$ für singuläre Ketten im Gegensatz zu simplizialen Ketten, daß diese i.A. nicht die Summe zweier Ketten auf A und $X \setminus U$ sind. Jedoch ist es möglich, durch mehrfache baryzentrische Unterteilung der singulären Ketten zu der gewünschten Additivität für singulären Ketten zu gelangen. Daher stützt sich der Beweis des Ausschneidungssatzes ganz wesentlich auf die baryzentrische Unterteilung (siehe Kapitel 16.3). Der Vorbereitung des Beweises dienen einige Definitionen und Lemmata.

Definition 17.6.2 *Sei $\overline{\Delta_r} = [e_0, \ldots, e_r]$ ein abgeschlossener r-dimensionaler Simplex und $C_r(\overline{\Delta_r})$ eine simpliziale r-Kettengruppe, dann definiert man eine baryzentrische Unterteilungskette $u_r \in C_r(\overline{\Delta_r})$ rekursiv als*

$$p_r := \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} e_i \ , \quad \textit{Schwerpunkt der } e_i \ ,$$

$$u_0 := e_0 \ , \quad u_r := p_r * \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (\delta^i_{r-1})_* u_{r-1} \quad \textit{für } r \geq 1 \ .$$

Dabei ist wie oben (17.2.6) δ^i_{r-1} die Abbildung eines $(r-1)$-Standardsimplex $\overline{\Delta_{r-1}} = [p_0 p_1 \ldots p_{r-1}]$ auf die i-te Randseite von $\overline{\Delta_r}$, also auf $\overline{\Delta^i_{r-1}} = [p'_0 p'_1 \ldots \hat{p}'_i \ldots p'_r]$ und $(\delta^i_{r-1})_* : C_{r-1}(\overline{\Delta_{r-1}}) \to C_{r-1}(\overline{\Delta_r})$ die Einbettung von u_{r-1} in den 'nächsthöheren Simplex'. $p_r *$ ist die übliche Kegelkonstruktion (17.2.14). Nehmen wir als Beispiel den einfachsten Fall $r = 1$, d.h. die Konstruktion von u_1 aus u_0:

$$p_1 = \frac{1}{2}(e_0 + e_1) \ , \ \overline{\Delta_1} = (e_0, e_1) \ ,$$

$$(\delta^0_0)_* u_0 = (\delta^0_0)_* e_0 = \delta^0_0(e_0, e_1) = (\hat{e_0}, e_1) = e_1 \ ,$$

$$(\delta^1_0)_* u_0 = (\delta^1_0)_* e_0 = \delta^1_0(e_0, e_1) = (e_0, \hat{e_1}) = e_0 \ ,$$

$$u_1 = p_1 * e_1 - p_1 * e_0 \ .$$

Man transportiert also u_0 auf die Seite von $\overline{\Delta_1}$ und bildet dann den Kegel über den unterteilten Rand mit der Kegelspitze p_1.

Als nächstes überträgt man diese baryzentrische Unterteilung von einfachen Simplexen auf singuläre Simplexe und definiert mittels der baryzentrischen Unterteilungskette einen Unterteilungsoperator.

Definition 17.6.3 *Seien die Abbildung $s_r : \overline{\Delta_r} \to X$ ein singulärer Simplex, $c = \sum_k g_k s_{r,k} \in C_r(X)$ mit $g_k \in G$ eine r-Kette und $u_r \in C_r(\overline{\Delta_r})$ eine baryzentrische Unterteilungskette. Dann heißt die lineare Abbildung $B : C_r(X) \to C_r(X)$ mit*

$$B(c) := \sum_k g_k B(s_{r,k}) \quad mit \quad B(s_r) := s_{r*}(u_r)$$

ein Unterteilungsoperator.

Dabei ist $B(s_0) = s_{0*}(u_0) = s_{0*}(e_0) = s_0$, also $B = \mathbb{1}_0$ auf $C_0(X)$.

Einige Eigenschaften dieses Unterteilungsoperators faßt das folgende Lemma zusammen.

Lemma 17.6.4
1. $f : X \to Y \;\Rightarrow\; f_* B = B f_*$, 2. $\partial_r B = B \partial_r$, 3. $B \simeq \mathbb{1} : C(X) \to C(X)$.

Beweis. 1. $s_r : \overline{\Delta_r} \to X \;\Rightarrow\; f_* B(s_r) = f_* s_{r*}(u_r) = (f s_r)_*(u_r) = B(f s_r) = B f_*(s_r)$.
2. Für $r = 0$ ist $\partial_0 = 0$. Für $r = 1$ und $s_1 : \overline{\Delta_1} \to X$ gilt mit $B = \mathbb{1}_0$ auf $C_0(X)$:

$$\partial_1 B(s_1) = \partial_1 s_{1*}(u_1) = s_{1*}(\partial_1 u_1) = s_{1*}(e_1 - e_0) = s_{1*}(e_1) - s_{1*}(e_0) = \partial_1 s_1 = B(\partial_1 s_1) \ .$$

Für $r \geq 2$ soll ein Induktionsbeweis geführt werden. Es gelte also $\partial_{r-1} B(s_{r-1}) = B \partial_{r-1}(s_{r-1})$. Nun kann man die Abbildung $\mathbb{1}_r : \overline{\Delta_r} \to \overline{\Delta_r}$ als ein singuläres Simplex des topologischen Raums $\overline{\Delta_r}$ auffassen, also $\mathbb{1}_r \in C_r(\overline{\Delta_r})$. Dann gilt für den Rand

$$\partial_r(\mathbb{1}_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (\mathbb{1}_{r-1} \circ \delta^i_{r-1}) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (\delta^i_{r-1}) \ ,$$

$$s_r : \overline{\Delta_r} \to X \quad \Rightarrow \quad s_{r*} : C_r(\overline{\Delta_r}) \to C_r(X) \quad \Rightarrow \quad s_r = s_r \circ \mathbb{1}_r = s_{r*}(\mathbb{1}_r) \ .$$

$$B(\partial_r \mathbb{1}_r) = B(\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \mathbb{1}_{r-1}(\delta^i_{r-1})) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (\delta^i_{r-1}) u_{r-1} \quad \Rightarrow$$

$$u_r = p_r * B(\partial_r \mathbb{1}_r) \ .$$

Damit folgt für $\partial_r B(s_r)$:

$$\partial_r B(s_r) = \partial_r s_{r*}(u_r) = s_{r*}(\partial_r u_r) = s_{r*}(\partial_r (p_r * B(\partial_r \mathbb{1}_r)) \ .$$

Für den Rand des Kegels folgt mit 17.2.16:

$$\partial_r B(s_r) = s_{r*}(B(\partial_r \mathbb{1}_r) - p_r * \partial_{r-1} B(\partial_r \mathbb{1}_r)) \ .$$

Mit der Induktionsannahme $\partial_{r-1}B = B\partial_{r-1}$ folgt

$$\partial_r B(s_r) = s_{r*}(B(\partial_r \mathbb{1}_r) - p_r * \partial_{r-1}\partial_r B(\mathbb{1}_r)) = s_{r*}(B(\partial_r \mathbb{1}_r)) \ .$$

Mit 1. folgt

$$\partial_r B(s_r \mathbb{1}_r) = B(s_{r*}(\partial_r \mathbb{1}_r)) = B(\partial_r(s_r \mathbb{1}_r)) \quad \Rightarrow \quad \partial_r B = B\partial_r \ .$$

3. Es seien die Inklusion $i : X \hookrightarrow X \times I$ mit $i(x) := (x, 0)$ und die Projektion $p : X \times I \to X$ mit $p(x,t) := x$ gegeben. Aufgrund des Lemmas 17.5.4 gibt es eine Kettenhomotopie $Q_r : C_r(X) \to C_{r+1}(X \times I)$ zwischen den Abbildungen $f_* := i_* \circ B$ und $g_* := i_*$. Diese Kettenhomotopie kann man nun von $C_{r+1}(X \times I)$ mittels p_* nach $C_{r+1}(X)$ projizieren und erhält

$$E_r := p_* \circ Q_r : C_r(X) \to C_{r+1}(X)$$

und damit

$$p_*(\partial_{r+1}Q_r) + p_*(Q_{r-1}\partial_r) = \partial_{r+1}(p_*Q_r) + p_*(Q_{r-1}\partial_r) = p_*(i_* \circ B) - p_*(i_*) \quad \Rightarrow$$

$$\partial_{r+1}E_r + E_{r-1}\partial_r = B - \mathbb{1}_r \quad :\Leftrightarrow \quad B \simeq \mathbb{1}_r \ . \qquad \square$$

Als nächstes möchte man die baryzentrische Unterteilung iterieren:

$$B^k := B \circ B \circ \ldots \circ B \quad \text{mit } k \geq 1 \ .$$

Das folgenden Lemma zeigt, daß für eine Unterraumstruktur $A \subset X$ eine baryzentrische Unterteilung B^k eine singuläre Kette aus $C_r(A)$ wieder nach $C_r(A)$ abbbildet, und ebenso Zyklen aus $Z_r(X)$ relativ zu A, d.h. Zyklen aus $Z_r(X, A)$, wieder auf $Z_r(X, A)$ abgebildet werden.

Lemma 17.6.5 *Sei $A \subset X$ und $k \geq 1$, dann gilt*

1. Sei $c \in C_r(A) \ \Rightarrow \ B^k c \in C_r(A)$,

2. Sei z ein Zyklus relativ A, d.h. $z \in Z_r(X, A)$, dann ist auch $B^k z \in Z_r(X, A)$, und außerdem ist $B^k z$ homolog zu z relativ A, d.h. $[B^k z] = [z] \in H_r(X, A)$.

Beweis. 1. Die Punktmenge der Unterteilungskette $|u_r|$ ist gleich der Punktmenge des Simplex $|\overline{\Delta_r}|$. Also folgt

$$s_r : |\overline{\Delta_r}| \to A \quad \Rightarrow \quad Bs_r = s_{r*}(u_r) \in C_r(A) \quad \Rightarrow$$

$$c \in C_r(A) \quad \Rightarrow \quad Bc \in C_r(A) \ .$$

2. Sei j die Inklusion $j : A \hookrightarrow X$ und sei $E_r : C_r(X) \to C_{r+1}(X)$ wie oben die projizierte Kettenhomotopie $E_r = p_* \circ Q_r$, so folgt mit $j_* E_r = E_r j_*$, daß $j_* E_r : C_r(A) \to C_{r+1}(A)$

gilt. Sei nun $z \in Z_r(X,A)$ ein Zyklus relativ A, dann ist $z = z_1 + z_2$, $z_1 \in C_r(X)$, $z_2 \in C_r(A)$, $\partial_r z = \partial_r z_2 \in C_{r-1}(A)$. Aus der Kettenhomotopie $B \simeq \mathbb{1}_r$ folgt für E_r:

$$\partial_{r+1} E_r z = Bz - z - E_{r-1}\partial_r z \quad \text{und} \quad E_{r-1}\partial_r z \in C_r(A) \quad \Rightarrow$$

$$\partial_r Bz = (\partial_r z + \partial_r E_{r-1}\partial_r z) \in C_{r-1}(A) \quad \Rightarrow \quad Bz \in Z_r(X,A)\ .$$

Weiter gilt

$$Bz = z + \partial_{r+1}E_r z + E_{r-1}\partial_r z\ .$$

Nun ist $z \in Z_r(X,A)$ und $E_{r-1}\partial_r z \in C_r(A)$ und damit $(z + E_{r-1}\partial_r z) \in Z_r(X,A)$. Für $\partial_{r+1}E_r z = \partial_{r+1}(E_r z_1 + E_r z_2)$ folgt $\partial_{r+1}E_r z_1 \in \partial_{r+1}C_{r+1}(X) = B_r(X)$ und $\partial_{r+1}E_r z_2 \in C_r(A)$, also ist $\partial_{r+1}E_r z \in B_r(X,A)$. Also ist $[Bz] = [z] \in H_r(X,A)$, d.h. Bz ist homolog zu z relativ A. □

Zentral für den Ausschneidungssatz ist das folgende Lemma, das zeigt, daß aus $X = U \cup V$ für jede singuläre Kette $c \in C_r(X)$ gilt $B^r c = u + v$ mit $u \in C_r(U)$ und $v \in C_r(V)$, wenn man nur bis zu einem entsprechend hohen Wert von $k \geq 1$ der baryzentrischen Unterteilung geht.

Lemma 17.6.6 *Seien U und V eine offene Überdeckung von X, d.h. $X = U \cup V$. Dann gibt es für jede singuläre Kette $c \in C_r(X)$ ein $k \geq 1$, so daß $B^k c = u + v$ mit $u \in C_r(U)$ und $v \in C_r(V)$.*

Beweis. Wegen der Additivität in $C_r(X)$ genügt es, dies für einen einzelnen singulären Simplex $s_r : \overline{\Delta_r} \to X$ zu zeigen. U und V bilden eine offene Überdeckung von X und entsprechend $s_r^{-1}(U)$ und $s_r^{-1}(V)$ mit stetigem s_r eine offene Überdeckung von $\overline{\Delta_r}$. Nun liegt $\overline{\Delta_r}$ in $\mathbb{R}^n$ und also in einem metrischen Raum und daher konnten wir im Zusammenhang mit Lemma 16.3.1 eine Metrik $d(\Delta_r)$ definieren und zeigen, daß bei einem einfachen Simplex der Dimension m für die Größe eines Simplex der ersten baryzentrischen Unterteilung gilt

$$d(\Delta_r^{(1)}) \leq \frac{m}{m+1} \max\{d(\Delta_r)\}\ .$$

Wenn man also Δ_r genügend oft baryzentrisch unterteilt, dann kann man für jedes vorgegeben $\epsilon > 0$ die Größe $d(\Delta_r^{(k)}) < \epsilon$ machen - und damit erreichen, daß $\Delta_r^{(k)}$ entweder vollständig in $s_r^{-1}(U)$ oder vollständig in $s_r^{-1}(V)$ liegt.

Nun kann man die Abbildung $\mathbb{1}_r : \overline{\Delta_r} \to \overline{\Delta_r}$ als einen singulären Simplex im topologischen Raum $\overline{\Delta_r}$ auffassen, also $\mathbb{1}_r \in C_r(\overline{\Delta_r})$, und dann ist die singuläre Kette $B^k(\mathbb{1}_r)$ eine Linearkombination über die Abbildungen $t_{l,r} : \overline{\Delta_{l,r}^{(k)}} \to \overline{\Delta_r}$ der diversen Untersimplizes $\overline{\Delta_{l,r}^{(k)}}$ in $\overline{\Delta_r}$ der k-ten baryzentrischen Unterteilung:

$$B^k(\mathbb{1}_r) = \sum_l g_l t_{l,r} \quad \text{mit } t_{l,r}(\overline{\Delta_r}) = \overline{\Delta_{l,r}^{(k)}}\ ,\ g_l \in G\ .$$

Für jedes Glied dieser Summe gilt $d(\Delta_{l,r}^{(k)}) < \epsilon$ und damit liegen die einzelnen Glieder von $B^k(\mathbb{1}_r)$ entweder in $s_r^{-1}(U)$ oder in $s_r^{-1}(V)$. Jetzt wendet man B^k statt auf $\mathbb{1}_r$ auf s_r an und erhält

$$B^k(s_r) = B^k(s_r \mathbb{1}_r) = s_{r*} B^k(\mathbb{1}_r) = s_{r*}(\sum_l g_l t_{l,r}) = \sum_l g_l s_r(t_{l,r}) \ ,$$

dessen einzelne Glieder also U oder in V liegen. Somit ist $B^k c = u + v$ mit $u \in C_r(U)$ und $v \in C_r(V)$. □

Mit Hilfe der obigen drei Lemmata kann man nun den für die singuläre Homologie so wichtigen Ausschneidungssatz beweisen, den wir oben schon formuliert haben.

Beweis. (Ausschneidungssatz) Seien $U \subset A \subset X$, $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ und $i_\bullet : H_r(X \setminus U, A \setminus U) \to H_r(X, A)$. Zu zeigen ist, daß die $i_\bullet$ Isomorphismen, also surjektiv und injektiv sind.

1. i_* surjektiv: es soll also gezeigt werden, daß es für jedes $\alpha \in H_r(X, A)$ ein $\beta \in H_r(X \setminus U, A \setminus U)$ gibt mit $\alpha = i_\bullet(\beta)$. Seien $\alpha \in H_r(X, A)$ und $z \in Z_r(X, A)$ ein Zyklus relativ A, d.h. $z \in C_r(X)$ mit $\partial_r z \in C_{r-1}(A)$, und sei weiter z aus der Klasse α, d.h. $\alpha = [z]_{(X,A)}$. Dann kann man mittels 17.6.4 solange baryzentrisch unterteilen, bis man $B^k z = a + x$ mit $a \in C_r(\overset{\circ}{A})$ und $x \in C_r(X \overset{\circ}{\setminus} U)$ erreicht. Mit 17.6.5 folgt, daß mit $z \in Z_r(X, A)$ auch $B^k z \in Z_r(X, A)$ ist und relativ A homolog zu z ist, d.h.

$$\alpha = [z]_{(X,A)} \simeq [B^k z]_{(X,A)} \ .$$

Mit $B^k z \in Z_r(X, A)$ ist dann auch $x \in Z_r(X, A)$, und wegen $\partial_r z \in C_{r-1}(A)$ gilt für $\partial_r x$, den Rand von x:

$$\partial_r x \in C_{r-1}(X \setminus U) \quad \text{und} \quad \partial_r x = \partial_r B^k z - \partial_r a \in C_{r-1}(A) \quad \Rightarrow \quad \partial_r x \in C_{r-1}(A \setminus U) \ .$$

Also ist $x \in C_r(X \overset{\circ}{\setminus} U) \subset C_r(X \setminus U)$ ein Zyklus relativ zu $A \setminus U$. Es gibt also für jedes $\alpha \in H_r(X, A)$ eine Klasse $\beta := [x]_{(X,A)} \in H_r(X \setminus U, A \setminus U)$ mit $\alpha \simeq [x]_{(X,A)} = \beta$, bzw. $\alpha = i_\bullet(\beta)$.

2. $i_\bullet$ injektiv: es soll gezeigt werden, daß aus $\beta \in H_r(X \setminus U, A \setminus U)$ mit $i_\bullet(\beta) = 0$ folgt $\beta = 0$. Sei $z \in Z_r(X \setminus U, A \setminus U)$ ein Zyklus relativ $A \setminus U$ mit $\beta = [z]_{(X \setminus U, A \setminus U)}$. Jetzt ist $\alpha = i_\bullet(\beta) \in H_r(X, A)$. Die Klasse $\alpha = 0 \in H_r(X, A)$ besteht aus relativen Zyklen aus $Z_r(X, A)$, die gleichzeitig relative Randketten aus $B_r(X, A)$ sind. Also gibt es für das obige $z \in Z_r(X \setminus U, A \setminus U)$ und ein beliebiges $a \in C_r(A)$ ein $c \in C_{r+1}(X)$ mit $\partial_{r+1} c = z + a$. Die Randkette $c \in C_{r+1}(X)$ kann man jetzt baryzentrisch solange unterteilen, bis man $B^k(c) = x + a'$ mit $x \in C_{r+1}(X \overset{\circ}{\setminus} U)$ und $a' \in C_{r+1}(\overset{\circ}{A})$ erreicht ist. Damit folgt für den Rand

$$\partial_{r+1} x + \partial_{r+1} a' = \partial_{r+1} B^k(c) = B^k(\partial_{r+1} c) = B^k z + B^k a \ .$$

Für die Kette

$$y := B^k z - \partial_{r+1} x = \partial_{r+1} a' - B^k a$$

folgt einerseits $y \in C_r(X \setminus U)$, weil $z, \partial_{r+1} x \in C_r(X \setminus U)$, es folgt aber auch andererseits $y \in C_r(A)$, weil $\partial_{r+1} a', a \in C_r(A)$. Daraus folgt $y \in C_r(A \setminus U)$. Wegen $B^k(z) = \partial_{r+1} x + y$ ist also $B^k z$ ein Rand relativ $A \setminus U$, d.h. $B^k z \in B_r(X \setminus U, A \setminus U)$ und damit ist $B^k z$ ein Element der 0-Klasse von $H_r(X \setminus U, A \setminus U)$. Nun sind $B^k z$ und z homolog relativ A, d.h. $\beta = [z]_{(X \setminus U, A \setminus U)} \simeq [B^k z]_{(X \setminus U, A \setminus U)} = 0$. □

Mit Hilfe des Ausschneidungssatzes kann man auch relative Homologie-Gruppen durch absolute Homologie-Gruppen ersetzen. Von diesem Satz wird in vielen Anwendungen Gebrauch gemacht. Wir folgen wieder Hatcher (2001) (S. 124).

Korollar 17.6.7 *Sei (X, A) ein Raumpaar mit $A \subset X$, dann ist*

$$H_r(X, A) \simeq H_r(X/A) \quad \textit{für}\; r > 0 \; . \tag{17.6.1}$$

Beweis. Als erstes konstruiert man über A einen Kegel mit Spitze p:

$$CA := (A \times I)/(A \times \{0\}) \quad \text{mit} \quad A = A \times \{1\} \; , \; p = A \times \{0\} \quad \Leftrightarrow$$

$$CA = \{a \times t + p \mid a \in A, \; t \in [0,1] \in \mathbb{R}, \; \} \; .$$

Dieser Raum CA ist einfach zusammenhängend und damit homotop zu einem Punkt $a_0 \in A$ kontrahierbar. Damit gilt für $r > 0$:

$$H_r(X/A) \simeq H_r(X \cup CA) \; .$$

Mit 17.4.8 und dem Ausschneidungssatz folgt

$$H_r(X \cup CA) \simeq H_r(X \cup CA, CA) \simeq H_r(X \cup CA \setminus \{p\}, CA \setminus \{p\}) \; ,$$

und da $CA \setminus \{p\}$ homotop auf A kontrahiert werden kann folgt also

$$H_r(X/A) \simeq H_r(X, A) \; .$$ □

Mit diesem Ergebnis kann man die lange exakte Sequenz der Homologie-Gruppen 17.4.7 für $r > 0$ jetzt ausschließlich mit absoluten Homologie-Gruppen formulieren:

$$\ldots \to H_r(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X/A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \to \ldots \tag{17.6.2}$$

17.7 Mayer-Vietoris Sequenzen

Neben der obigen, langen exakten Sequenz der Homologie-Gruppen 17.6.2 gibt es eine weitere lange exakte Sequenz von Homologie-Gruppen, die problemlos aus 17.6.2 abgeleitet werden kann und die sich häufig leichter anwenden läßt, die sog. Mayer-Vietoris Sequenz.

Satz 17.7.1 (Meyer-Vietoris) *Seien X ein topologischer Raum (wie oben) und $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$ eine offene Überdeckung von X, d.h. $X = X_1 \cup X_2$, dann gibt es die folgende, lange exakte Sequenz von Homologiegruppen für $r \geq 0$:*

$$\ldots \to H_r(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1 \cap X_2) \to \ldots \tag{17.7.1}$$

Für den Randoperator $\partial_\bullet : H_r(X) \to H_{r-1}(X_1 \cap X_2)$ gilt

$$\partial_\bullet[c] = \begin{cases} [\partial c_1] & \mathit{auf}\, X_1 \; , \\ [\partial c_2] & \mathit{auf}\, X_2 \; . \end{cases} \tag{17.7.2}$$

Beweis. Wir folgen wieder Stöcker u. Zieschang (1994) (S. 231) und Kriegl (2006) (S.102 ff.).

1. Man betrachtet zunächst die Kettenkomplexe $C := C(X)$, $C_1 := C(X_1) \subseteq C(X)$, $C_2 := C(X_2) \subseteq C(X)$. Dann ist $C(X_1 \cap X_2) = C_1 \cap C_2$ und $C_1 + C_2 \subseteq C$ die Summe der Kettenkomplexe C_1 und C_2. Weiter gilt

$$C_1/(C_1 \cap C_2) \simeq (C_1 + C_2)/((C_1 \cap C_2) + C_2) = (C_1 + C_2)/C_2 \; .$$

Die Einbettung $C_1 + C_2 \hookrightarrow C$ induziert eine injektive Einbettung $(C_1 + C_2)/C_2 \hookrightarrow C/C_2$, also ist $C_1/(C_1 \cap C_2) \hookrightarrow C/C_2$ eine injektive Einbettung.

In 17.3.1 hatten wir gesehen, daß die folgende Sequenz

$$0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} 0$$

genau dann exakt ist, wenn j injektiv, k surjektiv und $\ker(k) = \operatorname{im}(j)$ ist. Weiter induziert k einen Isomorphismus $k_\# : B/\operatorname{im}(j) \to C$, und wenn $j : A \hookrightarrow B$ eine Einbettung ist, dann ist $A \simeq \operatorname{im}(j)$ und damit $k_\# : B/A \to C$ ein Isomorphismus. Dies wenden wir jetzt auf unseren obigen Fall an:

$C_1/(C_1 \cap C_2) \hookrightarrow C/C_2$ ist eine injektive Einbettung und

$$C/C_2 \to (C/C_2)/(C_1/(C_1 \cap C_2)) \simeq (C/C_2)/((C_1 + C_2)/C_2) \simeq C/(C_1 + C_2)$$

ist also ein Isomorphismus. Damit ist die folgende Sequenz von Kettenkomplexen eine kurze exakte Sequenz:

$$\emptyset \to C_1/(C_1 \cap C_2) \xrightarrow{j} C/C_2 \xrightarrow{k_\#} C/(C_1 + C_2) \to \emptyset \; . \tag{17.7.3}$$

Dieser kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen entspricht die folgende lange exakte Sequenz von Homologiegruppen

$$\begin{aligned} \ldots \to H_r(X_1, X_1 \cap X_2) &\xrightarrow{i_\bullet} H_r(X, X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, X_1 + X_2) \\ &\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1, X_1 \cap X_2) \to \ldots , \end{aligned} \tag{17.7.4}$$

wobei die Bezeichnungsweise $H(X, X_1 + X_2)$ anzeigen soll, daß die Homologiegruppen H bzgl. ihres Arguments $X_1 + X_2$ aus dem Kettenkomplex $C_1 + C_2 = C(X_1) + C(X_2)$ gebildet wird.

Die beiden Kettenkomplexe $C_1/(C_1 \cap C_2)$ und C/C_2 induzieren die Homologiegruppen $H(X_1, X_1 \cap X_2)$ und $H(X, X_2) = H(X_1 \cup X_2, X_2)$.

Aus dem Ausschneidungssatz 17.6.1 folgt, daß die Inklusion

$$(C_1, C_1 \cap C_2) \hookrightarrow (C, C_2) \quad \text{bzw.} \quad (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X, X_2) = (X_1 \cup X_2, X_2)$$

einen Isomorphismus der entsprechenden Homologiegruppen induziert, d.h.

$$H(X_1, X_1 \cap X_2) \simeq H(X, X_2) \; .$$

Aus diesem Isomorphismus folgt dann mit 17.7.4, daß $H(X, X_1 + X_2) = \emptyset$ ist.

2. Jetzt kann man die folgende Sequenz betrachen

$$\emptyset \to C_1 + C_2 \to C \to C/(C_1 + C_2) \to \emptyset \; . \tag{17.7.5}$$

Wieder ist $C_1 + C_2 \hookrightarrow C$ eine Inklusion und $C \to C/(C_1 + C_2)$ ein Isomorphismus. Aus der entsprechenden langen exakten Sequenz

$$\ldots \to H_r(X_1 + X_2) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, X_1 + X_2) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1 + X_2) \to \ldots . \tag{17.7.6}$$

folgt wegen $H(X, X_1 + X_2) = \emptyset$, daß $H(X_1 + X_2)$ und $H(X)$ isomorph sind, d.h. $H(X_1 + X_2) \simeq H(X)$.

3. Und schließlich betrachtet man die Sequenz

$$\emptyset \to C_1 \cap C_2 \xrightarrow{i} C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{j} C_1 + C_2 \to \emptyset \; , \tag{17.7.7}$$

$$i : c \mapsto (c, -c) \; , \quad j : (c_1, c_2) \mapsto c_1 + c_2 \; .$$

Diese kurze Sequenz ist exakt, denn i ist injektiv und

$$(c_1, c_2) \in \ker(j) \quad \Rightarrow \quad c := c_1 = -c_2 \quad \Rightarrow \quad (c_1, c_2) = (c, -c) \in \mathrm{im}(i) \; .$$

Also ist auch die folgende lange Sequenz von Homologiegruppen exakt

$$\ldots \to H_r(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X_1 + X_2)$$

$$\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1 \cap X_2) \to \ldots ,$$

und wegen $H(X_1 + X_2) \simeq H(X)$ ist dies äquivalent zu

$$\ldots \to H_r(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1 \cap X_2) \to \ldots . \tag{17.7.8}$$

4. zur expliziten Bestimmung des Randoperators $\partial_\bullet$ betrachten wir die kurze exakte Sequenz des Ketten-Komplexes:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \\
0 \arrow[r] & C_r(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & C_r(X_1) \oplus C_r(X_2) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_r(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{r-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & C_{r-1}(X_1) \oplus C_{r-1}(X_2) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{r-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Sei $[c] \in H_r(X)$, dann ist $c = (c_1 + c_2) \in C_r(X)$ ein Zyklus, d.h. $\partial c = 0$. Da die Zeilen im obigen kommutativen Diagramm exakte Sequenzen sind, ist j surjektiv, d.h. es gibt für jedes $c \in C_r(X)$ ein $d \in C_r(X_1) \oplus C_r(X_2)$ mit $j : d \to c$, und zwar $d = (c_1, c_2)$. Es folgt

$$\partial \circ j(d) = \begin{cases} \partial(c) = 0 , \\ j \circ \partial(d) = j(\partial(c_1), \partial(c_2)) = \partial c_1 + \partial c_2 , \end{cases}$$

also $\partial c_1 = -\partial c_2$ auf $C_{r-1}(X)$. Damit existiert ein $e \in C_{r-1}(X_1 \cap X_2)$ mit $i(e) = \partial(d)$. Wegen

$$\partial \circ i(e) = \begin{cases} i(\partial(e)) & \text{und } i \text{ injektiv} \\ \partial^2(d) = 0 \end{cases}$$

folgt $\partial e = 0$, d.h. $[e] \in H_{r-1}(X_1 \cap X_2)$ und damit ist $\partial_\bullet : H_r(X) \to H_{r-1}(X_1 \cap X_2)$

$$\partial_\bullet[c] = \begin{cases} [\partial c_1] & \text{auf } X_1 , \\ [\partial c_2] & \text{auf } X_2 . \end{cases}$$

□

Zwei Beispiele, die auch für sich selbst nützlich sind, mögen hier typische Anwendungen der Mayer-Vietoris Sequenz demonstrieren. Beide Beispiele gehen davon aus, daß gewisse Teilräume $A \subset X$ azyklisch sind, d.h. daß alle Zyklen zugleich auch Ränder sind und damit $H_r(A) = \emptyset$ für $r > 0$ gilt. Dies ist ja etwa für konvexe Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^m$ der Fall (17.2.17).

Beispiel (1):
Seien $X = X_1 \cup X_2$ und $X_1 \cap X_2$ azyklisch, dann folgt $H_r(X) \simeq H_r(X_1) \oplus H_r(X_2)$ für $r > 0$, denn:

$$\emptyset \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} \emptyset \quad \text{für } r > 1 ,$$

und damit ist mit 17.3.1 für $r > 1$:

$$H_r(X) \simeq H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \quad \text{für } r > 1 . \tag{17.7.9}$$

Für den Fall $r = 1$ haben wir die Sequenz:

$$\emptyset \xrightarrow{i_{1\bullet}} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{0\bullet}}$$

$$\xrightarrow{i_{0\bullet}} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{j_{0\bullet}} H_0(X) \xrightarrow{\partial_{0\bullet}} \emptyset .$$

Weil $X_1 \cap X_2$ azyklisch ist, ist $X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend und damit folgt also $H_0(X_1 \cap X_2) = G$. Die Abbildung $H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{0\bullet}} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)$ ist injektiv, da ein Generator $g \cdot z$ mit $g \in G$ und $[g \cdot z] \in H_0(X_1 \cap X_2)$ auf einen Generator $g \cdot z$ mit $([g \cdot z] \oplus [-g \cdot z]) \in H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)$ abgebildet wird. Aus der Exaktheit der Sequenz folgt:

$$\emptyset = \ker(i_{0\bullet}) = \mathrm{im}(\partial_{1\bullet}) , \quad \Rightarrow$$

$$\emptyset \xrightarrow{i_{1\bullet}} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} \emptyset ,$$

und damit ist mit 17.3.1 auch für $r = 1$:

$$H_r(X) \simeq H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \quad \text{für } r = 1 . \tag{17.7.10}$$

□

Beispiel (2):
Seien $X = X_1 \cup X_2$ und X_1, X_2 azyklisch, dann folgt

$$H_{r+1}(X) \simeq H_r(X_1 \cap X_2) \quad \text{für } r > 0 \quad \text{und} \quad H_1(X) \simeq G^{n-1} , \tag{17.7.11}$$

wenn $X_1 \cap X_2$ aus n wegzusammenhängenden Teilmengen besteht, denn:

sei $r > 0$, dann gilt

$$\emptyset \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_{r+1}(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_r(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{0\bullet}} \emptyset\ .$$

und es folgt $H_r(X_1 \cap X_2) \simeq H_{r+1}(X)$ nach 17.3.1.

Sei jetzt $r = 0$, dann gilt

$$H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{0\bullet}}$$

$$\xrightarrow{i_{0\bullet}} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{j_{0\bullet}} H_0(X) \xrightarrow{\partial_{0\bullet}} \emptyset\ .$$

Nun ist $H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) = \emptyset$ und $H_0(X) \simeq G$, da X_1 und X_2 azyklisch sind. Weiter bestehe $X_1 \cap X_2$ aus n wegzusammenhängenden Teilmengen, woraus folgt $H_0(X_1 \cap X_2) \simeq G^n$. Damit ist diese exakte Sequenz isomorph zu folgender exakter Sequenz:

$$\emptyset \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} G^n \xrightarrow{i_{0\bullet}} G^2 \xrightarrow{j_{0\bullet}} G \xrightarrow{\partial_{0\bullet}} \emptyset\ .$$

Wir beginnen die Betrachtung dieser Sequenz auf der rechten Seite:

$$\ker \partial_{0\bullet} = \operatorname{im} j_{0\bullet} = G \quad \Rightarrow \quad \ker j_{0\bullet} = \operatorname{im} i_{0\bullet} = G \quad \Rightarrow$$

$$\ker i_{0\bullet} = \operatorname{im} \partial_{1\bullet} = G^{n-1} \quad \text{und} \quad \ker \partial_{1\bullet} = \operatorname{im} j_{1\bullet} = \emptyset \quad \Rightarrow$$

$$\dim(H_1(X)) = \dim(\ker \partial_{1\bullet}) + \dim(\operatorname{im} \partial_{1\bullet}) = G^{n-1}\ .$$

Also ist $H_1(X) \simeq G^{n-1}$. □

17.8 Kugeln und Kugeloberflächen

Wir hatten im Zusammenhang mit 16.5.5 bereits darauf hingewiesen, daß in der Differentialgeometrie und Differentialtopologie häufig Abbildungen auf abgeschlossene Kugeln (Bälle) D^n oder Kugeloberflächen (Sphären) S^{n-1} vorkommen und daß daher deren Homologiegruppen von besonderer Bedeutung sind. Auch aus physikalischer Sicht sind natürlich Bälle und Sphären, bzw. deren homöomorphe oder diffeomorphe Abbilder ganz wichtig.

Andererseits zeigt es sich immer wieder, daß in der Topologie die Verallgemeinerung von relativ einfachen Aussagen in 2- oder 3-dimensionalen Räumen auf n-dimensionale Räume extrem schwierig sein kann. Im Zusammenhang mit Sphären sei hier nur auf die sog. Poincaré-Vermutung aus dem Jahr 1904 hingewiesen, die erst im Jahr 2002 von Grigori J. Perelman bewiesen werden konnte (Wikipedia-Poincaré-Vermutung (2015)).

Auch wenn wir im Folgenden keinen Gebrauch von der Poincaré-Vermutung machen und natürlich weit, weit von einem Verständnis von Perelmans Beweis entfernt sind, so soll die Aussage der Poincaré-Vermutung hier doch vorgetragen werden.

Satz 17.8.1 (Poincaré-Vermutung) *Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.*

Die Verallgemeinerung auf n Dimensionen lautet:

Jede geschlossene n-Mannigfaltigkeit M mit dem Homotopietyp einer n-Sphäre ist homöomorph zur n-Sphäre, d.h.

$$\pi_k(M) \simeq \pi_k(S^n) \quad \text{für alle } k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad M \simeq S^n \ .$$

Aber nun wieder zu den einfachen und grundlegenden Themen im Zusammenhang mit Sphären.

D^n, Kugeln (Bälle), sind Teilmengen des $\mathbb{R}^n$: $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| \leq 1\}$,
S^{n-1}, Kugeloberflächen (Sphären), sind Teilmengen des $\mathbb{R}^n$: $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| = 1\}$.

Wir hatten für die simplizialen Homologiegruppen der Triangulierungen einer abgeschlossenen Kugel $K(D^n)$ und einer Kugeloberfläche $K(S^{n-1})$ gefunden:

$$H_r(K(D^n)) = 0 \quad \text{für } 0 < r < n \ ,$$

$$H_r(K(S^{n-1})) = 0 \quad \text{für } 0 < r < n-1 \ .$$

Da $K(D^n)$ und $K(S^{n-1})$ zusammenhängend sind, galt auch:

$$H_0(K(D^n)) = H_n(K(D^n)) \simeq G \ , \quad H_0(K(S^{n-1})) = H_{n-1}(K(S^{n-1})) \simeq G$$

mit der abelschen Gruppe G, bei uns $G \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$.

Lemma 17.8.2 *Sei D^n eine abgeschlossene n-dimensionale Kugel und $\partial D^n = S^{n-1}$ die entsprechende Kugeloberfläche (Sphäre), dann gilt*

$$D^n / \partial D^n \simeq S^n \ . \tag{17.8.1}$$

Beweis. Im Quotientenraum $D^n/\partial D^n$ wird die Kugeloberfläche ∂D^n auf einen Punkt abgebildet. Dies sei der Nordpol y_N einer Kugeloberfläche S^n. Das Innere von D^n, also $\mathring{D}^n$, können wir homöomorph auf $S^n \setminus y_N$ abbbilden.

$$D^n := \{x \,|\, x = (x_1, \dots, x_n) \ , \ ||x|| \leq 1\} \ ,$$

$$\mathring{D}^n := \{x \,|\, x = (x_1, \dots, x_n) \ , \ ||x|| < 1\} \ ,$$

$$\partial D^n := \{x \,|\, x = (x_1, \dots, x_n) \ , \ ||x|| = 1\} \ ,$$

$$S^n := \{y \,|\, y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \ , \ ||y|| = 1\} \ .$$

Wir konstruieren eine Abbildung $f : D^n \to S^n$ wie folgt

$$f_0(x) := y_0 := 2||x|| - 1 \; ,$$

$$f_k(x) := y_k := a x_k \quad \text{mit } ||y|| = 1 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n \; .$$

Zunächst sieht man, daß f wie verlangt ∂D^n auf $y_N = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ abbildet. Weiter wird der Mittelpunkt von D^n mit $x = 0$ auf den Südpol von S^n mit $y_S = (-1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ abgebildet, da in diesem Fall $a = 0$ sein muß. Jetzt können wir für Punkte aus $\overset{\circ}{D}{}^n$ den Wert von a, bzw. ax_k, aus der Bedingung $||y|| = 1$ bestimmen:

$$||y||^2 = 4||x||^2 - 4||x|| + 1 + a^2||x||^2 \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow$$

$$(4 + a^2)||x||^2 = 4||x|| \quad \text{für } ||x|| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{4}{||x||^2}(||x|| - ||x||^2)$$

$$a = \frac{2}{||x||}(||x|| - ||x||^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad a x_k = \frac{x_k}{||x||}\, 2(||x|| - ||x||^2)^{1/2} \; . \qquad \square$$

Für $x_k \to 0$ geht auch $ax_k \to 0$. Damit ist $f : \overset{\circ}{D}{}^n \to S^n \setminus y_N$ umkehrbar und ein Homöomorphismus. Auf ∂D^n ist f natürlich kein Homöomorphismus, aber wenn man zum Quotientenraum $D^n/\partial D^n$ übergeht, bei dem ja gerade ∂D^n auf einen Punkt abgebildet wird, hier auf y_N, dann ist $f : D^n/\partial D^n \to S^n$ wieder ein Homöomorphismus.

Wie schon erwähnt, sind für mathematische und physikalische Anwendungen die Homologiegruppen der Kugeloberflächen (Sphären) S^n besonders interessant.

Satz 17.8.3

$$H_r(S^n) = \begin{cases} G & \textit{für } r = n \; , \\ \emptyset & \textit{für } r \neq n \; . \end{cases} \tag{17.8.2}$$

Beweis. Man betrachtet die lange exakte Sequenz der Homologie-Gruppen 17.6.2 für $r > 0$ mit $X = D^n$, $A = \partial D^n = S^{n-1}$ und $X/A = D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$ und erhält

$$\ldots \to H_r(S^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(D^n) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(S^n) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(D^n) \to \ldots$$

Nun ist $H_r(D^n) = 0$ für $r > 0$, da D^n wegzusammenhängend ist, und damit folgt für $r > 0$

$$\ldots \to H_r(S^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} \emptyset \xrightarrow{j_\bullet} H_r(S^n) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} \emptyset \to \ldots$$

Weil diese Sequenz exakt ist, ist $\partial_\bullet : H_r(S^n) \to H_{r-1}(S^{n-1})$ ein Isomorphismus.

1. $r > n > 0$:

$$H_r(S^n) \simeq H_{r-1}(S^{n-1}) \simeq \ldots \simeq H_{r-n}(S^0) = \emptyset \ .$$

2. $n > r > 0$:

$$H_r(S^n) \simeq H_{r-1}(S^{n-1}) \simeq \ldots \simeq H_1(S^{n-r+1}) \simeq H_1(\overset{\circ}{D}{}^{n-.r}) = \emptyset \ .$$

3. $n = r > 0$:

$$H_n(S^n) \simeq H_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \ldots \simeq H_1(S^1) \ .$$

$H_1(S^1)$ bestimmt man am einfachsten mit Hilfe der Mayer-Vietoris Sequenz von 17.7.11. S^1 kann man in die zwei offene Halbkreisbögen $S^1 = D^1_+ \cup D^1_-$ zerlegen. D^1_+ und D^1_- sind jeweils wegzusammenhängend und damit azyklisch und $D^1_+ \cap D^1_- \simeq S^0 = \{x \in \mathbb{R}^1 | \, |x| = 1\} = \{+1, -1\}$. Damit besteht $D^1_+ \cap D^1_-$ aus $n = 2$ wegzusammenhängenden Teilmengen und damit ist nach 17.7.11

$$H_1(S^1) = H_1(D^1_+ \cup D^1_-) \simeq G^1 \quad \Rightarrow$$

$$H_r(S^n) = G \quad \text{für } r = n \ . \qquad \square$$

Für die simplizialen Homologiegruppen hatten wir in 16.6.6 die Aussage $H_m(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq G$ bewiesen. Jetzt soll die gleiche Aussage auch für die singulären Homologiegruppen bewiesen werden.

Satz 17.8.4 *Für $m \geq 0$ gilt*

$$H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq \begin{cases} \emptyset & \text{\textit{für} } r \neq m \ , \\ G & \text{\textit{für} } r = m \ . \end{cases} \tag{17.8.3}$$

Beweis. Sei zunächst $m = 0$, dann ist $\Delta_0 = \{1\}$ und $\partial\Delta_0 = \emptyset$ und damit ist

$$H_r(\Delta_0, \partial\Delta_0) \simeq \begin{cases} G & \text{für } r = 0 \ , \\ \emptyset & \text{für } r > 0 \ . \end{cases}$$

Jetzt sei $m > 0$. Wir betrachten Δ_m und bezeichnen jene Seite, welche gegenüber des Punktes $e_0 \in \Delta_m$ liegt mit Δ^0_{m-1}. Weiter bezeichnen wir mit A_m alle Seiten von Δ_m ohne Δ^0_{m-1}. Wir untersuchen nun die lange exakte Homologiesequenz des Raumtripels $(\Delta_m, \partial\Delta_m, A_m)$ mit $A_m \subset \partial\Delta_m \subset \Delta_m$ (siehe 17.4.12):

$$\ldots \to H_r(\partial\Delta_m, A_m) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(\Delta_m, A_m) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m)$$

$$\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(\partial\Delta_m, A_m) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(\Delta_m, A_m) \to \ldots \ .$$

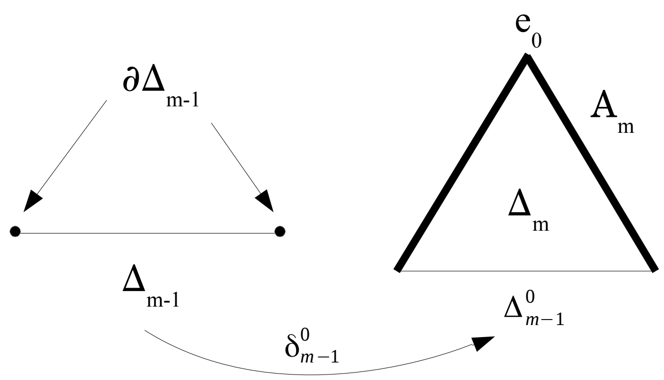

Abbildung 17.1: Bezeichnungen beim Simplex Δ_m

Da A_m ein Deformationsretrakt von Δ_m ist folgt $H_r(\Delta_m, A_m) \simeq H_r(A_m, A_m) = \emptyset$, und daraus folgt

$$H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq H_{r-1}(\partial\Delta_m, A_m) \ . \tag{17.8.4}$$

Nun ist $\Delta_{m-1}/\partial\Delta_{m-1}$ homomömorph zu $\partial\Delta_m/A_m$ und damit sind die entsprechenden Homologiegruppen isomorph, d.h. $H_r(\Delta_{m-1}/\partial\Delta_{m-1}) \simeq H_r(\partial\Delta_m/A_m)$.

Nach 17.6.1 gilt für die Raumpaare $(\Delta_{m-1}, \partial\Delta_{m-1})$ und $(\partial\Delta_m, A_m)$

$$H_r(\Delta_{m-1}, \partial\Delta_{m-1}) \simeq H_r(\Delta_{m-1}/\partial\Delta_{m-1}) \quad \text{für } r > 0 \ ,$$

$$H_r(\partial\Delta_m, A_m) \simeq H_r(\partial\Delta_m/A_m) \quad \text{für } r > 0 \ ,$$

und damit folgt

$$H_r(\Delta_{m-1}, \partial\Delta_{m-1}) \simeq H_r(\partial\Delta_m, A_m) \ . \tag{17.8.5}$$

Aus 17.8.4 und 17.8.5 folgt

$$H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq H_{r-1}(\partial\Delta_m, A_m) \simeq H_r(\Delta_{m-1}, \partial\Delta_{m-1}) \ ,$$

und damit folgt die Behauptung durch vollständige Induktion. □

Da die Homologiegruppen invariant unter Homöomorphismen sind, folgt aus dem obigen Satz sofort das Korollar:

Korollar 17.8.5 *Für $m \geq 0$ gilt*

$$H_r(D^m, S^{m-1}) \simeq \begin{cases} G & \textit{für } r = m \ , \\ \emptyset & \textit{für } r \neq m \ . \end{cases}$$

17.9 Äquivalenz von simplizialer und singulärer Homologie

Einen simplizialen Komplex K hatten wir aus endlich vielen Basis-Simplexen erzeugt und daher war $H_r(K) = 0$ für $r > m$, wenn m die Raumdimension von K ist. Dagegen kann sich ein singulärer Komplex aus einer *sehr großen* Anzahl singulärer Simplexe zusammensetzen, kurzum: die Dimension der r-Kettengruppe $C_r(X)$ eines topologischen Raums X ist überabzählbar. Es ist daher alles andere als trivial, daß die simplizialen und die singulären Homologiegruppen tatsächlich in irgendeiner Weise zueinander isomorph sein könnten!

Es soll jetzt allerdings gezeigt werden, daß diese beiden verschiedenen Homologiegruppen auf einem simplizialen Komplex zueinander isomorph sind. Zur Unterscheidung wollen wir die simplizialen Homologiegruppen hier als $H_r^\Delta(K)$ bezeichnen und die singulären Homologiegruppen als $H_r(K)$. Wir folgen im Beweis Hatcher (2001), S. 128 ff.

Sei K ein endlicher simplizialer Komplex und $A \subset K$ ein Teilkomplex. Es gibt nun einen kanonischen Homöomorphismus $\sigma_r : \Delta_r \to K$, auch *charakteristische Abbildung* genannt, die einen r-Simplex in den simplizialen Komplex K abbildet. Zu jedem simplizialen Kettenkomplex $C_r^\Delta(K, A)$ gibt es also einen entsprechenden singulären Kettenkomplex $C_r(K, A)$, der aus den σ_r gebildet wird und einen entsprechenden induzierten Homomorphismus $H_r^\Delta(K, A) \to H_r(K, A)$. Zu zeigen ist, daß diese Homomorphismen für alle r Isomorphismen sind.

Satz 17.9.1 *Sei K ein endlichdimensionaler simplizialer Komplex, $A \subset K$ ein Teilkomplex, dann sind die Homomorphismen $H_r^\Delta(K, A) \to H_r(K, A)$ für alle r Isomorphismen.*

Beweis. Sei zunächst $A = \emptyset$. Sei weiter K^m das m-Skelett von K, d.h. die Summe aller Simplexe mit einer Dimension $\leq m$. Für die singulären Homologiegruppen können wir mit 17.4.7 die folgende exakte Sequenz aufstellen:

$$H_{r+1}(K^m, K^{m-1}) \to H_r(K^{m-1}) \to H_r(K^m) \to H_r(K^m, K^{m-1}) \to H_{r-1}(K^{m-1}) \ .$$

Das gleiche algebraische Argument, das zur Herleitung dieser exakten Sequenz geführt hat, läßt sich unverändert auf die simplizialen Homologiegruppen anwenden und führt auch dort zu der entsprechenden exakten Sequenz. Damit erhält man das folgende kommutative Diagramm exakter Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{r+1}^\Delta(K^m, K^{m-1}) & \to & H_r^\Delta(K^{m-1}) & \to & H_r^\Delta(K^m) & \to & H_r^\Delta(K^m, K^{m-1}) & \to & H_{r-1}^\Delta(K^{m-1}) \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\
H_{r+1}(K^m, K^{m-1}) & \to & H_r(K^{m-1}) & \to & H_r(K^m) & \to & H_r(K^m, K^{m-1}) & \to & H_{r-1}(K^{m-1})
\end{array}$$

Mittels vollständiger Induktion nach m und dem Fünferlemma (17.3.1) soll jetzt gezeigt werden, daß die Homomorphismen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ tatsächlich Isomorphismen sind. In 16.6.6

wurde für die simplizialen Homologiegruppen gezeigt

$$H_r^\Delta(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq \begin{cases} G & \text{für } r = m\ , \\ \emptyset & \text{für } r \neq m\ , \end{cases}$$

und in 17.8.3 die Entsprechung für die singulären Homologiegruppen:

$$H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq \begin{cases} G & \text{für } r = m\ , \\ \emptyset & \text{für } r \neq m\ . \end{cases}$$

Damit sind die obigen Homomorphismen α und δ Isomorphismen. Nach Induktionsannahme für $m-1$ sind β und ϵ Isomorphismen und wegen des Fünferlemmas ist dann auch $\gamma : H_r^\Delta(K^m) \to H_r(K^m)$ ein Isomorphismus.

Jetzt sei $\emptyset \subset A = K^i \subset K^m$, mit $0 < i < m$, dann können wir mit der langen exakten Sequenz 17.4.7 für das Paar (X, A) das folgende kommutative Diagramm aufstellen:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_r^\Delta(A) & \to & H_r^\Delta(K^m) & \to & H_r^\Delta(K^m, A) & \to & H_{r-1}^\Delta(A) & \to & H_{r-1}^\Delta(K^m) \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow\delta & & \downarrow\epsilon \\ H_r(A) & \to & H_r(K^m) & \to & H_r(K^m, A) & \to & H_{r-1}(A) & \to & H_{r-1}(K^m) \end{array}$$

Die Homomorphismen $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ sind nach dem oben Bewiesenen Isomorphismen, und mitttels des Fünferlemmas (17.3.1) ist dann auch γ eine Isomorphismus. □

17.10 Glatte singuläre Homologiegruppen

Bislang haben wir Homologiegruppen von allgemeinen topologischen Räumen X bzgl. einer additiven freien, abelschen Gruppe G definiert, wobei in der Homologie-Theorie für G zumeist $\mathbb{Z}$ gewählt wird. Wenn man als topologische Räume jedoch differenzierbare Mannigfaltigkeiten M wählt, dann steht einem natürlich sehr viel mehr Struktur als in allgemeinen topologischen Räumen zur Verfügung. In diesem Fall wählt man als freie, abelsche Gruppe G natürlich $\mathbb{R}$ und erhält damit sowohl für G als auch für die r-Kettengruppen $C_r(M;\mathbb{R})$ Vektorräume. De Rham hat 1931 in seiner Doktorarbei gezeigt, daß die so definierten Homologiegruppen zu den (de Rham) Kohomologiegruppen, die wir in einem Folgekapitel betrachten wollen, isomorph sind!

An dieser Stelle wollen wir jetzt die glatten singulären Homologiegruppen $H_r^\infty(M;\mathbb{R})$ einführen und deren Isomorphie zu $H_r(M;\mathbb{R})$, den einfachen singulären Homologiegruppen, zeigen.

Zur Definition der glatten singulären Homologiegruppen $H_r^\infty(M;\mathbb{R})$ geht man von den gewöhnlichen stetigen Abbildungen $s_r \in C^0$ zu glatten Abbildungen $s_r \in C^\infty$ über und baut daraus die glatten singulären r-Kettengruppen $C_r^\infty(M;\mathbb{R})$ und die entsprechenden glatten singulären Homologiegruppen $H_r^\infty(M;\mathbb{R})$ auf.

Satz 17.10.1 *Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Inklusion $C_r^\infty(M;\mathbb{R}) \subset C_r(M;\mathbb{R})$ induziert einen Isomorphismus der entsprechenden Homologiegruppen*

$$H_r^\infty(M;\mathbb{R}) \simeq H_r(M;\mathbb{R}) \,. \tag{17.10.1}$$

Beweis. Der Beweis wird per Induktion über die Karten ($\simeq \mathbb{R}^m$) der Mannigfaltigkeit geführt. Der Induktionsbeginn $k = 1$ entspricht einer einzigen Karte $\simeq \mathbb{R}^m$. Wir hatten in 17.2.4 bewiesen, daß für wegzusammenhängende topologische Räume X gilt: $H_0(X,G) \simeq G$ und $H_r(X,G) \simeq 0$ für $r > 0$. Nun ist $\mathbb{R}^m$ wegzusammenhängend und der Beweis in 17.2.4 funktioniert für glatte singuläre r-Kettengruppen $C_r^\infty(M;\mathbb{R})$ gleichermaßen wie für stetige singuläre Kettenabbildungen. Also gilt

$$H_r^\infty(M;\mathbb{R}) \simeq H_r(M;\mathbb{R}) \,,$$

wenn M nur aus einer Karte besteht.

Sei jetzt die Behauptung für $U := \bigcup_{i=1}^k U_i$, bestehend aus den k Karten $U_1, \ldots, U_k$ erfüllt. Wir setzen $V := U_{k+1}$ und wenden die folgende Mayer-Vietoris Sequenz (17.7.1) und das Fünferlemma (17.3.1) an:

$$\begin{array}{ccccc}
H_{r+1}^\infty(U \cap V) \to & H_{r+1}^\infty(U) \oplus H_{r+1}^\infty(V) \to & H_{r+1}^\infty(U \cup V) \to \\
\downarrow \alpha & \downarrow \beta & \downarrow \gamma \\
H_{r+1}(U \cap V) \to & H_{r+1}(U) \oplus H_{r+1}(V) \to & H_{r+1}(U \cup V) \;\to
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\to H_r^\infty(U \cap V) \to & H_r^\infty(U) \oplus H_r^\infty(V) \\
\downarrow \delta & \downarrow \epsilon \\
\to H_r(U \cap V) \to & H_r(U) \oplus H_r(V)
\end{array}$$

Die Homomorphismen $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ sind nach Induktionsvorraussetzung Isomorphismen, also ist mit dem Fünferlemma auch γ ein Isomorphismus und damit die Behauptung für $k + 1$ Karten bewiesen. □

18 Der verallgemeinerte Satz von Gauß-Bonnet

18.1 Der Satz von Gauß-Bonnet für m-dimensionale Hyperflächen

In Kapitel 10.14 wurde die Gaußsche Krümmung $K(u)$ für m-dimensionale Hyperflächen M in $\mathbb{E}^{m+1}$ mit geradzahligem m definiert . Hier soll nun für diesen Fall der Satz von Gauß-Bonnet bewiesen werden. Wir folgen im Wesentlichen Guillemin u. Pollack (1974), S. 196 ff. Entscheidend ist bei diesem Beweis die Einbettung von M in $\mathbb{E}^{m+1}$, bzw. die Einbettung von T_pM in $T_p\mathbb{E}^{m+1}$ für $p \in M$.

Die Gaußsche Normalenabbildung $n : M \to S^m$ mit $n(x) := N(x)$ ordnet jedem Punkt $x \in M$ seinem jeweiligen Normalenvektor $N(x)$ entsprechend einen Punkt auf der Kugeloberfläche S^m zu.

Satz 18.1.1 *Sei M eine kompakte, orientierte, m-dimensionale Hyperfläche in $\mathbb{E}^{m+1}$ mit geradzahligem m. Seien $K(u)$ die Gaußsche Krümmung, vol_M, vol_{S^m} die Volumenformen von M und S^m, $Vol(S^m)$ das Volumen der m-dimensionalen Kugeloberfläche S^m und $\chi(M)$ die Euler Charakteristik von M, dann gilt*

$$\int_M K\,\mathrm{vol}_M = \frac{1}{2} Vol(S^m)\chi(M)\ . \tag{18.1.1}$$

Beweis. Der Anfang des Beweises besteht einfach aus der Anwendung des Brouwerschen Abbildungsgrades auf die Definitionsgleichung der Gauß-Krümmung in m Dimensionen 10.14.3:

$$\int_M K\,\mathrm{vol}_M = \int_M n^*\,\mathrm{vol}_{S^m} = \deg(n) \int_{S^m} \mathrm{vol}_{S^m} = \deg(n) Vol(S^m)\ .$$

Also bleibt nur noch zu beweisen, daß der Abbildungsgrad der Gaußschen Normalenabbildung gerade gleich $\frac{1}{2}\chi(M)$ ist. Für den Beweis wird ein spezielles Vektorfeld auf M konstruiert, dieses in $\mathbb{E}^{m+1}$ eingebettet, und dann der Index dieses Vektorfeldes an dessen Nullstellen berechnet.

Seien $+w$ und $-w$ reguläre Werte von $n : M \to S^m$, dann bestehen per Definition die Urbildmengen $\{n^{-1}(+w)\} = \{v_1, \dots, v_k\}$ und $\{n^{-1}(-w)\} = \{v'_1, \dots, v'_{k'}\}$ aus regulären Punkten von n, d.h.

$$\det \frac{\partial n_i}{\partial x^j}|_{v_l} \neq 0\ , \quad \det \frac{\partial n_i}{\partial x^j}|_{v'_{l'}} \neq 0\ , \quad i,j = 1,\dots,m;\ l = 1,\dots,k;\ l' = 1,\dots,k'.$$

Wir konstruieren jetzt das spezielles Vektorfeld $V_p : M_p \to T_pM$, dessen Wert an der Stelle $p \in M$ die Projektion von $-w \in S^m \subset \mathbb{E}^{m+1}$ auf T_pM ist:

$$V_p := (-w) - (-w \cdot N(p))N(p) = (w \cdot n(p))n(p) - w \ .$$

Das Vektorfeld V_p hat Nullstellen bei $n(p) = N(p) = \pm w$, da ja $|w| = 1$ ist. Die Urbildmenge $\{n^{-1}(+w), n^{-1}(-w)\}$ ist endlich, da $\pm w$ reguläre Werte von n sind und M kompakt ist (eine Folgerung des Satzes von Sard, siehe Beweis von 13.1.2, Punkt 2.).

Die Einbettung von M in $\mathbb{E}^{m+1}$, bzw. die Einbettung von T_pM in $T_p\mathbb{E}^{m+1}$, können wir mit Hilfe lokaler Koordinaten x^j, bzw. $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x^j}$ an der Stelle $p \in M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ schreiben als:

$$\mathbb{E}_p^{m+1} = M_p \oplus M_p^{\perp} \ ,$$

$$V_p = V_p \oplus 0 \in T_pM \oplus T_pM^{\perp} = T_p\mathbb{E}^{m+1} \ .$$

Jetzt soll V_p als ein Vektorfeld in $\mathbb{E}_p^{m+1}$ differenziert werden. Dazu verwenden wir $X_p : \mathbb{E}^{m+1} \to T_p\mathbb{E}^{m+1}$ mit

$$X_p := (\partial_1, \ldots, \partial_m)_p \oplus \partial_{m+1}|_p \in T_pM \oplus T_pM^{\perp} = T_p\mathbb{E}^{m+1} \ .$$

Da lokal $\mathbb{E}_p^{m+1}$ und $T_p\mathbb{E}^{m+1}$ als $(m+1)$-dimensionale Vektorräume isomorph sind, kurz $\mathbb{E}_p^{m+1} \sim T_p\mathbb{E}^{m+1}$, kann man X_p auch auf Tangentialvektoren von $\mathbb{E}^{m+1}$ anwenden, also $X_p : T_p\mathbb{E}^{m+1} \to T_p\mathbb{E}^{m+1}$. Wegen $M_p \sim T_pM$ ist $X_p[V]$ in den lokalen Koordinaten tatsächlich eine Abbildung $X_p : T_pM \to T_pM$.

Damit folgt zunächst, daß $X_p[N(p)]$ senkrecht auf $N(p)$ steht, denn

$$N(p) \cdot N(p) = 1 \quad \Rightarrow \quad X[N(p) \cdot N(p)] = \begin{cases} 2X[N(p)] \cdot N(p) \ , \\ 0 \ . \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X[N(p)] \perp N(p) \ .$$

Da w fix ist ergibt sich für $X_p[V]$

$$X_p[V] = X_p[(w \cdot n(p))n(p) - w] = X_p[(w \cdot N(p))N(p) - w]$$

$$= (w \cdot X_p[N(p)])N(p) + (w \cdot N(p))X_p[N(p)] \ ,$$

und dies ist an einer Stelle $p \in M$ mit $n(p) = N(p) = \pm w$ gerade

$$X_p[V] = (w \cdot N(p))X_p[N(p)] = \pm X_p[N(p)] = \pm X_p[n(p)] \ .$$

Damit können wir identifizieren

$$T_pM = \begin{cases} T_w S^m & \text{für } n(p) = +w \ , \\ T_{-w} S^m & \text{für } n(p) = -w \ . \end{cases}$$

Es folgt

$$\det(X_p[V]) = \begin{cases} +\det(X_p[n]) & \text{für } n(p) = +w \ , \\ (-1)^m \det(X_p[n]) & \text{für } n(p) = -w \ . \end{cases}$$

Da $+w$ ein regulärer Wert von n ist gilt $X_p[n] \neq 0$, also ist $X_p[V]$ in einer Umgebung von p ein Isomorphismus und damit ist mit 13.3.2

$$\operatorname{ind}(V) = \operatorname{sgn} \det\left(X_p[V]\right) = \operatorname{sgn} \det\left(X_p[n]\right) \ ,$$

und wenn n die Orientierung erhält ist also $\operatorname{ind}(V) = 1$.

Da $-w$ ebenso wie $+w$ ein regulärer Wert von n ist gilt wieder $X_p[n] \neq 0$, also ist $X_p[V]$ in einer Umgebung von p ein Isomorphismus und damit ist mit 13.3.2

$$\operatorname{ind}(V,p) = \operatorname{sgn} \det\left(X_p[V]\right) = \operatorname{sgn} \det\left(X_p[n]\right) \ ,$$

und wenn n die Orientierung erhält ist also $\operatorname{ind}(V) = (-1)^m$.

Die Abbildungsgrade $\deg(n)$ bzgl. der Stellen $+w$ und $-w$ sind dann

$$\sum_{v_l \in \{n^{-1}(+w)\}} \operatorname{ind}(V, v_l) = \deg(n) \ ,$$

$$\sum_{v'_{l'} \in \{n^{-1}(-w)\}} \operatorname{ind}(V, v'_{l'}) = \begin{cases} \deg(n) & \text{für } m \text{ gerade} \ , \\ -\deg(n) & \text{für } m \text{ ungerade} \ . \end{cases}$$

Und daraus folgt

$$\chi(M) = \sum_{v_l, v'_{l'} \in \{n^{-1}(\pm w)\}} \left(\operatorname{ind}(V, v_l) + \operatorname{ind}(V, v'_{l'})\right) = \begin{cases} 2\deg(n) & \text{für } m \text{ gerade} \ , \\ 0 & \text{für } m \text{ ungerade} \ . \end{cases} \qquad \square$$

19 de Rham Kohomologie

Georges de Rham (1903-1990) war ein Schweizer Mathematiker und Schüler von Henri Lebesque und Élie Cartan. In seiner im Jahr 1931 abgeschlossenen Dissertation arbeitete er über das damals noch neue Gebiet der Kohomologie und bewies den Isomorphismus der Homologiegruppen über $\mathbb{R}$ mit den (de Rham) Kohomologie-Vektorräumen auf differenzierbaren, kompakten Mannigfaltigkeiten, eine Aussage, die heute als der Satz von de Rham bekannt ist.

Wir folgen Nakahara (2003), S. 230 ff., Bott u. Tu (1982), S. 22 ff. und der Vorlesung von Baader (2008), S. 15 ff., S. 52 ff.

Definition 19.0.1 *Sei M eine m-dimensionale C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Menge der geschlossenen r-Differentialformen heißt die Kozyklengruppe $Z^r(M)$ und die Menge der exakten $r-$Differentialformen heißt die Korandkettengruppe $B^r(M)$, d.h*

$$Z^r(M) := \{\omega \in \Omega^r(M) \,|\, d\omega = 0\} \;, \tag{19.0.1}$$

$$B^r(M) := \{\omega \in \Omega^r(M) \,|\, \omega = d\omega' \,,\, \omega' \in \Omega^{r-1}(M)\}. \tag{19.0.2}$$

Wegen $d_{r+1}(d_r\omega) = 0$, oder kurz $d^2 = 0$ (6.3.2) ist $B^r(M) \subseteq Z^r(M)$ und wir können wie im Fall der Homologiegruppen jetzt die Kohomologiegruppen als Quotinetengruppe definieren.

Definition 19.0.2 *Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $Z^r(M)$ eine r-Kozyklengruppe und $B^r(M)$ eine r-Korandkettengruppe, dann heißt die Quotiententengruppe*

$$H^r(M) := H^r(M, \mathbb{R}) := \begin{cases} Z^r(M)/B^r(M) & \textit{für } r = 0, \dots, m \\ \emptyset & \textit{für } r < 0 \textit{ oder } r > m \;. \end{cases} \tag{19.0.3}$$

die de Rham r-Kohomologiegruppe. Weil man als abelsche Gruppe $G = \mathbb{R}$ verwendet, sind die de Rham Kohomologiegruppen tatsächlich Vektorräume. Da wir im Folgenden nur de Rham Kohomologiegruppen betrachten lassen wir ab jetzt der Einfachheit halber das Attribut 'de Rham' wegfallen und sprechen nur noch von Kohomologiegruppen.

Wenn man den Kettenkomplex $C(X)$ der Homologie-Theorie mit dem de Rham Komplex $\Omega(M)$ vergleicht, dann stellt man eine große Ähnlichkeit fest:

$$0 \leftarrow C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \xleftarrow{\partial_m} C_m \hookleftarrow 0 \;, \tag{19.0.4}$$

$$0 \hookrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{m-2}} \Omega^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \Omega^m \xrightarrow{d_m} 0 \;, \tag{19.0.5}$$

$$H_r(X) := Z_r(X)/B_r(X) = \ker \partial_r / \operatorname{im} \partial_{r+1} \ , \ \text{Homologiegruppen} \ , \tag{19.0.6}$$

$$H^r(M) := Z^r(M)/B^r(M) = \ker d_r / \operatorname{im} d_{r-1} \ , \ \text{Kohomologiegruppen} \ . \tag{19.0.7}$$

Beispiel: Für die simpliziale und die singuläre Homologie hatten wir in 16.5.1 und 16.5.2 gefunden:

$$H_0(K) \simeq G \ , \ \text{für } K \text{ einfach zusammenhängend} \ ,$$

bzw. wenn $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ mit $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i, j = 1, \ldots, n$:

$$H_0(K) \simeq \bigoplus_{i=1}^n G \ , \ \text{für } K \ n\text{-fach disjunkt zusammenhängend} \ .$$

Für die de Rham Kohomologie-Gruppen gilt:
$B^0(M) := \emptyset$, da es keine (-1)-Formen gibt und damit ist

$$H^0(M) = Z^0(M) = \{f \in \Omega^0(M) \,|\, df = 0\} \ .$$

Wenn M wegzusammenhängend ist folgt aus $df = 0$, daß $f = \text{const.}$ auf M, und damit

$$H^0(M) \simeq \mathbb{R} \ , \ \text{für } M \text{ einfach wegzusammenhängend} \ , \tag{19.0.8}$$

bzw. wenn $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ mit $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i, j = 1, \ldots, n$:

$$H^0(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R} \ , \ \text{für } M \ n\text{-fach disjunkt wegzusammenhängend} \ . \tag{19.0.9}$$

□

Mittels des Satzes von Stokes (17.1.1) kann man eine Kohomologiegruppe als den Dualraum einer Homologiegruppe ansehen. Dazu definiert man in M ein inneres Produkt zwischen einer r-Form $\omega \in \Omega^r(M)$ und einer r-Kette $c \in C_r^\infty(M)$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_r^\infty(M) \times \Omega^r(M) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \langle c, \omega \rangle := \int_c \omega \ . \tag{19.0.10}$$

Dieses innere Produkt ist linear in beiden Argumenten und der Satz von Stokes läßt sich damit schreiben als:

$$\langle c_r, d_{r-1}\omega_{r-1} \rangle = \langle \partial_r c_r, \omega_{r-1} \rangle \quad \text{oder kurz} \quad \langle c, d\omega \rangle = \langle \partial c, \omega \rangle \ . \tag{19.0.11}$$

Daraus folgt sofort

$$c_r \in B_r^\infty(M) \ , \ \omega_r \in Z^r(M) \quad \Rightarrow \quad \langle c_r, \omega_r \rangle = \langle \partial_{r+1} c'_{r+1}, \omega_r \rangle = \langle c'_{r+1}, d_r \omega_r \rangle = 0 \ , \tag{19.0.12}$$

$$c_r \in Z_r^\infty(M)\ ,\ \omega_r \in B^r(M) \quad \Rightarrow \quad \langle c_r, \omega_r\rangle = \langle c_r, d_{r-1}\omega'_{r-1}\rangle = \langle \partial_r c_r, \omega'_{r-1}\rangle = 0\ . \tag{19.0.13}$$

Das innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert ein entsprechendes inneres Produkt zwischen den Homologiegruppen:

$$\lambda : H_r^\infty(M) \times H^r(M) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \lambda([c],[\omega]) := \langle c, \omega\rangle = \int\limits_c \omega\ . \tag{19.0.14}$$

Damit diese Definition Sinn macht, muß noch gezeigt werden, daß dieses innere Produkt unabhängig vom jeweiligen Repräsentanten der Klassen $[c]$ und $[\omega]$ ist.

Sei also $c_r \in [c_r] \in H_r^\infty(M)$ und $\omega_r \in [\omega_r] \in H^r(M)$, dann ist $c'_r = (c_r + \partial c''_{r+1}) \in [c_r]$ und $d\omega_r = 0$, und daraus folgt:

$$\langle c'_r, \omega_r\rangle = \langle c_r + \partial c''_{r+1}, \omega_r\rangle = \langle c_r, \omega_r\rangle + \langle \partial c''_{r+1}, \omega_r\rangle = \langle c_r, \omega_r\rangle + \langle c''_{r+1}, d\omega_r\rangle = \langle c_r, \omega_r\rangle\ .$$

Sei nun $c_r \in [c_r] \in H_r^\infty(M)$ und $\omega_r \in [\omega_r] \in H^r(M)$, dann ist $\partial c_r = 0$ und $\omega'_r = \omega_r + d\omega''_{r-1}$, und daraus folgt:

$$\langle c_r, \omega'_r\rangle = \langle c_r, \omega_r + d\omega''_{r-1}\rangle = \langle c_r, \omega_r\rangle + \langle c_r, d\omega''_{r-1}\rangle = \langle c_r, \omega_r\rangle + \langle \partial c_r, \omega''_{r-1}\rangle = \langle c_r, \omega_r\rangle\ .$$

Um den Isomorphismus von $H_r(M) \simeq H_r^\infty(M)$ und $H^r(M)$ und damit den Satz von de Rham zu beweisen muß man zeigen, daß das innere Produkt $\lambda([c],[\omega]) := \langle c, \omega\rangle$ nicht entartet ist. Dazu kann man eine Meyer-Vietoris Sequenz verwenden, ganz ähnlich jener, die wir bereits im Kapitel zur singulären Homologie kennengelernt haben. Der algebraische Teil des Beweises, welcher den Übergang von einer kurzen, exakten Meyer-Vietoris Sequenz zu einer langen, exakten Sequenz von Kohomologiegruppen konstruiert ist identisch zu dem Fall der singulären Homologiegruppen. Der rein topologische Teil des Beweises ist auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit natürlich einfacher als in einem allgemeinen topologischen Raum, weil sehr viel mehr Struktur vorhanden ist. Wir verwenden hier insbesondere ein Hilfsmittel der Analysis, die *Zerlegung der Einheit*: sei $\{U_i\}$ eine abzählbare Überdeckung der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, dann gibt es eine Zerlegung der Einheit $\{\chi_i\}$ mit nichtnegativen C^∞-Funktionen χ_i, die ihren Träger auf U_i haben, und für die in einer Umgebung eines jeden Punktes von M die Summe $\sum_i \chi_i$ eine endliche Summe ist und $\sum_i \chi_i = 1$ gilt.

Sei eine Funktion f zunächst nur auf $U \cap V$ definiert. Mit Hilfe der Funktionen χ_V und χ_U können wir f auf U und V fortsetzen:

$$\chi_V f \quad \text{ist definiert auf } U, \quad \chi_U f \quad \text{ist definiert auf } V, \tag{19.0.15}$$

$$\chi_V f + \chi_U f = (\chi_V + \chi_U) f = f \quad \text{ist definiert auf } U \cap V. \tag{19.0.16}$$

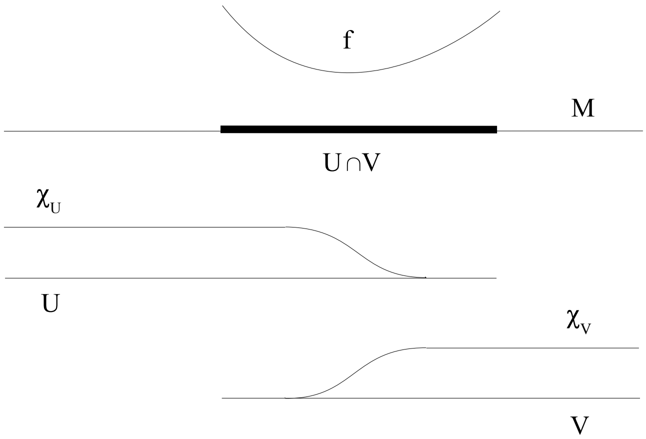

Abbildung 19.1: Zerlegung der Einheit auf $M = U \cup V$

Satz 19.0.3 (Meyer-Vietoris) *Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$, $V \subseteq M$ eine offene Überdeckung von M, d.h. $M = U \cup V$, sei weiter $\{\chi_U, \chi_V\}$ eine Zerlegung der Einheit, dann gilt:*

1. die folgende, kurze Meyer-Vietoris Sequenz ist exakt:

$$\emptyset \to \Omega^r(M) \xrightarrow{\bar{i}} \Omega^r(U) \oplus \Omega^r(V) \xrightarrow{\bar{j}} \Omega^r(U \cap V) \to \emptyset \,, \tag{19.0.17}$$

$$\bar{i} : \omega \mapsto (\omega, \omega) \,, \quad \bar{j} : (-\chi_V \omega, \chi_U \omega) \mapsto \chi_U \omega - (-\chi_V \omega) = \omega \,. \tag{19.0.18}$$

2. aus dieser kurzen, exakten Meyer-Vietoris Sequenz folgt die lange, exakte Sequenz von Kohomologiegruppen

$$\ldots \to H^r(M) \xrightarrow{\bar{i}_\bullet} H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{\bar{j}_\bullet} H^r(U \cap V) \xrightarrow{d_\bullet} H^{r+1}(M) \to \ldots \tag{19.0.19}$$

3. der Korandoperator $d_\bullet$ lautet explizit

$$d_\bullet[\omega] = \begin{cases} [d(\chi_U \omega)] & \mathit{auf}\, V \,, \\ [-d(\chi_V \omega)] & \mathit{auf}\, U \,. \end{cases} \tag{19.0.20}$$

Beweis.

1. diese kurze Sequenz ist exakt, denn $\bar{i}$ ist injektiv und

$$(\omega_1, \omega_2) \in \ker(\bar{j}) \quad \Rightarrow \quad \omega := \omega_1 = \omega_2 \quad \Rightarrow \quad (\omega_1, \omega_2) = (\omega, \omega) \in \mathrm{im}(\bar{i}) \,.$$

2. mit 17.3.3 folgt aus der obigen kurzen, exakten Meyer-Vietoris Sequenz die lange, exakte Sequenz von Kohomologiegruppen. Der einzige Unterschied zu den Homologiegruppen besteht darin, daß bei der Sequenz der Kohomologiegruppen wegen $d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ die Indizes ansteigen.

3. zur expliziten Bestimmung des Korandoperators $d_\bullet$ betrachten wir die kurze exakte Sequenz des Ketten-Komplexes:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^{r+1}(M) \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[u, "d"] & \Omega^{r+1}(U) \oplus \Omega^{r+1}(V) \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[u, "d"] & \Omega^{r+1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{r}(M) \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[u, "d"] & \Omega^{r}(U) \oplus \Omega^{r}(V) \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[u, "d"] & \Omega^{r}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "d"] &
\end{tikzcd}
$$

Sei $[\omega] \in H^r(U \cap V)$, dann ist $\omega \in \Omega^r(U \cap V)$ eine geschlossene Form, d.h. $d\omega = 0$. Da die Zeilen im obigen kommutativen Diagramm exakte Sequenzen sind, ist $\bar{j}$ surjektiv, d.h. es gibt für jedes $\omega \in \Omega^r(U \cap V)$ ein $\psi \in \Omega^r(U) \oplus \Omega^r(V)$ mit $\bar{j} : \psi \to \omega$, und zwar $\psi = (-\chi_V \omega, \chi_U \omega)$. Es folgt

$$
d \circ \bar{j}(\psi) = \begin{cases} d(\omega) = 0 \ , \\ \bar{j} \circ d(\psi) = \bar{j}(-d(\chi_V \omega), d(\chi_U \omega)) = d(\chi_U \omega) - (-d(\chi_V \omega)) \ , \end{cases}
$$

also $-d(\chi_V \omega) = d(\chi_U \omega)$ auf $U \cap V$. Wegen $d(\psi) \in \ker(\bar{j}) = \operatorname{im}(\bar{i})$ existiert ein $\varphi \in \Omega^{r+1}(M)$ mit $\bar{i}(\varphi) = d(\psi)$. Wegen

$$
d \circ \bar{i}(\varphi) = \begin{cases} \bar{i}(d(\varphi)) & \text{und } \bar{i} \text{ injektiv} \\ d^2(\psi) = 0 \end{cases}
$$

folgt $d\varphi = 0$, d.h. $[\varphi] \in H^{r+1}(M)$ und damit ist $d_\bullet : H^r(U \cap V) \to H^{r+1}(M)$

$$
d_\bullet[\omega] = \begin{cases} [d(\chi_U \omega)] & \text{auf } V \ , \\ [-d(\chi_V \omega)] & \text{auf } U \ . \end{cases} \qquad \square
$$

Mit Hilfe dieses Satzes von Meyer-Vietoris für Kohomologiegruppen läßt sich jetzt der Satz von de Rham relativ leicht beweisen. Wir hatten in 17.10.1 gezeigt, daß die glatten Homologiegruppen zur abelschen Gruppe $G = \mathbb{R}$ isomorph zu den gewöhnlichen Homologiegruppen zur abelschen Gruppe $\mathbb{R}$ sind, d.h. $H_r^\infty(M;\mathbb{R}) \simeq H_r(M;\mathbb{R})$. Der Satz von de Rham beweist nun eine Isomorphie der glatten Homologiegruppen $H_r^\infty(M;\mathbb{R})$ mit den de Rham Kohomologiegruppen $H^r(M)$.

Satz 19.0.4 (de Rham)

$$H^r(M) \simeq H_r^\infty(M;\mathbb{R}) \simeq H_r(M;\mathbb{R}) \ . \tag{19.0.21}$$

Beweis. Der Beweis benutzt mittels der Meyer-Vietoris Sequenzen für die Homologie- und Kohomologiegruppen eine vollständige Induktion bzgl. r.

Induktionsanfang: Wenn M einfach wegzusammenhängend ist, dann gilt mit 17.2.12 und 17.10.1 $H_0(M) \simeq \mathbb{R}$ und mit 19.0.8 $H^0(M) \simeq \mathbb{R}$, also $H^0(M) \simeq H_0(M;\mathbb{R})$. Wenn M aus n disjunkten wegzusammenhängenden Teilmengen $M := \bigcup_{i=1}^n M_i$ besteht, dann gilt mit 17.2.13 und 17.10.1 $H_0(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}$ und mit 19.0.9 $H^0(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}$, also wiederum $H^0(M) \simeq H_0(M;\mathbb{R})$.

Das innere Produkt $\lambda([c],[\omega]) = \langle c, \omega\rangle$ induziert eine lineare Abbildung $\tilde{\lambda}$:

$$\tilde{\lambda} : H^r(M) \to H_r^\infty(M;\mathbb{R})^* \quad \text{mit } \tilde{\lambda} : [\omega] \mapsto \lambda(\cdot,[\omega]) \ ,$$

$$\lambda(\cdot,[\omega])) : H_r^\infty(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \text{mit } \lambda : [c] \mapsto \lambda([c],[\omega]) \ ,$$

d.h. jedem $[\omega] \in H^r(M)$ wird eine Abbildung aus $H_r^\infty(M;\mathbb{R})^*$, dem Dualraum von $H_r^\infty(M;\mathbb{R})$, zugeordnet und zwar gerade $\lambda(\cdot,[\omega])$. Da wir hier nur endlichdimensionale Homologie- und Kohomologiegruppen betrachten, die zugleich Vektorräume sind, gilt

$$\dim(H_r^\infty(M;\mathbb{R})^*) = \dim(H_r^\infty(M;\mathbb{R})) \ .$$

Es soll nun zu gezeigt werden, daß $\tilde{\lambda}$ ein Isomorphismus ist, oder anders gesagt, daß zu jedem $[\omega] \in H^r(M)$ das innere Produkt $\lambda(\cdot,[\omega])$ nicht singulär ist, d.h. $[c] \neq 0$, $[\omega] \neq 0$ impliziert $\lambda(\cdot,[\omega]) \neq 0$. Jetzt nehmen wir an, daß die Behauptung für $(r-1)$ gültig sei und betrachten die beiden Meyer-Vietoris Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & H^{r-1}(U\cap V) & \xrightarrow{d_\bullet} & H^r(U\cup V) & \xrightarrow{\bar{i}_\bullet} & H^r(U)\oplus H^r(V) & \xrightarrow{\bar{j}_\bullet} & H^r(U\cap V) & \to \\
 & \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes & \\
\leftarrow & H^\infty_{r-1}(U\cap V) & \xleftarrow{\partial_\bullet} & H^\infty_r(U\cup V) & \xleftarrow{j_\bullet} & H^\infty_r(U)\oplus H^\infty_r(V) & \xleftarrow{i_\bullet} & H^\infty_r(U\cap V) & \leftarrow \\
 & \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_2 & & \downarrow \lambda_3 & & \downarrow \lambda_4 & \\
 & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} &
\end{array}$$

Zunächst betrachten wir die Situation bei den Abbildungen $\bar{i}_\bullet$ und $j_\bullet$:

$$[\omega] \in H^r(U\cup V) \quad \Rightarrow \quad \bar{i}_\bullet([\omega]) = ([\omega],[\omega]) \ ,$$

$$[c_U] \in H_r^\infty(U) \ , \ [c_V] \in H_r^\infty(V) \ , \quad \Rightarrow \quad j_\bullet([c_U],[c_V]) = [c_U + c_V] \ .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\lambda_2([c_U + c_V],[\omega]) &= \langle (c_U + c_V), \omega\rangle = \langle c_U, \omega\rangle + \langle c_V, \omega\rangle = \langle c_U, \omega|_U\rangle + \langle c_V, \omega|_V\rangle \\
&= \lambda_3([c_U],[\omega|_U]) \oplus \lambda_3([c_V],[\omega|_V]) \ .
\end{aligned}$$

Wenn also λ_2 nicht singulär ist, dann auch λ_3.

Als nächstes betrachten wir die Situation bei den Abbildungen $\bar{j}_\bullet$ und $i_\bullet$:

$$(-[\omega|_U], [\omega|_V]) \in H^r(U) \oplus H^r(V) \quad \Rightarrow \quad \bar{j}_\bullet((-[\omega|_U], [\omega|_V])) = [\omega] \ ,$$

$$[c] \in H_r^\infty(U \cap V) \ , \quad \Rightarrow \quad i_\bullet([c]) = ([c], -[c]) \ .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\lambda_3([c], -[\omega|_U]) \oplus \lambda_3(-[c], [\omega|_V]\rangle &= \langle c, -\omega|_U\rangle + \langle -c, \omega|_V\rangle = -\langle c, \omega|_V + \omega|_U\rangle \\ &= -\langle c, \omega\rangle = -\lambda_4([c], [\omega]) \ .\end{aligned}$$

Wenn also λ_3 nicht singulär ist, dann auch λ_4.

Jetzt betrachten wir die Situation bei den Abbildungen $d_\bullet$ und $\partial_\bullet$:

Sei $[\omega] \in H^{r-1}(U \cap V)$, d.h. $\omega \in \Omega^{r-1}(U \cap V)$ mit $d\omega = 0$, sei weiter $[c] \in H_r^\infty(U \cup V)$, d.h. $c \in C_r^\infty(U \cup V)$ mit $\partial c = 0$ und $c = c_U + c_V$ (dies ist mit baryzentrischer Unterteilung immer erreichbar, siehe Kapitel 16.3 und 17.6.1). Der singuläre r-Simplex c_U ist eine Abbildung eines einfachen r-Simplex Δ_r in U, d.h. $c_U : \Delta_r \to U$. Wir wählen jetzt $\chi_U|_{\mathrm{im}(c_U)} = 1$ auf dem Bereich $\mathrm{im}(c_U) \subseteq U$, damit ist dann $\chi_V|_{\mathrm{im}(c_U)} = 0$. Mit 19.0.20 folgt $d_\bullet[\omega]||_{\mathrm{im}(c_U)} = 0$ und damit ergibt sich für das innere Produkt

$$\begin{aligned}\lambda_2([c], d_\bullet[\omega]) = \lambda_2([c_U + c_V], d_\bullet[\omega]) &= \lambda_2([c_U], d_\bullet[\omega]) + \lambda_2([c_V], d_\bullet[\omega]) \\ &= \langle c_V, d(\chi_U\omega)\rangle = \langle \partial c_V, \chi_U\omega\rangle \ .\end{aligned}$$

Wegen $\partial c = \partial c_U + \partial c_V = 0$ folgt $\partial c_V = -\partial c_U$ und in diesem Bereich ist $\chi_U = 1$. Damit erhalten wir mit 17.7.2

$$\lambda_2([c], d_\bullet[\omega]) = \langle \partial c_V, \omega\rangle = \lambda_1([\partial_\bullet c], [\omega]) \ .$$

Da λ_1 nach Induktionsvorraussetzung nicht singulär ist gilt das auch für λ_2. □

Die Betti-Zahlen $b_r(M)$ sind per Definition die Dimensionen der Vektorräume $H_r(M;\mathbb{R})$, diese sind nun nach dem Satz von de Rham gleich $b^r(M) := \dim(H^r(M))$, so daß man die Euler Charakteristik $\chi(M)$ im Satz von Euler-Poincaré 16.4.14 auch mit den Dimensionszahlen $b^r(M)$ der Kohomologie-Vekktorräume $H^r(M)$ formulieren kann:

$$\begin{aligned}\chi(M) = \sum_{r=0}^m (-1)^r b_r(M) &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(H_r(M)) \\ = \sum_{r=0}^m (-1)^r b^r(M) &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(H^r(M)) \ . \qquad (19.0.22)\end{aligned}$$

Wenn nun $\omega_1 \in H^r(M)$ und $\omega_2 \in H^{m-r}(M)$ ist, dann ist $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^m(U)$ und damit ein Volumenelement. Also kann man ein inneres Produkt definieren mit

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : H^r(M) \times H^{m-r}(M) \to \mathbb{R} \;, \quad \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle := \int\limits_M \omega_1 \wedge \omega_2 \;. \tag{19.0.23}$$

Dieses innere Produkt ist bilinear und nicht singulär, d.h. $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$ impliziert $\langle\langle \omega_1, \omega_2 \rangle\rangle \neq 0$. Damit wird $H^{m-r}(M)$ zum Dualraum von $H^r(M)$, ein Zusammenhang, der als Poincaré-Dualität bezeichnet wird. Insbesondere bedeutet dies für die Betti-Zahlen

$$b^{m-r}(M) = b^r(M) \;. \tag{19.0.24}$$

Daraus folgt sofort, daß die Euler Charakteristik $\chi(M)$ in Mannigfaltigkeiten M mit ungerader Dimension m gleich 0 ist, denn

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r b^r = \frac{1}{2} \left(\sum_{r=0}^{m} (-1)^r b^r + \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} b^{m-r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{r=0}^{m} (-1)^r b^r + (-1)^m \sum_{r=0}^{m} (-1)^r b^r \right) = 0 \quad \text{für } m \text{ ungerade} \;. \end{aligned} \tag{19.0.25}$$

Für die Kohomologieklassen $[\omega] \in H^r(M)$ kann man nun im Gegensatz zu den Homologieklassen $[c] \in H_r(M, \mathbb{R})$ eine Multiplikation definieren:

$$\wedge : H^r(M) \times H^s(M) \to H^{r+s}(M) \quad \text{mit}$$

$$[\omega_1] \in H^r(M) \;, \; [\omega_2] \in H^s(M) \;, \quad [\omega_1] \wedge [\omega_2] := [\omega_1 \wedge \omega_2] \;. \tag{19.0.26}$$

Tatsächlich ist diese Multiplikation unabhängig vom speziellen Repräsentanten der Klasse $[\omega]$, denn sei etwa $\omega_1' = (\omega_1 + d\psi) \in [\omega_1]$, dann folgt mit $d\omega_1 = 0$:

$$[\omega_1' \wedge \omega_2] = [(\omega_1 + d\psi) \wedge \omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2 + d(\omega_1 \wedge \psi)] = [\omega_1 \wedge \omega_2] \;.$$

Mittels dieser Multiplikation hat

$$H^*(M) := \bigoplus_{r=0}^{m} H^r(M) \tag{19.0.27}$$

die algebraische Struktur eines Rings, des sog. *Kohomologie-Rings*. Einer der Vorteile der Kohomologie-Vektorräume $H^r(M)$ gegenüber den Homologie-Vektorräumen $H_r(M, \mathbb{R})$ ist gerade diese Ring-Struktur der Kohomologie-Vektorräume.

An dieser Stelle ist es angebracht von den technischen Details der Homologie- und Kohomologie-Theorie etwas zurückzutreten und die tiefere grundsätzliche Bedeutung des Satzes von de Rham zu reflektieren.

Bei verallgemeinerten Satz von Gauß-Bonnet (18.1.1) hatten wir gesehen, daß auf einer kompakten, orientierbaren, differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ein einfacher Zusammenhang zwischen der Euler Charakteristik $\chi(M)$, einer topologischen Größe, und der Gaußschen Krümmung $K(u)$, einem Differentialausdruck, besteht.

Dieser Zusammenhang wird nun durch den Satz von de Rham deutlich erweitert, denn die Homologie-Vektorräume $H_r^\infty(M;\mathbb{R}) \simeq H_r(M;\mathbb{R})$ sind rein topologischer Natur, und die dazu isomorphen $H^r(M)$ Kohomologie-Vektorräume werden von Differentialformen $\omega \in \Omega^r(M)$ mit $d\omega = 0$ erzeugt - und $d\omega = 0$ ist ja ein System von Differentialgleichungen. Und somit wird die topologische Euler Charakteristik $\chi(M)$ durch die Dimension der nichttrivialen Lösungsräume von $d\omega = 0$ bestimmt, also von $b^r(M) = \dim(H^r(M))$.

Speziell für Physiker spricht noch ein weiteres Argument dafür, den Kohomologie-Vektorräumen den Vorzug vor den Homologie-Vektorräumen zu geben. Der Homologie-Rand-Operator ∂_r ist ein globaler Operator. Um ihn anwenden zu können braucht man also Informationen über die komplette Mannigfaltigkeit. Physiker betreiben jedoch ihre Experimente immer lokal in der Raumzeit und formulieren ihre Modelle und Theorien, zumindest in der klassischen Physik, in lokalen Differentialgleichungen. Die komplette topologische Form der Lösungsmannigfaltigkeit ist häufig anfangs völlig unklar. Bei solchem Vorgehen ist die Kohomologie-Theorie natürlich das Mittel der Wahl.

Eine Weiterentwicklung der Kohomologie-Theorie ist die *topologische K-Theorie*, welche Vektorbündel auf topologischen Räumen untersucht. Mit Hilfe dieser topologischen K-Theorie haben Atiyah und Singer 1963 erstmalig einen allgemeinen Indexsatz für elliptische Differential-Operatoren bewiesen, der ja sowohl beim Satz von Gauss-Bonnet, als auch beim Satz von de Rham, immer im Hintergrund steht. Wir werden später noch ausführlicher auf diese Atiyah-Singer-Indexsätze zu sprechen kommen.

20 Hodge-Theorie und Hodge-Laplace Operator

Wir orientieren uns an Nakahara (2003), S.289 ff., sowie insb. an Gilkey (1995), S. 43 ff. und Taylor (1996a), S.161 ff., S. 351 ff. Viele Bücher über Geometrie und Topologie stellen einen zentralen Teil des Beweises der Hodge-Zerlegung, nämlich die Existenz der Inversen (d.h. der Greenfunktion) des Laplace-Operators, gar nicht oder nur sehr andeutungsweise dar. Wir greifen beim Beweis der Hodge-Zerlegung auf die Ergebnisse der Theorie der Pseudodifferential-Operatoren in unserem Anhang Kapitel E.3 zurück.

20.1 Hodge-Stern-Operator

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemann- oder Lorentz-Metrik $g_{\mu\nu}$. In 6.1.13 und 6.1.14 hatten wir gefunden, daß für die Vektorräume der Differentialformen $\Omega^r(M)$ und $\Omega^{m-r}(M)$ gilt:

$$\dim(\Omega^r) = \dim(\Omega^{m-r}) \ . \tag{20.1.1}$$

Der Hodge-Stern-Operator ist ein linearer Isomorphismus zwischen diesen Vektorräumen $\Omega^r(M)$ und $\Omega^{m-r}(M)$:

Definition 20.1.1

$$\star : \Omega^r(M) \to \Omega^{m-r}(M) \quad mit$$

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}) := \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \ldots \mu_r}{}_{\nu_{r+1} \ldots \nu_m} \, dx^{\nu_{r+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} \ . \tag{20.1.2}$$

$$\omega := \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \ \in \Omega^r(M) \quad \Rightarrow$$

$$\star\omega = \frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!} \, \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \, \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \ldots \mu_r}{}_{\nu_{r+1} \ldots \nu_m} \, dx^{\nu_{r+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} \ . \tag{20.1.3}$$

Hierbei ist $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ der total antisymmetrische *Levi-Civita-Tensor*, der sich vom *Levi-Civita-Symbol* $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ (6.2.1) nur in der kontravarianten Form unterscheidet:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_m} := \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_m} \ ,$$

$$\tilde{\epsilon}^{\mu_1 \ldots \mu_m} := g^{\mu_1\nu_1} \cdot \ldots \cdot g^{\mu_m\nu_m} \tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_m} = g^{\mu_1\nu_1} \cdot \ldots \cdot g^{\mu_m\nu_m} \epsilon_{\nu_1\ldots\nu_m} \ .$$

Mit der Definition der Determinanten (6.2.2) folgt:

$$\tilde{\epsilon}^{12\ldots m} = g^{1\mu_1} \cdot \ldots \cdot g^{m\mu_m} \tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_m} = g^{1\mu_1} \cdot \ldots \cdot g^{m\mu_m} \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_m} = \det(g^{\mu\nu}) = g^{-1} \ , \quad (20.1.4)$$

und mit der Definition der Permutation π

$$\pi := \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, m \\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \end{pmatrix} \ , \quad \text{mit } \operatorname{sgn}(\pi) := \epsilon_{\mu_1,\ldots,\mu_m}$$

ergibt sich daraus

$$\tilde{\epsilon}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m} = \tilde{\epsilon}^{\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(m)} = \tilde{\epsilon}^{12\ldots m} \operatorname{sgn}(\pi) = g^{-1} \epsilon_{\mu_1,\ldots,\mu_m} \ . \quad (20.1.5)$$

Immer wieder gibt es Situationen in denen es von Vorteil ist, von den Koordinatenbasen $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ und $\{dx^\mu\}$ mittels des von Élie Cartan eingeführten *begleitenden Vielbeins* (*Rahmenfeld*, *moving frame*, *repère mobile*) ${e_a}^\mu(p) \in C^\infty(M)$ zu den Nichtkoordinatenbasen

$$e_a := {e_a}^\mu \partial_\mu \quad \text{und} \quad \theta^a := {e^a}_\mu dx^\mu \ ,$$

(siehe 10.2.1, 10.2.3) überzugehen. Für die Metrik gilt mit 10.9.2

$$\hat{g}_{ab} := g(e_a, e_b) = g_{\mu\nu} {e_a}^\mu {e_b}^\nu = \begin{cases} \delta_{ab} & \text{Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} & \text{Lorentz-Metrik,} \end{cases} \quad (20.1.6)$$

$$\hat{g}^{ab} := (\hat{g}_{ab})^{-1} = \begin{cases} \delta_{ab} & \text{Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} & \text{Lorentz-Metrik,} \end{cases} \quad (20.1.7)$$

bzw. in der Umkehrung

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{ab} {e^a}_\mu {e^b}_\nu \ . \quad (20.1.8)$$

Daraus folgt mit $g := \det(g_{\mu\nu})$ und $e := \det({e^a}_\mu)$

$$g := \det(g_{\mu\nu}) = \begin{cases} \det({e^a}_\mu {e^b}_\nu) = e^2 & \text{Riemann-Metrik,} \\ -\det({e^a}_\mu {e^b}_\nu) = -e^2 & \text{Lorentz-Metrik,} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |e| = \sqrt{|g|} \ , \quad (20.1.9)$$

bzw.

$$\hat{g} := \det(\hat{g}_{ab}) = \det(\hat{g}^{ab}) = \begin{cases} +1 & \text{Riemann-Metrik,} \\ -1 & \text{Lorentz-Metrik.} \end{cases} \quad (20.1.10)$$

Weiter folgt

$$\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^m = ({e^1}_{\mu_1} dx^{\mu_1}) \wedge ({e^2}_{\mu_2} dx^{\mu_2}) \wedge \ldots \wedge ({e^m}_{\mu_m} dx^{\mu_m})$$

$$
\begin{aligned}
&= e^1{}_{\mu_1} e^2{}_{\mu_2} \cdots e^m{}_{\mu_m} \cdot dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_m} \\
&= e^1{}_{\mu_1} e^2{}_{\mu_2} \cdots e^m{}_{\mu_m} \cdot \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \det(e^a{}_\mu) \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= |e| \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m = \sqrt{|g|} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m \, . \qquad (20.1.11)
\end{aligned}
$$

Dies ist gerade das invariante Volumenelement in M, das sich auch als $\star(1)$ darstellen läßt, denn aus 20.1.2 folgt mit $r = 0$:

$$
\begin{aligned}
\star(1) &= \frac{\sqrt{|g|}}{m!} \tilde{\epsilon}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \cdot dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} = \frac{\sqrt{|g|}}{m!} \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_m} \cdot dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= \sqrt{|g|} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m \, . \qquad (20.1.12)
\end{aligned}
$$

Dies können wir andererseits auch folgendermaßen auf die Nichtkoordinatenbasis umschreiben:

$$
\begin{aligned}
\star(1) &= \frac{\sqrt{|g|}}{m!} \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_m} \cdot dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{m!} \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_m} \cdot (e_{b_1}{}^{\nu_1} e_{b_2}{}^{\nu_2} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m}) \cdot \theta^{b_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{b_m} \\
&=: \frac{1}{m!} \hat{\epsilon}_{b_1 \ldots b_m} \cdot \theta^{b_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{b_m} \overset{!}{=} \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^m \, .
\end{aligned}
$$

Mit der Definition der Permutation $\hat{\pi}$

$$
\hat{\pi} := \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, m \\ b_1, b_2, \ldots, b_k \end{pmatrix} \qquad (20.1.13)
$$

ergibt sich daraus der total antisymmetrische *Levi-Civita-Tensor* $\hat{\epsilon}_{b_1 \ldots b_m}$ in der Nichtkoordinatenbasis zu

$$
\hat{\epsilon}_{b_1 \ldots b_m} := \sqrt{|g|} \cdot (e_{b_1}{}^{\nu_1} e_{b_2}{}^{\nu_2} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m}) \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \operatorname{sgn}(\hat{\pi}) \, . \qquad (20.1.14)
$$

Der Übergang von einem Tangentialraum-Tensorindex (kontravarianter Index) zu einem Kotangentialraum-Tensorindex (kovarianter Index) geschieht bei einer Koordinaten-Basis mit $g_{\mu\nu}$, bei einer Nichtkoordinatenbasis gemäß 10.9.2 $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ oder $\hat{g}_{ab} = \eta_{ab}$ für eine Riemannsche oder Lorentzsche Metrik. Daß dies tatsächlich auch für den *Levi-Civita-Tensor* $\hat{\epsilon}_{b_1 \ldots b_m}$in der Nichtkoordinatenbasis zutrifft, d.h. daß $\hat{\epsilon}_{b_1 \ldots b_m}$ tatsächlich ein kovarianter Tensor ist, sieht man folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\hat{\epsilon}^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_{r+1} \ldots b_m} &= \hat{g}^{a_1 b_1} \cdots \hat{g}^{a_r b_r} \cdot \hat{\epsilon}_{b_1 \ldots b_r b_{r+1} \ldots b_m} \\
&= (\hat{g}^{a_1 b_1} \cdots \hat{g}^{a_r b_r}) \cdot \sqrt{|g|} \cdot (e_{b_1}{}^{\nu_1} \cdots e_{b_r}{}^{\nu_r} e_{b_{r+1}}{}^{\nu_{r+1}} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m}) \cdot \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_m}
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{|g|} \cdot (e^{a_1\mu_1} e^{b_1}{}_{\mu_1} \cdots e^{a_r\mu_r} e^{b_r}{}_{\mu_r}) \cdot (e_{b_1}{}^{\nu_1} \cdots e_{b_r}{}^{\nu_r} e_{b_{r+1}}{}^{\nu_{r+1}} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m}) \cdot \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} \,.$$

Nun ist

$$e^{b_i}{}_{\mu_i} e_{b_i}{}^{\nu_i} = g_{\mu_i}{}^{\nu_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}^{a_1 \dots a_r}{}_{b_{r+1} \dots b_m} &= \sqrt{|g|} \cdot (e^{a_1\mu_1} g_{\mu_1}{}^{\nu_1} \cdots e^{a_r\mu_r} g_{\mu_r}{}^{\nu_r}) \cdot (e_{b_{r+1}}{}^{\nu_{r+1}} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m}) \cdot \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} \\ &= \sqrt{|g|} \cdot (e^{a_1\nu_1} \cdots e^{a_r\nu_r}) \cdot \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} \cdot (e_{b_{r+1}}{}^{\nu_{r+1}} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m}) \,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich in der Nichtkoordinatenbasis

$$\begin{aligned} &\star(\theta^{a_1} \wedge \theta^{a_2} \wedge \dots \wedge \theta^{a_r}) = \star(e^{a_1}{}_{\mu_1} dx^{\mu_1} \wedge e^{a_2}{}_{\mu_2} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge e^{a_r}{}_{\mu_r} dx^{\mu_r}) \\ &= e^{a_1}{}_{\mu_1} e^{a_2}{}_{\mu_2} \cdots e^{a_r}{}_{\mu_r} \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} e^{a_1}{}_{\mu_1} e^{a_2}{}_{\mu_2} \cdots e^{a_r}{}_{\mu_r} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} \cdot \\ &\quad \cdot e_{b_{r+1}}{}^{\nu_{r+1}} e_{b_{r+2}}{}^{\nu_{r+2}} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} e^{a_1\mu_1} e^{a_2\mu_2} \cdots e^{a_r\mu_r} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} \cdot \\ &\quad \cdot e_{b_{r+1}}{}^{\nu_{r+1}} e_{b_{r+2}}{}^{\nu_{r+2}} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} \\ &= \frac{1}{(m-r)!} \hat{\epsilon}^{a_1 \dots a_r}{}_{b_{r+1} \dots b_m} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} \,, \end{aligned} \tag{20.1.15}$$

und

$$\star\omega = \frac{1}{r!(m-r)!} \omega_{a_1 a_2 \dots a_r} \hat{\epsilon}^{a_1 \dots a_r}{}_{b_{r+1} \dots b_m} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} \,. \tag{20.1.16}$$

Lemma 20.1.2 *Sei $\omega \in \Omega^r(M)$ eine r-Form in einer m-dimensionalen Riemannschen oder Lorentzschen Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik $g_{\mu\nu}$ und $g = \det(g_{\mu\nu})$, dann gilt*

$$\star\star\,\omega = \hat{g} \cdot (-1)^{r(m-r)} \omega = \begin{cases} (-1)^{r(m-r)} \omega & \textit{Riemann-Metrik} \\ (-1)^{1+r(m-r)} \omega & \textit{Lorentz-Metrik} \end{cases} \,. \tag{20.1.17}$$

Äquivalent hierzu ist die Aussage:

$$\star^{-1} = \hat{g} \cdot (-1)^{r(m-r)} \star \,. \tag{20.1.18}$$

Beweis. Wir führen den Beweis in einer Nichtkoordinatenbasis durch.

$$
\begin{aligned}
\star\star\,\omega &= \star\Big(\frac{1}{r!(m-r)!}\,\omega_{a_1\ldots a_r}\,\hat{\epsilon}^{a_1\ldots a_r}{}_{b_{r+1}\ldots b_m}\,\theta^{b_{r+1}}\wedge\ldots\wedge\theta^{b_m}\Big)\\
&= \frac{1}{r!(m-r)!}\,\omega_{a_1\ldots a_r}\,\hat{\epsilon}^{a_1\ldots a_r}{}_{b_{r+1}\ldots b_m}\,\star\,(\theta^{b_{r+1}}\wedge\ldots\wedge\theta^{b_m})\\
&= \frac{1}{r!(m-r)!}\,\omega_{a_1\ldots a_r}\,\hat{\epsilon}^{a_1\ldots a_r}{}_{b_{r+1}\ldots b_m}\Big(\frac{1}{(r)!}\,\hat{\epsilon}^{b_{r+1}\ldots b_m}{}_{c_1\ldots c_r}\,\theta^{c_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{c_r}\Big)\ .
\end{aligned}
$$

20.1.5 lautet mit $\hat{g}=\det(\hat{g}_{a_1a_2})$ in unserer Nichtkoordinatenbasis:

$$
\hat{\epsilon}^{a_1a_2\ldots a_m} = \hat{g}^{-1}\hat{\epsilon}_{a_1,\ldots,a_m} = \hat{g}\hat{\epsilon}_{a_1,\ldots,a_m} = \begin{cases}(+1)\hat{\epsilon}_{a_1,\ldots,a_m} & \text{Riemann-Metrik}\,,\\ (-1)\hat{\epsilon}_{a_1,\ldots,a_m} & \text{Lorentz-Metrik}\,.\end{cases} \tag{20.1.19}
$$

Damit ziehen wir die Indizes $a_1,\ldots,a_r,b_{r+1},\ldots,b_m$ herunter und erhalten mit explizit ausgeschriebenen Summationen:

$$
\begin{aligned}
\star\star\,\omega &= \sum_{abc}\frac{1}{r!r!(m-r)!}\,\omega_{a_1\ldots a_r}\,\hat{g}\,\hat{\epsilon}_{a_1\ldots a_r b_{r+1}\ldots b_m}\,\hat{\epsilon}_{b_{r+1}\ldots b_m c_1\ldots c_r}\,\theta^{c_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{c_r}\\
&= \sum_{abc}\frac{\hat{g}\cdot(-1)^{r(r-m)}}{r!r!(m-r)!}\,\omega_{a_1\ldots a_r}\,\hat{\epsilon}_{a_1\ldots a_r b_{r+1}\ldots b_m}\,\hat{\epsilon}_{c_1\ldots c_r b_{r+1}\ldots b_m}\,\theta^{c_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{c_r}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der folgenden Summationsformel

$$
\begin{aligned}
&\sum_b\sum_c\hat{\epsilon}_{a_1\ldots a_r b_{r+1}\ldots b_m}\hat{\epsilon}_{c_1\ldots c_r b_{r+1}\ldots b_m}\theta^{c_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{c_r}\\
&= r!\sum_b\hat{\epsilon}_{a_1\ldots a_r b_{r+1}\ldots b_m}\hat{\epsilon}_{a_1\ldots a_r b_{r+1}\ldots b_m}\theta^{a_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{a_r}\\
&= r!(m-r)!\,\theta^{a_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{a_r}
\end{aligned} \tag{20.1.20}
$$

können wir den Ausdruck für $\star\star\,\omega$ vereinfachen zu:

$$
\begin{aligned}
\star\star\,\omega &= \frac{\hat{g}\cdot(-1)^{r(m-r)}}{r!r!(m-r)!}\,\omega_{a_1\ldots a_r}\,r!(m-r)!\,\theta^{a_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{a_r}\\
&= \hat{g}\cdot(-1)^{r(m-r)}\frac{1}{r!}\,\omega_{a_1\ldots a_r}\,\theta^{a_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{a_r}\\
&= \hat{g}\cdot(-1)^{r(m-r)}\omega\ .
\end{aligned}
$$

□

Lemma 20.1.3 *Seien $\omega, \psi \in \Omega^r(M)$ zwei r-Formen in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, dann gilt*

$$\omega \wedge \star\psi = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\psi^{\mu_1\ldots\mu_r}\sqrt{|g|}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \tag{20.1.21}$$

$$= \frac{1}{r!}\omega_{a_1\ldots a_r}\psi^{a_1\ldots a_r}\;\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^m\,. \tag{20.1.22}$$

Beweis. Wir verwenden in diesem Beweis zur besseren Übersichtlichkeit *nicht* die Einsteinsche Summenkonvention, sondern schreiben die Summationen explizit aus.

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \star\psi &= \frac{\sqrt{|g|}}{(r!)^2(m-r)!}\sum_{\mu_1\ldots\mu_m}\sum_{\nu_1\ldots\nu_r}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\psi_{\nu_1\ldots\nu_r}\,\tilde{\epsilon}^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\mu_{r+1}\ldots\mu_m}\,dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_m}\\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\mu_1\ldots\mu_m}\sum_{\nu_1\ldots\nu_r}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\psi^{\nu_1\ldots\nu_r}\frac{1}{r!(m-r)!}\epsilon_{\nu_1\ldots\nu_r\mu_{r+1}\ldots\mu_m}\sqrt{|g|}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_m}\\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\mu_1\ldots\mu_r\mu_{r+1}\ldots\mu_m}\sum_{\nu_1\ldots\nu_r}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\psi^{\nu_1\ldots\nu_r}\frac{1}{r!(m-r)!}\epsilon_{\nu_1\ldots\nu_r\mu_{r+1}\ldots\mu_m}\cdot\\
&\quad\cdot\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_r\mu_{r+1}\ldots\mu_m}\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\mu_1\ldots\mu_r}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_r}\frac{1}{r!}\sum_{\nu_1\ldots\nu_r}\psi^{\nu_1\ldots\nu_r}\epsilon_{\nu_1\ldots\nu_r}\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\mu_1\ldots\mu_r}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_r}\frac{r!}{r!}\psi^{\mu_1\ldots\mu_r}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_r}\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\mu_1\ldots\mu_r}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\psi^{\mu_1\ldots\mu_r}\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\,.
\end{aligned}$$

□

Somit ist $\omega \wedge \star\psi = \psi \wedge \star\omega$ eine symmetrische m-Differentialform auf $\Omega^r(M)$ und kann über M integriert werden. Hodge hat die folgende Bilinearform eingeführt:

$$\langle \omega \mid \psi \rangle := \int_M \omega \wedge \star\psi \tag{20.1.23}$$

$$= \frac{1}{r!}\int_M \omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\psi^{\mu_1\ldots\mu_r}\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

$$= \frac{1}{r!}\int_M \omega_{a_1\ldots a_r}\psi^{a_1\ldots a_r}\;\theta^1\wedge\ldots\wedge\theta^m\,.$$

Wenn die Mannigfaltigkeit M eine Riemann-Metrik hat, dann ist diese Bilinearform sogar positiv definit und damit also ein Skalarprodukt, denn mit $\hat{g}^a{}_b = \delta^a{}_b$ folgt sofort:

$$\begin{aligned}\langle \omega \mid \omega \rangle &= \frac{1}{r!} \int\limits_M \omega_{a_1 \dots a_r} \omega^{a_1 \dots a_r} \, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \\ &= \frac{1}{r!} \int\limits_M \sum_{a_1 \dots a_r} \omega_{a_1 \dots a_r} \omega_{a_1 \dots a_r} \, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \geq 0 \, . \end{aligned} \tag{20.1.24}$$

Wenn man eine Bilinearform auf $\Omega^r(M)$ hat, dann kann man den zu $d : \Omega^{r-1}(M) \to \Omega^r(M)$ adjungierten Operator $d^\dagger : \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M)$ definieren.

Definition 20.1.4 *Sei $d : \Omega^{r-1}(M) \to \Omega^r(M)$, dann definiert man $d^\dagger : \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M)$ mit*

$$d^\dagger := \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{mr+m+1} \star d \star = \begin{cases} (-1)^{mr+m+1} \star d \star & \textit{Riemann-Metrik} \\ (-1)^{mr+m} \star d \star & \textit{Lorentz-Metrik} \end{cases} . \tag{20.1.25}$$

Satz 20.1.5 *Auf einer kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit M ohne Rand mit einer Metrik g gilt:*

$$\omega \in \Omega^r(M) \, , \; \psi \in \Omega^{r-1}(M) \quad \Rightarrow \quad \langle d\psi \mid \omega \rangle = \langle \psi \mid d^\dagger \omega \rangle \, . \tag{20.1.26}$$

Beweis. Zunächst einmal sind $\psi \wedge \star d^\dagger \omega$ und $d\psi \wedge \star\omega$ Elemente von $\Omega^m(M)$, also existiert das Integral über M. Weiter ist

$$d(\psi \wedge \star\omega) = d\psi \wedge \star\omega + (-1)^{r-1} \psi \wedge d \star \omega \, .$$

Nun ist $d \star \omega$ eine $(m-r+1)$ -Form. Aus 20.1.17 folgt für eine r-Form

$$\det(\hat{g}) \cdot (-1)^{r(m-r)} \star \star = \mathbb{1} \, ,$$

und also für eine $(m-r+1)$ -Form:

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{(m-r+1)(m-((m-r+1)))} \star \star \\ &= \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{(m-r+1)(r-1)} \star \star \\ &= \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{mr-r^2+2r-m-1} \star \star \\ &= \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{mr+m+r+1-2m-r(r-1)-2} \star \star \\ &= \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{mr+m+r+1} \star \star \, . \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck fügen wir in den zweiten Term von $d(\psi \wedge \star\omega)$ ein und erhalten:

$$d(\psi \wedge \star\omega) = d\psi \wedge \star\omega + \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{mr+m+r+1} (-1)^{r-1} \psi \wedge \star \star d \star \omega$$

$$= d\psi \wedge \star\omega - \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{mr+m+1} \psi \wedge \star(\star d \star \omega) \ .$$

Integriert über M ergibt sich einerseits

$$\int\limits_{\mathrm{M}} d(\psi \wedge \star\omega) = \int\limits_{\partial\mathrm{M}} (\psi \wedge \star\omega) = 0 \ ,$$

weil M ja nach Voraussetzung eine Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Andererseits ergibt sich

$$\begin{aligned}\int\limits_M d(\psi \wedge \star\omega) &= \int\limits_M d\psi \wedge \star\omega - \det(\hat{g}) \cdot (-1)^{mr+m+1} \int\limits_M \psi \wedge \star(\star d \star \omega) \\ &= \int\limits_M d\psi \wedge \star\omega - \int\limits_M \psi \wedge \star(d^\dagger\omega) \stackrel{!}{=} 0 \ ,\end{aligned}$$

und damit

$$\langle d\psi \mid \omega \rangle = \langle \psi \mid d^\dagger \omega \rangle \ . \qquad \square$$

20.2 Hodge-Laplace-Operator

Hodge hat die gewöhnliche Definition des Laplace-Operators von Funktionenräumen auf Räume von Differentialformen über *kompakten, randlosen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten M verallgemeinert:

Definition 20.2.1 *Der folgende Komplex heißt de Rham Komplex:*

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0 \ , \qquad (20.2.1)$$

$$0 \leftarrow \Omega^0(M) \xleftarrow{d_0^\dagger} \Omega^1(M) \xleftarrow{d_1^\dagger} \cdots \xleftarrow{d_{n-2}^\dagger} \Omega^{n-1}(M) \xleftarrow{d_{n-1}^\dagger} \Omega^n(M) \xleftarrow{d_n^\dagger} 0 \ . \qquad (20.2.2)$$

Auf dem de Rham Komplex kann man den folgenden Hodge-Laplace-Operator definieren:

$$\Delta_r : \Omega^r(M) \to \Omega^r(M) \ ,$$

$$\Delta_r := d_{r-1} d_{r-1}^\dagger + d_r^\dagger d_r \ . \qquad (20.2.3)$$

Für einen einfachen Funktionenraum $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ erhalten wir die bekannte Form des Laplace-Beltrami Operators. Sei $f \in \Omega^0(M)$, dann gilt $d_{-1}^\dagger f = 0$ und mit $d = d_0$ folgt:

$$\Delta f = d^\dagger df = - \star d \star (\partial_\mu f \, dx^\mu)$$

$$= - \star d\,(\frac{\sqrt{|g|}}{(m-1)!}\,(\partial_\mu f)\,\tilde{\epsilon}^\mu{}_{\nu_2 \ldots \nu_m}\,dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m})$$

$$= - \star d\,(\frac{\sqrt{|g|}}{(m-1)!}\,g^{\mu\lambda}(\partial_\mu f)\,\tilde{\epsilon}_{\lambda\nu_2 \ldots \nu_m}\,dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m})$$

$$= - \star\ (\partial_\nu(\frac{\sqrt{|g|}}{(m-1)!}\,g^{\mu\lambda}(\partial_\mu f))\,\epsilon_{\lambda\nu_2 \ldots \nu_m}\,dx^\nu \wedge dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m})$$

Nun ist für einen festen Wert von ν:

$$\epsilon_{\lambda\nu_2 \ldots \nu_m}\,dx^\nu \wedge dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} = \delta^\nu_\lambda\,(m-1)!\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$$

und damit folgt für Δf:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= - \star\ (\partial_\nu(\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu f))\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m) \\
&= -(\partial_\nu(\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu f))\ \star\ (dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m) \\
&= -(\partial_\nu(\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu f))\ \sqrt{|g|}\tilde{\epsilon}^{1 \ldots m} \\
&= -(\partial_\nu(\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu f))\ \sqrt{|g|}g^{-1}\epsilon_{1,\ldots,m} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_\nu(\sqrt{|g|}\,g^{\nu\mu}\partial_\mu f)\ . \qquad (20.2.4)
\end{aligned}$$

In 20.1.24 hatten wir gesehen, daß die Hodge-Bilinearform $\langle\omega \mid \psi\rangle := \int\limits_M \omega\wedge\star\psi$ auf einer Mannigfaltigkeit M mit Riemann-Metrik positiv definit ist, und daraus folgt sofort, daß der Hodge-Laplace-Operator auf $\Omega^r(M)$ ein positiver Operator ist:

$$\begin{aligned}
\langle\omega \mid \Delta\omega\rangle = \langle\omega \mid (d^\dagger d + dd^\dagger)\omega\rangle &= \langle\omega \mid d^\dagger d\omega\rangle + \langle\omega \mid dd^\dagger\omega\rangle \\
&= \langle d\omega \mid d\omega\rangle + \langle d^\dagger\omega \mid d^\dagger\omega\rangle \geq 0\ . \qquad (20.2.5)
\end{aligned}$$

Dies gibt Anlaß zu der Vermutung, daß Δ ein elliptischer linearer partieller Differentialoperator (LPDO) ist.

Jetzt sollen die Symbole von d und $d^\dagger$ in Bezug auf den obigen Komplex bestimmt werden. Dazu machen wir von der üblichen Nomenklatur in der Theorie der linearen partiellen Differentialoperatoren (LPDOs) Gebrauch - siehe E.5. Seien

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\nu}dx^\nu\wedge \quad \text{und} \quad \omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}\ \in \Omega^r(M) \quad \Rightarrow$$

$$d\omega = \frac{1}{r!}\,\frac{\partial\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}}{\partial x^\nu}\,dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}\ \in \Omega^{r+1}(M)\ .$$

Der Übergang zum Hauptsymbol von d, d.h. zu $\sigma_H(d,\xi)$ mit $\xi := (\xi_1,\ldots,\xi_m) \in \mathbb{R}^m$ geschieht durch Fouriertransformation, bzw. einfach durch die Substitution

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \to i\xi_\nu \ , \quad \text{mit} \quad \xi := \xi_\nu dx^\nu \in T^*M \ , \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_H(d,\xi)\omega = i\xi_\nu dx^\nu \wedge \omega \quad \text{bzw.} \quad \sigma_H(d,\xi) = i \cdot \mathrm{ext}(\xi) := i\xi \wedge \ . \tag{20.2.6}$$

Das äußere Produkt $\mathrm{ext}(\xi) = \xi\wedge$ hat nun offensichtlich einen Kern, denn wir können ja in $\Omega^n(M)$ immer $\xi = \xi_1 dx^1$ wählen, und damit folgt

$$\mathrm{ext}(\xi)\, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = \begin{cases} 0 & : \ 1 \in \{\mu_1,\ldots,\mu_r\} \ , \\ \xi_1 dx^1 \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} & : \ 1 \notin \{\mu_1,\ldots,\mu_r\} \ . \end{cases}$$

Das Hauptsymbol eines Produkts d^2 ist wegen der Linearität von d einfach gleich dem Produkt der Hauptsymbole von d:

$$\sigma_H(d^2,\xi) = (i)^2 \xi_\mu \xi_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge = \sigma_H(d,\xi)\sigma_H(d,\xi) \ .$$

Aus $d^2 = d_r \circ d_{r-1} = 0$ folgt für die Symbole $\sigma_H(d_r,\xi) \circ \sigma_H(d_{r-1},\xi) = 0$ und damit folgt

$$\mathrm{im}(\mathrm{ext}_{r-1}(\xi)) = \ker(\mathrm{ext}_r(\xi)) \ . \tag{20.2.7}$$

Dies ist aber gerade die Bedingung dafür, daß der de Rham Komplex zugleich ein *elliptischer Komplex* ist - siehe die Definition in E.5.4.

Es liegt nun nahe zu vermuten, daß das Hauptsymbol von $d^\dagger$ gerade

$$\sigma_H(d^\dagger,\xi) = -i \cdot \mathrm{int}(\xi) \ ,$$

ist, wenn $\mathrm{int}(\xi) := i_{X(\xi)}$ das sog. innere Produkt ist (siehe 6.1.15), d.h. die duale Operation zur externen Multiplikation $\mathrm{ext}(\xi)$. Dies wollen wir im nächsten Lemma beweisen. Wenn $\xi = \xi_\nu dx^\nu \in T^*M$ ist, dann bezeichnen wir mit

$$X(\xi) := \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu}\xi_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ \in TM \ .$$

Auch das innere Produkt $\mathrm{int}(\xi) = i_{X(\xi)}$ hat nun offensichtlich einen Kern, denn wir wählen in $\Omega^n(M)$ wieder $\xi = \xi_1 dx^1$, dann ist $X = g^{11}\xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1}$ und damit folgt

$$\mathrm{int}(\xi)\, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = \begin{cases} 0 & : \ 1 \notin \{\mu_1,\ldots,\mu_r\} \ , \\ \xi^1 dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} & : \ 1 = \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_r \ . \end{cases}$$

Lemma 20.2.2

$$\sigma_H(d^\dagger,\xi) = -i \cdot \mathit{int}(\xi) \ . \tag{20.2.8}$$

Beweis. Das Hauptsymbol $\sigma_H(d^\dagger, \xi)$ des adjungierten Operators $d^\dagger = -\star d \star$ ist wegen der Linearität von d und der Linearität von $\star$ einfach das Adjungierte des Hauptsymbols $\sigma_H(d, \xi)$ des Operators d. Das heißt, wir wollen beweisen, daß bezüglich des Hodge-Skalarprodukts $\langle \omega \mid \psi \rangle = \int_M \omega \wedge \star\psi$ (20.1.23) gilt:

$$(\mathrm{int}(\xi))^\dagger = \mathrm{ext}(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{int}(\xi)\omega \wedge \star\psi = \omega \wedge \star\mathrm{ext}(\xi)\psi \; .$$

Seien $\omega \in \Omega^r$, $\psi \in \Omega^{r-1}$, $X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\xi = \xi_\mu dx^\mu$, dann gilt mit 20.1.21 für die linke Seite:

$$\omega := \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{int}(\xi)\omega = i_{X(\xi)} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = \frac{1}{(r-1)!} \xi^{\mu_1} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \; ,$$

$$\psi := \frac{1}{(r-1)!} \psi_{\nu_2 \ldots \nu_r} dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_r} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{int}(\xi)\omega \wedge \star\psi = \frac{\sqrt{|g|}}{(r-1)!} \xi^{\mu_1} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \psi^{\nu_2 \ldots \nu_r} \, dV \; .$$

Für die rechte Seite erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}(\xi)\psi &= \frac{1}{(r-1)!} \xi_{\mu_1} \psi_{\nu_2 \ldots \nu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_r} \\ &= r \frac{1}{r!} \xi_{\mu_1} \psi_{\nu_2 \ldots \nu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_r} \; , \end{aligned}$$

$$\omega \wedge \star\mathrm{ext}(\xi)\psi = r \frac{\sqrt{|g|}}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \xi^{\mu_1} \psi^{\nu_2 \ldots \nu_r} \, dV \; .$$

Damit ist $\mathrm{int}(\xi)\omega \wedge \star\psi = \omega \wedge \star\mathrm{ext}(\xi)\psi$, bzw. $(\mathrm{int}(\xi))^\dagger = \mathrm{ext}(\xi)$ gezeigt. □

Daraus folgt nun mit dem folgenden Lemma sofort, daß der Hodge-Laplace Operator $\Delta = dd^\dagger + d^\dagger d$ ein elliptischer Operator ist, d.h. daß sein Hauptsymbol $\sigma_H(\Delta, \xi) > 0$ ist für $|\xi| \neq 0$.

Lemma 20.2.3

$$\sigma_H(\Delta, \xi) = |\xi|^2 \; . \tag{20.2.9}$$

Beweis. Die Hauptsymbole $\sigma_H(dd^\dagger,\xi)$ und $\sigma_H(d^\dagger d,\xi)$ des Produkts der Operatoren d und $d^\dagger$ sind wegen der Linearität von d und $d^\dagger$ einfach das Produkt der Hauptsymbole $\sigma_H(d,\xi)$ und $\sigma_H(d^\dagger,\xi)$. Wie oben können wir in $\Omega^n(M)$ wieder $\xi=\xi_1 dx^1$ wählen und damit folgt:

$$\omega := \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_r} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sigma_H(\Delta,\xi)\omega &= \operatorname{ext}(\xi)\cdot\operatorname{int}(\xi)\omega+\operatorname{int}(\xi)\cdot\operatorname{ext}(\xi)\omega\\ &= \begin{cases}\operatorname{ext}(\xi)\cdot\operatorname{int}(\xi)\omega=\xi_1\xi^1\omega=|\xi|^2\omega & : \ 1\in\{\mu_1,\ldots,\mu_r\}\ ,\\ \operatorname{int}(\xi)\cdot\operatorname{ext}(\xi)\omega=\xi^1\xi_1\omega=|\xi|^2\omega & : \ 1\neq\{\mu_1,\ldots,\mu_r\}\ .\end{cases}\end{aligned} \qquad \square$$

Also ist der Hodge-Laplace Operator $\Delta_r = d_{r-1}d^\dagger_{r-1}+d^\dagger_r d_r$ auf dem Raum von Differentialformen über *kompakten, randlosen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten M ein elliptischer Operator und wegen der Kompaktheit und Randlosigkeit auch ein Fredholmoperator (E.4.3)! Damit stehen alle Aussagen der Theorie der Fredholmoperatoren zur Verfügung (siehe Kapitel D.5), insb. folgt die wichtige Aussage, daß der Vektorraum der Harmonischen Formen, d.h. der Vektorraum von $\ker(\Delta_r)$, endlichdimensional ist:

$$Harm(\Omega^r(M)) := N(\Delta_r)=\ker(\Delta_r)<\infty\ . \tag{20.2.10}$$

20.3 Hodge-Zerlegung und der Satz von Hodge

Wir hatten soeben gesehen, daß der de Rham Komplex ein *elliptischer Komplex* ist. Für elliptische Komplexe gilt nun ganz allgemein die sog. Hodge-Zerlegung (siehe Kapitel E.5 und spez. E.5.12), die sich in unserem Falle mit C^∞-Koeffizienten Funktionen von $\Omega^{r-1}(M)$, $\Omega^r(M)$, $\Omega^{r+1}(M)$ schreibt als:

$$\begin{aligned}\Omega^r(M) &= N(\Delta_r)\oplus d_{r-1}(\Omega^{r-1}(M))\oplus d^\dagger_r(\Omega^{r+1}(M))\\ &= Harm(\Omega^r(M))\oplus d_{r-1}(\Omega^{r-1}(M))\oplus d^\dagger_r(\Omega^{r+1}(M))\ .\end{aligned} \tag{20.3.1}$$

Der Beweis in E.5.12 für allgemeine elliptische Komplexe stützt sich zentral auf die Existenz der Inversen (d.h. der Greenfunktion) des Laplace-Operators, und damit auf die Theorie der linearen partiellen Differential- oder Pseudodifferential-Operatoren.

Mit Hilfe der Hodge-Zerlegung kann man nun den *Satz von Hodge* beweisen, daß nämlich die de Rham Kohomologie-Vektorräume $H^r(M)$ isomorph zu den Vektorräumen der harmonischen Formen $Harm(\Omega^r(M))$ sind. Dieser Satz, bzw. seine Verallgemeinerung auf Vektorbündel in E.5.5, ist deswegen so bedeutsam, weil die Kohomologie-Vektorräume $H^r(M)$ ja globale topologische Objekte sind, die harmonischen Formen

$Harm(\Omega^r(M))$ jedoch rein lokale analytische Objekte aus der Theorie der elliptischen partiellen Differentialoperatoren. Wie beim Satz von Gauß-Bonnet liegt auch hier ein Spezialfall eines Atiyah-Singer-Indexsatzes vor.

Der de Rham Kohomologie-Vektorraum $H^r(M)$ ist definert als (19.0.7):

$$H^r(M) := \ker(d_r)/\operatorname{im}(d_{r-1}) .$$

Satz 20.3.1 (Hodge) *Sei ein de Rham Komplex wie in 20.2.1, 20.2.2, gegeben und seien $H^r(M)$ ein Kohomologie-Vektorraum und $Harm(\Omega^r(M)) := N(\Delta_r)$ ein Vektorraum der Harmonischen Formen auf diesem Komplex, dann gilt:*

$$H^r(M) \simeq Harm(\Omega^r(M)) := N(\Delta_r) = \ker(\Delta_r) . \tag{20.3.2}$$

Beweis. Wir übernehmen den allgemeineren Beweis von E.5.5, angepaßt auf die Bezeichnungen bei de Rham Kohomologie-Vektorräumen.

Aus der Definition von $\Delta_r = d_{r-1}d_{r-1}^\dagger + d_r^\dagger d_r$ und der obigen Hodge-Zerlegung folgt, daß $N(\Delta_r) \subseteq N(d_r)$ orthogonal zu $\operatorname{im}(d_{r-1})$ ist, also ist die Abbildung $\phi \mapsto [\phi]$ mit $\phi \in N(\Delta_r)$ und der Klasse $[\phi] \in H^r(M)$ injektiv. Um die Surjektivität dieser Abbildung zu zeigen wählen wir ein $\psi \in N(d_r) \subseteq C^\infty(\Omega^r(M))$. Dieses ψ ist ein Repräsentant der Klasse $[\psi] \in H^r(M)$ und wir schreiben dieses ψ in Form einer Hodge-Zerlegung

$$\psi = \psi_0 + d_{r-1}\psi_1 + d_r^\dagger\psi_2 \quad \Rightarrow$$

$$d_r\psi = d_r\psi_0 + d_r d_{r-1}\psi_1 + d_r d_r^\dagger\psi_2 = d_r d_r^\dagger\psi_2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = \langle d_r\psi \mid \psi_2\rangle = \langle d_r d_r^\dagger\psi_2 \mid \psi_2\rangle = \langle d_r^\dagger\psi_2 \mid d_r^\dagger\psi_2\rangle = ||d_r^\dagger\psi_2|| \quad \Rightarrow$$

$$\psi = \psi_0 + d_{r-1}\psi_1 . \qquad \square$$

Also gibt es für jede Klasse $[\psi] \in H^r(\Omega(M))$ ein $\psi_0 \in N(\Delta_r)$, das auf $[\psi]$ abgebildet wird.

Aus diesem Satz von Hodge folgt nun sofort für die Euler Charakteristik (19.0.22):

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r b_r(M) = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r b^r(M) = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r \dim(H^r(\Omega(M))) \\ &= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r \dim(Harm^r(\Omega(M))) . \end{aligned}\tag{20.3.3}$$

Dies ist ein sehr schönes und tiefes Ergebnis, denn auf der linken Seite haben wir mit der Euler Charakteristik ein globales topologisches Objekt und auf der rechten Seite mit den Dimensionen der Lösungsräume von $\Delta_r = 0$ ein rein lokales analytisches Objekt.

21 Einige Sätze zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren

In diesem Kapitel stellen wir einige Zusammenhänge zu Liegruppen und Liealgebren zusammen, die uns insb. im Zusammenhang mit den $SU(n)$-Eichtheorien hilfreich sein werden. Natürlich können diese kurzen Bemerkungen das umfangreiche Gebiet der Lie-Gruppen und Lie-Algebren nicht einmal annähernd beschreiben. Für Physiker geeignete Einführungen finden sich z.B. in Hassani (1999), van der Waerden (1974), Hall (2003), Sattinger u. Weaver (1986) und ausführlicher in Barut u. Raczka (1986) und Bröcker u. tom Dieck (1985), auf die wir uns hier stützen. Zur mathematischen Vertiefung und für wichtige Beweise sei auf die hervorragende Monographie von Varadarajan (1984) verwiesen.

21.1 Lie-Gruppen

Die Theorie der kontinuierlichen Gruppen wurde von Sophus Lie in den Jahren 1869-1874 entwickelt. Die meisten tiefen Einsichten zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren, insbesondere zu ihrer Klassifikation, verdanken wir Élie Cartan, der beginnend mit seiner Dissertation 1894 jahrzehntelang dieses umfangreiche Gebiet erforschte.

Definition 21.1.1 *Eine reelle oder komplexe Lie-Gruppe G ist eine n-dimensionale reelle oder komplexe C^∞-Mannigfaltigkeit mit einer C^∞-Gruppenmultiplikation $G \times G \to G$, d.h. $\cdot : (g_1, g_2) \to g_1 g_2 \in G$ und einer C^∞-Gruppeninversion $G \to G$, d.h. ${}^{-1} : g \to g^{-1}$.*

Keine Lie-Gruppen sind Gruppen auf Räumen, die keine endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten sind.

Die Matrix-Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$ der invertierbaren, komplexen $n \times n$ Matrizen ist eine Lie-Gruppe, denn:
es ist $GL(n,\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ und Produkt und Inversenbildung sind C^∞-Funktionen; sei nun $A \in GL(n,\mathbb{C})$, dann ist $\det(A) \neq 0$; die Abbildung $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ist stetig und nach Definition ist damit das Urbild einer offenen Menge offen. Duch Komplementbildung folgt dann auch, daß das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. Der Punkt $0 \in \mathbb{C}$ ist eine abgeschlossene Menge und damit ist auch $\det^{-1}(0) \subset M_n(\mathbb{C})$ eine abgeschlossene Menge und damit ist $GL(n,\mathbb{C})$ als die Komplementärmenge von $\det^{-1}(0)$ eine offene Menge und damit eine $2n^2$-dimensionale reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Die gleiche Argumentation gilt natürlich auch für $GL(n, \mathbb{R})$, die Matrix-Gruppe der reellen invertierbaren Matrizen.

Für einen Homomorphismus zwischen zwei beliebigen Gruppen, also nicht notwendigerweise Lie-Gruppen, ist natürlich der Kern des Homomorphismus von Bedeutung:

Definition 21.1.2 *Sei $\Phi : G \to H$ ein Homomorphismus zwischen den Gruppen G und H, und sei $\mathbb{1}_H$ das Einselement von H. Dann heißt* $\ker(\Phi) := \{g \in G \,|\, \Phi(g) = \mathbb{1}_H\}$ *der Kern von Φ.*

Definition 21.1.3 *Sei G eine Gruppe und sei $N \subseteq G$ ein Untergruppe von G. Dann heißt N ein Normalteiler von G, wenn für alle Elemente $n \in N$ gilt: $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$.*

Korollar 21.1.4 *Der Kern* $\ker(\Phi)$ *eines Homomorphismus $\Phi : G \to H$ zwischen den Gruppen G und H ist ein Normalteiler von G.*

Beweis. Zunächst einmal ist $\ker(\Phi)$ eine Untergruppe von G, denn

$$\Phi(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_G \in \ker(\Phi) \ ,$$

$$\Phi(g_1) = \mathbb{1}_H \ , \ \Phi(g_2) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow \quad \Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow$$

$$g_1, g_2 \in \ker(\Phi) \quad \Rightarrow \quad g_1 g_2 \in \ker(\Phi) \ ,$$

$$\Phi(g) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow \quad \Phi(gg^{-1}) = \begin{cases} \Phi(g)\Phi(g^{-1}) = \Phi(g^{-1}) \ , \\ \Phi(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H \ , \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$g \in \ker(\Phi) \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \in \ker(\Phi) \ .$$

Und zweitens ist $\ker(\Phi)$ auch normal, denn seien $g \in G$ und $n \in \ker(\Phi)$, dann gilt

$$\Phi(gng^{-1}) = \Phi(g)\Phi(n)\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)\mathbb{1}_H\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)\Phi^{-1}(g) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow$$

$$n \in \ker(\Phi) \quad \Rightarrow \quad gng^{-1} \in \ker(\Phi) \ . \qquad \square$$

Eine Untergruppe einer Lie-Gruppe muß nicht notwendigerweise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und damit ebenfalls eine Lie-Gruppe sein. Es gilt der folgende Satz:

Satz 21.1.5 (Élie Cartan) *Ein Untergruppe H einer Lie-Gruppe G ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit von G, und damit ebenfalls eine Lie-Gruppe, wenn H in G abgeschlossen ist.*

Der Beweis dieses Satzes von Élie Cartan ist etwas anspruchsvoller und wird in vielen Büchern der mathematischen Physik übergangen. Da wir zum Beweis von Lie-Algebren Gebrauch machen, verschieben wir den Beweis in das Unterkapitel über Lie-Algebren.

Mit Hilfe dieses Satzes sieht man leicht, daß die folgenden Matrix-Untergruppen von $GL(n,\mathbb{C})$ Lie-Untergruppen von $GL(n,\mathbb{C})$ sind: die Matrix-Untergruppe der Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}\}$, und die Matrix-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ der unitären Matrizen:

- $SL(n,\mathbb{C}) \subset GL(n,\mathbb{C})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ der Matrizen mit Einheitsdeterminate $\{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$:
  die Abbildung $\det : GL(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ist stetig und der Punkt $1 \in \mathbb{C}$ ist abgeschlossen, also ist $(\det)^{-1}(1) = SL(n,\mathbb{C})$ abgeschlossen, also ist nach obigem Satz $SL(n,\mathbb{C})$ eine Lie-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$;
- $SL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ der Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$:
  mit der gleichen Argumentation wie $SL(n,\mathbb{C})$;
- $U(n) \subset GL(n,\mathbb{C})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ der unitären Matrizen $\{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AA^\dagger = 1\}$:
  die Abbildung $f : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$ mit $f(A) = AA^\dagger$ ist stetig und der 'Punkt' $\mathbb{1} \in GL(n,\mathbb{C})$ ist abgeschlossen, also ist $f^{-1}(\mathbb{1}) = U(n,\mathbb{C})$ abgeschlossen, also ist nach obigem Satz $U(n,\mathbb{C})$ eine Lie-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$;
- $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ der reellen orthogonalen Matrizen $\{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = 1\}$: ist mit dem gleichen Argument wie $U(n)$ eine Lie-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$;
- $SU(n) \subset SL(n,\mathbb{C})$, die Matrix-Untergruppe von $SL(n,\mathbb{C})$ der unitären Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AA^\dagger = 1,\, \det A = 1\}$
  die Abbildung $f : SL(n,\mathbb{C}) \to SL(n,\mathbb{C})$ mit $f(A) = AA^\dagger$ ist stetig und der 'Punkt' $\mathbb{1} \in SL(n,\mathbb{C})$ ist abgeschlossen, also ist $f^{-1}(\mathbb{1}) = SU(n,\mathbb{C})$ abgeschlossen, also ist nach obigem Satz $SU(n,\mathbb{C})$ eine Lie-Untergruppe von $SU(n,\mathbb{C})$;
- $SO(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ der reellen orthogonalen Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = 1,\, \det A = 1\}$: ist mit dem gleichen Argument wie $SU(n)$ eine Lie-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$.

Wie in der Analysis und Funktionalanalysis spielt auch bei Lie-Gruppen der Begriff der Kompaktheit eine wichtige Rolle.

Definition 21.1.6 *Eine n-dimensionale Matrix-Lie-Gruppe G heißt kompakt, wenn gilt:*

1. *Wenn A_m eine Folge von Matrizen aus G ist und diese Folge gegen eine Matrix A konvergiert, dann ist auch $A \in G$.*
2. *Für alle $A \in G$ gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $|A_{ij}| \leq C$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Da $G \subset M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$, deckt sich diese Definition mit der bekannten Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß, daß eine Menge in $\mathbb{R}$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

$GL(n,\mathbb{C})$ ist nichtkompakt, da die Matrixelemente nicht beschränkt sind und weil zudem eine Folge invertierbarer Matrizen gegen eine nichtinvertierbare Matrix konvergieren kann.

$SL(n,\mathbb{C})$ ist die Matrix-Lie-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ der Matrizen mit Einheitsdeterminate $\{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ und ist ebenfalls nichtkompakt, da die Matrixelemente nicht beschränkt sind. Zum Beispiel gilt

$$A_m := \begin{pmatrix} m & & & & \\ & \frac{1}{m} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A_m = 1,\ |A_{m,11}| \text{ unbeschränkt.}$$

Satz 21.1.7 *$U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ und $SO(n)$ sind kompakt.*

Beweis. Sei $f : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$ mit $f(A) = AA^\dagger$. Die Funktion f ist als ein Produkt von Matrixelementen stetig. Für $A \in U(n) \subset GL(n,\mathbb{C})$ gilt $AA^\dagger = \mathbb{1}$. Die Matrix $\mathbb{1} \in GL(n,\mathbb{C})$ ist ein einzelner 'Punkt' in $GL(n,\mathbb{C})$ und also eine abgeschlossene Menge und daraus folgt, daß auch $f^{-1}(\mathbb{1}) = f^{-1}(AA^\dagger) = U(n)$ abgeschlossen ist. Die n-dimensionale Matrix $\mathbb{1}$ ist auch beschränkt und daraus folgt eine Beschränkung der A_{ij} und damit eine Beschränkung von $U(n)$:

$$AA^\dagger = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij}A^*_{kj} = \delta_{ik} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}A^*_{ij} = \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 = 1 \ .$$

Damit ist $U(n)$ kompakt.

Für $SU(n)$ betrachtet man die Abbildung $\det : U(n) \to \mathbb{C}$. Auch diese Abbildung ist wieder stetig und wie oben folgert man, daß $\det^{-1}(\mathbb{1}) = SU(n)$ eine abgeschlossene Menge ist. Da $SU(n) \subset U(n)$, ist also auch $SU(n)$ beschränkt und damit kompakt.

Für $O(n)$ und $SO(n)$ gilt das Entsprechende. □

Topologisch ist die Eigenschaft des Pfadzusammenhangs von Bedeutung:

Satz 21.1.8 *$U(n)$, $SU(n)$ und $SO(n)$ sind pfadzusammenhängend.*

Beweis. Die abelsche Matrix-Lie-Gruppe

$$T^n := \mathrm{diag}[e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}] \quad \text{ist homöomorph zu} \quad [S^1, \ldots, S^1] \tag{21.1.1}$$

und wird deshalb auch n-Torus genannt. Jeder Kreis S^1 ist (pfad-) zusammenhängend, denn jeder Punkt φ kann von der Identität $\varphi_0 = 0$ mittels einer stetigen Kurve $\varphi(t) := (1-t)\varphi$ mit $0 \leq t \leq 1$ erreicht werden. Also ist auch T^n zusammenhängend. Jede unitäre Matrix $A \subset U(n)$ kann mittels einer unitären Matrix H diagonalisiert werden, also:

$$A_d = HAH^{-1} \quad \text{mit} \quad A_d \in T^n \quad \Rightarrow \quad A = H^{-1}A_dH \; .$$

Das heißt, A entsteht aus der zusammenhängenden Matrix A_d durch einen Diffeomorphismus, nämlich durch Linkstranslation mit H^{-1} und Rechtstranslation mit H, und damit ist also auch A zusammenhängend. □

Definition 21.1.9 *Eine* 1*-Parameter Untergruppe einer Lie-Gruppe G ist ein differenzierbarer Homomorphismus der additiven Gruppe der rellen Zahlen in G:*

$$A : \mathbb{R} \to G \quad \mathit{mit} \quad t \mapsto A(t) \in G \; . \tag{21.1.2}$$

Aus der Homomorphismus-Eigenschaft einer 1-Parameter Untergruppe folgt

$$A(t_1 + t_2) = A(t_1)A(t_2) \; , \tag{21.1.3}$$

$$A(0) = e \; , \quad A(t)^{-1} = A(-t) \; . \tag{21.1.4}$$

Dies gibt Anlaß zur Definition der Abbildung

$$\exp : \mathfrak{g} := \{\frac{d}{dt}A(t)|_{t=0}\} \to G \; ,$$

deren Diskussion wir aber bis zur Diskussion der Lie-Algebren einer Lie-Gruppe in 21.3 verschieben.

21.2 Integration über Lie-Gruppen

Wir folgen hier Hassani (1999), S. 832 ff. und Sattinger u. Weaver (1986), S. 89 ff. Lie-Gruppen sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Daher stellt sich die Frage, ob man und wie man über Lie-Gruppen integrieren kann, um interessante Invarinaten dieser Gruppen zu erhalten. Der Schlüssel für eine Integration ist eine Maßfunktion, in der Analysis in einem euklidischen Raum üblicherweise das Lebesgue-Maß. Der euklidische Raum ist lokalkompakt und das Lebesgue-Maß darauf ist translationsinvariant. Die Verallemeinerung für lokalkompakte Lie-Gruppen ist das Haar-Maß, ein links- (oder rechts-) invariantes Borelmaß ω, so daß in der Lie-Gruppe G für jede Borelmenge $B \in G$ und $g, h \in G$ gilt:

$$L_h : G \to G \quad \text{mit} \quad L_h g := hg \; . \tag{21.2.1}$$

$$L_h^* \omega(B) = \omega(L_h B) = \omega(h \cdot B) \stackrel{!}{=} \omega(B) \quad \Leftrightarrow \tag{21.2.2}$$

$$\int_G f(hg)\omega \stackrel{!}{=} \int_G f(g)\omega \; , \quad \text{Hurwitz-Integral} \; . \tag{21.2.3}$$

Wir betrachten den Fall einer Matrix-Lie-Gruppe G. Seien $\{x^j\}$ ein lokales Koordinatensystem in $U \subset G$ und $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ die n-Form an der Stelle $(x^1, \ldots, x^n)$ und seien $A(x^1, \ldots, x^n) \in U \subset G$ und $A(y^1, \ldots, y^n) := L_h A(x^1, \ldots, x^n)$, dann gilt

$$dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = L_h^* \omega = L_h^* dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \; .$$

Wenn $\{x^j\}$ die Koordinaten der Identität $e \in G$ bezeichnen, dann sind die $\{y^i\}$ gerade die Koordinaten von $L_h e = h$. Das linksinvariante Haar-Maß an der Stelle $h \in G$ mit den Koordinaten $\{y^i\}$ ist also

$$\omega_L(h) = \det{}^{-1}(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_e)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \; . \tag{21.2.4}$$

Ein beliebtes Standard-Beispiel ist die folgende Matrix-Lie-Gruppe (mit $e = \mathbb{1}$):

$$A(x^1, x^2) := \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x^1, x^2 \in \mathbb{R} \; .$$

$$A(y^1, y^2) = L_h A(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} h^1 & h^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^1 x^1 & (h^1 x^2 + h^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$y^1 = h^1 x^1 \; , \quad y^2 = h^1 x^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad y^1|_{\mathbb{1}} = h^1 \; , \quad y^2|_{\mathbb{1}} = h^2$$

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} h^1 & 0 \\ 0 & h^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 & 0 \\ 0 & y^1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_{\mathbb{1}}) = (y^1)^2 \; .$$

Daraus folgt das linksinvariante Haar-Maß

$$\omega_L(h) = \frac{1}{(y^1)^2}\, dy^1 \wedge dy^2 \; .$$

Eine andere Möglichkeit, um das links- (oder rechts-) invariante Haar-Maß zu berechnen ist es, die links- (oder rechts-) invariante n-Form ω aus n links- (oder rechts-) invarianten 1-Formen zusammenzusetzen:

Lemma 21.2.1 *Sei $A \in U \subset G$, mit einem lokalen Koordinatensystem $\{x^i\}$ in U, dann sind*

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^i}\,dx^i \quad \textit{bzw.} \quad \frac{\partial A}{\partial x^i}dx^i A^{-1} \tag{21.2.5}$$

Matrizen von n linear unabhängigen links-, bzw. rechts-invarinaten 1-Formen.

Beweis. Die Linksmultiplikation mit einer festen Matrix L_h induziert eine Koordinatentransformation in A. Dabei möge die Norm von L_h so klein sein, daß auch $L_h A \in U \subset G$ gelte.

$$L_h A(x^1, \ldots, x^n) = A(y^1, \ldots, y^n) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
A^{-1}(y^1, \ldots, y^n)\frac{\partial A(y^1, \ldots, y^n)}{\partial y^j}\,dy^j &= A^{-1}(x^1, \ldots, x^n)L_h^{-1}\frac{\partial (L_h A(x^1, \ldots, x^n))}{\partial y^j}\,dy^j \\
&= A^{-1}(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial A(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j \\
&= A^{-1}(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial A(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^i}dx^i\ .
\end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der 1-Formen folgt die lineare Unabhängigkeit der Matrizen $\frac{\partial A}{\partial x^i}$ und diese sind ja Tangentialvektoren an die Gruppe G in der Umgebung U. □

Wir betrachten wieder das obige Beispiel:

$$A := \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^1} & -\frac{x^2}{x^1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^i}dx^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^1} & -\frac{x^2}{x^1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{x^1} & \frac{dx^2}{x^1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Daraus folgt für das linksinvariante Haarmaß

$$\omega_L = \frac{1}{(x^1)^2}\,dx^1 \wedge dx^2\ .$$

Für diese Beispiel-Liegruppe stimmt das linksinvariante Haarmaß nicht mit dem rechtsinvarianten Haarmaß überein, denn

$$\frac{\partial A}{\partial x^i}dx^i A^{-1} = \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{x^1} & -\frac{x^2}{x^1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{x^1} & (\frac{-x^2dx^1}{x^1} + dx^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Daraus folgt für das rechtsinvariante Haarmaß

$$\omega_R = \frac{dx^1}{x^1} \wedge (\frac{-x^2dx^1}{x^1} + dx^2) = \frac{1}{x^1}\,dx^1 \wedge dx^2\ .$$

Satz 21.2.2 *In einer kompakten zusammenhängenden Lie-Gruppe gibt es ein bi-invariantes Haar-Maß. Dieses ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig.*

Beweis. Seien $g, h, k \in G$ und $L_h : G \to G$ mit $L_h g := hg$, und $R_k : G \to G$ mit $R_k g := gk$, und $B \subset G$ eine Borelmenge. Sei ω_L ein linksinvariantes Haar-Maß, dann folgt, daß auch $R_k^* \omega_L$ linksinvariant ist, denn

$$R_k^* \omega_L(B) = R_k^* L_h^* \omega_L(B) = L_h^* R_k^* \omega_L(B) \ ,$$

da L_h^* und R_k^* kommutieren. Das linksinvariante Haar-Maß ist als n-Form in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit eindeutig bis auf eine Konstante, also folgt $R_k^* \omega_L = c \cdot \omega_L$. Da G kompakt ist existiert das Hurwitz-Integral und es ist

$$\int\limits_G R_k^* \omega_L = c \cdot \int\limits_G \omega_L \ .$$

Da R_k^* nur eine Variablentransformation bewirkt ist also $c = 1$ und daraus folgt

$$R_k^* \omega_L = \omega_L \quad \Rightarrow \quad \omega_L \text{ ist auch rechtsinvariant, d.h. } \omega_L = \omega_R \ . \qquad \square$$

21.3 Lie-Algebren

Die axiomatische Definition einer Lie-Algebra ist die sehr allgemeine folgende algebraische Definition.

Definition 21.3.1 *Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Vektorraum über einem Feld $\mathbb{F}$, hier immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, mit einem Produkt, genannt Lie-Klammer, mit den Eigenschaften:*

- $X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in \mathfrak{g}$;
- $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad$ *für* $\quad a, b \in \mathbb{F},\ X, Y, Z \in \mathfrak{g}$;
- $[X, Y] = -[Y, X]$;
- $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad$ *(Jacobi-Identität).*

Hierbei gilt es zu beachten, daß man von einer reellen/komplexen Lie-Algebra spricht, wenn das Feld $\mathbb{F}$ des Vektorraums gleich $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist, unabhängig von der Frage, ob die Matrizen von $\mathfrak{g}$ evtl. komplexe Elemente enthalten oder nicht!

Der Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren ist aus geometrischer Sicht einfach: Lie-Gruppen sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten, also existiert der Tangentialraum der Lie-Gruppe an der Stelle der Identität $T_e G$, und da die Tangentialvektoren wegen 10.2.6 und 10.2.8 die Axiome einer Lie-Algebra erfüllen, definiert man als die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

$$\mathfrak{g} := T_e G \ . \tag{21.3.1}$$

Seien $g, h \in G$, und $e \in G$ die Einheit in G, dann definiert man auf G eine Linkstranslation von h durch

$$L_g h := gh \quad \Leftrightarrow \quad L_g e := ge = g \ . \tag{21.3.2}$$

Sei nun $X_e \in \mathfrak{g}$, dann wird durch L_{g*} angewandt auf X_e ein Vektorfeld auf G definiert:

$$X_g := L_{g*} X_e \ . \tag{21.3.3}$$

Lemma 21.3.2 *Jede Lie-Gruppe ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Für das Vektorfeld $X_g = L_{g*} X_e$ gilt nun $X_g \neq 0$ auf ganz G, denn $X_g = 0$ an einer Stelle $g \in G$ würde zu $X_g = 0$ auf ganz G führen. Sei $\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, dann haben alle Basisvektoren X_i keine Nullstelle und das bedeutet: jede Lie-Gruppe ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit. □

Jedes Vektorfeld, das die Bedingung

$$L_{g*} X_h = X_{gh} \quad \text{bzw.} \quad R_{g*} X_h = X_{hg}$$

erfüllt, nennt man ein links-, bzw. ein rechts-invariantes Vektorfeld.

Für die Charakterisierung von Lie-Algebren ist der folgende nichttriviale Satz von Ado aus dem Jahr 1947 ganz grundlegend und wichtig!

Satz 21.3.3 (Ado) *Jede endlichdimensionale reelle, bzw. komplexe Lie-Algebra ist isomorph zu $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, bzw. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.*

Der Beweis dieses Satzes ist aufwendig und findet sich z.B. in Varadarajan (1984), S. 237.

Den Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und ihren Lie-Algebren kann man auch mittels der sog. Exponential-Abbildung herstellen.

Satz 21.3.4 *In einer Umgebung U von $e \in U \subset G$ gibt es eine 1-Parameter-Untergruppe $A(t)$ mit $A(0) := e$ und $\frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = X \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Sei jetzt G eine Matrix-Lie-Gruppe, dann kann man eine 1-Parameter-Untergruppe $A(t + t_2) = A(t)A(t_2)$ an der Stelle $t_2 = 0$ nach t_2 differenzieren und erhält

$$\frac{d}{dt_2} A(t + t_2)|_{t_2=0} = \frac{d}{d(t + t_2)} A(t + t_2) \cdot (\frac{d(t + t_2)}{dt_2})|_{t_2=0} = \frac{d}{dt} A(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} A(t) = A(t) \cdot \frac{d}{dt_2} A(t_2)|_{t_2=0} = A(t) \cdot A'(0) \ . \tag{21.3.4}$$

Da $A'(0)$ konstant ist folgt in einer Umgebung um $t = 0$ als Lösung dieser Differentialgleichung

$$A(t) = A(0) \cdot \exp(tA'(0)) = \exp(tA'(0)) \; , \tag{21.3.5}$$

mit

$$\exp(X) := \mathbb{1} + X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots \; . \tag{21.3.6}$$

Diese Summe konvergiert, denn:
sei $||X||$ eine Norm, z.B. die Hilbert-Schmidt Norm

$$||X|| := (\sum_{i,k=1}^{n} |X_{ik}|^2)^{\frac{1}{2}} \; ,$$

dann gilt $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ und $||XY|| \leq ||X|| \cdot ||Y||$ und aus $||X|| < \infty$ folgt

$$||\exp(X)|| = ||\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||\frac{X^k}{k!}|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||X||^k}{k!} = \exp(||X||) < \infty \; .$$

Die obige Vorgehensweise kann man nun für den Fall von Nichtmatrix-Lie-Gruppen verallgemeinern. Die Gleichung 21.3.4 kann man als eine Linkstranslation ansehen:

$$A(t) = L_{A(t)}A(0) \quad \Rightarrow \quad A'(t) = L_{A(t)*}A'(0) \; , \tag{21.3.7}$$

d.h. die 1-Parameter-Gruppe $A(t)$ ist die Integralkurve des Vektorfeldes $X(t) := A'(t)$ mit $X := X(0) = A'(0)$ und dies schreibt man dann wie im Fall einer Matrix-Lie-Gruppe als

$$A(t) := \exp(tX) \quad \text{mit} \quad X = \frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} \; , \tag{21.3.8}$$

und wenn $X(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ analytisch ist gilt

$$\begin{aligned} A(t) &= \mathbb{1} + (\frac{d}{dt}A(t)|_{t=0})t + \frac{1}{2!}(\frac{d^2}{dt^2}A(t)|_{t=0})t^2 + \dots \\ &= \mathbb{1} + X\,t + O(t^2) \; . \end{aligned} \tag{21.3.9}$$

Da jedes $X \in \mathfrak{g}$ nach dem Satz von Ado isomorph zu einer endlichdimensionalen Matrix ist, existiert die Hilbert-Schmidt-Norm $||X|| < \infty$ und wie oben folgt $||\exp(X)|| = \exp(||X||) < \infty$. □

Definition 21.3.5 *Sei $A(t)$ eine 1-Parameter-Untergruppe von G mit $A(0) := e$ und $\frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} = X \in \mathfrak{g}$, dann heißt die Abbildung* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *mit* $\exp(X) = A(1)$ *die Exponentialabbildung von einer Lie-Algebra in die zugehörige Lie-Gruppe.*

Diese Exponentialabbildung ist in einer Umgebung von $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ ein Diffeomorphismus. Das kann man direkt aus der obigen Konstruktion entnehmen, aber auch folgendermaßen sehen: $\mathfrak{g} = T_eG$ und der Tangentialraum an einen Tangentialraum ist wieder der gleiche Tangentialraum, also $T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Damit gilt für die Tangential-Abbildung (d.h. das Differential)

$$\exp_* |_0 : T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \to T_eG = \mathfrak{g} \ , \quad \exp_*(X)|_0 = X \ .$$

Also ist $\exp_*$ an der Stelle $0 \in \mathfrak{g}$ die Identität und exp nach dem Satz über inverse Funktionen in der Umgebung V von 0 ein Diffeomorphismus. Die Umkehrfunktion zu exp heißt log, d.h. $\log := \exp^{-1} : U \subset G \to V \subset \mathfrak{g}$.

Achtung: Aus der Darstellung einer 1-Parameter-Untergruppe $A(t) \subset G$ als Exponentialfunktion $A(t) = \exp(tX)$ mit $X = \frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} \in \mathfrak{g}$ folgt nicht, daß für alle $A \in G$ gilt: $A = \exp(X)$ mit einem $X \in \mathfrak{g}$, sondern dies trifft eben nur zu für diejenigen A in einer kleinen Umgebung U um $e \in G$. Wenn aber G zusammenhängend ist, dann gibt es für $A \in G$ die folgende Darstellung:

Korollar 21.3.6 *Sei G eine pfadzusammenhängende Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, dann läßt sich jedes $A \in G$ darstellen als*

$$A = e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_n} \ , \tag{21.3.10}$$

mit endlich vielen $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Da G zusammenhängend ist gibt es in G einen Pfad von $\tilde{A}(0) = e$ hin zu $\tilde{A}(1) = A$. Das Intervall $[0,1] \in \mathbb{R}$ ist kompakt und $A(t)$ ist stetig, also gibt es eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, so daß alle $\tilde{A}(t_{k-1})^{-1}\tilde{A}(t_k)$ in einer Umgebung von e liegen, in der eine Exponentialdarstellung mittels eines Elements $X_k \in \mathfrak{g}$ gegeben ist, d.h. $\tilde{A}(t_{k-1})^{-1}\tilde{A}(t_k) = \exp(X_k)$.

$$\begin{aligned} A = \tilde{A}(1) &= e \cdot \tilde{A}(1) = \tilde{A}(t_0)^{-1} \cdot \tilde{A}(t_n) \\ &= (\tilde{A}(t_0)^{-1}\tilde{A}(t_1)) \cdot (\tilde{A}(t_1)^{-1}\tilde{A}(t_2)) \cdot \ldots \cdot (\tilde{A}(t_{n-1})^{-1}\tilde{A}(t_n)) \\ &= e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_n} \ . \end{aligned}$$

□

Hilfreich ist auch immer wieder die folgende Lie-Produktformel.

Korollar 21.3.7

$$\lim_{m\to\infty} (e^{\frac{1}{m}X} \, e^{\frac{1}{m}Y})^m = e^{X+Y} \ . \tag{21.3.11}$$

Beweis. In einer ϵ-Umgebung um $t = 0$ gilt

$$\frac{d}{dt}(e^{Xt} \, e^{Yt}) = Xt + Yt + O(t^2) = \frac{d}{dt}(e^{(X+Y)t}) \ ,$$

und damit gilt in einer $m \cdot \epsilon$-Umgebung um $t = 0$

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{m}Xt}\, e^{\frac{1}{m}Yt}) = \frac{1}{m}Xt + \frac{1}{m}Yt + O(\frac{t^2}{m^2}) = \frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{m}(X+Y)t+O(\frac{t^2}{m^2})}) \ .$$

Wenn m groß genug ist, d.h. für $m \to \infty$, gilt diese Beziehung also auch für $t = 1$ und damit folgt

$$\lim_{m\to\infty}(e^{\frac{1}{m}X}\, e^{\frac{1}{m}Y}) = \lim_{m\to\infty}(e^{\frac{1}{m}(X+Y)+O(\frac{1}{m^2})}) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{m\to\infty}(e^{\frac{1}{m}X}\, e^{\frac{1}{m}Y})^m = \lim_{m\to\infty}(e^{(X+Y)+O(\frac{1}{m})}) = e^{X+Y} \ . \qquad \square$$

Sei die Menge der $\{T_\alpha\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, dann sind die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bzgl. dieser Basis definiert als

$$[T_\alpha, T_\beta] =: f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} T_\gamma \ . \tag{21.3.12}$$

Aus den Definitionsgleichungen für die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ folgen sofort die beiden Gleichungen für die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$:

$$f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -f_{\beta\alpha}{}^{\gamma} \ . \quad \text{(Schiefsymmetrie).} \tag{21.3.13}$$

$$f_{\alpha\nu}{}^{\mu} f_{\beta\gamma}{}^{\nu} + f_{\gamma\nu}{}^{\mu} f_{\alpha\beta}{}^{\nu} + f_{\beta\nu}{}^{\mu} f_{\gamma\alpha}{}^{\nu} = 0 \ . \quad \text{(Jacobi-Identität).} \tag{21.3.14}$$

Wir hatten im Abschnitt über Lie-Gruppen den folgende wichtigen Satz von Élie Cartan über Untergruppen einer Lie-Gruppe zitiert, den wir hier beweisen wollen. Wir folgen Bröcker u. tom Dieck (1985), S. 28 ff.

Satz 21.3.8 (Élie Cartan) *Ein Untergruppe H einer Lie-Gruppe G ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit von G, und damit ebenfalls eine Lie-Gruppe, wenn H in G abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei also die Untergruppe H von G eine Untermannigfaltigkeit von G, dann ist H *lokal* abgeschlossen in G, d.h. zu jedem Punkt von H gibt es eine Umgebung $U \subset G$, deren Abschluß in G liegt. Also kann U als abgeschlossen in G, d.h. $U = \bar{U}$, angenommen werden. Damit gibt es eine abgeschlossene Umgebung U um das $\mathbb{1}$-Element von G, so daß auch $H \cap U$ in U abgeschlossen ist, also ist $H \cap U = \overline{H \cap U} = \bar{H} \cap U$. Sei jetzt $y \in \bar{H}$ und $u \in U$, dann verschieben wir y in einen Punkt $x \in H$ mittels: $x := yu^{-1} \in yU^{-1} \cap H$. Es folgt

$$y \in \bar{H} \cap xU \quad \Rightarrow \quad x^{-1}y \in \bar{H} \cap U = H \cap U \quad \Rightarrow \quad y \in H \cap U \ .$$

Damit gilt für den Randpunkt $y \in \bar{H}$ auch $y \in H$ und also ist H abgeschlossen.

Jetzt soll die umgekehrte Richtung gezeigt werden: sei also H eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe. Es genügt zu zeigen, daß $H \cap U$ mit einer Umgebung $U \subset G$ eine Untermannigfaltigkeit von G ist, denn diese Umgebung U kann ja mit der Gruppenmultiplikation über ganz H verschoben werden und in jedem U_x mit $x \in H$ läßt sich eine Karte, d.h. ein Koordinatensystem definieren, welches differenzierbar mit den Koordinaten der Nachbarkarten zusammenhängt. Wir wählen wieder eine Umgebung U um das $\mathbb{1}$-Element von G. Um jetzt ein lokales Koordinatensystem einer Untermannigfaltigkeit in $H \cap U$ zu konstruieren, versucht man zuerst eine Unter-Lie-Algebra $\mathfrak{h}_U$ von $H \cap U$ in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G zu konstruieren. Wenn das gelingt, kann man $\mathfrak{h}_U$ exponentieren und hat das gesuchte lokale Koordinatensystem der Untermannigfaltigkeit $H \cap U$.

1. Sei $H' := \log(H \cap U)$, dann liegt H' in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Lie-Gruppe G. Wir statten $\mathfrak{g}$ mit einer euklidischen Metrik aus. Sei $h_n \in H'$ eine Folge, die gegen $\hat{0}$ in H' konvergiere, so daß $h_n/|h_n| \to X \in \mathfrak{g}$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt dann $\exp(tX) \in H$, denn:

$$|h_n| \to 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} t\frac{h_n}{|h_n|} \to tX \ .$$

Da $|h_n| \to 0$, gibt es eine Folge $m_n \in \mathbb{Z}$, so daß $m_n|h_n| \to t$, und damit

$$\exp(m_n h_n) = \exp(m_n|h_n|\frac{h_n}{|h_n|}) \to \exp(tX) \ .$$

$$\exp(m_n h_n) = (\exp(h_n))^{m_n} \in H \quad \text{und}\, H \,\text{ist abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad \exp(tX) \in H \ .$$

2. Die Menge $W := \{cX \,|\, X = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{|h_n|} \ , \ h_n \in H' \ , \ c \in \mathbb{R}\}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathfrak{g}$, denn:

$$X, Y \in W \quad \Rightarrow \quad \exp(tX) \in H \ , \ \exp(tY) \in H \quad \Rightarrow \quad \exp(tX)\exp(tY) \in H \quad \Rightarrow$$

$$\exp(tX)\exp(tY) \in H \cap U \quad \text{für}\ t \to 0,\ t > 0, \quad \Rightarrow$$

$$h(t) := \log(\exp(tX)\exp(tY)) \in H' \quad \text{für}\ t \to 0,\ t > 0, \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{h(t)}{t} = (X+Y) \in H' \quad \text{und} \quad \frac{h(t)}{|h(t)|} \in W \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{h(t)}{|h(t)|} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{h(t)}{t}\frac{t}{|h(t)|} = \frac{X+Y}{|X+Y|} \in W \subseteq H' \subseteq \mathfrak{g} \ .$$

3. Also hat W eigentlich fast alle Eigenschaften, die man für die Unter-Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ verlangt. Offen ist nur noch die Frage, ob womöglich auch Elemente aus $\mathfrak{g}\backslash W$ durch die

Exponentialfunktion nach H abgebildet werden? Sei $D \in \mathfrak{g}$ das orthogonale Komplement zu W, also $\mathfrak{g} = W \oplus D$. Dann ist D als ein endlicher Vektorraum abgeschlossen. Wir erklären die Abbildung

$$\exp_2 : W \oplus D\,, \quad (X,Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y)\ ,$$

die in einer Umgebung des Ursprungs invertierbar ist. Wir wählen eine Folge

$$(X_n, Y_n) \in W \oplus D \quad \text{mit} \quad X_n, Y_n \neq 0\ ,\ \lim_{n\to\infty}(X_n, Y_n) = 0\ ,\ \exp(X_n)\exp(Y_n) \in H\ .$$

Da D abgeschlossen ist gibt es eine Folge $\frac{Y_n}{|Y_n|} \to Y \in D$. Nun liegt $\exp(X_n) \in H$ und H ist eine Untergruppe, also liegt auch $\exp(Y_n) \in H$ und damit liegen $Y_n \in H'$ und $Y \in W$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $Y \in D$ und also gibt es keine Elemente, die unter der Exponentialabbildung von D auf H abgebildet werden. Damit kann W tatsächlich mit der Unter-Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ der Unter-Gruppe H identifiziert werden, und damit hat H in der Umgebung von $\mathbb{1}$ das lokale Koordinatensystem von $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ und ist also eine Untermannigfaltigkeit von G. □

Hilfreich im Zusammenhang endlichdimensionaler Matrix-Lie-Gruppen und ihrer Algebren ist auch das folgende Lemma für Determinanten.

Lemma 21.3.9

$$\det(\mathbb{1} + t\hat{A}) = 1 + t\cdot\mathrm{tr}(\hat{A}) \quad \textit{für} \quad t \ll 1\ . \tag{21.3.15}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{1} + t\hat{A}) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{n} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} (\mathbb{1} + t\hat{A})_{1i_1} \cdots (\mathbb{1} + t\hat{A})_{ni_n} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{n} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} (\delta_{1i_1} + t\hat{A}_{1i_1}) \cdots (\delta_{ni_n} + t\hat{A}_{ni_n}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{n} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{1i_1} \cdots \delta_{1i_n} \\
&\quad + t \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{n} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} (\delta_{1i_1} \cdots \delta_{k-1,i_{k-1}} \delta_{k+1,i_{k+1}} \ldots \delta_{1i_n}) \hat{A}_{ki_k} + O(t^2) \\
&= 1 + t \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{n} \epsilon_{1,\ldots,k-1,i_k,k+1,\ldots,n}\, \hat{A}_{ki_k} + O(t^2) \\
&= 1 + t \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{1,\ldots,k-1,k,k+1,\ldots,n}\, \hat{A}_{kk} + O(t^2) \\
&= 1 + t\ \mathrm{tr}(\hat{A}) + O(t^2)\ .
\end{aligned}$$

□

Zunächst seien hier kurz einige Eigenschaften der $SU(n)$-Matrix-Lie-Gruppe, bzw. der $\mathfrak{su}(n)$ Matrix-Lie-Algebra, zusammengetragen. Sei $GL(n, \mathbb{C})$ die Lie-Gruppe der n-dimensionalen, invertierbaren Matrizen über $\mathbb{C}$. Sei $\hat{c} : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{C})$ eine Kurve in $GL(n, \mathbb{C})$ mit $\hat{c}(0) = \mathbb{1}$. In der Umgebung von $t = 0$ hat dann $\hat{c}(t)$ die Gestalt

$$\hat{c}(t) = \mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2) \ , \quad \text{mit } \hat{A} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ .$$

Daraus folgt $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$.

Sei $SL(n, \mathbb{C})$ die Untergruppe der n-dimensionalen Matrizen aus $GL(n, \mathbb{C})$ mit Determinate 1. Sei $\hat{c} : \mathbb{R} \to SL(n, \mathbb{C})$ eine Kurve in $SL(n, \mathbb{C})$ mit $\hat{c}(0) = \mathbb{1}$. In der Umgebung von $t = 0$ hat dann $\hat{c}(t)$ die Gestalt

$$\hat{c}(t) = \mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2) \ , \quad \text{mit } \hat{A} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow$$

$$\det(\hat{c}(t)) = \det(\mathbb{1} + t\hat{A}) = 1 + t \ \mathrm{tr}(\hat{A}) + O(t^2) \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{tr}(\hat{A}) = 0 \ .$$

Also besteht $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ aus den spurfreien n-dimensionalen Matrizen von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ und es gilt $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = 2(n^2 - 1)$.

Sei $U(n)$ die Untergruppe der n-dimensionalen unitären Matrizen aus $GL(n, \mathbb{C})$. Sei $\hat{c} : \mathbb{R} \to U(n)$ eine Kurve in $U(n)$ mit $\hat{c}(0) = \mathbb{1}$. In der Umgebung von $t = 0$ hat dann $\hat{c}(t)$ die Gestalt

$$\hat{c}(t) = \mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2) \ , \quad \text{mit } \hat{A} \in \mathfrak{u}(n, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow$$

$$\hat{c}(t)\hat{c}^\dagger(t) \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \quad \Rightarrow$$

$$[\mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2)][\mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2)]^\dagger = 1 \quad \Rightarrow$$

$$t(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) = 0 + \hat{O}(t^2) \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = -\hat{A}^\dagger + \hat{O}(t) \ .$$

Also besteht $\mathfrak{u}(n)$ aus den schiefsymmetrisch-hermiteschen n-dimensionalen Matrizen von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ und es gilt $\dim \mathfrak{u}(n) = n^2$.

Die Lie-Gruppe $SU(n)$ ist die Untergruppe der n-dimensionalen unitären Matrizen mit Determinate 1 aus $GL(n, \mathbb{C})$, also $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.
Damit ist $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ mit $\dim \mathfrak{u}(n, \mathbb{C}) = n^2 - 1$.

Achtung: wir folgen hier der Schreibweise, daß $\mathfrak{u}(n)$ und $\mathfrak{su}(n)$ immer die reellen Lie-Algebren bezeichnen möge, und $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}$ die komplexifizierten Lie-Algebren.

Unter der Komplexifizierung einer reellen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ versteht man den Übergang von dem reellen Vektorraum V, über dem $\mathfrak{g}$ definiert ist, zu einem komplexen Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$. Dies ist eindeutig möglich, denn für die Lie-Klammer gilt mit $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}[i(X_1 + iX_2), (Y_1 + iY_2)] &= [(iX_1 - X_2), (Y_1 + iY_2)] \\ &= -[X_2, Y_1] - [X_1, Y_2] + i([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i[(X_1 + iX_2), (Y_1 + iY_2)] &= i\{[(X_1, Y_1] - [(X_2, Y_2] + i([(X_2, Y_1] + [(X_1, Y_2])\} \\ &= -[(X_2, Y_1] - [(X_1, Y_2] + i([(X_1, Y_1] - [(X_2, Y_2]) \ .\end{aligned}$$

Also ist

$$[i(X_1 + iX_2), (Y_1 + iY_2)] = i[(X_1 + iX_2), (Y_1 + iY_2)] \ . \tag{21.3.16}$$

Auch die Jacobi-Identität bleibt bei einer Komplexifizierung gültig, denn sei etwa $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $Y, Z \in \mathfrak{g}$, dann ist die Jacobi-Identität komplex linear in X. Im nächsten Schritt erweitert man die Jacobi-Identität auf $Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ und dann auf $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Beispiel: Zum Beispiel ist $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, weil die schiefsymmetrisch hermiteschen Matrizen von $\mathfrak{u}(n)$ nach der Komplexifizierung eben nicht mehr schiefsymmetrisch hermitesch sind. Weiter gilt $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ und daraus folgt dann

$$\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \ . \tag{21.3.17}$$

$\square$

Élie Cartan führte die folgenden adjungierten Abbildungen Ad_A und ad_X auf einer Lie-Algebra ein.

Definition 21.3.10 *Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann kann man für jedes $A \in G$ und jedes $Y \in \mathfrak{g}$ die folgende lineare Adjungierte Abbildung $Ad_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definieren:*

$$Ad_A(Y) := AYA^{-1} \ . \tag{21.3.18}$$

Damit ist Ad eine Abbildung von G in die Menge der linearen invertierbaren Abbildungen von $\mathfrak{g}$, also $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$. Die Untergruppe $Ad(G) \subset GL(\mathfrak{g})$ heißt die adjungierte Gruppe, oder die adjungierte Darstellung von G.

Jetzt kann man das Differential von Ad an der Stelle der Identität $e \in G$ mit $Ad_A e = e$ betrachten. Diese lineare Abbildung Ad_* bildet den Tangentialraum $T_e(G) = \mathfrak{g}$ in den Tangentialraum $T_{Ad_A e}G = T_eG = \mathfrak{g}$ ab, also $Ad_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ und wird häufig auch als $ad := Ad_*$ bezeichnet.

Wenn man jetzt für ein festes $X \in \mathfrak{g}$ die Einparameteruntergruppe $A(t) = e^{tX} \in G$ betrachtet, so erhält man für $Y \in \mathfrak{g}$

$$Ad_{A(t)}(Y) = e^{tX} Y e^{-tX} \quad \text{und}$$

$$ad_X(Y) = Ad_{*X}(Y) = \frac{d}{dt}Ad_{A(t)}(Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{tX}Ye^{-tX})|_{t=0} = [X,Y]\ .$$

In Komponenten bzgl. einer Basis der Lie-Algebra bedeutet dies

$$(ad_X(Y))^\alpha = [X,Y]^\alpha = f_{\beta\gamma}{}^\alpha X^\beta Y^\gamma \quad \text{bzw.} \quad (ad_X)_\gamma{}^\alpha = f_{\beta\gamma}{}^\alpha X^\beta\ .$$

Die Abbildung ad erfüllt die Eigenschaften einer Derivations-Algebra, d.h. einer verallgemeinerten Leibnizregel, denn wegen der Jacobi-Identität in der Definition von $\mathfrak{g}$ gilt:

$$\begin{aligned} ad_{[X,Y]}(Z) &= [[X,Y],Z] = [Y,[Z,X]] + [X,[Y,Z]] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\ &= ad_X \cdot ad_Y(Z) - ad_Y \cdot ad_x(Z) = [ad_x, ad_Y](Z) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$ad_{[X,Y]} = [ad_x, ad_Y]\ . \tag{21.3.19}$$

Die parametrisierte Abbildung $Ad_{A(t)}$ kann man wie jede 1-Parametergruppe in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Exponentialfunktion $e^{tZ} := Ad_{A(t)}$ schreiben und dann ist

$$Z = \frac{d}{dt}(e^{tZ})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(Ad_{A(t)})|_{t=0} = ad_X \quad \Rightarrow$$

$$Ad_{e^{tX}} = e^{t\,ad_X}\ . \tag{21.3.20}$$

Damit kann man dann schreiben

$$\begin{aligned} Ad_{e^{tX}}Y &= (1 + t\,ad_X + \frac{t^2}{2}\,ad_X \cdot ad_X + \ldots)Y \\ &= Y + t[X,Y] + \frac{t^2}{2}[X,[X,Y]] + \ldots \end{aligned}$$

21.4 Der Satz von Baker-Campbell-Hausdorff

Es zeigt sich, daß für Elemente X, Y der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in einer Umgebung von 0, für welche die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus darstellt, sich das Ergebnis von $\exp(X) \cdot \exp(Y)$ als ein $\exp(Z)$ darstellen läßt, allerdings gilt $Z = X + Y$ nur bei kommutierenden X, Y. Falls $[X,Y] \neq 0$ ist, läßt sich Z als eine komplizierte Potenzreihe in X und Y schreiben - die nichttriviale Essenz des Baker-Campbell-Hausdorff Satzes ist nun, daß diese Potenzreihe ab dem zweiten Glied nur Kommutatoren von X und Y enthält. Wir folgen hier weitgehend Hall (2003), S. 70 ff. Hall behandelt in seiner schönen Einführung zwar nur Matrix Lie-Gruppen, aber in Bezug auf Lie-Algebren können wir uns ja auf den fundamentalen Satz von Ado stützen, demzufolge alle Lie-Algebren isomorph zu Matrizen aus $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ oder $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ sind.

Zum Beweis des BCH-Satzes ist der folgende Satz über die Ableitung der Exponentialabbildung hilfreich.

Satz 21.4.1 *Sei $Z : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$, dann gilt mit $\dot{Z}(t) := \frac{dZ(t)}{dt}$ für die Ableitung von $e^{Z(t)}$:*

$$\frac{d}{dt}e^{Z(t)} = e^{Z(t)} f(ad_{Z(t)}) \frac{dZ(t)}{dt} \quad \textit{mit } f(u) := \frac{1-e^{-u}}{u} \ , \tag{21.4.1}$$

$$\frac{d}{dt}e^{Z(t)} = e^{Z(t)} \left(\dot{Z}(t) - \frac{1}{2!}[Z(t), \dot{Z}(t)] + \frac{1}{3!}[Z(t), [Z(t), \dot{Z}(t)]] - \dots \right) \ . \tag{21.4.2}$$

Beweis. Sei $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ eine analytische Funktion auf $\mathfrak{g}$ und $Z(t)$ ein Operator in einem normierten Raum, dann ist per Definition $\frac{d}{dt} f(Z(t))|_{t=t_0}$ die Richtungsableitung (Fréchet-Ableitung) von f an der Stelle $t = t_0$ in Richtung $\dot{Z}(t_0) := \frac{dZ(t)}{dt}|_{t=t_0}$, d.h.

$$\frac{d}{dt} f(Z(t))|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} f(Z(t_0) + t\dot{Z}(t_0)) \ ,$$

wobei dieser Ausdruck linear in $\dot{Z}(t_0)$ ist. Also genügt es, die Behauptung des Satzes für $Z(t) := Z(0) + t\dot{Z}(0) := X + tY$ an der Stelle $t = 0$ zu beweisen, d.h. wir wollen zeigen

$$\frac{d}{dt}e^{X+tY}|_{t=0} = e^X f(ad_X)Y \quad \text{mit } f(u) := \frac{1-e^{-u}}{u} \ ,$$

$$\frac{d}{dt}e^{X+tY}|_{t=0} = e^X \left(Y - \frac{1}{2!}[X,Y] + \frac{1}{3!}[X,[X,Y]] - \dots \right) \ .$$

Zunächst einmal gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$e^{X+tY} = \{\exp(\frac{X}{m} + t\frac{Y}{m})\}^m \ .$$

Jetzt wenden wir beim Differenzieren auf der rechten Seite die Produktregel an und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{X+tY}|_{t=0} &= \sum_{k=0}^{m-1} \{\exp(\frac{X}{m})\}^{m-k-1} \{\frac{d}{dt}\exp(\frac{X}{m} + t\frac{Y}{m})|_{t=0}\} \{\exp(\frac{X}{m})\}^k \\
&= \{\exp(\frac{m-1}{m}X)\} \sum_{k=0}^{m-1} \{\exp(\frac{X}{m})\}^{-k} \{\frac{d}{dt}\exp(\frac{X}{m} + t\frac{Y}{m})|_{t=0}\} \{\exp(\frac{X}{m})\}^k \\
&= \{\exp(\frac{m-1}{m}X)\} \sum_{k=0}^{m-1} \{\exp(\frac{X}{m})\}^{-k} \{\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\exp(\frac{X}{m} + tY)|_{t=0}\} \{\exp(\frac{X}{m})\}^k \\
&= \{\exp(\frac{m-1}{m}X)\} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \{Ad_{X/m}\}^{-k} \{\frac{d}{dt}\exp(\frac{X}{m} + tY)|_{t=0}\} \\
&= \{\exp(\frac{m-1}{m}X)\} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \{\exp(-ad_{X/m})\}^{k} \{\frac{d}{dt}\exp(\frac{X}{m} + tY)|_{t=0}\}
\end{aligned}$$

$$= \{\exp(\frac{m-1}{m}X)\}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\{\exp(-\frac{k}{m}ad_X)\}\{\frac{d}{dt}\exp(\frac{X}{m}+tY)|_{t=0}\} \ .$$

Dies gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$, also können wir diesen Ausdruck auch für $m \to \infty$ untersuchen:

$$\lim_{m\to\infty}\{\exp(\frac{m-1}{m}X)\} = e^X \ ,$$

$$\lim_{m\to\infty}\{\frac{d}{dt}\exp(\frac{X}{m}+tY)|_{t=0}\} = \frac{d}{dt}\exp(tY)|_{t=0} = Y \ .$$

Also bleibt noch zu untersuchen

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\{\exp(-\frac{k}{m}ad_X)\} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(-\frac{k}{m}ad_X)^i$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\frac{k}{m})^i\}\frac{(-1)^i}{i!}(ad_X)^i \ .$$

Nun ist

$$\frac{k}{m} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m-1}(\frac{k}{m})^i < m\} \quad \Rightarrow \quad \{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\frac{k}{m})^i\} < 1 \ ,$$

und $||ad_X||$ ist beschränkt und damit ist die Reihe in i

$$\{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\frac{k}{m})^i\}\frac{(-1)^i}{i!}(ad_X)^i$$

absolut konvergent und wir können $\lim_{m\to\infty}$ und $\sum_{i=0}^{\infty}$ vertauschen:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\{\exp(-\frac{k}{m}ad_X)\} = \sum_{i=0}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\{\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{m}(\frac{k}{m})^i\}\frac{(-1)^i}{i!}(ad_X)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\{\int_0^1 ds(s)^i\}\frac{(-1)^i}{i!}(ad_X)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}\frac{(-1)^i}{i!}(ad_X)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(i+1)!}(ad_X)^i \ .$$

Wegen

$$\frac{1-e^{-u}}{u} = \frac{1}{u}(1-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}u^i) = \frac{1}{u}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}u^i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} u^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} u^i$$

folgt also letztlich

$$\frac{d}{dt} e^{X+tY}|_{t=0} = e^X (\frac{1 - e^{-ad_X}}{ad_X}) Y = e^X f(ad_X) Y \quad \text{mit } f(u) := \frac{1-e^{-u}}{u} \; .$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{X+tY}|_{t=0} &= e^X \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} (ad_X)^i Y \\ &= e^X \left(Y - \frac{1}{2!}[X,Y] + \frac{1}{3!}[X,[X,Y]] - \ldots \right) \; . \end{aligned}$$

□

Satz 21.4.2 (Baker-Campbell-Hausdorff) *Sei G eine Liegruppe mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und der Exponentialabbildung* $\exp : \mathfrak{g} \to G$*. Seien X, Y zwei Elemente der Lie-Algebra aus einer hinreichend kleinen Umgebung $V \subset \mathfrak{g}$ um $0 \in \mathfrak{g}$, dann gibt es ein $Z \in V \subset \mathfrak{g}$ mit*

$$e^Z = e^X e^Y \quad \textit{und} \tag{21.4.3}$$

$$Z = X + \left\{ \int_0^1 dt \, g(e^{ad_X} e^{t ad_Y}) \right\} Y \quad \textit{mit } g(u) := \frac{\log(u)}{1 - u^{-1}} \; , \tag{21.4.4}$$

$$Z = X + Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left\{ \int_0^1 dt \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} \, ad_X^i ad_Y^j \right)^n \right\} Y \; . \tag{21.4.5}$$

Z ist also gleich $X + Y$ plus eine Potenzreihe von Kommutatoren von X und Y.

Beweis. Sei $e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$, dann folgt für die Ableitung nach t mit Hilfe des vorausgegangenen Satzes

$$\frac{d}{dt} e^{Z(t)} = \begin{cases} \frac{d}{dt} e^X e^{tY} = e^X Y e^{tY} = e^X e^{tY} Y = e^{Z(t)} Y \; , \\ e^{Z(t)} \frac{1 - e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}} \frac{dZ(t)}{dt} \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1 - e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}} \frac{dZ(t)}{dt} = Y \; .$$

Wenn X und Y klein sind, d.h. in einer geeigneten Umgebung von $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ liegen, dann liegt wegen der Stetigkeit von G auch $Z(t)$ in V und ist ebenfalls klein und damit liegt

$$(\frac{1 - e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} (ad_{Z(t)})^i$$

in der Nähe von 1 und ist also invertierbar und damit folgt

$$\frac{dZ(t)}{dt} = (\frac{1 - e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}})^{-1} Y = (\frac{ad_{Z(t)}}{1 - (e^{ad_{Z(t)}})^{-1}}) Y \ .$$

Aus $\exp(ad_{Z(t)}) = \exp(ad_X)\exp(ad_{tY})$ folgt nun $ad_{Z(t)} = \log(\exp(ad_X)\exp(ad_{tY}))$ und damit ergibt sich

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \left(\frac{\log(e^{ad_X} e^{tad_Y})}{1 - (e^{ad_X} e^{tad_Y})^{-1}} \right) Y =: g(e^{ad_X} e^{tad_Y}) Y \quad \Rightarrow$$

$$Z(1) - Z(0) = Z - X = \int_0^1 dt \, g(e^{ad_X} e^{tad_Y}) Y \quad \Rightarrow$$

$$Z = X + \int_0^1 dt \, g(e^{ad_X} e^{tad_Y}) Y \ .$$

Für $g(u)$ gilt die folgende Reihenentwicklung

$$g(u) = \frac{\log(u)}{1 - u^{-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} (u-1)^n$$

und mit

$$u - 1 = e^{ad_X} e^{tad_Y} - 1 = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} (ad_X)^i (ad_Y)^j$$

ergibt sich für $Z = Z(1)$ die Reihenentwicklung

$$Z = X + Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left\{ \int_0^1 dt \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} \, ad_X^i ad_Y^j \right)^n \right\} Y \ . \qquad \square$$

Sehr hilfreich für die Darstellungstheorie ist diese Folgerung aus dem BCH-Satz.

Korollar 21.4.3 *Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G und sei π ein Lie-Algebra Homomorphismus $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Wenn X und Y klein sind, d.h. in einer geeigneten Umgebung von $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ liegen, so daß der BCH-Satz gilt, dann folgt*

$$\pi(\log(e^X e^Y)) = \log(e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)}) \ . \tag{21.4.6}$$

Beweis. Für die Funktion $g(u) = \frac{\log(u)}{1-u^{-1}}$ aus dem BCH-Satz gilt

$$X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad ad_X, ad_Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad g(e^{ad_X} e^{tad_Y})(Y) \in \mathfrak{g} \ .$$

Da π ein Lie-Algebra Homomorphismus ist folgt:

$$\pi(ad_Y(X)) = \pi([Y, X]) = [\pi(Y), \pi(X)] = ad_{\pi(Y)}(\pi(X)) \quad \Rightarrow$$

$$\pi((ad_Y)^n(X)) = \pi((ad_Y)^{n-1}[Y, X]) = \ldots = (ad_{\pi(Y)})^n(\pi(X)) \quad \Rightarrow$$

$$\pi(e^{tad_Y}(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \pi((ad_Y)^i(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}((ad_{\pi(Y)})^i(\pi(X)) = e^{tad_{\pi(Y)}}(\pi(X)) \quad \Rightarrow$$

$$\pi((e^{ad_X} e^{tad_Y})(X)) = (e^{ad_{\pi(X)}} e^{tad_{\pi(Y)}})(\pi(X)) \quad \Rightarrow$$

$$\pi(\log(e^X e^Y)) = \pi \left(X + Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left\{ \int_0^1 dt \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} ad_X^i ad_Y^j \right)^n \right\} Y) \right)$$

$$= \pi(X) + \pi(Y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left\{ \int_0^1 dt \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} (ad_{\pi(X)})^i (ad_{\pi(Y)})^j \right)^n \right\} \pi(Y)$$

$$= \log(e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)}) \ .$$

□

21.5 Killing-Formen

Man kann nun in einer Lie-Algebra eine bilineare Form einführen, die den Namen *Killing-Form* trägt, obwohl ihre eigentliche Einführung und Anwendung auf die Theorie der Lie-Algebren in der Dissertation von Élie Cartan im Jahr 1894 erfolgte.

Definition 21.5.1 *Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$, dann heißt die folgende Bilinearform eine Killing-Form:*

$$\langle X \mid Y \rangle := \mathrm{tr}(ad_X \cdot ad_Y) \ . \tag{21.5.1}$$

Die Symmetrie und Bilinearität sieht man unmittelbar aus den Eigenschaften der Spur und der Linearität von *ad*. Darüber hinaus gilt noch die folgende Eigenschaft für die Killing-Form

$$\langle ad_X Y \mid Z \rangle + \langle Y \mid ad_X Z \rangle = \langle [X, Y] \mid Z \rangle + \langle Y \mid [X, Z] \rangle = 0 \ . \tag{21.5.2}$$

Beweis. $X, Y, Z, V \in \mathfrak{g}$, dann folgt

$$\mathrm{tr}(ad_{XY}V) = \mathrm{tr}([XY, V]) = \mathrm{tr}(XYV - VXY)\ ,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(ad_X \cdot ad_Y V) &= \mathrm{tr}(ad_X[Y,V]) = \mathrm{tr}([X,[Y,V]]) \\
&= \mathrm{tr}(X[Y,V] - [Y,V]X) = \mathrm{tr}(XYV - XVY - YVX + VYX) \\
&= \mathrm{tr}(XYV - VXY + XVY - XVY) = \mathrm{tr}(XYV - VXY) \\
&= \mathrm{tr}(ad_{XY}V)\ .
\end{aligned}$$

$$\langle [X,Y] \mid Z\rangle = \mathrm{tr}(ad_{[X,Y]} \cdot ad_Z) = \mathrm{tr}(ad_X \cdot ad_Y \cdot ad_Z - ad_Y \cdot ad_X \cdot ad_Z)\ ,$$

$$\begin{aligned}
\langle Y \mid [X,Z]\rangle &= \mathrm{tr}(ad_Y \cdot ad_{[X,Z]}) = \mathrm{tr}(ad_Y \cdot ad_X \cdot ad_Z - ad_Y \cdot ad_Z \cdot ad_X) \\
&= \mathrm{tr}(ad_Y \cdot ad_X \cdot ad_Z - ad_X \cdot ad_Y \cdot ad_Z) \\
&= -\langle [X,Y] \mid Z\rangle\ .
\end{aligned}$$

□

Die Killing-Form ist invariant unter Automorphisen:

Lemma 21.5.2 *Seien $\mathfrak{g}$ eine reelle oder komplexe Lie-Algebra, $X, Y \in \mathfrak{g}$, und $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein Automorphismus, dann gilt*

$$\langle \varphi(X) \mid \varphi(Y)\rangle = \langle X \mid Y\rangle\ . \tag{21.5.3}$$

Beweis. Da φ ein Automorphismus ist gilt $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(X)]$ und daraus folgt

$$ad_{\varphi(X)}(Y) = [\varphi(X), Y] = \varphi([X, \varphi^{-1}(Y)]) = \varphi(ad_X(\varphi^{-1}(Y))) \quad \Rightarrow$$

$$ad_{\varphi(X)} = \varphi \circ ad_X \circ \varphi^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(X) \mid \varphi(Y)\rangle &= \mathrm{tr}(ad_{\varphi(X)} \cdot ad_{\varphi(Y)}) \\
&= \mathrm{tr}(\varphi \circ ad_X \circ \varphi^{-1} \cdot \varphi \circ ad_Y \circ \varphi^{-1}) \\
&= \mathrm{tr}(ad_X \cdot ad_Y) = \langle X \mid Y\rangle\ .
\end{aligned}$$

□

In Komponenten bzgl. einer Basis der Lie-Algebra kann man die Killing-Form schreiben als:

$$\begin{aligned}
\langle X \mid Y\rangle &= \mathrm{tr}((ad_X)_\gamma{}^\alpha (ad_Y)_\beta{}^\gamma) = (ad_X)_\gamma{}^\alpha (ad_Y)_\alpha{}^\gamma \\
&= f_{\beta\gamma}{}^\alpha X^\beta f_{\epsilon\alpha}{}^\gamma Y^\epsilon = (f_{\beta\gamma}{}^\alpha f_{\epsilon\alpha}{}^\gamma) X^\beta Y^\epsilon\ .
\end{aligned}$$

Wenn man $\langle X \mid Y \rangle$ als eine Art Skalarprodukt auffaßt, dann spielt das Produkt der Strukturkonstanten die Rolle eines 2-stufigen kovarianten metrischen Tensors, den man den Cartanschen Metriktensor der Lie-Algebra nennt:

$$g_{\mathfrak{g},\alpha\beta} := f_{\alpha\gamma}{}^{\kappa} f_{\beta\kappa}{}^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \langle X \mid Y \rangle = g_{\mathfrak{g},\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} \; . \tag{21.5.4}$$

Die Killing-Form einer komplexen Lie-Algebra ist im Allgemeinen eine komplexe Zahl und auch die Killing-Form einer reellen Lie-Algebra kann im allgemeinen Fall entartet sein, denn z.B. bei einer kommutativen Lie-Algebra sind ja alle Strukturkonstanten $f_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = 0$.

Satz 21.5.3 *Für die Killing-Form in* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n},\mathbb{C})$ *gilt*

$$\langle X \mid Y \rangle = 2n \operatorname{tr}(XY) - 2 \operatorname{tr}(X) \operatorname{tr}(Y) \; . \tag{21.5.5}$$

Beweis. Die Standard-Basis in $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n},\mathbb{C})$ ist die sog. Weyl-Basis, eine Menge von Matrizen $T_{\alpha\beta}$, die nur an der Position $\alpha\beta$ eine 1 und ansonsten überall eine 0 aufweisen, also: $(T_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}$. Man beachte: die Matrizen der Weyl-Basis werden mit dem Doppelindex $\alpha\beta$ nummeriert. Sei also X eine Matrix aus $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n},\mathbb{C})$, dann kann X als Linearkombination $X = T_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}$ geschrieben werden. Jetzt suchen wir die Strukturkonstanten von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n},\mathbb{C})$ und betrachten dazu den Kommutator

$$\begin{aligned}
([T_{\alpha\beta}\, , \, T_{\alpha'\beta'}])_{\mu\nu} &= (T_{\alpha\beta}T_{\alpha'\beta'})_{\mu\nu} - (T_{\alpha'\beta'}T_{\alpha\beta})_{\mu\nu} \\
&= \sum_{\lambda=1}^{n} \{(T_{\alpha\beta})_{\mu\lambda}(T_{\alpha'\beta'})_{\lambda\nu} - (T_{\alpha'\beta'})_{\mu\lambda}(T_{\alpha\beta})_{\lambda\nu}\} \\
&= \sum_{\lambda=1}^{n} \{\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\alpha'\lambda}\delta_{\beta'\nu} - \delta_{\alpha'\mu}\delta_{\beta'\lambda}\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\nu}\} \\
&= \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\beta'\nu} - \delta_{\alpha'\mu}\delta_{\beta'\alpha}\delta_{\beta\nu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta'\nu}\delta_{\beta\alpha'} - \delta_{\alpha'\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\beta'\alpha} \\
&= (T_{\alpha\beta'})_{\mu\nu}\delta_{\beta\alpha'} - (T_{\alpha'\beta})_{\mu\nu}\delta_{\beta'\alpha} \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$[T_{\alpha\beta}\, , \, T_{\alpha'\beta'}] = T_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'} - T_{\alpha'\beta}\delta_{\beta'\alpha} \; .$$

Damit folgen die Strukturkonstanten von $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ in der Weyl-Basis (Doppelindizes)

$$f_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}{}^{\gamma\epsilon} = \delta_{\beta\alpha'}\delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\epsilon}_{\beta'} - \delta_{\beta'\alpha}\delta^{\gamma}_{\alpha'}\delta^{\epsilon}_{\beta} \; ,$$

und daraus der Cartansche Metriktensor in der Weyl-Basis (Doppelindizes)

$$\begin{aligned}
g_{\mathfrak{g},\alpha\beta,\alpha'\beta'} &= f_{\alpha\beta,\gamma\epsilon}{}^{\kappa\lambda} f_{\alpha'\beta',\kappa\lambda}{}^{\gamma\epsilon} \\
&= (\delta_{\beta\gamma}\delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\epsilon} - \delta_{\epsilon\alpha}\delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta})(\delta_{\beta'\kappa}\delta^{\gamma}_{\alpha'}\delta^{\epsilon}_{\lambda} - \delta_{\lambda\alpha'}\delta^{\gamma}_{\kappa}\delta^{\epsilon}_{\beta'}) \\
&= (\delta_{\beta\gamma}\delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\epsilon}\delta_{\beta'\kappa}\delta^{\gamma}_{\alpha'}\delta^{\epsilon}_{\lambda} + \delta_{\epsilon\alpha}\delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta}\delta_{\lambda\alpha'}\delta^{\gamma}_{\kappa}\delta^{\epsilon}_{\beta'})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (\delta_{\beta\gamma}\delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\epsilon}\delta_{\lambda\alpha'}\delta^{\gamma}_{\kappa}\delta^{\epsilon}_{\beta'} + \delta_{\epsilon\alpha}\delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta}\delta_{\beta'\kappa}\delta^{\gamma}_{\alpha'}\delta^{\epsilon}_{\lambda}) \\
= {}& (n\delta_{\beta\gamma}\delta^{\kappa}_{\alpha}\delta_{\beta'\kappa}\delta^{\gamma}_{\alpha'} + n\delta_{\epsilon\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta}\delta_{\lambda\alpha'}\delta^{\epsilon}_{\beta'}) \\
&- (\delta_{\beta\gamma}\delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta'}\delta_{\lambda\alpha'} + \delta_{\epsilon\alpha}\delta^{\kappa}_{\alpha'}\delta^{\epsilon}_{\beta}\delta_{\beta'\kappa}) \\
= {}& n(\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\beta'\alpha} + \delta_{\beta'\alpha}\delta_{\beta\alpha'}) - (\delta_{\beta\alpha}\delta_{\beta'\alpha'} + \delta_{\beta\alpha}\delta_{\beta'\alpha'}) \\
= {}& 2n\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\beta'\alpha} - 2\delta_{\beta\alpha}\delta_{\beta'\alpha'} \ .
\end{aligned}
$$

Und damit folgt für die Killing-Form (berechnet in der Weyl-Basis mit Doppelindizes):

$$
\begin{aligned}
\langle X \mid Y\rangle &= g_{\mathfrak{g},\alpha\beta,\alpha'\beta'}X^{\alpha\beta}Y^{\alpha'\beta'} \\
&= (2n\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\beta'\alpha} - 2\delta_{\beta\alpha}\delta_{\beta'\alpha'})X^{\alpha\beta}Y^{\alpha'\beta'} \\
&= 2nX^{\alpha\beta}Y_{\beta\alpha} - 2X^{\alpha}{}_{\alpha}Y^{\alpha'}{}_{\alpha'} \\
&= 2n\,\mathrm{tr}(XY) - 2\,\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y) \ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt sofort, daß die Killing-Form in $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n},\mathbb{C})$ entartet ist, denn

$$X := \lambda\mathbb{1} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow$$

$$\langle X \mid Y\rangle = 2n\,\mathrm{tr}(XY) - 2\,\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y) = 2n\lambda\,\mathrm{tr}(Y) - 2n\lambda\,\mathrm{tr}(Y) = 0 \ .$$

Achtung: In einer komplexen Lie-Algebra ist die Killing-Form immer indefinit!

Korollar 21.5.4 *Aus der Killing-Form für die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ folgt die Killing-Form für die Lie-Unteralgebren $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{u}(n)$ und $\mathfrak{su}(n)$, deren Matrizen alle spurfrei sind, zu*

$$\langle X \mid Y\rangle = 2n\,\mathrm{tr}(XY) \ . \tag{21.5.6}$$

Für die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{su}(n)$ ist die Killing-Form $\langle X \mid Y\rangle$ negativ definit, also ein echtes Skalarprodukt, denn die Matrizen $X \in \mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{u}(n,)$ sind schiefsymmetrisch-hermitesch, also sind die Matrizen $X' := iX$ hermitesch und lassen sich mittels einer Matrix U in eine reelle Diagonalmatrix Λ überführen:

$$
\begin{aligned}
-\langle X \mid X\rangle = \langle iX \mid iX\rangle = \langle X' \mid X'\rangle &= 2n\,\mathrm{tr}(X'X') \\
&= 2n\,\mathrm{tr}(U^{-1}UX'U^{-1}UX') = 2n\,\mathrm{tr}(UX'U^{-1}UX'U^{-1}) \\
&= 2n\,\mathrm{tr}(\Lambda\Lambda) = 2n\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{ii}^2 \geq 0 \ .
\end{aligned}
$$

Wenn es in der Lie-Algebra ein definites Skalarprodukt gibt, wie soeben bei $\mathfrak{su}(n)$ gezeigt, dann kann man mit Hilfe des Cartanschen Metriktensors $g_{\mathfrak{g},\alpha\beta}$ auch die vollständig kovarianten Strukturkonstanten $f_{\alpha\beta\gamma}$ betrachten und mit 21.3.13 und 21.3.14 zeigen, daß diese total antisymmetrisch sind:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma} &= f_{\alpha\beta}{}^{\kappa} g_{\mathfrak{g},\kappa\gamma} = f_{\alpha\beta}{}^{\kappa}(f_{\kappa\nu}{}^{\mu} f_{\gamma\mu}{}^{\nu}) = (f_{\alpha\beta}{}^{\kappa} f_{\kappa\nu}{}^{\mu}) f_{\gamma\mu}{}^{\nu} \\ &= (f_{\nu\kappa}{}^{\mu} f_{\beta\alpha}{}^{\kappa}) f_{\gamma\mu}{}^{\nu} = (-f_{\alpha\kappa}{}^{\mu} f_{\nu\beta}{}^{\kappa} - f_{\beta\kappa}{}^{\mu} f_{\alpha\nu}{}^{\kappa}) f_{\gamma\mu}{}^{\nu} \\ &= f_{\alpha\kappa}{}^{\mu} f_{\beta\nu}{}^{\kappa} f_{\gamma\mu}{}^{\nu} + f_{\nu\alpha}{}^{\kappa} f_{\kappa\beta}{}^{\mu} f_{\mu\gamma}{}^{\nu} \ . \end{aligned}$$

Jetzt ist $f_{\alpha\beta\gamma}$ antisymmetrisch in α, β und invariant unter zyklischen Permutationen von α, β, γ, also ist $f_{\alpha\beta\gamma}$ total antisymmetrisch:

$$f_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3!} f_{\alpha\beta\gamma} \ . \tag{21.5.7}$$

Satz 21.5.5 *Wenn $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer kompakten Lie-Gruppe G ist, dann gibt es in $\mathfrak{g}$ eine positiv definite quadratische Form $(\cdot, \cdot)$, welche die folgende Bedingung erfüllt*

$$([X, Y] \mid Z) + (Y \mid [X, Z]) = 0 \ .$$

Beweis. Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $(X, X)_0$ irgendeine positiv definite quadratische Form auf $\mathfrak{g}$, also z.B. $\sum_{\alpha=1}^{n} (X^\alpha)^2$. Sei $A \in G$, dann kann man, weil G kompakt ist, mittels des folgende Hurwitz-Integrals mit dem Haar-Maß dA eine neue positiv definite quadratische Form $(\cdot, \cdot)$ auf $\mathfrak{g}$ bilden:

$$(X, X) := \int_G (Ad_A(X), Ad_A(X))_0 \, dA \ .$$

Wegen der Invarianz des Haar-Maßes gegenüber einer Linkstranslation und wegen $Ad_A Ad_B = Ad_{AB}$ gilt

$$\begin{aligned} (Ad_B Y, Ad_B Z) &= \int_G (Ad_A Ad_B(Y), Ad_A Ad_B(Z))_0 \, dA = \int_G (Ad_{AB}(Y), Ad_{AB}(Z))_0 \, dA \\ &= \int_G (Ad_A(Y), Ad_A(Z))_0 \, dA = (Y, Z) \ . \end{aligned}$$

Sei $B = e^{tX}$, dann folgt

$$0 = \frac{d}{dt}(Y, Z)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(Ad_B Y, Ad_B Z)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_G (Ad_A Ad_B(Y), Ad_A Ad_B(Z))_0 \, dA|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_G (Ad_A(e^{tX} Y e^{-tX}), Ad_A(e^{tX} Z e^{-tX}))_0 \, dA|_{t=0}$$

$$= \int_G \{(Ad_A(X e^{tX} Y e^{-tX} - e^{tX} Y e^{-tX} X), Ad_A(e^{tX} Z e^{-tX}))_0$$

$$+ (Ad_A(e^{tX} Y e^{-tX}), Ad_A(X e^{tX} Z e^{-tX} - e^{tX} Z e^{-tX} X))_0\} \, dA|_{t=0}$$

$$= \int_G \{(Ad_A(XY - YX), Ad_A(Z))_0 + (Ad_A(Y), Ad_A(XZ - ZX))_0\} \, dA$$

$$= ([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) \, . \qquad \square$$

Wir haben oben gesehen, daß die Killing-Form immer die folgende Bedingung $\langle [X, Y] \mid Z \rangle) + \langle Y \mid [X, Z] \rangle = 0$ erfüllt, aber eben nicht immer negativ definit ist. Zum Beispiel ist die Lie-Gruppe $SU(n)$ kompakt und in der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$ ist die negative Killing-Form $(-\langle X \mid X \rangle)$ eine positiv definite quadratische Form.

Dieses Ergebnis gibt Anlaß zu der Definition der 'Kompaktheit' einer LieAlgebra:

Definition 21.5.6 *Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt kompakt, wenn es in $\mathfrak{g}$ eine positiv definite quadratische Form $(\cdot, \cdot)$ gibt, welche für $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ die folgende Bedingung erfüllt*

$$([X, Y] \mid Z) + (Y \mid [X, Z]) = 0 \, . \tag{21.5.8}$$

Weyl hat die folgende Erweiterung des obigen Satzes bewiesen:

Satz 21.5.7 (Weyl) *Eine reelle Lie-Gruppe ist genau dann kompakt, wenn ihre Killing-Form negativ definit ist.*

Der Beweis dieses Satzes ist aufwendig und findet sich in einer Kurzform in Sattinger u. Weaver (1986), S. 154 und ausführlich z.B. in Varadarajan (1984), S. 345.

21.6 Die Lie-Gruppen $SO(3)$ und $Spin(3) \simeq SU(2)$

Die orthogonale Gruppe $O(n)$ ist die Matrix-Lie-Gruppe aller n-dimensionalen reellen orthogonalen Matrizen. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ und $A \in O(n)$ dann gilt

$$\langle Ax \mid Ax \rangle = \langle x \mid A^T A x \rangle = \langle x \mid x \rangle \quad \Rightarrow \quad A^T A = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \det A = \pm 1 \, . \tag{21.6.1}$$

Damit zerfällt $O(n)$ in zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten mit $\det A = \pm 1$. Die Teilmenge von $O(n)$ mit $\det A = +1$ heißt die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$. Wir hatten in 21.1.8 gesehen, daß $SO(n)$ pfadzusammenhängend ist. Allerdings ist $SO(n)$ nicht einfach zusammenhängend, siehe 15.2.4, und deswegen geht man in der

Darstellungstheorie zur Universellen Überlagerungsgruppe von $SO(n)$ über, welche als $Spin(n)$ bezeichnet wird. Dabei gilt $SO(n) \simeq Spin(n)/\mathbb{Z}_2$, was man häufig auch in der folgenden *kurzen exakten Sequenz* von Lie-Gruppen ausdrückt (d.h. das Bild einer Abbildung = der Kern der Folgeabbildung):

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(n) \to SO(n) \to 1 \; . \tag{21.6.2}$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß für den 3-dimensionalen Fall die Lie-Gruppe $Spin(3)$, die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$, gerade isomorph zu $SU(2)$ ist.

Achtung: Für $n \geq 4$ ist die Lie-Gruppe $Spin(n)$, die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(n)$, nicht mehr isomorph zu $SU(n-1)$.

Satz 21.6.1 *Die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$ ist $SU(2)$.*

Beweis. Wenn $A \in SU(2)$ dann gilt $AA^\dagger = \mathbb{1}$ und $\det A = 1$. Seien also $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, dann folgt

$$AA^\dagger = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (|z_1|^2 + |z_2|^2) & (z_1 z_3^* + z_2 z_4^*) \\ (z_1 z_3^* + z_2 z_4^*)^* & (|z_3|^2 + |z_4|^2) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1 \\ z_1 z_3^* + z_2 z_4^* = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad z_2 = -\frac{1}{z_4^*} z_1 z_3^* \; .$$

$$\det A = z_1 z_4 - z_2 z_3 \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad z_2 = \frac{1}{z_3}(z_1 z_4 - 1) \; .$$

$$-\frac{1}{z_4^*} z_1 z_3^* = \frac{1}{z_3}(z_1 z_4 - 1) \quad \Rightarrow \quad -z_1 |z_3|^2 - z_1 |z_4|^2 = -z_4^* \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_4^* \; .$$

$$\det A = z_1 z_4 - z_2 z_3 = |z_1|^2 - z_2 z_3 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 - |z_2|^2 - z_2 z_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad z_2 z_2^* = -z_2 z_3 \quad \Rightarrow \quad z_3 = -z_2^* \; .$$

Damit kann also jede Matrix $A \in SU(2)$ geschrieben werden als

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + i x_4 & x_2 + i x_3 \\ -(x_2 - i x_3) & x_1 - i x_4 \end{pmatrix}$$

mit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, bzw. mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Die Bedingung $\det A = 1$ bedeutet dann $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 1$ und das ist gerade die Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Also ist $SU(2) \simeq S^3$ und von der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit S^3 hatten wir bereits in 15.2.4 gesehen, daß $SO(3) = S^3/\{+1, -1\} = S^3/\mathbb{Z}_2$ ist. Also ist $SU(2)$ die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$. □

Als nächstes soll die Projektion von $SU(2)$ auf $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ konstruiert werden.

Wir hatten oben für die Lie-Algebra von $SU(2)$ gefunden: $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{u}(2) \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, d.h. $\mathfrak{su}(2)$ besteht aus schiefsymmetrisch-hermiteschen, spurfreien, 2-dimensionalen Matrizen. Physiker gehen traditionell zum Raum $i \cdot \mathfrak{su}(2)$, dem Raum der hermiteschen, spurfreien, 2-dimensionalen Matrizen, über. Eine Basis von $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ stellen die Pauli-Matrizen dar:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{21.6.3}$$

Mit den Pauli-Matrizen kann man einen linearen Isomorphismus $\mathfrak{X} : \mathbb{R}^3 \to i \cdot \mathfrak{su}(2)$ definieren:

$$x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{X}(x) := X := x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} . \tag{21.6.4}$$

Die Umkehrabbildung $\mathfrak{X}^{-1} : i \cdot \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}^3$ ist dann gerade

$$x^i := \mathfrak{X}^{-1}(X) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X\sigma_i) . \tag{21.6.5}$$

Dies ist (bis auf den Normierungsfaktor) gerade eine positiv definite Killing-Form, denn oben (21.5.6) hatten wir gesehen, daß für $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ die Killing-Form $\langle X \mid Y \rangle = 4 \operatorname{tr}(XY)$ ein negativ definites Skalarprodukt ist, und damit ist für $X, Y \in i \cdot \mathfrak{su}(2)$ die Killing-Form ein positiv definites Skalarprodukt.

Nun kann man für jedes $U \in SU(2)$ und jedes $X \in i \cdot \mathfrak{su}(2)$ die adjungierte Abbildung $Ad_U : i \cdot \mathfrak{su}(2) \to i \cdot \mathfrak{su}(2)$ betrachten:

$$Ad_U(X) := UXU^{-1} . \tag{21.6.6}$$

Das Skalarprodukt ergibt nun für $X, Y \in i \cdot \mathfrak{su}(2)$:

$$\langle Ad_U(X) \mid Ad_U(Y) \rangle = 4 \operatorname{tr}(UXU^{-1}UYU^{-1}) = 4 \operatorname{tr}(XY) = \langle X \mid Y \rangle . \tag{21.6.7}$$

Also ist Ad_U eine orthogonale Transformation auf dem Raum $i \cdot \mathfrak{su}(2)$.

Mit dem Isomorphismus $\mathfrak{X}^{-1} : \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}^3$ kann man jetzt von $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ nach $\mathbb{R}^3$ übergehen:

$$\tilde{Ad}_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } \tilde{Ad}_U := \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X} . \tag{21.6.8}$$

$\tilde{Ad}_U$ ist ebenso wie Ad_U stetig und auch ein Gruppen-Homomorphismus, also ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned}
\tilde{Ad}_{UU'}(x) &= \mathfrak{X}^{-1} Ad_{UU'} \mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_{UU'}(X) \\
&= \mathfrak{X}^{-1} UU'XU'^{-1}U^{-1} = \mathfrak{X}^{-1} U(U'XU'^{-1})U^{-1} \\
&= \mathfrak{X}^{-1} Ad_U(U'XU'^{-1}) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \circ Ad_{U'}(X)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \circ Ad_{U'} \mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X} \circ \mathfrak{X}^{-1} Ad_{U'} \mathfrak{X}(x) \\
&= \tilde{A}d_U \circ \tilde{A}d_{U'}(x) \ .
\end{aligned}
$$

Mithilfe der Killingform auf $\mathfrak{su}(2)$ kann man nun das folgende Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definieren:

$$
\langle x \mid y \rangle_{\mathbb{R}^3} := \langle \mathfrak{X}(x) \mid \mathfrak{X}(y) \rangle \tag{21.6.9}
$$

und damit gilt für $\tilde{A}d_U(x)$

$$
\langle \tilde{A}d_U(x) \mid \tilde{A}d_U(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle Ad_U(X) \mid Ad_U(X) \rangle = \langle X \mid X \rangle = \langle x \mid x \rangle_{\mathbb{R}^3} \ . \tag{21.6.10}
$$

Also ist $\tilde{A}d_U$ eine orthogonale Transformation auf dem Raum $\mathbb{R}^3$. Damit ist die Abbildung $P : SU(2) \to O(3)$ mit $P(U) = \tilde{A}d_U$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus in den Raum $O(3)$. Nun hat $O(3)$ aber zwei verschiedene von einander getrennte Definitionsbereiche, nämlich mit det $= \pm 1$. Da nun $\tilde{A}d_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$ ist, bildet P das Einselement von $SU(2)$ auf das Einselement von $O(3)$ ab, also ist $P : SU(2) \to SO(3)$. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob die Projektion P auch surjektiv ist, ob also jedes Element von $SO(3)$ durch die Projektion eines Elements von $SU(2)$ erreicht werden kann. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt. Wegen $\tilde{A}d_U = \tilde{A}d_{-U}$ sieht man auch sofort, daß P eine zwei-zu-eins Abbildung ist, daß also $SU(2)$ die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$ mit $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ ist.

Beispiel: **Rotationen in $\mathbb{R}^3$ um die x^3-Achse.**

Rotationen in $\mathbb{R}^3$ um die x^3-Achse stellen eine 1-Parameter-Untergruppe von $SO(3)$ dar:

$$
R_3(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{21.6.11}
$$

Zum Vorzeichen: wir folgen hier der mathematischen Konvention, bei welcher man eine Drehung als Drehung des Koordinatensystems im mathematisch positiven Sinn, d.h. im Gegenuhrzeigersinn, darstellt. Im Gegensatz dazu verstehen Physiker unter einer Drehung zumeist die Drehung eines Vektors, ebenfalls im mathematisch positiven Sinn, bei festgehaltenem Koordinatensystem.

Das entsprechende Basiselement der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ist

$$
J_3 := \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{21.6.12}
$$

Tatsächlich ist $R_3(\theta) = \exp(\theta J_3)$, denn

$$
J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_3^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ J_3^3 = -J_3 \ , \ J_3^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,
$$

$$
\begin{aligned}
\exp(\theta J_3) &= \mathbb{1} + \theta J_3 + \frac{1}{2!}\theta^2 J_3^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 J_3^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 J_3^4 + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots & -\theta + \frac{1}{3!}\theta^3 - \dots & 0 \\ +\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots & 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (21.6.13)
\end{aligned}
$$

Jetzt geht man mittels $\mathfrak{X}$ von der Drehachse x^3 in den Raum $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ über und erhält für $y^3 = (0,0,1)^T$ gerade $\mathfrak{X}(y^3) = \sigma_3$. Die entsprechende 1-Parameter-Untergruppe von $SU(2,\mathbb{C})$ ist dann

$$
U(\theta) = \exp(\theta \frac{1}{i}\sigma_3) = \exp\begin{pmatrix} -i\theta & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} . \qquad (21.6.14)
$$

Die entsprechende $SU(2)$-Drehung in $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ ist dann

$$
\begin{aligned}
Ad_{U(\theta)}(X) &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\theta}x^3 & e^{-i\theta}(x^1 - ix^2) \\ e^{i\theta}(x^1 + ix^2) & -e^{i\theta}x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^3 & e^{-i2\theta}(x^1 - ix^2) \\ e^{i2\theta}(x^1 + ix^2) & -x^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \qquad (21.6.15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x'^1 &= x^1 \cos 2\theta - x^2 \sin 2\theta , \\
x'^2 &= x^1 \sin 2\theta + x^2 \cos 2\theta , \\
x'^3 &= x^3 .
\end{aligned}
$$

Wenn man wissen möchte welcher Drehung dies in $\mathbb{R}^3$ entspricht, dann geht man von $Ad_{U(\theta)}(X)$ zu $\tilde{A}d_{U(\theta)}(x)$ über:

$$
\begin{aligned}
x' = \tilde{A}d_{U(\theta)}(x) &= \mathfrak{X}^{-1} Ad_{U(\theta)} \mathfrak{X}(x) \\
&= \mathfrak{X}^{-1} \begin{pmatrix} x^3 & e^{-i2\theta}(x^1 - ix^2) \\ e^{i2\theta}(x^1 + ix^2) & -x^3 \end{pmatrix} \\
&= \mathfrak{X}^{-1} \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} . \tag{21.6.16}$$

Das heißt, einer $SU(2)$-Drehung um die $\mathfrak{X}(x)$ mit dem Winkel θ in $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ entspricht eine $SO(3)$-Drehung um die x^3-Achse mit dem Winkel 2θ in $\mathbb{R}^3$. Umgekehrt ausgedrückt gibt es also zu jeder $SO(3)$-Drehung eine entsprechende $SU(2)$-Drehung - und damit ist die Projektion $P : SU(2) \to SO(3)$ surjektiv. □

Die beiden in $SU(2)$ verschiedenen Drehungen um die Winkel π und 2π führen in $\mathbb{R}^3$ zum gleichen Punkt $2\pi \cong 4\pi$, was ja gerade die zwei-zu-eins Überdeckung von $SO(3)$ durch ihre Universelle Überlagerungsgruppe $SU(2)$ ausdrückt.

Seien $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$, $R_3(\theta) \in SO(3)$ Drehungen mit dem Winkel θ um die x^1, x^2, x^3-Achse in $\mathbb{R}^3$. Dann sind die entsprechenden Generatoren der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ gerade die Matrizen

$$J_1 = \frac{d}{d\theta} R_1(\theta)|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{21.6.17}$$

Daraus folgen die Vertauschungsrelationen der $\mathfrak{so}(3)$ Lie-Algebra:

$$[J_1, J_2] = J_3 \; , \; [J_2, J_3] = J_1 \; , \; [J_3, J_1] = J_2 \; ,$$

also

$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} \; . \tag{21.6.18}$$

Für die Pauli-Matrizen, die Basis von $i \cdot \mathfrak{su}(2)$, folgen die Vertauschungsrealtionen:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3 \; , \; [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1 \; , \; [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2 \; ,$$

also

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \; . \tag{21.6.19}$$

Mit

$$S_k := \frac{1}{2i}\sigma_k \quad \Rightarrow \quad [S_i, S_j] = f_{ij}{}^k S_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} \tag{21.6.20}$$

haben wir eine Basis von $\mathfrak{su}(2)$ gefunden. Diese stimmt in ihren Vertauschungsrelationen mit der Basis von $\mathfrak{so}(3)$ überein, was nicht überrascht, da $SU(2)$ als Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$ in einer Umgebung des $\mathbb{1}$-Elements mit $SO(3)$ übereinstimmt.

21.7 Die Lie-Gruppen $O(3,1)^{\uparrow}_{+}$ und $Spin(3,1) = SL(2,\mathbb{C})$

Zunächst noch eine kurze Bemerkung zur Bezeichnungsweise, die in der Literatur leider nicht eindeutig ist. Wir verwenden so wie Misner u. a. (1973) und die meisten *Relativisten* und *Geometer* bzgl. der Koordinaten $(x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^4$ die 'Plus'-Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$, was zwei Vorteile hat:

1. für *raumartig* gelegenen Punkte (also Punkte außerhalb einer Kausalitätsbeziehung) ist die Metrik positiv definit, d.h. es gilt $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0$, was von Vorteil bei der Lösung von Anfangswert-Problemen in der Allgemeinen Relativitätstheorie ist,
2. der Übergang zur euklidischen 3-Geometrie mit der Metrik $\text{diag}(+1, +1, +1)$ ist völlig natürlich.

Auch Weinberg (1995a) verwendet in seinem 3-bändigen Standardwerk *Quantum Theory of Fields* im Gegensatz zu zahlreichen anderen *Quantenphysikern* und *Algebraikern* diese Metrik.

Isomorph zu unserem Minkowski-Raum ist ein Minkowski-Raum, bei dem wir die Zeitkoordinate x^0 zu x^4 umbenennen, und bzgl. dieser Koordinaten-Umbenennung können wir dann von der Lorentzgruppe als $SO(3,1)$ sprechen. Diese Vorgehensweise haben etwa auch Freedman u. Van Proeyen (2012) gewählt, deren Bezeichnungsweise wir uns weitgehend anschließen.

Mit der Minkowski-Metrik

$$\langle x \mid y \rangle := \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \quad \text{mit } \mu, \nu \in \{0, \ldots, 3\}$$

gilt für die Lie-Gruppe der Lorentz-Transformationen $O(3,1)$:

$$O(3,1) := \{\Lambda^\mu_{\ \nu} | \langle \Lambda x \mid \Lambda y \rangle \overset{!}{=} \langle x \mid y \rangle,\ x, y \in \mathbb{R}^4\} \ .$$

Daraus folgt sofort für die Matrizen $\Lambda^\mu_{\ \nu}$ der Lorentz-Transformationen

$$\Lambda^\kappa_{\ \lambda} x^\lambda \eta_{\kappa\mu} \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu = x^\lambda \Lambda^\kappa_{\ \lambda} \eta_{\kappa\mu} \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu = x^\lambda \eta_{\lambda\nu} x^\nu \quad \Rightarrow$$

$$\Lambda^\kappa_{\ \lambda} \eta_{\kappa\mu} \Lambda^\mu_{\ \nu} = \eta_{\lambda\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \ . \tag{21.7.1}$$

Aus $\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta)$ folgt $\det(\Lambda) = \pm 1$. Und mit $e^T := (1, 0, 0, 0)^T$ folgt

$$\langle \Lambda e \mid \Lambda e \rangle = \begin{cases} \langle e \mid e \rangle = -1 \ , \\ -(\Lambda^0_{\ 0})^2 + (\Lambda^1_{\ 0})^2 + (\Lambda^2_{\ 0})^2 + (\Lambda^3_{\ 0})^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^0_{\ 0})^2 \geq 1 \ .$$

Also setzt sich $O(3,1)$ aus vier disjunkten Untergruppen zusammen:

$$O(3,1)^{\uparrow}_{+} := \{\Lambda \in O(3,1) \mid \det(\Lambda) = +1,\ \Lambda^0_{\ 0} \geq 1\} \ ,$$

$$O(3,1)^{\uparrow}_{-} := \{\Lambda \in O(3,1) \,|\, \det(\Lambda) = -1,\ \Lambda^0_{\ 0} \geq 1\} ,$$

$$O(3,1)^{\downarrow}_{+} := \{\Lambda \in O(3,1) \,|\, \det(\Lambda) = +1,\ \Lambda^0_{\ 0} \leq -1\} ,$$

$$O(3,1)^{\uparrow}_{-} := \{\Lambda \in O(3,1) \,|\, \det(\Lambda) = -1,\ \Lambda^0_{\ 0} \leq -1\} .$$

Die Untergruppe $O(3,1)^{\uparrow}_{+}$ wird als die eigentliche (+), orthochrone (↑) Lorentzgruppe bezeichnet. Da sie das $\mathbb{1}$-Element der Gruppe enthält stimmt sie mit $SO(3,1)$ überein. Von $O(3,1)^{\uparrow}_{+}$ kann man mittels einer Raumspiegelung $\mathcal{P}$, einer Zeitspiegelung $\mathcal{T}$, oder einer kombinierten Raumzeit-Spiegelung $\mathcal{PT}$ zu den anderen obigen Untergruppen übergehen.

Eine Lorentz-Transformation aus $SO(3,1)$, welche nur die Raumkoordinaten $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ transformiert, stellt einfach eine Drehung aus $SO(3)$ dar. Eine spezielle Lorentz-Transformationen aus $SO(3,1)$, die nur $(x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2$ transformiert, heißt Lorentz-Boost. Während wir sonst fast immer die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt haben, führen wir hier c in den folgenden Zeilen der Klarheit halber explizit auf. Damit schreibt man für einen Lorentz-Boost in x^3-Richtung:

$$\beta := \frac{v}{c} =: \tanh(\alpha) \ , \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \quad \cosh(\alpha) := \gamma \ , \quad \sinh(\alpha) := \beta\gamma \ , \tag{21.7.2}$$

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & 0 & \sinh(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\alpha) & 0 & 0 & \cosh(\alpha) \end{pmatrix} , \tag{21.7.3}$$

denn

$$\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1 \ , \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) &= (\frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}))^2 - (\frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}))^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2\alpha} + 2 + e^{-2\alpha} - e^{2\alpha} + 2 - e^{-2\alpha}) = 1 \ . \end{aligned}$$

Der Wertebereich von β ist $(-1,+1)$ und damit ist der Wertebereich von $\alpha = \tanh^{-1}(\frac{v}{c})$, der sog. *Rapidität*, der Bereich $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ und damit ist $SO(3,1)$ wegen der Lorentz-Boosts eine nichtkompakte Lie-Gruppe.

Lemma 21.7.1 *Für die Matrizen der Liegruppe $SL(n,\mathbb{C})$ gibt eine eindeutige Polarzerlegung, d.h. für $A \in SL(n,\mathbb{C})$ gibt es eine eindeutige Darstellung als $A = UH$ mit $U \in SU(n)$ und einer selbstadjungierten, positiven Matrix H mit* $\det H = 1$.

Beweis. 1. Sei H selbstadjungiert und positiv, d.h. $H = H^\dagger$ und $\langle x \mid Hx\rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$. Dann gibt es eine eindeutige unitäre Matrix U, welche die Matrix H zur Diagonalmatrix H_λ diagonalisiert:

$$H = UH_\lambda U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U^{-1} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \; .$$

Damit gibt es eine eindeutige Matrix $H^{1/2}$, die ebenfalls selbstadjungiert und positiv ist:

$$H^{1/2} := UH_\lambda^{1/2} U^{-1} := U \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{1/2} \end{pmatrix} U^{-1} \; .$$

2. Wenn $A \in SL(n,\mathbb{C})$, dann ist $A^\dagger A$ eine selbstadjungierte und positive Matrix, denn

$$\langle x \mid A^\dagger Ax\rangle = \langle Ax \mid Ax\rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \; ,$$

denn $A \in SL(n,\mathbb{C}) \subset GL(n,\mathbb{C})$ und alle Matrizen aus $GL(n,\mathbb{C})$ sind invertierbar, haben also keinen Eigenwert 0. Jetzt definieren wir $H := (A^\dagger A)^{1/2}$ und dies ist also eine selbstadjungierte und positive Matrix.

3. Wir suchen zu diesem H eine unitäre Matrix U mit $A = UH$, also $U = AH^{-1}$ und zeigen, daß dieses U tatsächlich unitär ist:

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= AH^{-1}(AH^{-1})^\dagger = AH^{-1}(H^{-1})^\dagger A^\dagger \\ &= A(A^\dagger A)^{-1/2}((A^\dagger A)^{-1/2})^\dagger A^\dagger \\ &= A(A^\dagger A)^{-1/2}(A^\dagger A)^{-1/2} A^\dagger = A(A^\dagger A)^{-1} A^\dagger \\ &= A(A)^{-1}(A^\dagger)^{-1} A^\dagger = \mathbb{1} \; . \end{aligned}$$

Damit ist $U \in U(n)$ und $\det U = \pm 1$. Weiter gilt

$$1 = \det A = \det(UH) = (\det U)(\det H) \; .$$

Da H positiv ist gilt $\det H > 0$ und damit folgt $\det U = +1$, also $U \in SU(n)$. □

Lemma 21.7.2 *Die Lie-Gruppe $SL(n,\mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \in SL(n,\mathbb{C})$, dann gibt es nach dem obigen Lemma eine eindeutige Darstellung $A = UH$ mit $U \in SU(n)$ und einer positiven selbstadjungierten Matrix $H = H^\dagger$ mit $\det H = 1$.

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} + ih'_{12} & \dots & \dots & h_{1n} + ih'_{1n} \\ h_{12} - ih'_{12} & h_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & h_{n-1,n-1} & h_{n-1n} + ih'_{n-1n} \\ h_{1n} - ih'_{1n} & \dots & \dots & h_{n-1n} + ih'_{n-1n} & h_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $h_{11}, \dots, h_{nn} \in \mathbb{R}_+$, $h_{ij}, h'_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Unter Berücksichtigug von $\det H = 1$ ist also die Menge der Matrizen H homöomorph zu $\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}^{(n-1)n}$ und dieses ist homotop zu $\mathbb{R}^{(n-1)(n+1)}$ und damit also einfach zusammenhängend. Da auch $SU(n)$ einfach zusammenhängend ist folgt, daß $SL(n,\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist. □

Satz 21.7.3 *Die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3,1)$ ist $SL(2,\mathbb{C})$.*

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie im Fall $SO(3) \cong SU(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.

Wir betrachten den Raum $i \cdot \mathfrak{u}(2)$ der komplexen, hermiteschen, 2-dimensionalen Matrizen und wir wählen als Basis:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{21.7.4}$$

Mit dieser Basis kann man einen linearen Isomorphismus $\mathfrak{X} : \mathbb{R}^4 \to i \cdot \mathfrak{u}(2)$ definieren:

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{X}(x) := X := x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} . \tag{21.7.5}$$

Die Umkehrabbildung $\mathfrak{X}^{-1} : i \cdot \mathfrak{u}(2) \to \mathbb{R}^4$ ist dann gerade

$$x^i := \mathfrak{X}^{-1}(X) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X\sigma_i) . \tag{21.7.6}$$

Dies ist (bis auf den Normierungsfaktor) gerade eine positiv definite Killing-Form, denn oben (21.5.6) hatten wir gesehen, daß für $X, Y \in \mathfrak{u}(2)$ die Killing-Form $\langle X \mid Y \rangle = 4 \operatorname{tr}(XY)$ ein negativ definites Skalarprodukt ist, und damit ist für $X, Y \in i \cdot \mathfrak{u}(2)$ die Killing-Form ein positiv definites Skalarprodukt.

Für die Minkowski-Norm gilt:

$$\det(X) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = -\langle x \mid x \rangle .$$

Nun kann man für jedes $U \in SL(2,\mathbb{C})$ und jedes $X \in i \cdot \mathfrak{u}(2)$ die adjungierte Abbildung $Ad_U : i \cdot \mathfrak{u}(2) \to i \cdot \mathfrak{u}(2)$ betrachten:

$$Ad_U(X) := UXU^\dagger .$$

Mit $\det(U) = 1$ für $U \in SL(2,\mathbb{C})$ folgt

$$\det(Ad_U(X)) = \det(UXU^\dagger) = \det(X) = -\langle x \mid x\rangle \ .$$

Also ist Ad_U eine Lorentz-Transformation auf dem Raum $i \cdot \mathfrak{u}(2)$.

Mit dem Isomorphismus $\mathfrak{X}^{-1} : \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{u}(2) \to \mathbb{R}^4$ kann man jetzt von $i \cdot \mathfrak{u}(2)$ nach $\mathbb{R}^4$ übergehen:

$$\tilde{Ad}_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \text{mit } \tilde{Ad}_U := \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X} \ .$$

$\tilde{Ad}_U$ ist ebenso wie Ad_U stetig und auch ein Gruppen-Homomorphismus, also ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned}
\tilde{Ad}_{UU'}(x) &= \mathfrak{X}^{-1} Ad_{UU'} \mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_{UU'}(X) \\
&= \mathfrak{X}^{-1} UU'XU'^\dagger U^\dagger = \mathfrak{X}^{-1} U(U'XU'^\dagger)U^\dagger \\
&= \mathfrak{X}^{-1} Ad_U(U'XU'^\dagger) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \circ Ad_{U'}(X) \\
&= \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \circ Ad_{U'} \mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X} \circ \mathfrak{X}^{-1} Ad_{U'} \mathfrak{X}(x) \\
&= \tilde{Ad}_U \circ \tilde{Ad}_{U'}(x) \ .
\end{aligned}$$

Weiter gilt für $\tilde{Ad}_U(x)$

$$\begin{aligned}
-\langle \tilde{Ad}_U(x) \mid \tilde{Ad}_U(x)\rangle_{\mathbb{R}^4} &= \det(\mathfrak{X}(\tilde{Ad}_U(x))) = \det(\mathfrak{X}\mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X}(x)) \\
&= \det(Ad_U(X)) = \det(X) = -\langle x \mid x\rangle_{\mathbb{R}^4} \ .
\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{Ad}_U$ eine Lorentz-Transformation auf dem Minkowski-Raum $\mathbb{R}^4$. Damit ist die Abbildung $P : SL(2,\mathbb{C}) \to O(3,1)$ mit $P(U) = \tilde{Ad}_U$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus in den Raum $O(3,1)$. Nun hat $O(3,1)$ aber vier verschiedene von einander getrennte Definitionsbereiche, nämlich $O(3,1)^{\uparrow}_{+}, O(3,1)^{\uparrow}_{-}, O(3,1)^{\downarrow}_{+}, O(3,1)^{\downarrow}_{-}$. Da $\tilde{Ad}_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$ ist, bildet P das Einselement von $SL(2,\mathbb{C})$ auf das Einselement von $O(3,1)$ ab, also ist $P : SL(2,\mathbb{C}) \to O(3,1)_+$. Weiter wird der Vektor $x = (1,0,0,0)^T$ durch $\tilde{Ad}_U$ abgebildet auf $\tilde{Ad}_U(x)$ und damit folgt

$$\begin{aligned}
(\tilde{Ad}_U(x))^0 &= (\mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X}(x))^0 = (\mathfrak{X}^{-1} Ad_U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^0 \\
&= (\mathfrak{X}^{-1} U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^\dagger)^0 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(UU^\dagger \sigma_0) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(UU^\dagger) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{2}(|u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 + |u_{21}|^2 + |u_{22}|^2) > 0 \ ,
\end{aligned}$$

und damit ist das zu $P = \tilde{Ad}_U$ gehörige$\Lambda^0_0 > 0$, also ist $P : SL(2,\mathbb{C}) \to O(3,1)^{\uparrow}_{+} = SO(3,1)$. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob die Projektion P auch surjektiv ist, ob also jedes Element von $O(3,1)^{\uparrow}_{+}$ durch die Projektion eines Elements von $SL(2,\mathbb{C})$ erreicht werden kann. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt.

Wegen $\tilde{Ad}_U = \tilde{Ad}_{-U}$ sieht man auch sofort, daß P eine zwei-zu-eins Abbildung ist, daß also $SL(2,\mathbb{C})$ die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3,1)$ mit $SO(3,1) = SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ist. □

Beispiel: **Boosts in $\mathbb{R}^4$ in x^3-Richtung.**

Den Fall der Rotationen in $\mathbb{R}^3$ um die x^3-Achse hatte wir ja schon bei der Besprechung der $SU(2)$-Gruppe besprochen. Daher beschränken wir uns hier auf die Diskussion der Boosts in x^3-Richtung.

Boosts in $\mathbb{R}^4$ in x^3-Richtung mit $\beta = \frac{v}{c} = \tanh(\alpha)$ stellen eine 1-Parameter-Untergruppe von $O(3,1)$ dar:

$$R_3(\alpha) := \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix} .$$

Das entsprechende Basiselement der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ ist

$$K_3 := \frac{d}{d\alpha} \left. \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Tatsächlich ist $R_3(\alpha) = \exp(\alpha K_3)$, den

$$K_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \; K_3^3 = K_3 \; , \; K_3^4 = K_3^2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \exp(\alpha K_3) &= \mathbb{1} + \alpha K_3 + \frac{1}{2!}\alpha^2 K_3^2 + \frac{1}{3!}\alpha^3 K_3^3 + \frac{1}{4!}\alpha^4 K_3^4 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 + \dots & 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{3!}\alpha^3 + \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\alpha + \frac{1}{3!}\alpha^3 + \dots & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Jetzt geht man mittels $\mathfrak{X}$ von der Boost-Richtung x^3 in den Raum $i \cdot \mathfrak{u}(2,\mathbb{C})$ über und erhält für $y^3 = (0,0,0,1)^T$ gerade $\mathfrak{X}(y^3) = \sigma_3$. Die entsprechende 1-Parameter-Untergruppe von $SL(2,\mathbb{C})$ ist

$$U(\alpha) = \exp(\alpha\sigma_3) = \exp\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} .$$

Der entsprechende $SL(2,\mathbb{C})$-Boost in $i \cdot \mathfrak{u}(2)$ ist dann

$$\begin{aligned}
Ad_{U(\alpha)}(X) &= \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^\alpha(x^0+x^3) & e^\alpha(x^1-ix^2) \\ e^{-\alpha}(x^1+ix^2) & e^{-\alpha}(x^0-x^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2\alpha}(x^0+x^3) & (x^1-ix^2) \\ (x^1+ix^2) & e^{-2\alpha}(x^0-x^3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x'^0+x'^3) & (x'^1-ix'^2) \\ (x'^1+ix'^2) & (x'^0-x'^3) \end{pmatrix} \quad \text{mit}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x'^0 &= x^0\cosh 2\alpha + x^3\sinh 2\alpha , \\
x'^1 &= x^1 , \quad x'^2 = x^2 , \\
x'^3 &= x^0\sinh 2\alpha + x^3\cosh 2\alpha .
\end{aligned}$$

Wenn man wissen möchte welcher Drehung dies in $\mathbb{R}^4$ entspricht, dann geht man von $Ad_{U(\alpha)}(X)$ zu $\tilde{A}d_{U(\alpha)}(x)$ über:

$$\begin{aligned}
x' = \tilde{A}d_{U(\alpha)}(x) &= \mathfrak{X}^{-1}Ad_{U(\alpha)}\mathfrak{X}(x) \\
&= \mathfrak{X}^{-1}\begin{pmatrix} e^{2\alpha}(x^0+x^3) & (x^1-ix^2) \\ (x^1+ix^2) & e^{-2\alpha}(x^0-x^3) \end{pmatrix} \\
&= \mathfrak{X}^{-1}\begin{pmatrix} (x'^0+x'^3) & (x'^1-ix'^2) \\ (x'^1+ix'^2) & (x'^0-x'^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh 2\alpha & 0 & 0 & \sinh 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh 2\alpha & & & \cosh 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Das heißt, einem $SL(2,\mathbb{C})$-Boost in Richtung der x^3-Achse mit $\alpha = \tanh^{-1}(\frac{v}{c})$ in $i \cdot \mathfrak{u}(2)$ entspricht ein $SO(3,1)$-Boost in Richtung der x^3-Achse mit 2α in $\mathbb{R}^3$. Umgekehrt ausgedrückt gibt es also zu jedem $SO(3,1)$-Boost einen entsprechende $SL(2,\mathbb{C})$-Boost - und damit ist die Projektion $P : SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1)$ surjektiv. $\square$

Für die Vertauschungsrelationen der $\mathfrak{so}(3)$ Lie-Algebra hatten wir in 21.6.18 gefunden

$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} \; ,$$

und für die Vertauschungsrelationen der $\mathfrak{su}(2)$ Lie-Algebra in 21.6.20

$$S_k := \frac{1}{2i}\sigma_k \quad \Rightarrow \quad [S_i, S_j] = f_{ij}{}^k S_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk}$$

Dies trifft natürlich auch für die reinen Drehungen der Lorentz-Gruppe zu, da $\mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{so}(3,1)$, bzw. $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Jetzt betrachten wir die Boosts der Lorentz-Gruppe:

Seien $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha)$, $R_3(\alpha) \in SO(3,1)$ Boosts mit $\alpha = \tanh^{-1}(\frac{v}{c})$ in Richtung der x^1, x^2, x^3-Achse in $\mathbb{R}^4$. Dann sind die entsprechenden Generatoren der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ gerade die Matrizen

$$K_1 = \frac{d}{d\alpha} R_1(\alpha)|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{21.7.7}$$

Daraus folgen die Vertauschungsrelationen:

$$[K_1, K_2] = -J_3 \; , \; [K_2, K_3] = -J_1 \; , \; [K_3, K_1] = -J_2 \; ,$$
$$[J_1, K_2] = K_3 \; , \; [J_2, K_3] = K_1 \; , \; [J_3, K_1] = K_2 \; ,$$

also

$$[K_i, K_j] = \bar{f}_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } \bar{f}_{ij}{}^k = -\epsilon_{ijk} \; ,$$
$$[J_i, K_j] = f_{ij}{}^k K_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} \; ,$$
$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} \; . \tag{21.7.8}$$

Häufig faßt man die Generatoren der Drehungen und Boosts der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ in einer einheitlichen Schreibweise zusammen. Sei E_1 eine Drehung um x^1 in der (x^2, x^3)-Ebene, P_1 ein Boost in x^1-Richtung in der (x^0, x^1)-Ebene, dann kann man die folgenden Generatoren definieren:

$$m_{[23]} := -J_1 \quad \Rightarrow \quad m_{[23]}{}^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_2 \eta_{\nu 3} - \delta^{\mu}_3 \eta_{2\nu} \; ,$$

$$m_{[01]} := K_1 \quad \Rightarrow \quad {m_{[01]}}^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{0}\eta_{\nu 1} - \delta^{\mu}_{1}\eta_{0\nu} \ ,$$

oder allgemein

$$ {m_{[\rho\sigma]}}^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\nu\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\rho\nu} = -{m_{[\sigma\rho]}}^{\mu}{}_{\nu} \ . \tag{21.7.9}$$

Damit folgen die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [m_{[\mu\nu]}, m_{[\rho\sigma]}] &= \eta_{\nu\rho} m_{[\mu\sigma]} - \eta_{\mu\rho} m_{[\nu\sigma]} - \eta_{\nu\sigma} m_{[\mu\rho]} + \eta_{\mu\sigma} m_{[\nu\rho]} \\ &= {f_{[\mu\nu][\rho\sigma]}}^{[\kappa\tau]} m_{[\kappa\tau]} \ , \end{aligned} \tag{21.7.10}$$

mit den Strukturkonstanten

$$ {f_{[\mu\nu][\rho\sigma]}}^{[\kappa\tau]} = \eta_{\nu\rho}\delta^{\kappa}_{\mu}\delta^{\tau}_{\sigma} - \eta_{\mu\rho}\delta^{\kappa}_{\nu}\delta^{\tau}_{\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\delta^{\kappa}_{\mu}\delta^{\tau}_{\rho} + \eta_{\mu\sigma}\delta^{\kappa}_{\nu}\delta^{\tau}_{\rho} \ . \tag{21.7.11}$$

Beweis. Sei zunächst $\mu = \rho$ und $\nu = \sigma$, dann ist

$$[m_{[\rho\sigma]}, m_{[\rho\sigma]}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\sigma\rho} m_{[\rho\sigma]} - \eta_{\rho\rho} m_{[\sigma\sigma]} - \eta_{\sigma\sigma} m_{[\rho\rho]} + \eta_{\rho\sigma} m_{[\sigma\rho]} = 0 \ .$$

Sei $\mu = 2$, $\nu = 3$, $\rho = 3$, $\sigma = 1$, dann ist

$$[m_{[23]}, m_{[31]}] = [-J_1, -J_2] = [J_1, J_2] = J_3 = -m_{[12]} \quad \text{und}$$

$$\eta_{33} m_{[21]} - \eta_{23} m_{[31]} - \eta_{31} m_{[23]} + \eta_{21} m_{[33]} = \eta_{33} m_{[21]} = m_{[21]} = -m_{[12]} \ .$$

Sei $\mu = 0$, $\nu = 1$, $\rho = 0$, $\sigma = 2$, dann ist

$$[m_{[01]}, m_{[02]}] = [K_1, K_2] = -J_3 = m_{[12]} \quad \text{und}$$

$$\eta_{10} m_{[02]} - \eta_{00} m_{[12]} - \eta_{12} m_{[00]} + \eta_{02} m_{[10]} = -\eta_{00} m_{[12]} = m_{[12]} \ .$$

Sei $\mu = 2$, $\nu = 3$, $\rho = 0$, $\sigma = 2$, dann ist

$$[m_{[23]}, m_{[02]}] = [-J_1, K_2] = -[J_1, K_2] = -K_3 = -m_{[03]} \quad \text{und}$$

$$\eta_{30} m_{[22]} - \eta_{20} m_{[32]} - \eta_{32} m_{[20]} + \eta_{22} m_{[30]} = \eta_{22} m_{[30]} = m_{[30]} = -m_{[03]} \ . \qquad \square$$

Mit diesen Generatoren können wir dann eine Lorentz-Transformation aus $SO(3,1)$ schreiben als:

$$\Lambda = \exp(\theta^i J_i + \alpha^i K_i) \tag{21.7.12}$$

$$\Lambda = \exp(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma} m_{[\rho\sigma]}) \ , \quad \text{mit } \lambda^{\rho\sigma} = -\lambda^{\sigma\rho}. \tag{21.7.13}$$

Da $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(3,1)$ können wir eine entsprechende Darstellung der Algebra $m_{[\rho\sigma]}$ auch als Basis in $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ verwenden.

Häufig verwendet man auch die infinitesimale Version von 21.7.13. Seien also die $\lambda^{\rho\sigma}$ sehr klein, dann folgt:

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu}_{\ \nu} &\simeq \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}(m_{[\rho\sigma]})^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}(\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\nu\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\rho\nu}) \\ &= \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}(\lambda^{\mu\sigma}\eta_{\nu\sigma} - \lambda^{\rho\mu}\eta_{\rho\nu}) = \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}(\lambda^{\mu\sigma}\eta_{\nu\sigma} + \lambda^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}) \\ &= \delta^{\mu}_{\nu} + \lambda^{\mu}_{\ \nu}\,. \end{aligned} \tag{21.7.14}$$

21.8 Darstellungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

In der Physik spielen nun aber nicht die Lie-Gruppen als solche eine fundamentale Rolle, sondern ihre Darstellungen als lineare Operatoren auf Vektorräumen. Wir folgen in diesem Abschnitt vorwiegend Hall (2003).

Definition 21.8.1 *Sei G eine Lie-Gruppe, V ein komplexer Vektorraum, $GL(V)$ die Menge aller bijektiven, beschränkten (und damit auch stetigen), linearen Operatoren $B : V \to V$, also die Automorphismengruppe von V, dann heißt ein stetiger Homomorphismus* Π

$$\Pi : G \to GL(V)$$

eine Darstellung von G in V. Unter der Stetigkeit von Π *ist hier die sog. starke Stetigkeit gemeint, d.h.*

$$A_i, A \in G,\ v \in V,\ \lim_{i\to\infty} ||A - A_i|| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{i\to\infty} ||\Pi(A)v - \Pi(A_i)v|| \to 0\,.$$

Die Darstellung einer Lie-Gruppe heißt irreduzibel, wenn kein von $\{0\}$ *verschiedener Unterraum W in V existiert, der bzgl. aller* $\Pi(g)$ *für $g \in G$ invariant ist, d.h. für den gilt* $\Pi(g) \subseteq W$.

Sei $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra, V ein komplexer Vektorraum,* $\mathfrak{gl}(V)$ *die Menge aller bijektiven, linearen Operatoren $B : V \to V$, also die Automorphismengruppe von V, dann heißt der Homomorphismus*

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ *in V.*

Die Darstellung einer Lie-Algebra heißt irreduzibel, wenn kein von $\{0\}$ *verschiedener Unterraum W in V existiert, der bzgl. aller $\pi(g)$ für $g \in$* $\mathfrak{g}$ *invariant ist, d.h. für den gilt $\pi(g) \subseteq W$.*

Die Darstellung einer Lie-Gruppe, bzw. einer Lie-Algebra, heißt treu, wenn Π*, bzw. π, injektiv ist.*

Wenn $\dim V = n < \infty$, dann ist natürlich $GL(V) \cong GL(n, \mathbb{C})$, bzw. $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Satz 21.8.2 *Seien G und H zwei Lie-Gruppen mit den zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$, sei weiter $\Pi : G \to H$ ein Lie-Gruppen Homomorphismus, dann gibt es einen eindeutigen, reellen, linearen Lie-Algebra Homomorphismus $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ mit*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} \quad \textit{für } X \in \mathfrak{g} \; . \tag{21.8.1}$$

Beweis. Die Lie-Gruppen G und H sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ihre Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ sind per Definition die Tangentialräume an der Stelle der Identität $e \in G$ und $e' \in H$, also $\mathfrak{g} = T_e G$ und $\mathfrak{h} = T_{e'} H$. Sei nun $\Pi : G \to H$, dann existiert mit der Tangentialabbildung Π_* (d.h. dem Differential $d\Pi$) an der Stelle e eine Abbildung von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{h}$. Für kleine $t \in \mathbb{R}$ gilt, daß $A(t) = e^{tX}$ mit $X \in \mathfrak{g}$ in einer Umgebung von $e \in G$ liegt und $\Pi(e^{tX}) = B(t) \in H$ in einer Umgebung von $e' \in H$ liegt und sich deshalb als $B(t) = e^{tY}$ mit $Y \in \mathfrak{h}$ schreiben läßt. Damit können wir die Abbildung $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ definieren als:

$$\pi := \Pi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \quad \text{mit} \quad \pi(X) := \Pi_*(e^{tX})|_{t=0} = Y \; .$$

Diese Abbildung π ist tatsächlich linear, denn mithilfe der Lie-Produktformel 21.3.11 und der Stetigkeit des Homomorphismus Π ergibt sich

$$\Pi(e^{tsX}) = e^{tsY} = \begin{cases} e^{t\pi(sX)} \\ e^{ts\pi(X)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi(sX) = s\pi(X) \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \; ,$$

$$\begin{aligned} e^{t\pi(X+Y)} &= e^{\pi(t(X+Y))} = \Pi(e^{t(X+Y)}) \\ &= \Pi(\lim_{m\to\infty} (e^{\frac{t}{m}X} e^{\frac{t}{m}Y})^m) = \lim_{m\to\infty} \Pi((e^{\frac{t}{m}X} e^{\frac{t}{m}Y})^m) \\ &= \lim_{m\to\infty} (\Pi(e^{\frac{t}{m}X}) \Pi(e^{\frac{t}{m}Y}))^m = \lim_{m\to\infty} (e^{\frac{t}{m}\pi(X)} e^{\frac{t}{m}\pi(Y)})^m \\ &= e^{t\pi(X)+t\pi(Y)} = e^{t(\pi(X)+\pi(Y))} \quad \Rightarrow \quad \pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y) \; . \end{aligned}$$

Auch die Eindeutigkeit von π sieht man sofort. Aus der Definition von π folgt ja

$$\pi(X) = Y = \frac{d}{dt} e^{tY}|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX})|_{t=0} \; .$$

Sei nun ψ ein zweiter Lie-Algebra Homomorphismus mit

$$e^{t\psi(X)} = e^{\psi(tX)} \stackrel{!}{=} \Pi(e^{tX}) \quad \Rightarrow$$

$$\psi(X) = \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX})|_{t=0} = \pi(X) \; . \qquad \square$$

Natürlich stellt sich sofort die Frage nach der Umkehrung dieses Satzes: läßt sich aus einem Lie-Algebra Homomorphismus eindeutig auf einen Lie-Gruppen Homomorphismus schließen? Wenn man sich aber daran erinnert, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Tangentialraum an die Lie-Gruppe G an der Stelle der Einheit $e \in G$ ist, dann ist eigentlich klar, daß man vom Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit an einer Stelle im Allgemeinen nicht auf die globale Natur der Mannigfaltigkeit zurückschließen kann. Umso bemerkenswerter ist der folgende Satz, daß ein Lie-Algebra Homomorphismus eindeutig einen Lie-Gruppen Homomorphismus induziert, sofern nur die Lie-Gruppe *einfach zusammenhängend* ist!

Satz 21.8.3 *Seien G und H zwei Lie-Gruppen mit den zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$, sei weiter $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebra Homomorphismus. Wenn G einfach zusammenhängend ist, dann gibt es einen eindeutigen Lie-Gruppen Homomorphismus $\Pi : G \to H$ mit*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} \quad \textit{für } X \in \mathfrak{g} \; .$$

Beweis. Es sei $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ gegeben und es soll also ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\Pi : G \to H$ konstruiert werden. In einer Umgebung von $1 \in U \subset G$, bzw. $0 \in V \subset \mathfrak{g}$, ist die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus und wir wählen U klein genug, so daß für alle $X, Y \in U$ die inversen Exponentiallabbildungen $\log(X), \log(Y) \in V$, und daß in V der Baker-Campbell-Hausdorff Satz gültig ist. Dann gilt ja die Folgerung 21.4.6:

$$\pi(\log(e^X e^Y)) = \log(e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)}) \; .$$

Jetzt definieren wir $\Pi : U \subset G \to H$ als

$$\Pi(A) := e^{\pi(\log(A))}$$

und wollen zeigen, daß diese Abbildung in Fall einer einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe G auf ganz G definiert werden kann.

Zunächst sieht man, daß diese Definition von Π in einer Umgebung U um $\mathbb{1}$ den richtigen Zusammenhang mit π ergibt, denn sei $A(t) \in G$ eine Einparameter-Untergruppe von G mit $A(t) = e^{tX}$ in der Umgebung U von $\mathbb{1}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Pi(A(t))|_{t=0} \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Pi(e^{t\,\log(A)})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{\pi(t\,\log(A))})|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(e^{t\pi(\log(A))})|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\pi(X)}|_{t=0} = \pi(X) \; . \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich dann aus der obigen BCH-Folgerung sofort, daß Π ein lokaler Homomorphismus auf U ist, denn

$$\begin{aligned} \Pi(AB) &= exp(\pi(\log(AB))) = exp(\pi(\log(e^X e^Y))) = exp(\log(e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)})) \\ &= e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)} = e^{\pi(\log(A))} e^{\pi(\log(B))} = \Pi(A)\Pi(B) \; . \end{aligned}$$

Da G pfadzusammenhängend ist, gibt es für jedes $A \in G$ einen Pfad $A(t)$ von $A(0) = \mathbb{1}$ nach $A(1) = A$. Da das Intervall $[0,1]$ kompakt ist gibt es eine *Zerlegung der Einheit* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ so, daß für alle $0 \leq i \leq m-1$ gilt

$$t_i \leq s_1 \leq s_2 \leq t_{i+1} \quad \text{mit} \quad A(s_1)A(s_2)^{-1} \in U \ .$$

Jetzt kann man $A = A(1) = A(t_m)$ schreiben als

$$A = \{A(t_m)A(t_{m-1})^{-1}\}\,\{A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}\}\,\cdots\,\{A(t_1)A(t_0)^{-1}\}\,A(t_0) \ .$$

Zum einen ist jeder einzelne Klammerausdruck $\{\cdot\} \in U$ und dafür hatten wir Π definiert, zum anderen ist Π auf U ein Homomorphismus, und damit folgt:

$$\Pi(A) = \Pi\{A(t_m)A(t_{m-1})^{-1}\}\,\Pi\{A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}\}\,\cdots\,\Pi\{A(t_1)A(t_0)^{-1}\} \ .$$

Weiter hängt Π nicht von der speziellen *Zerlegung der Einheit* ab, denn wenn wir diese Zerlegung verfeinern, indem wir etwa zwischen t_i und t_{i+1} einen weiteren Punkt t_s einfügen, dann erhalten wir mit der lokalen Homomorphismus-Eigenschaft

$$\begin{aligned}\Pi\{A(t_{i+1})A(t_s)^{-1}\}\,\Pi\{A(t_s)A(t_i)^{-1}\} &= \Pi\{A(t_{i+1})A(t_s)^{-1}A(t_s)A(t_i)^{-1}\} \\ &= \Pi\{A(t_{i+1})A(t_i)^{-1}\}\end{aligned}$$

den gleiche Ausdruck für $\Pi(A)$ wie zuvor.

Jetzt gilt es, die Wegunabhängigkeit dieser Abbildung Π zu zeigen. Seien zwei verschiedene Pfade $A_1(t)$ und $A_2(t)$ zwischen $\mathbb{1} = A_1(0) = A_2(0)$ und $A = A_1(1) = A_2(1)$ gegeben, dann kann man eine Homotopie $\tilde{A}$ definieren

$$\begin{aligned}&\tilde{A} : [0,1] \times [0,1] \to G \quad \text{mit} \\ &\tilde{A}(0,t) = A_1(t),\ \tilde{A}(1,t) = A_2(t) \quad \text{und} \quad \tilde{A}(s,0) = \mathbb{1},\ \tilde{A}(s,1) = A \ .\end{aligned}$$

Da $[0,1] \times [0,1]$ kompakt ist kann man eine *Zerlegung der Einheit* dieses Quadrates durchführen und den Pfad $\tilde{A}(0,t) = A_1(t)$ in endlich vielen Schritten durch Einfügung zusätzlicher Punkte in den Pfad $\tilde{A}(1,t) = A_2(t)$ verschieben, ohne daß sich $\Pi(A)$ ändert. Natürlich funktioniert dieses Verfahren nur dann, wenn es keine 'Löcher' zwischen den Wegen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ gibt, d.h. wenn G einfach zusammenhängend ist! □

Gerade dieser Satz ist der tiefere Grund für die Anwendung der per Konstruktion einfach zusammenhängenden Universellen Überlagerungsgruppe in der Darstellungstheorie der Lie-Gruppen!

Die Irreduzibilität von Darstellungen zusammenhängender Lie-Gruppen und Darstellungen ihrer Lie-Algebren bedingen einander, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 21.8.4 *Sei* Π *eine Darstellung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe* G *und* π *die entsprechende Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$*, dann ist* Π *genau dann irreduzibel, wenn* π *irreduzibel ist.*

Beweis. Sei Π irreduzibel und sei $W \subseteq V$ ein Unterraum des Darstellungsraums V, der unter $\pi(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ invariant ist. Wir wollen zeigen, daß dann W nur $\{0\}$ oder V sein kann. Da G zusammenhängend ist, kann jedes $A \in G$ geschrieben werden als

$$A = e^{X_1} \cdots e^{X_m} \quad \text{mit } X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g} \,.$$

W ist nach Annahme invariant unter $\pi(X)$ und damit auch invariant unter $e^{\pi(X)}$ und damit auch invariant unter

$$\Pi(A) = \Pi(e^{X_1} \cdots e^{X_m}) = \Pi(e^{X_1}) \cdots \Pi(e^{X_m}) = e^{\pi(X_1)} \cdots e^{\pi(X_m)} \,.$$

Da nun Π irreduzibel ist kann W nur $\{0\}$ oder V sein, und damit ist auch π irreduzibel.

Um die Umkehrung zu zeigen nehmen wir an, daß π irreduzibel ist und $W \subseteq V$ ein Unterraum des Darstellungsraums V, der unter $\Pi(A)$ für alle $A \in G$ invariant ist. Dann ist also W invariant unter $\Pi(e^{tX})$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und damit ist W auch invariant unter

$$\pi(X) = \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX})|_{t=0} \,.$$

Da nun π irreduzibel ist kann W nur $\{0\}$ oder V sein und damit ist auch Π irreduzibel.□

Weiter kann man sich die Frage stellen, wie die Irreduzibilität einer endlichdimensionalen, komplexen Darstellung π einer reellen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit der Irreduzibiltät derselben Darstellung der komplexifizierten Lie-Algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ zusammenhängt?

Satz 21.8.5 *Sei* π *eine endlichdimensionale, komplexe Darstellung einer reellen Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$*. Dann ist* π *bzgl.* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ *genau dann irreduzibel, wenn* π *bzgl.* $\mathfrak{g}$ *irreduzibel ist.*

Beweis. Sei also π eine Darstellung einer reellen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in einen endlichdimensionalen, komplexen Vektorraum V. Sei nun π irreduzibel bzgl. $\mathfrak{g}$. Wenn nun $W \subseteq V$ ein invarianter Unterraum unter $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ist, dann ist W auch invariant unter $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, und daraus folgt, daß W gleich $\{0\}$ oder V ist, daß also π auch bzgl. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ irreduzibel ist.

Sei umgekehrt π irreduzibel bzgl. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Wenn nun $W \subseteq V$ ein invarianter Unterraum unter $\mathfrak{g}$ ist, dann ist W auch invariant unter $\pi(X + iY) = \pi(X) + i\pi(Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, und daraus folgt, daß W gleich $\{0\}$ oder V ist, daß also π auch bzgl. $\mathfrak{g}$ irreduzibel ist.□

Definition 21.8.6 *Eine endlichdimensionale Darstellung einer Lie-Gruppe oder Lie-Algebra heißt vollständig reduzibel, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe endlich vieler irreduzibler Darstellungen ist.*

Eine Lie-Gruppe oder Lie-Algebra heißt vollständig reduzibel, wenn jede endlichdimensionale Darstellung vollständig reduzibel ist.

Besonders interessant für Physiker sind natürlich unitäre Darstellungen von Lie-Algebren in Hilbert-Räumen.

Definition 21.8.7 *Seien G eine Lie-Gruppe, $\mathcal{H}$ ein endlich- oder unendlichdimensionaler Hilbert-Raum und $U(\mathcal{H})$ eine Gruppe unitärer Operatoren auf $\mathcal{H}$, dann heißt der Homomorphismus $\Pi : G \to U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von G.*

Eine unitäre Darstellung heißt irreduzibel, wenn es außer $\{0\}$ und $\mathcal{H}$ keinen unter $\Pi(A)$ für alle $A \in G$ abgeschlossenen invarianten Unterraum gibt.

Für endlichdimensionale unitäre Darstellungen findet man:

Satz 21.8.8 *Sei G eine Lie-Gruppe und Π eine endlichdimensionale unitäre Darstellung von G auf den endlichdimensionalen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann ist Π vollständig reduzibel.*

Beweis. Sei $W \subseteq \mathcal{H}$ ein invarianter Unterraum unter $\Pi(A)$ für alle $A \in G$, dann folgt aus der Existenz des Skalarprodukts $\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$. Nun ist auch $W^{\perp}$ ein invarianter Unterraum, denn mit $v \in W^{\perp},\ w \in W$ gilt

$$\langle \Pi(A)v \mid w\rangle = \langle v \mid \Pi(A)^{\dagger}w\rangle = \langle v \mid \Pi(A)^{-1}w\rangle = \langle v \mid \Pi(A^{-1})w\rangle = 0 \ .$$

Wenn nun $\mathcal{H}$ nicht irreduzibel ist, dann gibt es einen nichttrivialen invarianten Unterraum $W \subset \mathcal{H}$ mit einen invarianten Komplement $W^{\perp}$ mit $\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$. Entweder sind W und $W^{\perp}$ irreduzibel, oder es gibt in ihnen wiederum invariante Unterräume. Dieses Verfahren kann man fortsetzen, bis man alle irreduziblen Unterräume gefunden hat - und da wir von einem endlichdimensionalen Hilbert-Raum ausgegangen sind, kommt man auch mit endlich vielen Schritten zum Ziel einer vollständigen Zerlegung von $\mathcal{H}$ in irreduzible Unterräume. □

In Kapitel 21.2 hatten wir gesehen, daß man für eine kompakte Lie-Gruppe mittels eines biinvarianten Haar-Maßes (21.2.2) das Hurwitz-Integral über die Lie-Gruppe definieren kann. Hiervon macht der Beweis des folgenden Satzes von Weyl, bekannt auch als „Weyls Unitaritäts-Trick" Gebrauch.

Satz 21.8.9 (Weyl) *Jede kompakte Lie-Gruppe ist vollständig reduzibel.*

Beweis. Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und Π eine endlichdimensionale Darstellung von G auf einen Vektorraum V mit einem beliebigen inneren Produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Dann kann man mittels eines linksinvarianten Haar-Maßes μ ein neues inneres Produkt auf V definieren, bzgl. dem Π eine unitäre Darstellung ist. Seien $v_1, v_2 \in V$, dann definieren wir

$$\langle v_1 \mid v_2 \rangle_G := \int\limits_G \langle \Pi(g)v_1 \mid \Pi(g)v_2 \rangle d\mu(g) \ .$$

Aus der Linksinvarianz des Haar-Maßes μ folgt nun die Unitarität von Π bzgl. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_G$, denn sei $h \in G$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\langle \Pi(h)v_1 \mid \Pi(h)v_2 \rangle_G &:= \int\limits_G \langle \Pi(g)\Pi(h)v_1 \mid \Pi(g)\Pi(h)v_2 \rangle d\mu(g) \\
&= \int\limits_G \langle \Pi(gh)v_1 \mid \Pi(gh)v_2 \rangle d\mu(g) \\
&= \int\limits_G \langle \Pi(gh)v_1 \mid \Pi(gh)v_2 \rangle d\mu(gh) \\
&= \langle v_1 \mid v_2 \rangle_G \,.
\end{aligned}$$

Aus dem vorherigen Satz über die vollständige Reduzibilität endlichdimensionaler unitärer Darstellungen folgt jetzt die Behauptung. □

Nach diesem schönen Ergebnis für kompakte Lie-Gruppen stellt sich natürlich die Frage nach unitären Darstellungen nichtkompakter Lie-Gruppen. Hier findet man, daß es keine endlichdimensionalen, treuen Darstellungen gibt und man somit gezwungen ist, unendlichdimensionale Darstellungen zu betrachten.

Satz 21.8.10 *Sei G eine einfach zusammenhängende, nichtkompakte Lie-Gruppe, dann gibt es keine unitären, treuen Darstellungen auf einen endlich-dimensionalen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$.*

Beweis. Sei Π eine unitäre Darstellung von G auf einen endlichdimensionalen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ der Dimension n. Dann ist das Bild $\Pi(G)$ eine Teilmenge der Lie-Gruppe der n-dimensionalen, unitären Matrizen $\{U(n)\}$. Nun ist die Menge $\{U(n)\}$ eine beschränkte und abgeschlossene Untermenge von $\{GL(n,\mathbb{C})\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ und damit nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (siehe etwa: Fischer u. Kaul (2001), S. 49) eine kompakte Menge. Und ebenso ist die Menge $\Pi(G) \subset \{U(n)\}$ eine beschränkte und abgeschlossene Untermenge von $\mathbb{R}^{2n}$ und damit kompakt.

Der Kern von Π ist ein Normalteiler von G. Da G nach Voraussetzung eine einfache Lie-Gruppe ist hat sie keine anderen Normalteiler als G oder $\mathbb{1}_G$. Wenn $\ker(\Pi) = G$ ist, dann werden alle Elemente von G auf $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ abgebildet und die Darstellung Π ist nicht treu sondern trivial. Wenn dagegen $\ker(\Pi) = \mathbb{1}_G$ ist, dann ist die Darstellung treu und auf dem Bild von Π invertierbar, d.h. $\Pi(G)$ ist isomorph zu G. Da Π^{-1} stetig ist folgt aus der Kompaktheit von $\Pi(G)$, daß auch $\Pi^{-1}(\Pi(G)) = G$ kompakt ist. Dies ist ein Widerspruch, also gibt es keine endlichdimensionale, unitäre, treue Darstellung $\Pi(G)$.□

Aus diesem Satz folgert man in der Literatur, daß es unitäre, treue Darstellungen für einfach zusammenhängende, nichtkompakte Lie-Gruppen eben nur auf unendlichdimensionalen Hilbert-Räumen geben kann. Aber an welcher Stelle bricht dann eigentlich der obige Beweis im Falle unendlichdimensionaler Hilbert-Räume zusammen? Die Menge der unitären Operatoren $\{U\}$ auf einem unendlichdimensionalen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ bildet einen unendlichdimensionalen normierten Vektorraum, einen Banach-Raum, und hierfür wird in der Funktionalanalysis der folgende Satz bewiesen (siehe etwa Werner (2005), S. 27):

Satz 21.8.11 *Ein normierter Vektorraum ist genau dann endlichdimensional, wenn jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge kompakt ist.*

Wenn wir also mit der Menge der unitären Operatoren $\{U\}$ von einem endlichdimensionalen zu einem unendlichdimensionalen normierten Vektorraum übergehen, dann ist die Abschließung dieser beschränkten Menge nicht mehr kompakt und damit ist die Argumentation im Beweis des obigen Satzes nicht mehr möglich.

21.9 Produktdarstellungen

Häufig kommen in der Physik Produktdarstellungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren vor. Seien G eine Lie-Gruppe, $A \in G$, Π_1 und Π_2 zwei Darstellungen von G auf den endlichdimensionalen Darstellungs-Räumen V_1 und V_2, dann wird die Produktdarstellung $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ auf $V_1 \otimes V_2$ definiert als

$$\Pi_1 \otimes \Pi_2(A) := \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(A) \ .$$

Für die der Lie-Gruppe G entsprechende Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ folgt dann:

Satz 21.9.1 *Seien $X \in \mathfrak{g}$, π_1 und π_2 Darstellungen von $\mathfrak{g}$ auf V_1 und V_2, die den Darstellungen Π_1 und Π_2 von G entsprechen, dann gilt:*

$$\pi_1 \otimes \pi_2(X) = \pi_1(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \pi_2(X) \ .$$

Beweis. Seien $X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, dann folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \pi_1 \otimes \pi_2(X)(v_1 \otimes v_2) &= \frac{d}{dt}(\Pi_1(e^{tX})v_1 \otimes \Pi_2(e^{tX})v_2)_{t=0} \\ &= \pi_1(X)v_1 \otimes \mathbb{1}v_2 + \mathbb{1}v_1 \otimes \pi_2(X)v_2 \ . \end{aligned}$$ □

Wenn π_1 und π_2 irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{g}$ sind, dann ist $\pi_1 \otimes \pi_2$ im allgemeinen reduzibel. Im Fall von $\mathfrak{su}(2)$ ist die Darstellung von $\pi_1 \otimes \pi_2$ als einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen gerade die allen Physikern bekannte Clebsch-Gordon-Theorie (hierzu später mehr).

Den obigen Satz kann man jetzt mühelos auf das direkte Produkt der Darstellungen zweier verschiedener Lie-Gruppen, bzw. Lie-Algebren verallgemeinern. Seien G und H

Lie-Gruppe, $A \in G$, $B \in H$, Π_1 und Π_2 zwei Darstellungen von G und H auf den endlichdimensionalen Darstellungs-Räumen V_1 und V_2, dann wird die Produktdarstellung $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ auf $V_1 \otimes V_2$ definiert als

$$\Pi_1 \otimes \Pi_2(A, B) := \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(B) \ .$$

Für die den Lie-Gruppen G und H entsprechenden Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ folgt dann:

Satz 21.9.2 *Sei $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ π_1 und π_2 Darstellungen von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ auf V_1 und V_2, die den Darstellungen Π_1 und Π_2 von G und H entsprechen, dann gilt:*

$$\pi_1 \otimes \pi_2(X, Y) = \pi_1(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \pi_2(Y) \ .$$

Beweis. Seien $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, dann folgt wie oben mit der Produktregel

$$\begin{aligned}\pi_1 \otimes \pi_2(X, Y)(v_1 \otimes v_2) &= \frac{d}{dt}(\Pi_1(e^{tX})v_1 \otimes \Pi_2(e^{tY})v_2)_{t=0} \\ &= \pi_1(X)v_1 \otimes \mathbb{1}v_2 + \mathbb{1}v_1 \otimes \pi_2(Y)v_2 \ . \end{aligned}$$ □

21.10 Das Lemma von Schur

Wir hatten gerade gesehen, daß es unitäre, treue Darstellungen für einfache, zusammenhängende, nichtkompakte Lie-Gruppen nur auf unendlichdimensionalen Hilbert-Räumen geben kann - und dies führt uns zwangsläufig zu einem kleinen Ausflug in die Funktionalanalysis. Wir erinnern ohne Beweise an die Spektralsätze für lineare, beschränkte, selbstadjungierte Operatoren in Hilbert-Räumen (siehe etwa die kurze Zusammenfassung in Barut u. Raczka (1986), S. 649, oder die ausführliche Besprechung in dem schönen Buch über Funktionalanalysis von Werner (2005), S. 313 ff.).

Satz 21.10.1 (Rellich-Hilbert-Schmidt) *Sei X ein linearer, beschränkter, kompakter, selbstadjungierter Operator auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, dann gilt:*

$$X = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i E_i \ , \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i \ \textit{mit} \ X\mathcal{H}_0 = 0 \ , \quad \textit{und} \ \lim_{\substack{i \geq 1 \\ i \to \infty}} |\lambda_i| = 0 \ ,$$

mit einem endlich- oder unendlichdimensionalen Kern $\mathcal{H}_0$ und mit den Orthogonalprojektoren E_i mit $1 \leq i \leq N \leq \infty$ auf die endlichdimensionalen Eigenräume $\mathcal{H}_i = E_i\mathcal{H}$ mit $X|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$ für $|u_i\rangle \in \mathcal{H}_i$.

Wenn man die Forderung der Kompaktheit aufgibt, dann ist das Spektrum der linearen, beschränkten, selbstadjungierten Operatoren auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ nicht mehr zwangsläufig diskret und man muß den obigen Spekralsatz für kontinuierliche Spektren erweitern. Hierzu führt man als Verallgemeinerung der obigen Orthogonalprojektoren E_i das sog. Spektralmaß $E(\lambda)$ ein:

Definition 21.10.2 *Sei $\lambda \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt die Abbildung $E : \mathbb{R} \to \{$Menge der linearen, beschränkten, selbstadjungierten Operatoren auf $\mathcal{H}\}$ ein Spektralmaß, wenn gilt:*

$$E(-\infty) = \hat{0} \; , \; E(+\infty) = \mathbb{1} \; ,$$

$$E(\lambda)^\dagger = E(\lambda) \; ,$$

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda,\mu)) \; ,$$

$$\lim_{\mu \to +0} E(\lambda + \mu) = E(\lambda) \; .$$

Mit Hilfe dieses Spektralmaßes kann man jetzt den Spektralsatz für lineare, beschränkte, selbstadjungierte Operatoren in Hilbert-Räumen formulieren.

Satz 21.10.3 (Hilbert-v.Neumann) *Sei X ein linearer, beschränkter, selbstadjungierter Operatoren auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, dann gibt es ein Spektralmaß $E(\lambda)$ mit*

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda) \; ,$$

wobei diese Darstellung im 'schwachen' Sinne zu verstehen ist, d.h. mit $|u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle Xu \mid v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\langle E(\lambda)u \mid v\rangle \; .$$

Weiter gilt: ein beschränkter, linearer Operator Y auf $\mathcal{H}$ kommutiert genau dann mit X, wenn er mit allen $E(\lambda)$ kommutiert.

Issai Schur hat seinen berühmten Satz, das sog. Lemma von Schur für endlichdimensionale Matrizen bewiesen. Wir folgen hier dem Hilbert-Raum-Beweis in Knapp (1986), S.12.

Satz 21.10.4 (Lemma von Schur) *Eine unitäre Darstellung Π einer Liegruppe G auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ ist genau dann irreduzibel, wenn die einzigen beschränkten, linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$, die mit allen $\Pi(g)$ mit $g \in G$ kommutieren, Vielfache der Einheit sind, d.h. $c\mathbb{1}$ mit $c \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{H}$ reduzibel und $W \subset \mathcal{H}$ ein nichttrivialer, abgeschlossener, invarianter Unterraum, dann ist der Projektor auf W ein beschränkter, linearer Operator, der kein Vielfaches von $\mathbb{1}$ ist und mit allen $\Pi(g)$ kommutiert. Oder negativ ausgedrückt: wenn es außer dem Vielfachen von $\mathbb{1}$ keinen beschränkten, linearen Operator gibt, der mit allen $\Pi(g)$ kommutiert, dann ist $\mathcal{H}$ irreduzibel.

Für die umgekehrte Richtung argumentiert man: sei Y ein beschränkter, linearer Operator auf $\mathcal{H}$ der kein Vielfaches der $\mathbb{1}$ ist und der mit allen $\Pi(g)$ kommutiert, dann gilt wegen

$$[Y, \Pi(g)] = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = [Y, \Pi(g)]^\dagger = [\Pi(g)^\dagger, Y^\dagger] = [\Pi(g)^{-1}, Y^\dagger] = [\Pi(-g), Y^\dagger] \ ,$$

daß auch $Y^\dagger$ mit allen $\Pi(g)$ kommutiert, und ebenso die beiden selbstadjungierten Operatoren

$$Z_1 := \frac{1}{2}(Y + Y^\dagger) \ , \ Z_2 := \frac{1}{2i}(Y - Y^\dagger) \ .$$

Da $Y = Z_1 + iZ_2$ kein Vielfaches der $\mathbb{1}$ ist, so ist also zumindest Z_1 oder Z_2 kein Vielfaches der $\mathbb{1}$. Nehmen wir also an Z_1 sei kein Vielfaches der $\mathbb{1}$, dann gibt es nach dem Spektralsatz für beschränkte, selbstadjungierte Operatoren auf $\mathcal{H}$ zumindest ein Spektralmaß $E(\lambda)$ das kein Vielfaches der $\mathbb{1}$ ist und das mit allen $\Pi(g)$ kommutiert, also ist $\mathcal{H}$ reduzibel. Oder negativ ausgedrückt: wenn $\mathcal{H}$ irreduzibel ist, dann gibt es außer dem Vielfachen von $\mathbb{1}$ keinen beschränkten, linearen Operator, der mit allen $\Pi(g)$ kommutiert. □

21.11 Darstellungen von $\mathfrak{su}(2)$ und $SO(3)$

Dieses Thema findet sich in jedem Lehrbuch über Quantenmechanik unter dem Stichwort 'Drehimpuls-Operatoren'. Wir wollen hier die Darstellungen von $SO(3)$ und $SU(2)$, bzw. von $\mathfrak{su}(2)$, etwas ausführlicher und im Zusammenhang mit den vorigen Kapiteln behandeln und folgen Hall (2003), S. 97 ff. und van der Waerden (1974), S. 90 ff.

Sei V_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ der folgende $(n+1)$-dimensionale, komplexe Vektorraum, der aus den $(n+1)$ homogenen Polynomen n-ten Grades in zwei komplexen Variablen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gebildet wird:

$$V_n := \{f(z_1, z_2) := \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k} \ , \ \text{mit } a_k, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} \ . \tag{21.11.1}$$

Mit dem folgenden Skalarprodukt kann man V_n zu einem $(n+1)$-dimensionalen Hilbert-Raum machen.

$$\langle f \mid f' \rangle := \sum_{k=0}^{n} a_k^* a_k' \ . \tag{21.11.2}$$

Sei $U \in SU(2)$ und wirke auf $\mathbb{C}^2 = \{z := (z_1, z_2)^T \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ mit

$$U : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad \text{mit} \ \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \ , \tag{21.11.3}$$

dann kann man die folgende $(n+1)$-dimensionale Darstellung von $SU(2)$ auf V_n definieren:

$$(\Pi_n(U)f)(z) := f(U^{-1}z)\ , \quad \text{d.h.} \tag{21.11.4}$$

$$(\Pi_n(U)f)(z_1,z_2)^T := \sum_{k=0}^{n} a_k((U^{-1})_{11}z_1 + (U^{-1})_{12}z_2)^{n-k}((U^{-1})_{21}z_1 + (U^{-1})_{22}z_2)^k\ . \tag{21.11.5}$$

Die Inversbildung U^{-1} auf der rechten Seite ist notwendig, damit Π_n tatsächlich ein Homomorphismus und damit eine Darstellung ist, denn

$$(\Pi_n(U_1)(\Pi_n(U_2)f))(z) = (\Pi_n(U_2)f)(U_1^{-1}z) = f(U_2^{-1}U_1^{-1}z) = (\Pi_n(U_1U_2)f)(z)\ .$$

Jetzt kann man zur entsprechenden Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ übergehen. Sei $X \in \mathfrak{su}(2)$, dann gilt

$$\pi_n(X) = \frac{d}{dt}\Pi_n(e^{tX})|_{t=0} \quad \Rightarrow \quad (\pi_n(X)f)(z) = \frac{d}{dt}f(e^{-tX}z)|_{t=0}\ . \tag{21.11.6}$$

Sei nun $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T := e^{-tX}z \in \mathbb{C}^2$, dann folgt

$$\frac{dz(t)}{dt}|_{t=0} = -Xz = (-X_{11}z_1 - X_{12}z_2, -X_{21}z_1 - X_{22}z_2)^T\ ,$$

$$\begin{aligned}(\pi_n(X)f)(z(t)) &= \frac{d}{dt}f(e^{-tX}z(t))|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1(t)}{dt}|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2(t)}{dt}|_{t=0} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial z_1}(X_{11}z_1 + X_{12}z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2}(X_{21}z_1 + X_{22}z_2)\ .\end{aligned} \tag{21.11.7}$$

Die weitere Behandlung wird einfacher, wenn man die reelle Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ komplexifiziert, also zu $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ übergeht. Der Hintergrund ist, daß man dann die folgende Basis von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ benutzen kann, für die es kein Äquivalent in $\mathfrak{su}(2)$ gibt:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{21.11.8}$$

Mit 21.11.7 folgt

$$(\pi_n(\hat{H})f)(z) = -\frac{\partial f}{\partial z_1}z_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}z_2\ .$$

Wenn man jetzt $\pi_n(\hat{H})$ statt auf $f(z)$ nur auf $z_1^k z_2^{n-k}$, d.h. ein Basiselement von V_n, anwendet, so erhält man

$$\pi_n(\hat{H})(z_1^k z_2^{n-k}) = -kz_1^k z_2^{n-k} + (n-k)z_1^k z_2^{n-k} = (n-2k)z_1^k z_2^{n-k}\ ,$$

und damit ist $z_1^k z_2^{n-k}$ ein Eigenvektor von $\pi_n(\hat{H})$ mit dem Eigenwert $(n-2k)$. Entsprechend erhält man für $\pi_n(\hat{X})$ und $\pi_n(\hat{Y})$

$$(\pi_n(\hat{X})f)(z) = -\frac{\partial f}{\partial z_1} z_2 \;, \quad (\pi_n(\hat{Y})f)(z) = -\frac{\partial f}{\partial z_2} z_1 \;, \quad \Rightarrow$$

$$\pi_n(\hat{X})(z_1^k z_2^{n-k}) = -k z_1^{k-1} z_2^{n-k+1} \;, \quad \pi_n(\hat{Y})(z_1^k z_2^{n-k}) = -(n-k) z_1^{k+1} z_2^{n-k-1} \;, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\pi_n(\hat{H})\pi_n(\hat{X})(z_1^k z_2^{n-k}) &= \pi_n(\hat{H})(-k z_1^{k-1} z_2^{n-k+1}) = -k(n-2k+2) z_1^{k-1} z_2^{n-k+1} \\
&= (n-2k+2)\pi_n(\hat{X})(z_1^k z_2^{n-k}) \;, \\
\pi_n(\hat{H})\pi_n(\hat{Y})(z_1^k z_2^{n-k}) &= \pi_n(\hat{H})(-(n-k) z_1^{k+1} z_2^{n-k-1}) \\
&= -(n-k)(n-2k-2) z_1^{k+1} z_2^{n-k-1} \\
&= (n-2k-2)\pi_n(\hat{Y})(z_1^k z_2^{n-k}) \;.
\end{aligned}$$

Das heißt, $\pi_n(\hat{X})$ und $\pi_n(\hat{Y})$ wirken als 'Schiebeoperatoren', welche Eigenvektoren von $\pi(\hat{H})$ zu einem Eigenwert m in Eigenvektoren zu $(m+2)$, bzw. $(m-2)$ überführen.

Satz 21.11.1 *Die Darstellung $\pi_n : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to V_n$ ist irreduzibel und bis auf Isomorphie eindeutig.*

Beweis. Der Beweis folgt dem üblichen Schema für Irredizibilitätsbeweise: man nimmt an, daß es einen nicht leeren, invarianten Unterraum $W \subseteq V_n$ gebe und zeigt dann, daß $W = V_n$ ist.

Da W nach Annahme nicht leer ist gibt es ein $w \in W$ mit

$$w = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k} \quad \text{mit mindestens einem } a_k \neq 0 \;.$$

Sei nun a_{k_0} der Koeffizient mit dem größten nichtverschwindenden a_k, d.h. $k_0 = \max_{a_k \neq 0}(k)$, dann ist

$$(\pi_n(\hat{X}))^{k_0}(w) = (\pi_n(\hat{X}))^{k_0}(a_{k_0} z_1^{k_0} z_2^{n-k_0}) = (-1)^{k_0} k_0!\, a_{k_0} z_2^n \;,$$

da evtl. Terme von w mit $a_k z_1^k z_2^{n-k}$ mit $k < k_0$ beim k_0-fachen Differenzieren nach z_1 wegfallen. Weil W nach Annahme ein invarianter Unterraum von V_n ist, folgt

$$\begin{aligned}
w \in W \quad &\Rightarrow \quad (\pi_n(\hat{X}))^{k_0}(w) \in W \quad \Rightarrow \quad z_2^n \in W \quad \Rightarrow \\
&\qquad (\pi_n(\hat{Y}))^k(z_2^n) \in W \quad \Rightarrow \quad z_1^k z_2^{n-k} \in W \quad \Rightarrow \\
W = V_n \;. &
\end{aligned}$$

Sei nun $\pi_n' : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to V_n'$ eine andere $(n+1)$-dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, dann gibt es einen Isomorphismus von V_n in V_n', da beides $(n+1)$-dimensionale Vektorräume sind. □

Damit haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine irredizible Darstellung in einem $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum V_n gefunden.

Der Anschluß an die übliche Bezeichnungsweise in der Physik wird hergestellt durch die Definition der Spin-Quantenzahl $s := \frac{n}{2} \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$ und der z-Komponente des Spins $m := k - s \in \{-s, -s+1, \ldots, s\}$:

$$\psi_m^s(z_1, z_2) := z_1^{s+m} z_2^{s-m} := z_1^k z_2^{n-k} \ . \tag{21.11.9}$$

Die Darstellungen mit ungeradem $n \in \mathbb{N}_0$, bzw. mit halbzahligem Spin, heißen Spinordarstellungen, die Darstellungen mit geradem $n \in \mathbb{N}_0$, bzw. mit ganzzahligem Spin, heißen Vektordarstellungen.

Im Folgenden soll der Unterschied dieser beiden Darstellungen gezeigt werden.

Die Lie-Algebren $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{so}(3)$ sind isomorph, also haben sie bis auf Isomorphie gleiche Darstellungen. Die Darstellungen der Lie-Gruppen $SU(2)$ und $SO(3)$ sind aber nicht immer isomorph, da $SU(2)$ einfach zusammenhängend ist, im Gegensatz zu $SO(3)$.

Sei $p : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ ein Isomorphismus zwischen den Lie-Algebren $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{so}(3)$, siehe 21.6.18 und 21.6.20:

$$p(T_k) := E_k \ , \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Sei π_n eine $(n+1)$-dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{su}(2)$. Dann ist $\sigma_n := \pi_n \circ p^{-1}$ eine $(n+1)$-dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{so}(3)$. Jetzt wollen wir die Darstellung σ_n von $\mathfrak{so}(3)$ in eine Darstellung Σ_n von $SO(3)$ liften und stellen also die Frage: gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $X \in \mathfrak{so}(3)$ eine Darstellung Σ_n von $SO(3)$ mit

$$\Sigma_n(e^X) = e^{\sigma_n(X)} \quad ??$$

Sei nun

$$X := 2\pi E_3 = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3) \quad \Rightarrow$$

$$e^X = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi & 0 \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \Sigma_n(e^X) = \mathbb{1}_{V_n} \ .$$

Andererseits ist

$$p^{-1}(X) = p^{-1}(2\pi E_3) = 2\pi \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\pi \hat{H} \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_n(X) = \pi_n \circ p^{-1}(X) = -i\pi\pi_n(\hat{H}) \ .$$

In einer Basis der Eigenvektoren von $\hat{H}$ ergibt sich

$$\sigma_n(X) = -i\pi \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(n-2) & \\ & & & & -(n) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$e^{\sigma_n(X)} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi n} & & & & \\ & e^{-i\pi(n-2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{i\pi(n-2)} & \\ & & & & e^{i\pi n} \end{pmatrix} .$$

Wenn jetzt $n \in \mathbb{N}_0$ ungeradzahlig, bzw. die Spin-Quantenzahl halbzahlig ist, dann ist $-\mathbb{1}_{V_n} = e^{\sigma_n(X)} \neq \Sigma_n(e^X) = \mathbb{1}_{V_n}$, d.h. σ_n von $\mathfrak{su}(2)$ kann nicht nach Σ_n von $SO(3)$ geliftet werden, oder mit anderen Worten: es gibt keine Vektordarstellungen von $SO(3)$ - aber natürlich Spinordarstellungen von $SU(2)$. Wenn $n \in \mathbb{N}_0$ jedoch geradzahlig, bzw. die Spin-Quantenzahl ganzzahlig ist, dann ist tatsächlich $e^{\sigma_n(X)} = \Sigma_n(e^X) = \mathbb{1}_{V_n}$, d.h. σ_n von $\mathfrak{su}(2)$ kann nach Σ_n von $SO(3)$ geliftet werden, oder mit anderen Worten: es gibt Vektordarstellungen von $SO(3)$.

In der Physik kommen häufig Produktdarstellungen von $\mathfrak{su}(2)$ vor, dort unter der Überschrift *Addition von Drehimpulsen*. Wie oben gehen wir wieder von $\mathfrak{su}(2)$ zu $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ über und verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Satz 21.11.1, wo wir gesehen hatten, daß die Darstellung $\pi_m : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to V_m$ irreduzibel ist. Die Produkt-Darstellung $\pi_m \otimes \pi_n$ ist nun nicht irreduzibel, aber es gibt hier das folgende schöne Ergebnis.

Satz 21.11.2 (Clebsch-Gordan) *Seien $\pi_m : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to V_m$ und $\pi_n : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to V_n$ irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ mit $m \geq n$ und $n > 0$ dann gilt*

$$\pi_m \otimes \pi_n = \pi_{m+n} \oplus \pi_{m+n-2} \oplus \ldots \oplus \pi_{m-n} \ , \quad \textit{bzw.}$$

$$V_m \otimes V_n = V_{m+n} \oplus V_{m+n-2} \oplus \ldots \oplus V_{m-n} \ .$$

Beweis. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 21.11.1. Wir wählen als Basis in V_m die Eigenvektoren von $\hat{H}$ zu den Eigenwerten $\{m, m-2, \ldots, -m\}$, die wir mit $\{u_m, u_{m-2}, \ldots, u_{-m}\}$ bezeichnen, und entsprechend als Basis von V_n die Eigenvektoren von $\hat{H}$ $\{v_n, v_{n-2}, \ldots, v_{-n}\}$. Damit bilden wir eine

Basis von $V_m \otimes V_n$ in der Form $\{u_k \otimes v_l \mid -m \leq k \leq m, \ -n \leq l \leq n\}$. Auf diese Basis wenden wir nun die Produkt-Darstellung von $\hat{H}$ an, d.h.

$$\begin{aligned}
\pi(\hat{H}) u_k \otimes v_l &:= (\pi_m(\hat{H}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \pi_n(\hat{H})) u_k \otimes v_l \\
&= (k\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes l\mathbb{1}) u_k \otimes v_l \\
&= (k+l) u_k \otimes v_l \ .
\end{aligned}$$

Jetzt betrachtet man die Eigenräume von $\pi(\hat{H})$ in $V_m \otimes V_n$. Für den Eigenwert $m+n$ ist der entsprechende Eigenraum eindimensional und wird durch den Eigenvektor $u_m \otimes v_n$ aufgespannt. Der nächste Eigenwert ist $m+n-2$ und der entsprechende Eigenraum wird aufgespannt von den Eigenvektoren $\{u_m \otimes v_{n-2}, u_{m-2} \otimes v_n\}$. Der nächste Eigenwert ist $m+n-4$ und der entsprechende Eigenraum wird aufgespannt von den Eigenvektoren $\{u_m \otimes v_{n-4}, u_{m-2} \otimes v_{n-2}, u_{m-4} \otimes v_n\}$. Mit jeder Abnahme des Eigenwerts von $\pi(\hat{H})$ um 2 nimmt also die Dimension der entsprechenden Eigenraums um 1 zu, und zwar solange, bis man den Eigenwert $m-n$ mit den Eigenvektoren $\{u_m \otimes v_{-n}, \ldots, u_{m-2n} \otimes v_n\}$ erreicht. Dieser Eigenraum hat die Dimension $n+1$. Weil der Wert des Index l nicht kleiner als $-n$ werden kann, bleibt die Dimension der folgenden Eigenräume von $\pi(\hat{H})$ mit jeweils um 2 verringertem Eigenwert weiter $n+1$, und zwar solange, bis der Eigenwert $n-m$ mit den Eigenvektoren $\{u_{-m+2n} \otimes v_{-n}, \ldots, u_{-m} \otimes v_n\}$ erreicht ist. Beim nächsten Eigenwert $n-m-2$ verringert sich die Dimension des entsprechenden Eigenraums wieder um 1, denn die Eigenvektoren sind ja jetzt $\{u_{-m+2n-2} \otimes v_{-n}, \ldots, u_{-m} \otimes v_{n-2}\}$. So nehmen also mit der weiteren Verringerung der Eigenwerte um 2 die Dimensionen der Eigenräume um jeweils 1 ab, bis mit dem Eigenwert $-m-n$ und dem Eigenvektor $u_{-m} \otimes u_{-n}$ wieder ein eindimensionaler Eigenraum erreicht wird.

Jetzt konstruieren wir in $V_m \otimes V_n$ einen Unterraum W_1: zunächst einmal sei der Vektor $u_m \otimes v_n$ in W_1. Wir fügen W_1 die folgenderermaßen konstruierten Vektoren hinzu: der Schiebeoperator $\pi(\hat{X})$ angewandt auf $u_m \otimes v_n$ ergibt 0 und der Schiebeoperator $\pi(\hat{Y})$ angewandt auf $u_m \otimes v_n$ ergibt einen Eigenvektor von $\pi(\hat{H})$ zum Eigenwert $m+n-2$. Wenn man nun auf diesen Eigenvektor wiederholt $\pi(\hat{Y})$ anwendet so erhält man eine Kette von Eigenvektoren zu einem jeweils um 2 reduzierten Eigenwert von $\pi(\hat{H})$, bis man endlich beim Eigenvektor von $\pi(\hat{H})$ zum Eigenwert $-m-n$ angelangt ist. All diese $m+n+1$ Vektoren von W_1 sind linear unabhängig und damit isomorph zu V_{m+n}. Außerdem ist W_1 nach Konstruktion unter $\pi(\hat{H})$, $\pi(\hat{X})$ und $\pi(\hat{Y})$ invariant und damit nach Satz 21.11.1 irreduzibel unter $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Nun ist aber auch $W_1^\perp \subset V_m \otimes V_n$ ein invarianter Unterraum unter $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Nun enthält W_1 Eigenvektoren von $\pi(\hat{H})$ zu den Eigenwerten $m+n$ bis $-m-n$ jeweils mit einer Multiplizität 1, also ist der Eigenvektor von $\pi(\hat{H})$ zum höchste Eigenwert in $W_1^\perp$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $m+n-2$, der ebenfalls eine Multiplizität von 1 hat und bei der Anwendung des Schiebeoperators $\pi(\hat{X})$ ebenfalls 0 ergibt. Also können wir in $W_1^\perp$ wie oben mit Hilfe des Schiebeoperators $\pi(\hat{Y})$ einen Unterraum W_2 konstruieren, der dann isomorph zu V_{m+n-2} und irreduzibel ist. Dieses Verfahren setzt man fort, bis alle Eigenvektoren von $\pi(\hat{H})$ in $V_m \otimes V_n$ ausgeschöpft sind, was gerade beim Eigenwert $m-n$, d.h. bei $W_{n+1} \simeq V_{m-n}$ der Fall ist. Alle W_i

sind nach Konstruktion irreduzibel und damit gilt:

$$V_m \otimes V_n = W_1 \oplus \ldots \oplus W_{n+1} = V_{m+n} \oplus \ldots \oplus V_{m-n} \ . \qquad \square$$

21.12 Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Wir hatten für die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ der Lorentz-Gruppe in 21.7.8 die folgenden Lie-Klammern gefunden

$$[K_i, K_j] = \bar{f}_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } \bar{f}_{ij}{}^k = -\epsilon_{ijk} \ ,$$

$$[J_i, K_j] = f_{ij}{}^k K_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} \ ,$$

$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} \ .$$

Wenn man jetzt $\mathfrak{so}(3,1)$ komplexifiziert zu $\mathfrak{so}(3,1)_{\mathbb{C}}$, d.h. wenn man statt reellen auch komplexe Koeffizienten zuläßt, dann gilt

$$\mathfrak{so}(3,1)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \ , \tag{21.12.1}$$

denn mit

$$I_k := \frac{1}{2}(J_k - iK_k) \quad \text{und} \quad I'_k := \frac{1}{2}(J_k + iK_k) \ , \tag{21.12.2}$$

$$J_k = I_k + I'_k \quad \text{und} \quad K_k = i(I_k - I'_k) \tag{21.12.3}$$

gilt

$$\begin{aligned}
[I_i, I_j] &= \frac{1}{4}[J_i - iK_i, J_j - iK_j] = \frac{1}{4}\{[J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] + i^2[K_i, K_j]\} \\
&= \frac{1}{4}\{\epsilon_{ijk}J_k - i\epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{jik}K_k - (-1)\epsilon_{ijk}J_k\} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\{J_k - iK_k\} \\
&= \epsilon_{ijk}I_k \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[I'_i, I'_j] &= \frac{1}{4}[J_i + iK_i, J_j + iK_j] = \frac{1}{4}\{[J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + i^2[K_i, K_j]\} \\
&= \frac{1}{4}\{\epsilon_{ijk}J_k + i\epsilon_{ijk}K_k - i\epsilon_{jik}K_k - (-1)\epsilon_{ijk}J_k\} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\{J_k + iK_k\} \\
&= \epsilon_{ijk}I'_k \ ,
\end{aligned}$$

$$[I_i, I'_j] = \frac{1}{4}[J_i - iK_i, J_j + iK_j] = \frac{1}{4}\{[J_i, J_j] + i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] - i^2[K_i, K_j]\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\epsilon_{ijk}J_k + i\epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{jik}K_k + (-1)\epsilon_{ijk}J_k\} = 0 \ . \tag{21.12.4}$$

Die endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ in einen $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum V_n kennen wir aber bereits sehr gut und hatten sie durch die Spin-Quantenzahl $s := \frac{n}{2} \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$ charkterisiert. Dabei waren für geradzahlige Werte s Vektordarstellungen möglich und für halbzahlige Werte von s nur Spinordarstellungen.

Wegen $\mathfrak{so}(3,1)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ kann man jetzt die endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{so}(3,1)_{\mathbb{C}}$ durch die zwei Werte (s_1, s_2) charkterisieren:

$$\pi_{(s_1,s_2)}(J_k) = \pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} + \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k) \ , \tag{21.12.5}$$

$$\pi_{(s_1,s_2)}(K_k) = i(\pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} - \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)) \ , \tag{21.12.6}$$

Die Dimension dieser Darstellung ist $(2s_1+1)(2s_2+1)$ und der maximale Spinwert (mathematisch gesprochen: das höchste Gewicht) ist mit $J_k = I_k + I'_K$ gerade $s_1 + s_2$.

Mit $[I_i, I'_j] = 0$ und dem Satz von Baker-Campbell-Hausdorf (21.4.5) wird die entsprechende Darstellung von $SO(3,1)$ auf $V_{2s_1} \otimes V_{2s_2}$ zu:

$$\begin{aligned}
\Pi_{(s_1,s_2)}&(\exp(\theta^k J_k + \alpha^k K_k)) = \exp(\pi_{(s_1,s_2)}(\theta^k J_k + \alpha^k K_k)) \\
&= \exp(\theta^k \pi_{(s_1,s_2)}(J_k) + \alpha^k \pi_{(s_1,s_2)}(K_k)) \\
&= \exp\{\theta^k(\pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} + \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)) \\
&\qquad + \alpha^k(i(\pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} - \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)))\} \\
&= \exp\{(\theta^k + i\alpha^k)\pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} + (\theta^k - i\alpha^k)\mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)\} \\
&= \exp\{(\theta^k + i\alpha^k)\pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)}\} \ \exp\{(\theta^k - i\alpha^k)\mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)\} \\
&= \Pi_{s_1}(\exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k) \ \otimes \ \Pi_{s_2}(\exp((\theta^k - i\alpha^k)I'_k) \ .
\end{aligned} \tag{21.12.7}$$

Die Darstellung $\Pi_{(0,0)}$ ist 1-dimensional und charakterisiert damit einen Lorentz-Skalar.

Die Darstellung $\Pi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ ist 4-dimensional und die beiden 2-dimensionalen Teilräume V_1 sind isomorph, also ist $\Pi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ bis auf Isomorphie die übliche Vektordarstellung der Lorentzgruppe.

Die Darstellungen $\Pi_{(\frac{1}{2},0)}$ und $\Pi_{(0,\frac{1}{2})}$ sind 2-dimensionale Spinordarstellungen und charakterisieren einen *linkshändigen*, bzw. einen *rechtshändigen* Weyl-Spinor. Die unterschiedlichen Transformationseigenschaften der Darstellungen $\Pi_{(\frac{1}{2},0)}$ und $\Pi_{(0,\frac{1}{2})}$ heißen in der Physik *Chiralität* - man spricht also von links- bzw. rechtshändiger Chiralität.

In diesen 2-dimensionalen Spinordarstellungen können I_k und I'_k jetzt gerade als $S_k = \frac{1}{2i}\sigma_k$ aus 21.6.20 gewählt werden. Wir betrachten nun zuerst $\Pi_{(\frac{1}{2},0)}$. Da $\Pi_{(\frac{1}{2},0)}$ eine 2-dimensionale Darstellung auf dem 2-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{C}^2$ ist, können wir $\Pi_{(\frac{1}{2},0)}$

als die sog. Fundamentaldarstellung wählen, die mit $I_k : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definiert ist als

$$\Pi_{(\frac{1}{2},0)}(\exp(\theta^k J_k + \alpha^k K_k)) = \Pi_{(\frac{1}{2},0)}(\exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k)) = \exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k) \ .$$

Damit transformiert sich der Weyl-Spinor $\psi_L \in \mathbb{C}^2$ unter dieser Darstellung einer Lorentztransformation als

$$\begin{aligned}\Pi_{(\frac{1}{2},0)}(\exp(\theta^k S_k + \alpha^k K_k))\psi_L &= \Pi_{(\frac{1}{2},0)}(\exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k)\psi_L = \exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k)\psi_L \\ &= \exp((\theta^k + i\alpha^k)S_k)\psi_L = \exp((\theta^k + i\alpha^k)\frac{1}{2i}\sigma_k)\psi_L \\ &= \exp(\frac{1}{2}(-i\theta^k + \alpha^k)\sigma_k)\psi_L \ . \qquad (21.12.8)\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für den rechtshändigen Weyl-Spinor $\psi_R \in \mathbb{C}^2$ mit $I'_k = S_k$:

$$\begin{aligned}\Pi_{(0,\frac{1}{2})}(\exp(\theta^k S_k + \alpha^k K_k))\psi_R &= \Pi_{(0,\frac{1}{2})}(\exp((\theta^k - i\alpha^k)I'_k)\psi_R = \exp((\theta^k - i\alpha^k)I'_k)\psi_R \\ &= \exp((\theta^k - i\alpha^k)S_k)\psi_R = \exp((\theta^k - i\alpha^k)\frac{1}{2i}\sigma_k)\psi_R \\ &= \exp(\frac{1}{2}(-i\theta^k - \alpha^k)\sigma_k)\psi_R \ . \qquad (21.12.9)\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen $U_L, U_R \in SL(2,\mathbb{C})$ gilt also:

$$U_L := \exp(\frac{1}{2}(-i\theta^k + \alpha^k)\sigma_k \quad \text{und} \quad U_R := \exp(\frac{1}{2}(-i\theta^k - \alpha^k)\sigma_k) \ . \qquad (21.12.10)$$

Wegen $\sigma_k = \sigma_k^\dagger$ folgt

$$U_L^{-1} = U_R^\dagger \quad \text{bzw.} \quad U_L^\dagger = U_R^{-1} \ , \qquad (21.12.11)$$

$$\psi'_L = U_L\psi_L \quad \text{und} \quad \psi'_R = U_R\psi_R = (U_L^\dagger)^{-1}\psi_R \ . \qquad (21.12.12)$$

Weiter gilt

$$\sigma_2 U_L \sigma_2 = U_R^* \ , \qquad (21.12.13)$$

denn mit $\sigma_2\sigma_k\sigma_2 = 2\delta_{2,k}\sigma_2 - \sigma_k$ folgt

$$\begin{aligned}\sigma_2(-i\theta^k + \alpha^k)\sigma_k\sigma_2 &= \sigma_2(-i\theta^1 + \alpha^1)\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2(-i\theta^2 + \alpha^2)\sigma_2\sigma_2 \\ &\quad \sigma_2(-i\theta^3 + \alpha^3)\sigma_3\sigma_2 \\ &= (-i\theta^1 + \alpha^1)(-1)\sigma_1 + (-i\theta^2 + \alpha^2)\sigma_2 + (-i\theta^3 + \alpha^3)(-1)\sigma_3 \\ &= (+i\theta^1 - \alpha^1)\sigma_1 + (-i\theta^2 + \alpha^2)\sigma_2 + (+i\theta^3 - \alpha^3)\sigma_3\end{aligned}$$

$$= (-i\theta^1 - \alpha^1)^* \sigma_1^* + (+i\theta^2 + \alpha^2)^* (-1)\sigma_2^* + (-i\theta^3 - \alpha^3)^* \sigma_3^*$$
$$= (-i\theta^k - \alpha^k)^* \sigma_k^* \ .$$

Daraus folgt

$$\sigma_2 U_L = U_R^* \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad U_L^T \sigma_2^T {=} \sigma_2^T U_R^\dagger \quad \Rightarrow \quad U_L^T (-1)\sigma_2 = (-1)\sigma_2 U_L^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$U_L^T \sigma_2 U_L = \sigma_2 \tag{21.12.14}$$

Häufig geht man in dieser Beziehung von σ_2 über zu $\epsilon := i\sigma_2$, also

$$\epsilon := i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \epsilon^2 = -\mathbb{1} \ , \quad \epsilon^T = \epsilon^{-1} \ , \tag{21.12.15}$$

und erhält

$$U_L^T \epsilon U_L = \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad U_L^T \epsilon^T U_L = \epsilon^T \ . \tag{21.12.16}$$

Mit

$$U_L^T = (U_R^*)^{-1} \quad \text{und} \quad U_L = (U_R^\dagger)^{-1} \quad \text{folgt}$$

$$(U_R^*)^{-1} \epsilon (U_R^\dagger)^{-1} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad (U_R^\dagger) \epsilon^T (U_R^*) = \epsilon^T \quad \Rightarrow$$

$$(U_R^T) \epsilon^T U_R = \epsilon^T \quad \Rightarrow \quad U_R^T \epsilon U_R = \epsilon \ . \tag{21.12.17}$$

In Analogie zu 21.7.1 spricht man von ϵ als einer Spinor-Metrik.

Jetzt kann man die Frage stellen, wie die beiden Weyl-Spinoren ψ_L und ψ_R zusammenhängen? Dazu betrachten wir ψ_L^* und ψ_R^* unter einer $SL(2, \mathbb{C})$-Tansformation:

$$(\epsilon \psi_L^*)' := \epsilon U_L^* \psi_L^* = \epsilon U_L^* (-\epsilon\epsilon) \psi_L^* = U_R (\epsilon \psi_L^*) \ ,$$
$$(\epsilon \psi_R^*)' := \epsilon U_R^* \psi_R^* = \epsilon U_R^* (-\epsilon\epsilon) \psi_R^* = -U_L (\epsilon \psi_R^*) \ .$$

Da sich also $\epsilon\psi_L^*$ unter U_R transformiert und $\epsilon\psi_R^*$ unter $-U_L$ kann man *definieren*:

$$\psi_L := \epsilon \psi_R^* \quad \Leftrightarrow \quad \psi_R := -\epsilon \psi_L^* \ . \tag{21.12.18}$$

21.13 Spinor-Indizes

Mit der in 21.12.15 definierten Metrik ϵ kann man den Übergang vom Spinorraum zu dessen Dualraum und ein entsprechendes Skalarprodukte definieren. Hierbei ist für konkrete Rechnungen genauso wie im Fall von Vektoren und Tensoren die Einführung einer Indexnotation notwendig. Allerdings muß man bei Weyl-Spinoren sorgfältig zwischen den linkshändigen $\Pi_{(\frac{1}{2},0)}$ und den rechtshändigen $\Pi_{(0,\frac{1}{2})}$ Spinoren unterscheiden, da diese sich bei einer Lorentz-Transformation ja nach verschiedenen Darstellungen transformieren. Insbesondere darf man natürlich nicht über Indizes mit verschiedener Chiralität, d.h. verschiedenem Transformationsverhalten, summieren!

Wir folgen hier einer Version der *Infeld-van der Waerden* Schreibweise, in der die Indizes der linkshändigen Spinoren mit lateinischen Buchstaben, $a, b, c, \ldots$, bezeichnet werden und die Indizes der rechtshändigen Spinoren mit einem Überstrich $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ versehen werden. Infeld und van der Waerden hatten ursprünglich für die Indizes große lateinische Buchstaben $A, B, C, \ldots$ und für rechtshändige Spinoren einen Punkt $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \ldots$ eingeführt, aber es war dann manchmal in Publikationen nicht völlig klar, ob da jetzt ein Punkt war, oder doch nicht :-)

$$\psi_L := \psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \,, \quad \psi_R = -\epsilon\psi_L^* := \psi_{\bar{a}} = \begin{pmatrix} \psi_{\bar{1}} \\ \psi_{\bar{2}} \end{pmatrix} \,. \tag{21.13.1}$$

Warum definieren Infeld und van der Waerden $\psi_R = \psi_{\bar{a}}$ mit einem kovarianten Index im Gegensatz zu $\psi_L = \psi^a$? Wir werden gleich sehen, daß diese Schreibweise den Vorteil hat, daß einem Vierervektor x^μ dann ein 2-stufiger Spinor der Form $X^{a\bar{b}}$ entspricht.

Wir hatten gerade $U_L^T \epsilon U_L = \epsilon$ und $U_R^T \epsilon U_R = \epsilon$ mit dem gleichen ϵ gefunden, also gilt in Komponentenschreibweise $\epsilon_{ab} = \epsilon_{\bar{a}\bar{b}}$ und $\epsilon^{ab} := (\epsilon^{-1})_{ab} = (\epsilon^T)_{ab} = \epsilon_{ba}$.

Bei Indexoperationen mit Spinoren ist aber auch deshalb Sorgfalt geboten, weil die Metrik ϵ antisymmetrisch ist! Und das hat die folgende Konsequenz:

$$\psi_a = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \epsilon_{ab}\psi^b = \begin{pmatrix} \psi^2 \\ -\psi^1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (\psi^b)^T(-\epsilon_{ba}) = (\psi^b)^T(\epsilon^T)_{ba} \,,$$

bzw. kurz

$$\psi_a = \epsilon\psi^a = \psi^a\epsilon^T \,. \tag{21.13.2}$$

Wir folgen jetzt der klaren und schönen Darstellung von Steane (2013), S. 14 ff. Sei etwa $X = x^\mu\sigma_\mu$ die 2×2 Matrix eines Vierervektors x^μ bzgl. der Lorentz-Transformationen in $SL(2, \mathbb{C})$, dann ist $X\psi_L$ keineswegs ein 2-Spinor, denn

$$(X\psi_L)' = U_L X U_L^\dagger U_L \psi_L \neq U_L X \psi_L \,,$$

da U_L ja nicht unitär ist.

Da wir jetzt eine Spinor-Metrik zur Verfügung haben, können wir kontravariante Spinoren in kovariante umwandeln, Skalarprodukte bilden, mehrstufige Spinoren verjüngen, usw. Allerdings dürfen wir nicht linkshändige mit rechthändigen Spinoren verjüngen, da sich diese in verschiedenen Räumen befinden! Sei etwa M ein 2-stufiger Spinor, den wir uns aus dem direkten Produkt zweier 1-stufiger Spinoren v, w zusammensetzen, also $M = v \otimes w^T$, dann folgt:

$$M^{ab} = v^a (w^b)^T = \epsilon^{ac} v_c (w^b)^T = \epsilon^{ac} M_c{}^b ,$$

$$M^{ab} = v^a (w^b)^T = v^a (\epsilon^{bc} w_c)^T = v^a (w_c)^T (\epsilon^{bc})^T = M^a{}_c \epsilon^{cb} ,$$

$$M_{ab} = v_a w_b^T = \epsilon_{ac} v^c w_b^T = \epsilon_{ac} M^c{}_b ,$$

$$M_{ab} = v_a w_b^T = v_a (\epsilon_{bc} w^c)^T = v_a (w^c)^T \epsilon_{bc}^T = M_a{}^c \epsilon_{cb} .$$

Um das Verhalten der möglichen 2-stufigen Spinoren unter Lorentztransformationen zu klassifizieren, setzen wir diese 2-stufigen Spinoren wieder aus dem direkten Produkt der beiden 1-stufigen Spinoren v, w zusammen, also $M = v \otimes w^T$, und finden zunächst für die Transformation der verschiedenen Varianten von v und w^T:

$$(v^a)' = U_L v^a ,$$

$$(v_a)' = (\epsilon_{ac} v^c)' = \epsilon_{ac} U_L v^c = (U_L^T)^{-1} \epsilon_{ac} v^c = (U_L^T)^{-1} v_a ,$$

$$(v^{\bar{a}})' = (\epsilon^{\bar{a}\bar{c}} v_{\bar{c}})' = \epsilon^{\bar{a}\bar{c}} U_R v_{\bar{c}} = (U_R^T)^{-1} \epsilon^{\bar{a}\bar{c}} v_{\bar{c}} = U_L^* v^{\bar{a}} ,$$

$$(v_{\bar{a}})' = U_R v_{\bar{a}} = (U_L^\dagger)^{-1} v_{\bar{a}} ,$$

$$((w^b)^T)' = (U_L w^b)^T = (w^b)^T U_L^T ,$$

$$((w_b)^T)' = ((\epsilon_{bc} w^c)^T)' = (\epsilon_{bc} U_L w^c)^T = ((U_L^T)^{-1} \epsilon_{bc} w^c)^T = (\epsilon_{bc} w^c)^T U_L^{-1} = w_b U_L^{-1} ,$$

$$((w^{\bar{b}})^T)' = ((\epsilon^{\bar{b}\bar{c}} w_{\bar{c}})^T)' = (\epsilon^{\bar{b}\bar{c}} U_R w_{\bar{c}})^T = ((U_R^T)^{-1} \epsilon^{\bar{b}\bar{c}} w_{\bar{c}})^T = (w^{\bar{b}})^T U_L^\dagger ,$$

$$((w_{\bar{b}})^T)' = (U_R w_{\bar{b}})^T = (w_{\bar{b}})^T (U_L^*)^{-1} .$$

Hieraus folgt nun z.B. für $M^{ab} = v^a (w^b)^T$:

$$(M^{ab})' = (v^a (w^b)^T)' = U_L v^a (U_L w^b)^T = U_L v^a (w^b)^T U_L^T = U_L M^{ab} U_L^T , \quad \text{usw.}$$

Zusammenfassend erhalten wir also für die 16 verschiedenen 2-stufigen Spinoren M das folgende Transformationsverhalten unter Lorentztransformationen:

$M = vw^T$	w^b	w_b	$w^{\bar{b}}$	$w_{\bar{b}}$
v^a	$U_L M^{ab} U_L^T$	$U_L M^a{}_b U_L^{-1}$	$U_L M^{a\bar{b}} U_L^\dagger$	$U_L M^a{}_{\bar{b}} (U_L^*)^{-1}$
v_a	$(U_L^T)^{-1} M_a{}^b U_L^T$	$(U_L^T)^{-1} M_{ab} U_L^{-1}$	$(U_L^T)^{-1} M_a{}^{\bar{b}} U_L^\dagger$	$(U_L^T)^{-1} M_{a\bar{b}} (U_L^*)^{-1}$
$v^{\bar{a}}$	$U_L^* M^{\bar{a}b} U_L^T$	$U_L^* M^{\bar{a}}{}_b U_L^{-1}$	$U_L^* M^{\bar{a}\bar{b}} U_L^\dagger$	$U_L^* M^{\bar{a}}{}_{\bar{b}} (U_L^*)^{-1}$
$v_{\bar{a}}$	$(U_L^\dagger)^{-1} M_{\bar{a}}{}^b U_L^T$	$(U_L^\dagger)^{-1} M_{\bar{a}b} U_L^{-1}$	$(U_L^\dagger)^{-1} M_{\bar{a}}{}^{\bar{b}} U_L^\dagger$	$(U_L^\dagger)^{-1} M_{\bar{a}\bar{b}} (U_L^*)^{-1}$

Physiker sind natürlich besonders an Lorentz-Skalaren interessiert. Ein aus dem Weyl-Spinor ψ_L mit Hilfe der Spinor-Metrik gebildeter Lorentz-Skalar ist

$$\langle \psi_L \mid \psi_L \rangle_\epsilon := \psi_L^T \epsilon \psi_L \ , \tag{21.13.3}$$

denn

$$\langle \psi'_L \mid \psi'_L \rangle_\epsilon = \psi_L^T U_L^T \epsilon U_L \psi_L = \psi_L^T \epsilon \psi_L = \langle \psi_L \mid \psi_L \rangle_\epsilon \ .$$

Für ψ_R gilt das gleiche. Interessant ist jetzt, daß die Komponenten von ψ_L und ψ_R antikommutierende Grassmann-Zahlen sein müssen, wenn diese Spinor-Norm nicht-trivial sein soll, denn:

$$\begin{aligned} \langle \psi_L \mid \psi_L \rangle_\epsilon = \psi_L^T \epsilon \psi_L = (\psi_{L,1}, \psi_{L,2}) \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{L,1} \\ \psi_{L,2} \end{pmatrix} &= -\psi_{L,2}\psi_{L,1} + \psi_{L,1}\psi_{L,2} \\ &= \begin{cases} 2\psi_{L,1}\psi_{L,2} & \text{für} \quad \{\psi_{L,1}\psi_{L,2}\} = 0 \ , \\ 0 & \text{für} \quad [\psi_{L,1}\psi_{L,2}] = 0 \ . \end{cases} \end{aligned} \tag{21.13.4}$$

Wir hatten in 21.7.5 festgestellt, daß wir einem Vierervektor x^μ eine 2×2 Matrix X zuordnen können, so daß einer Lorentztransformation des Vierervektors eine $SL(2, \mathbb{C})$-Transformation von X der Form $UXU^\dagger$ entspricht:

$$\mathfrak{X} : \mathbb{R}^4 \to i \cdot \mathfrak{u}(2) \ , \quad \mathfrak{X}(x) := X := x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \ , \tag{21.13.5}$$

$$\mathfrak{X}^{-1} : i \cdot \mathfrak{u}(2) \to \mathbb{R}^4 \ , \quad x^\mu := \mathfrak{X}^{-1}(X) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X\sigma_\mu) \ . \tag{21.13.6}$$

Weiter sieht man anhand der obigen Tabelle sofort, daß der 2-stufige Spinor $M^{a\bar{b}}$ gerade das gleiche Transformationsverhalten hat wie die dem Vierervektor x^μ entsprechende Matrix X, d.h. wir können für X in Indexschreibweise schreiben:

$$(X^{a\bar{b}})' = U_L X^{a\bar{b}} U_L^\dagger \ . \tag{21.13.7}$$

In diesem Sinn kann man also von Vierervektoren als $\Pi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$-Spinor-Darstellungen der Lorentzgruppe sprechen.

Um alle Vektor- und Tensor-Darstellungen der Lorentzgruppe auf Spinor-Darstellungen umschreiben zu können, benötigt man aber neben der Transformation für die Vektoren x^μ auch die Transformation für die Vektoren x_μ, und das in einer möglichst kovarinaten Formulierung. Dies liefert das folgende Lemma, wobei wir uns an Misner u. a. (1973), S. 1150 ff. orientieren.

Definition 21.13.1 *Zu den Pauli-Matrizen* ${\sigma_\mu}^{a\bar{b}}$

$$
{\sigma_\mu}^{a\bar{b}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \tag{21.13.8}
$$

lassen sich die folgenden dualen Pauli-Matrizen ${\sigma^\mu}_{a\bar{b}}$ *definieren:*

$$
{\sigma^\mu}_{a\bar{b}} := \eta^{\mu\nu} {\sigma_\nu}^{c\bar{d}} \epsilon_{ca} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = \eta^{\mu\nu} (\epsilon^T)_{ac} {\sigma_\nu}^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} \,, \quad \textit{d.h.} \tag{21.13.9}
$$

$$
{\sigma^\mu}_{a\bar{b}} = \left(- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) . \tag{21.13.10}
$$

Lemma 21.13.2 *Mit den Pauli-Matrizen* ${\sigma_\mu}^{a\bar{b}}$ *und den dualen Pauli-Matrizen* ${\sigma^\mu}_{a\bar{b}}$ *gilt:*

$$
{\sigma_\mu}^{a\bar{b}} {\sigma^\nu}_{a\bar{b}} = -2\delta^\nu_\mu \,, \quad {\sigma_\mu}^{a\bar{b}} {\sigma^\mu}_{c\bar{d}} = -2\delta^a_c \delta^{\bar{b}}_{\bar{d}} \,. \tag{21.13.11}
$$

$$
X^{a\bar{b}} = x^\mu {\sigma_\mu}^{a\bar{b}} \,, \quad X_{a\bar{b}} = x_\mu {\sigma^\mu}_{a\bar{b}} \,, \tag{21.13.12}
$$

$$
x^\mu = -\frac{1}{2} {\sigma^\mu}_{a\bar{b}} X^{a\bar{b}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma^\mu X^T) \,, \quad x_\mu = -\frac{1}{2} {\sigma_\mu}^{a\bar{b}} X_{a\bar{b}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma_\mu X^T) \,. \tag{21.13.13}
$$

Damit gilt auch

$$
X_{a\bar{b}} = \epsilon_{ac} \epsilon_{\bar{b}\bar{d}} X^{c\bar{d}} = -\epsilon_{ac} X^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} \,. \tag{21.13.14}
$$

Beweis. Zunächst die Herleitung der expliziten Form der ${\sigma^\mu}_{a\bar{b}}$:

$$
{\sigma^0}_{a\bar{b}} = \eta^{0\nu} (\epsilon^T)_{ac} {\sigma_\nu}^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,
$$

$$
\begin{aligned}
{\sigma^1}_{a\bar{b}} = \eta^{1\nu} (\epsilon^T)_{ac} {\sigma_\nu}^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

$$\sigma^2{}_{a\bar{b}} = \eta^{2\nu}(\epsilon^T)_{ac}\sigma_\nu{}^{c\bar{d}}\epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma^3{}_{a\bar{b}} = \eta^{3\nu}(\epsilon^T)_{ac}\sigma_\nu{}^{c\bar{d}}\epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Nun zur ersten Orthogonalitätsbeziehung von $\sigma_\mu{}^{a\bar{b}}$ und $\sigma^\nu{}_{a\bar{b}}$.

$$\sigma_\mu{}^{a\bar{b}}\sigma^\nu{}_{a\bar{b}} = \sigma_\mu{}^{a\bar{b}}(\sigma^\nu)^T_{\bar{b}a} = \operatorname{tr}(\sigma_\mu(\sigma^\nu)^T) .$$

Zunächst einmal gilt im Fall $\mu = \nu$ (hier keine Summation über μ):

$$\sigma_\mu{}^{a\bar{b}}\sigma^\mu{}_{a\bar{b}} = \operatorname{tr}(\sigma_\mu(\sigma^\mu)^T) = \operatorname{tr}(-\mathbb{1}) = -2 .$$

Für die Fälle $\mu \neq \nu$ entnimmt man aus

$$\sigma_0(\sigma^1)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_0(\sigma^2)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_0(\sigma^3)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_1(\sigma^2)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_1(\sigma^3)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_2(\sigma^3)^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} ,$$

daß

$$\operatorname{tr}(\sigma_\mu(\sigma^\nu)^T) = 0$$

ist, also folgt

$$\sigma_\mu{}^{a\bar{b}}\sigma^\nu{}_{a\bar{b}} = \sigma_\mu{}^{a\bar{b}}((\sigma^\nu)^T)_{\bar{b}a} = \operatorname{tr}(\sigma_\mu(\sigma^\nu)^T) = -2\delta^\nu_\mu .$$

Nun zur zweiten Orthogonalitätsbeziehung von ${\sigma_\mu}^{a\bar{b}}$ und ${\sigma^\mu}_{c\bar{d}}$.

$$ {\sigma_\mu}^{a\bar{b}}{\sigma^\mu}_{c\bar{d}} = [(\sigma_0 \otimes \sigma^0) + (\sigma_1 \otimes \sigma^1) + (\sigma_2 \otimes \sigma^2) + (\sigma_3 \otimes \sigma^3)]^{a\bar{b}}_{c\bar{d}} \, . $$

$$ \begin{aligned} [\sigma_\mu \otimes \sigma^\mu] &= \Bigg[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg] \\ &= \left[\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & +1 & \\ & +1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \end{aligned} $$

Hierbei haben wir als Zeilenindizes benutzt

$$ (a,c): \ (1,1), \ (1,2), \ (2,1), \ (2,2) $$

und als Spaltenindizes

$$ (\bar{b},\bar{c}): \ (1,1), \ (1,2), \ (2,1), \ (2,2) \, . $$

Damit folgt

$$ {\sigma_\mu}^{a\bar{b}}{\sigma^\mu}_{c\bar{d}} = \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right]^{a\bar{b}}_{c\bar{d}} = -2\delta^a_c \delta^{\bar{b}}_{\bar{d}} \, . $$

Den 2-stufigen Spinor$X^{a\bar{b}}$, der aus x^μ gebildet wird, kennen wir ja bereits aus aus 21.13.5

$$ X^{a\bar{b}} := x^\mu {\sigma_\mu}^{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \, , $$

und ebenso folgt $X_{a\bar{b}}$, das aus x_μ gebildet wird:

$$X_{a\bar{b}} = x_\mu \sigma^\mu{}_{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 - ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} .$$

Jetzt soll die Umkehrung dieser Beziehungen gezeigt werden. Zunächst die Umkehrung von $X^{a\bar{b}}$:

$$-\frac{1}{2}\sigma^\mu{}_{a\bar{b}} X^{a\bar{b}} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\sigma^\mu X^T) \quad \text{und dies ergibt:}$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma^0{}_{a\bar{b}}(X^T)^{\bar{b}a}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}\right) = x^0 ,$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma^1{}_{a\bar{b}}(X^T)^{\bar{b}a}) &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \\ x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \end{pmatrix} = x^1 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma^2{}_{a\bar{b}}(X^T)^{\bar{b}a}) &= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} -ix^1 - x^2 & -ix^0 + ix^3 \\ ix^0 + ix^3 & ix^1 - x^2 \end{pmatrix} = x^2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma^3{}_{a\bar{b}}(X^T)^{\bar{b}a}) &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & -x^0 + x^3 \end{pmatrix} = x^3 , \end{aligned}$$

also

$$x^\mu = -\frac{1}{2}\sigma^\mu{}_{a\bar{b}} X^{a\bar{b}} .$$

Und jetzt die Umkehrung von $X_{a\bar{b}}$:

$$-\frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\bar{b}} X_{a\bar{b}} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\sigma_\mu X^T) \quad \text{und dies ergibt:}$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_0{}^{a\bar{b}}(X^T)_{\bar{b}a}) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}\right) = x_0 ,$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_1{}^{a\bar{b}}(X^T)_{\bar{b}a}) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \\ -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \end{pmatrix} = x_1 \ ,$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_2{}^{a\bar{b}}(X^T)_{\bar{b}a}) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} ix_1 - x_2 & ix_0 - ix_3 \\ -ix_0 - ix_3 & -ix_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_2 \ ,$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_3{}^{a\bar{b}}(X^T)_{\bar{b}a}) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ x_1 + ix_2 & +x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_3 \ ,$$

also

$$x_\mu = -\frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\bar{b}}X_{a\bar{b}} \ .$$

Zur Prüfung der Konsistenz schauen wir jetzt noch auf die Transformation von $X^{c\bar{d}}$ zu $X_{a\bar{b}}$:

$$\epsilon_{ac}\epsilon_{\bar{b}\bar{d}}X^{c\bar{d}} = -\epsilon_{ac}X^{c\bar{d}}\epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x^1 - ix^2 & -x^0 + x^3 \\ x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 - ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} = X_{a\bar{b}} \ . \qquad \square$$

Mit den σ_μ und σ^ν kann man also beliebige Tensoren in Spinoren umschreiben und umgekehrt, also z.B.:

$$T^{a\bar{b}}{}_{c\bar{d}} = t^\mu{}_\nu\,\sigma_\mu{}^{a\bar{b}}\sigma^\nu{}_{c\bar{d}} \ , \qquad t^\mu{}_\nu = (-\frac{1}{2})^2\sigma^\mu{}_{a\bar{b}}\sigma_\nu{}^{c\bar{d}}T^{a\bar{b}}{}_{c\bar{d}} \ . \tag{21.13.15}$$

22 Die Dirac-Gleichung

Mit den Entwicklungen der modernen Quantenfeld-Theorien ist für die meisten theoretischen Physiker die Mathematik der Dirac-Gleichung etwas aus dem Blickfeld des Interesses verschwunden. Jedoch sind die ursprüngliche Dirac-Gleichung und die euklidische Dirac-Gleichung aus mathematischer Sicht immer noch Objekte der Forschung und eine Quelle schöner Ergebnisse (z.B. topologischer Indexsätze). Wir wollen in dieses Thema hier nicht wirklich tief einsteigen, aber dennoch nicht versäumen auf die schöne und inspirerende Monographie von Thaller (1992) hinzuweisen!

22.1 Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

Paul Adrien Maurice Dirac wurde in Bristol geboren. Er hatte eine sehr schwere Kindheit, bedingt durch seinen autoriären Vater und wohl auch durch seinen milden Autismus in Form eines Asperger-Syndroms (siehe Farmelo (2009), S. 419 ff.).

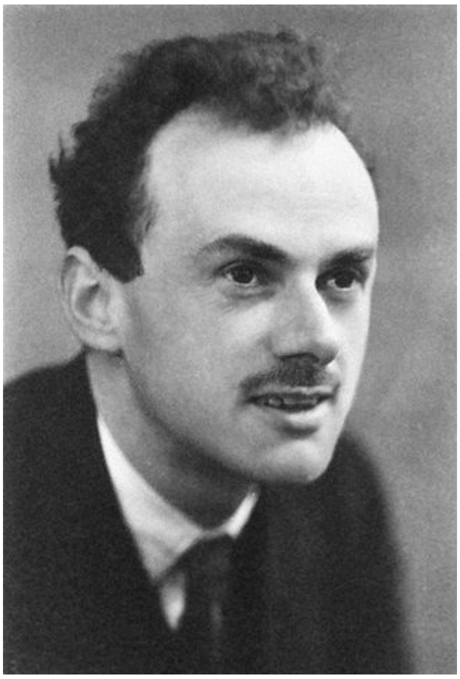

Abbildung 22.1: P. Dirac
Nobel Foundation (1933), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac]

Im Jahr 1921 begann Dirac ein Studium der Elektrotechnik in Bristol und wechselte dann zur Mathematik. Dank eines Stipendiums konnte er sein Mathematik-Studium in Cambridge bei Fowler fortsetzen. In seiner Dissertation 1925 entwickelte er den Poisson-Klammer- Formalismus der klassischen Mechanik in Analogie zu den quantenmechanischen Matrizen-Kommutatoren von Heissenberg.

Von 1932 bis 1969 forschte und lehrte Dirac als Professor auf dem berühmten Lucasischen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge, auf dem schon Newton tätig gewesen war.

Im Jahr 1937 heirateten Paul Dirac und Margit Wigner. Sie war die Schwester des mathematischen Physikers Eugene Wigner. Sie hatten zusammen zwei Töchter. Auch wenn die

Beziehung zwischen dem so wortkargen und unemotionalen Dirac und seiner temperamentvollen Frau nicht einfach war, so sorgte Margrit, genannt Manci, doch dafür, daß ihr Mann von allem Alltäglichen entlastet wurde und sich ganz seiner Arbeit widmen konnte. Im Jahr 1970 übersiedelten Dirac und seine Frau nach Florida in die Nähe ihrer ältesten Tochter und Dirac forschte noch 14 Jahre bis zu seinem Lebensende an der University of Miami in Coral Gables und der Florida State University in Tallahassee.

Im Jahr 1926 vereinigte Dirac auf der mathematischen Grundlage von linearen Operatoren in Hilbert-Räumen Heisenbergs Matrizenmechanik mit Schrödingers Wellenmechanik. Diese Arbeiten waren die Grundlage für Diracs bis heute berühmtes, im Jahr 1930 erstmalig publiziertes Buch *Principles of Quantum Mechanics* (Dirac (1970)). Dieses Werk begründete den heute überall in der Quantentheorie verwendeten Formalismus und wurde schnell zum Standard-Lehrbuch der Quantenmechanik. Nebenbei führte er hier auch das sog. *Wechselwirkungsbild*, die *Bra-Ket* Schreibweise und die *Delta-Funktion* ein.

Im Jahr 1928 fand er die später nach ihm benannte *Dirac-Gleichung* als eine relativistische, quantenmechanische Wellengleichung 1. Ordnung für Elektronen auf der Grundlage von Spinoren. Damit konnte er den Spin relativistischer Teilchen erklären und das Antiteilchen des Elektrons, das Positron vorhersagen. Darüber hinaus postulierte er mit seiner *Löchertheorie* und dem *Dirac-See* eine erste Version des später in der Quantenelektrodynamik und Quantenfeldtheorie so wichtigen Begriffes des *Vakuums*. In den 1950'er Jahren versuchte Dirac dieses Vakuum als eine Art universellen Äther zu interpretieren.

Anschließend arbeite Dirac über Quantenstatistik, wobei er die *Fermi-Dirac-Statistik* begründete und den Begriff des *Bosons* einführte. Im Jahr 1931 versuchte er die Maxwell-Gleichungen zu symmetrisieren und zu quantisieren und postulierte dabei die Existenz eines *magnetischen Monopols*.

In einer kleinen Arbeit von 1933 schuf Dirac einen Vorläufer von Feynmans Pfadintegral. Diese Arbeit wurde aber von niemandem wahrgenommen und erst später von Feynman wiederentdeckt.

Obwohl Dirac einer der Väter der Quantenelektrodynamik war, empfand er die von der jüngeren Physiker-Generation entwickelte Renormierungstheorie mit der Definition einer *nackten* Elektronen-Ladung und -Masse bis zu seinem Lebensende einfach nur als häßlich. Deshalb ignorierte er leider vollkommen die modernen Methoden der Renormierungsgruppen und die großen Erfolge des Standardmodells. Stattdessen insistierte er immer wieder darauf, daß wir in Bezug auf die Divergenzen der Quantenfeldtheorien grundlegend tiefere Einsichten benötigen. Er selbst untersuchte ab 1962 in diesem Zusammenhang ausgedehnte Systeme in der Quantenfeldtheorie. Diese Arbeiten fanden später in den Strings und p-Branen der String-Theorie ihre Fortsetzung.

Im Jahr 1964 hielt Dirac eine Vorlesungsreihe an der Yeshiva University in New York mit dem Titel *Lectures on Quantum Mechanics* (Dirac (2003)), in welcher er mit der von ihm geliebten Hamilton'schen Methode mit Nebenbedingungen beginnt, und dann die Quantisierung auf flachen und gekrümmten Flächen entwickelt. In diesem Buch schreibt er zu Beginn:

> "A good deal of my research in physics has consisted in not setting out to solve some particular problem, but simply examining mathematical equations of a kind that physicists use and trying to fit them together in an interesting way, regardless of any application that the work may have. It is simply a search for pretty mathematics. It may turn out later to have an application. Then one has good luck."

Dirac hat sich auch intensiv mit der Allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein beschäftigt, siehe sein Buch: *General theory of relativity* (Dirac (1975)). Er untersuchte auch ganz allgemein Hamiltonsche Systeme mit Zwangsbedingungen (constraints) auf gekrümmten Hyperflächen, um einen Zugang zur Quantisierung der Gravitation zu finden. Und auch wenn er an der Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie scheiterte, so waren diese Arbeiten Diracs doch später die Grundlage für die *BRST-Formulierung* in der Quantenfeldtheorie und dann im Jahr 1986 der Ausgangspunkt für die Entwicklung der *Schleifenquantengravitation* (*Quantum Loop Gravity*) durch Ashtekar.

Im Jahr 1982 schlug Dirac den jungen mathematischen Physiker Edward Witten für einen speziellen Preis der Päpstlichen Akademie in Rom mit den Worten vor: Witten betreibe eine außerordentlich brilliante mathematische Physik (Farmelo (2009), S. 437). Die erste Publikation von Green und Schwarz zur String-Theorie im Jahr 1984 erlebte Dirac nicht mehr - aber er hätte sich sicherlich darüber gefreut.

Dirac erhielt zahlreiche Preise, insbesondere den Physik-Nobelpreis (1933), die Royal Medal (1939) und die Copley Medal (1952) der Royal Society, sowie die Max-Planck-Medaille (1952) der Deutschen Physikalischen Gesellschaft.

Im Oktober 1956 wurde Dirac nach einem Vortrag an der Universität Moskau nach seiner 'persönlichen Philosophie der Physik' gefragt. Als Antwort schrieb er an die Wandtafel (Farmelo (2009), S. 359):

> PHYSICAL LAWS SHOULD HAVE MATHEMATICAL BEAUTY.

[Quellen: Wikipedia-Dirac (2016), Farmelo (2009), Kragh (1990)].

22.2 Die Dirac-Gleichung in der Minkowski-Raumzeit

Wir hatten bislang unter den Lorentztransformationen $O(3,1)$ eigentlich nur die Untergruppe $O(3,1)^{\uparrow}_{+}$, die eigentlichen $(+)$, orthochronen $(\uparrow)$ Lorentztransformationen, betrachtet, die mit $SO(3,1)$ übereinstimmen, bzw. deren Universeller Überlagerungsgruppe $SL(2,\mathbb{C})$.

Wenn man jetzt zu $O(3,1)^{\uparrow}_{+}$ die Raumspiegelung $\mathcal{P}$ hinzunimmt, d.h. zu $O(3,1)^{\uparrow}$ übergeht, dann stellt man fest, daß unsere in $O(3,1)^{\uparrow}_{+}$ irreduziblen Darstellungen $\Pi_{(s,0)}$ und

$\Pi_{(0,s)}$ in $O(3,1)^\uparrow$ zunächst einmal gar keine Darstellungen sind, da $\mathcal{P}\Pi_{(s,0)}\mathcal{P} = \Pi_{(0,s)}$ gilt.

Beweis. a. für den Generator einer kleinen Drehungen θ um die x^3-Achse:

$$\mathcal{P}(\theta J_3)\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta J_3 \, .$$

b. für den Generator eines kleinen Boost α in x^3-Richtung:

$$\mathcal{P}(\alpha K_3)\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\alpha K_3 \, .$$

c. aus 21.12.2 und a. und b. folgt:

$$\mathcal{P} I_k \mathcal{P} = \frac{1}{2}\mathcal{P}(J_k - iK_k)\mathcal{P} = \frac{1}{2}(J_k + iK_k) = I'_k \, ,$$

$$\mathcal{P} I'_k \mathcal{P} = \frac{1}{2}\mathcal{P}(J_k + iK_k)\mathcal{P} = \frac{1}{2}(J_k - iK_k) = I_k \, , \qquad \square$$

d.h. unter $\mathcal{P}$ wird $\Pi_{(s,0)}$ auf $\Pi_{(0,s)}$ abgebildet und umgekehrt.

Eine einfache Möglichkeit um eine irreduzible Darstellung unter $O(3,1)^\uparrow$ aus den beiden Bestandteilen $\Pi_{(s,0)}$ und $\Pi_{(0,s)}$ zu konstruieren ist es, die direkte Summe zu bilden:

$$\Pi_{(s,0)} \oplus \Pi_{(0,s)} := \begin{pmatrix} \Pi_{(s,0)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi_{(0,s)} \end{pmatrix} \, . \tag{22.2.1}$$

In dieser Darstellung ist der Paritätsoperator dann einfach

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(2s+1)} & \mathbb{1}_{(2s+1)} \\ \mathbb{1}_{(2s+1)} & \mathbf{0}_{(2s+1)} \end{pmatrix} \, . \tag{22.2.2}$$

Im Fall $s = \frac{1}{2}$ spricht man bei $\Pi_{(\frac{1}{2},0)} \oplus \Pi_{(0,\frac{1}{2})}$ von der Dirac-Darstellung und den zugeordneten Diracschen Bispinoren

$$\psi := \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} . \tag{22.2.3}$$

Man kann jetzt die Dirac-Gleichung aus dem Transformationsverhalten der Weyl-Spinoren unter Lorentztransformationen und der relativistischen Energie-Impulsrelation ableiten, was hier vorgeführt werden soll (wir folgen Ryder (2003), S. 41 ff., allerdings in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$) und den Diracschen Gamma-Matrizen nach Freedman u. Van Proeyen (2012). Die Lorentztransformationen legen den kinematischen Teil der Theorie fest und die Energie-Impulsrelationen bestimmen die Dynamik.

Wir erinnern zunächst an die speziell-relativistische Mechanik. Der Klarheit halber führen wir im Folgenden die Lichtgeschwindigkeit c und die Planck-Konstante $\hbar$ explizit auf. Seien wieder $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Das einfachste lorentzinvariante Differential, das man für ein freies, massives Teilchen bilden kann ist

$$\begin{aligned} ds &:= \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \\ &= c\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}\, dt = c\sqrt{1-\beta^2}\, dt . \end{aligned} \tag{22.2.4}$$

Damit kann man eine Wirkungsfunktion als Integral einer Lagrangefunktion definieren als

$$\mathcal{S}[x^\mu] := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) ds := -mc \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} ds = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}\, dt . \tag{22.2.5}$$

Für $v \ll c$ liefert die Langrangefunktion gerade die nichtrelativistische Lagrangefunktion eines freien Teilchens:

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = -mc^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2} , \tag{22.2.6}$$

wobei die Konstante $(-mc^2)$ keinen Einfluß auf die Bewegungsgleichungen hat.

Der Impuls wird wie üblich definiert als

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} , \quad i \in \{1, 2, 3\} . \tag{22.2.7}$$

Wegen unserer 'Plus'-Minkowski-Metrik ist $p_i = p^i$und damit

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} . \tag{22.2.8}$$

Die Energie ist per Definition

$$E(\vec{v}) := \dot{x}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \mathcal{L} = \vec{v}\vec{p} - \mathcal{L} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} + mc^2\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \gamma mc^2 \ , \tag{22.2.9}$$

und damit die Nullkomponente die Vierer-Impulsvektors

$$p^0 := \frac{E(\vec{v})}{c} = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{22.2.10}$$

Aus den Gleichungen für $E(\vec{v})$ und $\vec{p}$ folgt sofort

$$\vec{p}c = \gamma mc\vec{v} = \frac{E}{c}\vec{v} \ . \tag{22.2.11}$$

Für ein Teilchen mit der Ruhemasse $m \neq 0$ ist $\lim_{v\to c}|\vec{p}| = \lim_{v\to c} E(\vec{v}) = \infty$. Für ein teilchen mit der Ruhemasse 0 bleibt aber 22.2.11 erhalten und liefert mit $v = c$:

$$E = |\vec{p}|c \ . \tag{22.2.12}$$

Achtung Vorzeichen! Wir wollen einen Dirac-Spinor ψ mit einem Impuls $\vec{p}$ beschreiben, d.h. mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ gegenüber einem ruhenden Beobachter. Hierzu gehen wir von dem Spinor ψ im Spinor-Ruhesystem aus und machen eine Lorentztransformation mit $-\vec{p}$, bzw. $-\vec{v}$, in das Beobachter-Ruhesystem.

Satz 22.2.1 *Aus der Darstellung $\Pi_{(\frac{1}{2},0)} \oplus \Pi_{(0,\frac{1}{2})}$ und der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $p^0 = \frac{E(\vec{v})}{c} = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}$ mit $p := p_\mu := (p_0, \vec{p})^T = (-p^0, \vec{p})$ folgt die 4-dimensionale Dirac-Gleichung eines klassischen, massiven, freien Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens in der Form:*

$$(c\gamma^\mu p_\mu + mc^2 \mathbb{1})\psi(p) = \vec{0} \ . \tag{22.2.13}$$

Dabei bezeichnen die γ^μ die sog. Diracschen Gamma-Matrizen in der Weyl-Darstellung:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \ . \tag{22.2.14}$$

Beweis. Für einen linkshändigen Weyl-Spinor ψ_L gilt mit $\alpha := |\alpha^k|$ und $n^k := \frac{\alpha^k}{\alpha}$ bei einem reinen Boost (21.12.8):

$$\Pi_{(\frac{1}{2},0)}(\exp(\alpha^k K_k))\psi_L = \exp(\frac{1}{2}\alpha^k\sigma_k)\psi_L = \exp(\frac{1}{2}\alpha n^k \sigma_k)\psi_L \ .$$

Wir nehmen an, daß sich der Spinor ψ_L auf ein Teilchen im Spinor-Ruhesystem, d.h. mit einem Impuls $\vec{p} = 0$, beziehe und schreiben $\psi_L(\vec{0}) = \psi_L$.

Mit

$$(n^k\sigma_k)^2 = \sum_{i,k=1}^{3} n^i n^k \sigma_i\sigma_k = \sum_{i=1,k}^{3} n^i n^k \delta^{ik}\sigma_i\sigma_k = \sum_{i=1}^{3}(n^i)^2 \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

folgt sofort

$$\begin{aligned}\exp(\frac{\alpha}{2}n^k\sigma_k) &= \mathbb{1} + (\frac{\alpha}{2})n^k\sigma_k + \frac{1}{2!}(\frac{\alpha}{2})^2(n^k\sigma_k)^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\alpha}{2})^3(n^k\sigma_k)^3 + \dots \\ &= \mathbb{1} + (\frac{\alpha}{2})n^k\sigma_k + \frac{1}{2!}(\frac{\alpha}{2})^2\mathbb{1} + \frac{1}{3!}(\frac{\alpha}{2})^3(n^k\sigma_k) + \dots \\ &= \cosh(\frac{\alpha}{2})\mathbb{1} + n^k\sigma_k\sinh(\frac{\alpha}{2}) \ .\end{aligned}$$

Damit gilt für den Spinor $\psi_L(\vec{p})$:

$$\psi_L(\vec{p}) = \exp(\frac{\alpha}{2}n^k\sigma_k)\psi_L = [\cosh(\frac{\alpha}{2})\mathbb{1} + n^k\sigma_k\sinh(\frac{\alpha}{2})]\psi_L(\vec{0}) \ .$$

Jetzt kann man $\cosh(\frac{\alpha}{2})$ und $\sinh(\frac{\alpha}{2})$ auf $\cosh(\alpha)$ zurückführen:

$$\begin{aligned}\cosh^2(\frac{\alpha}{2}) &= (\frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}))^2 = \frac{1}{4}(e^{\alpha} + 2 + e^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) + 1) = \frac{1}{2}(\cosh(\alpha) + 1) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh^2(\frac{\alpha}{2}) &= (\frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}))^2 = \frac{1}{4}(e^{\alpha} - 2 + e^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) - 1) = \frac{1}{2}(\cosh(\alpha) - 1) \ ,\end{aligned}$$

$$\cosh(\frac{\alpha}{2}) = (\frac{1}{2}(\cosh(\alpha) + 1))^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \sinh(\frac{\alpha}{2}) = (\frac{1}{2}(\cosh(\alpha) - 1))^{\frac{1}{2}} \ .$$

Aus 21.7.2 kennen wir den Zusammenhang von $\cosh(\alpha)$ mit $\beta = \frac{v}{c}$:

$$\cosh(\alpha) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{c}^2}} \ .$$

Und damit folgt im Spinor-Ruhesystem (Boost mit $-\vec{p}$):

$$\begin{aligned}\psi_L(\vec{p}) &= [(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}}\mathbb{1} + n^k\sigma_k(\frac{\gamma-1}{2})^{\frac{1}{2}}]\psi_L(\vec{0}) \\ &= [(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}}\mathbb{1} + \frac{-\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}(\frac{\gamma-1}{2})^{\frac{1}{2}}]\psi_L(\vec{0}) \ .\end{aligned}$$

Wir ersetzen γ durch $\frac{E}{mc^2}$, bzw. $\frac{p^0}{mc}$, d.h. an dieser Stelle führen wir die Dynamik der speziellen Relativitätstheorie ein. Damit folgt für $\psi_L(\vec{p})$:

$$\begin{aligned}\psi_L(\vec{p}) &= [(\frac{\frac{E}{mc^2}+1}{2})^{\frac{1}{2}}\mathbb{1} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}(\frac{\frac{E}{mc^2}-1}{2})^{\frac{1}{2}}]\psi_L(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E+mc^2))^{-\frac{1}{2}}[(E+mc^2)\mathbb{1} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}((E-mc^2)(E+mc^2))^{\frac{1}{2}}]\psi_L(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E+mc^2))^{-\frac{1}{2}}[(E+mc^2)\mathbb{1} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}(E^2-m^2c^4)^{\frac{1}{2}}]\psi_L(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E+mc^2))^{-\frac{1}{2}}[(E+mc^2)\mathbb{1} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}c|\vec{p}|]\psi_L(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E+mc^2))^{-\frac{1}{2}}[(E+mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_L(\vec{0})\ .\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für einen rechtshändigen Weyl-Spinor ψ_R mit $\alpha := |\alpha^k|$ und $n^k := \frac{\alpha^k}{\alpha}$ im Spinor-Ruhesystem bei einem Boost (mit $-\vec{p}$) (21.12.9):

$$\Pi_{(0,\frac{1}{2})}(\exp(-\alpha^k K_k))\psi_R = \exp(-\frac{1}{2}\alpha^k\sigma_k)\psi_R = \exp(-\frac{1}{2}\alpha n^k\sigma_k)\psi_R\ .$$

$$\begin{aligned}\psi_R(\vec{p}) &= \exp(-\frac{\alpha}{2}n^k\sigma_k)\psi_L = [\cosh(\frac{\alpha}{2})\mathbb{1} - n^k\sigma_k\sinh(\frac{\alpha}{2})]\psi_R(\vec{0}) \\ &= [(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}}\mathbb{1} - n^k\sigma_k(\frac{\gamma-1}{2})^{\frac{1}{2}}]\psi_R(\vec{0}) \\ &= [(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}}\mathbb{1} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}(\frac{\gamma-1}{2})^{\frac{1}{2}}]\psi_R(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E+mc^2))^{-\frac{1}{2}}[(E+mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_R(\vec{0})\ .\end{aligned}$$

Bei $\vec{p}=\vec{0}$ sind aber $\psi_L(\vec{p})$ und $\psi_R(\vec{p})$ nicht unterscheidbar, d.h. $\psi_L(\vec{0}) = \psi_R(\vec{0})$. Damit kann man aus den beiden Gleichungen für $\psi_L(\vec{p})$ und $\psi_R(\vec{p})$ den Spinor $\psi_L(\vec{0})$ eliminieren:

$$\begin{aligned}&[(E+mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}][(E+mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}] \\ &= [(E^2+2Emc^2+m^2c^4) - c^2|\vec{p}|^2]\mathbb{1} = [(m^2c^4+2Emc^2+m^2c^4)]\mathbb{1} \\ &= [2mc^2(E+mc^2)]\mathbb{1}\ ,\end{aligned}$$

$$[(E+mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) = (2mc^2(E+mc^2))^{-\frac{1}{2}}[2mc^2(E+mc^2)]\psi_R(\vec{0}) \quad \Rightarrow$$

$$\psi_R(\vec{0}) = \psi_L(\vec{0}) = \frac{(2mc^2(E+mc^2))^{+\frac{1}{2}}}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(E+mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p})\ .$$

$$\psi_L(\vec{0}) = \psi_R(\vec{0}) = \frac{(2mc^2(E+mc^2))^{+\frac{1}{2}}}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(E+mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_L(\vec{p}) \ .$$

$$\begin{aligned}
\psi_L(\vec{p}) &= (2mc^2(E+mc^2))^{-\frac{1}{2}}[(E+mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\cdot \\
&\quad \cdot \frac{(2mc^2(E+mc^2))^{+\frac{1}{2}}}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(E+mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(E+mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]^2\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(E^2+m^2c^4+c^2|\vec{p}|^2+2Emc^2)\mathbb{1} \\
&\quad - 2Ec\vec{p}\cdot\vec{\sigma} - 2mc^3\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(2E^2+2Emc^2)\mathbb{1} - 2Ec\vec{p}\cdot\vec{\sigma} - 2mc^3\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E+mc^2)]}[2E(E+mc^2)\mathbb{1} - 2(E+mc^2)c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{E\mathbb{1} - c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{mc^2}\psi_R(\vec{p}) = \frac{p^0\mathbb{1} - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{mc}\psi_R(\vec{p}) \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_R(\vec{p}) &= (2mc^2(E+mc^2))^{-\frac{1}{2}}[(E+mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\cdot \\
&\quad \cdot \frac{(2mc^2(E+mc^2))^{+\frac{1}{2}}}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(E+mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_L(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(E+mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]^2\psi_L(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(E^2+m^2c^4+c^2|\vec{p}|^2+2Emc^2)\mathbb{1} \\
&\quad + 2Ec\vec{p}\cdot\vec{\sigma} + 2mc^3\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_L(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E+mc^2)]}[(2E^2+2Emc^2)\mathbb{1} + 2Ec\vec{p}\cdot\vec{\sigma} + 2mc^3\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_L(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E+mc^2)]}[2E(E+mc^2)\mathbb{1} + 2(E+mc^2)c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}]\psi_L(\vec{p}) \\
&= \frac{E\mathbb{1} + c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{mc^2}\psi_L(\vec{p}) = \frac{p^0\mathbb{1} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{mc}\psi_L(\vec{p}) \ .
\end{aligned}$$

Diese beiden gekoppelten 2-dimensionalen Gleichungen können wir jetzt schreiben als

$$\begin{pmatrix} -mc\mathbb{1} & p^0\mathbb{1} - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ p^0\mathbb{1} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -mc\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(\vec{p}) \\ \psi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} mc\mathbb{1} & p_0\mathbb{1} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ p_0\mathbb{1} - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & mc\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(\vec{p}) \\ \psi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} ,$$

bzw. nach Einführung der Diracschen Gamma-Matrizen in der Weyl-Darstellung:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \; \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} ,$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi(p) = \vec{0} \, . \qquad \Box$$

Dies ist die 4-dimensionale Dirac-Gleichung eines klassischen, freien, massiven Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen.

Im Fall von masselosen Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen ($m = 0$) entkoppeln die Dirac-Gleichungen zu den beiden Weyl-Gleichungen:

$$(p_0\mathbb{1} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})\psi_R(\vec{p}) = \vec{0} \, ,$$

$$(p_0\mathbb{1} - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})\psi_L(\vec{p}) = \vec{0} \, .$$

Wegen $p_0 = \frac{E}{c} = |\vec{p}|$ (22.2.11) für masselose Teilchen schreibt man die Weyl-Gleichungen häufig folgendermaßen:

$$(\mathbb{1} + \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\cdot\vec{\sigma})\psi_R(\vec{p}) = \vec{0} \, ,$$

$$(\mathbb{1} - \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\cdot\vec{\sigma})\psi_L(\vec{p}) = \vec{0} \, . \qquad (22.2.15)$$

Die Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf die Bewegungsrichtung $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ heißt Helizität. Nach dieser Sprechweise hat also das Teilchen ψ_R mit rechtshändiger Chiralität eine positive Helizität und das Teilchen Ψ_L mit linkshändiger Chiralität eine negative Helizität :-)

Mit der üblichen Quantisierung im Schrödingerbild in der Ortsdarstellung

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \, , \; \Rightarrow \; p^0 = \frac{E}{c} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0} \, , \; \Rightarrow \; p_0 \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^0} \quad \text{und} \quad p_i \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (22.2.16)$$

wird daraus die 4-dimensionale Dirac-Gleichung für quantenmechanische, freie, massive Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen:

$$(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi(p, x) = \vec{0} \, . \qquad (22.2.17)$$

Mit Feynmans Abkürzung $\not\partial := \gamma^\mu \partial_\mu$ schreibt sich die Dirac-Gleichung als

$$(i\hbar c\not\partial - mc^2 \mathbb{1})\psi(p,x) = \vec{0}\,. \tag{22.2.18}$$

Anmerkung 1: Der Diracsche Bispinor $\psi(p,x)$ ist hier die Wellenfunktion des quantenmechanischen, freien, massiven Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens. Erst mit dem Übergang von $\psi^\dagger(p,x)$ und $\psi(p,x)$ zu Hilbert-Raum-Operatoren, oder durch Einsetzen von $\psi^\dagger(p,x)$ und $\psi(p,x)$ in die Wirkungsfunktion eines Feynmanschen Pfadintegrals wird aus der Dirac-Gleichung eine Quantenfeldtheorie (QFT).

Anmerkung 2: Wenn man die Gleichung 22.2.17 adjungiert, so erhält man mit $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ und $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ und $\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^i$:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \psi^\dagger(p,x)(-i\hbar c(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - mc^2\mathbb{1}) \\
&= \psi^\dagger(p,x)(-i\hbar c(\gamma^0)^\dagger \overleftarrow{\partial}_0 - i\hbar c(\gamma^i)^\dagger \overleftarrow{\partial}_i - mc^2\mathbb{1}) \\
&= \psi^\dagger(p,x)(-i\hbar c\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + i\hbar c\gamma^i \overleftarrow{\partial}_i) - mc^2\mathbb{1}) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \psi^\dagger(p,x)(-i\hbar c\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + i\hbar c\gamma^i \overleftarrow{\partial}_i - mc^2\mathbb{1})\gamma^0 \\
&= \psi^\dagger(p,x)\gamma^0(-i\hbar c\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 - i\hbar c\gamma^i \overleftarrow{\partial}_i - mc^2\mathbb{1}) \\
&= \psi^\dagger(p,x)\gamma^0(-i\hbar c\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - mc^2\mathbb{1})\,, \quad \text{bzw.}
\end{aligned}$$

$$\bar{\psi}(p,x)(i\hbar c\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + mc^2\mathbb{1}) = \vec{0}\,, \quad \text{mit } \bar{\psi} := \psi^\dagger\gamma^0\,. \tag{22.2.19}$$

Zum Aufstellen der Lagrangefunktion eines Dirac-Teilchens oder Dirac-Feldes benötigt man lorentzinvariante, bilineare Spinorkombinationen.

Satz 22.2.2 *Unter Lorentztransformationen ist $\bar{\psi}\psi$ ein Skalar und $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ein Vierervektor.*

Beweis. Sei $\psi^T = (\psi_L, \psi_R)^T$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi &= (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger)\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\
&= \psi_R^\dagger\psi_L + \psi_L^\dagger\psi_R\,.
\end{aligned}$$

Aus 21.12.8 und 21.12.9 folgt sofort, daß $\bar{\psi}\psi$ unter Lorentztransformationen invariant ist. Und da bei einer Paritätsoperation $\mathcal{P}$ nach 22.2.2 gerade ψ_L und ψ_R miteinander vertauscht werden, bleibt $\bar{\psi}\psi$ auch unter $\mathcal{P}$ invariant, ist also ein Lorentzskalar.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß sich $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ wie ein Vierervektor transformiert. Wir unterscheiden die Fälle einer Drehung um einen infinitesimalen Winkel θ^3 um x^3 und eines Boost um einen infinitesimalen Betrag α^3 in Richtung x^3.

a. eine Drehung um einen infinitesimalen Winkel θ^3 um x^3 wirkt auf einen Vierervektor folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} (x^0)' \\ (x^1)' \\ (x^2)' \\ (x^3)' \end{pmatrix} = (\mathbb{1} + \theta^3 J_3) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta^3 & 0 \\ 0 & \theta^3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 - \theta^3 x^2 \\ \theta^3 x^1 + x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} ,$$

$$\text{d.h.} \quad (x^0)' = x^0 \quad \text{und} \quad (x^i)' = x^i - \theta^3 \epsilon_{ij3} x^j \ .$$

Mit 21.12.8, 21.12.9 und 21.6.9 folgt:

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi}\gamma^0\psi)' &= (\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi)' = (\psi^\dagger\psi)' = (\psi_L^\dagger\psi_L + \psi_R^\dagger\psi_R)' \\
&= \psi_L^\dagger \exp(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger)\exp(\frac{-i}{2}\theta^3\sigma_3)\psi_L \\
&\quad + \psi_R^\dagger \exp(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger)\exp(\frac{-i}{2}\theta^3\sigma_3)\psi_R \\
&= \psi_L^\dagger\psi_L + \psi_R^\dagger\psi_R = \bar{\psi}\gamma^0\psi \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi}\gamma^i\psi)' &= (\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\psi)' = ((\psi_L^\dagger)', (\psi_R^\dagger)') \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\psi_L)' \\ (\psi_R)' \end{pmatrix} \\
&= -(\psi_L^\dagger)'\sigma_i(\psi_L)' + (\psi_R^\dagger)'\sigma_i(\psi_R)' \\
&= -\psi_L^\dagger \exp(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger)\sigma_i \exp(\frac{-i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger)\psi_L \\
&\quad + \psi_R^\dagger \exp(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger)\sigma_i \exp(\frac{-i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger)\psi_R \\
&= -\psi_L^\dagger(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\theta^3\sigma_3)\sigma_i(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\theta^3\sigma_3)\psi_L \\
&\quad + \psi_R^\dagger(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\theta^3\sigma_3)\sigma_i(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\theta^3\sigma_3)\psi_R \\
&\approx -\psi_L^\dagger\sigma_i\psi_L - \psi_L^\dagger(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3)\sigma_i\psi_L + \psi_L^\dagger\sigma_i(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3)\psi_L \\
&\quad + \psi_R^\dagger\sigma_i\psi_R + \psi_R^\dagger(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3)\sigma_i\psi_R - \psi_R^\dagger\sigma_i(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3)\psi_R
\end{aligned}$$

$$= -\psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R - i^2\theta^3 \psi_L^\dagger (\epsilon_{3ij}\sigma_j)\psi_L + i^2\theta^3 \psi_R^\dagger (\epsilon_{3ij}\sigma_j)\psi_R$$

$$= (\bar{\psi}\gamma^i\psi) + \theta^3\epsilon_{ij3}(\psi_L^\dagger\sigma_j\psi_L - \psi_R^\dagger\sigma_j\psi_R)$$

$$= (\bar{\psi}\gamma^i\psi) - \theta^3\epsilon_{ij3}(\bar{\psi}\gamma^j\psi) \ .$$

b. ein Boost im Beobachter-Ruhesystem um einen infinitesimalen Betrag α^3 in Richtung x^3 wirkt auf einen Vierervektor folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} (x^0)' \\ (x^1)' \\ (x^2)' \\ (x^3)' \end{pmatrix} = (\mathbb{1} + \alpha^3 K_3) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + \alpha^3 x^3 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 + \alpha^3 x^0 \end{pmatrix} ,$$

$$\text{d.h.} \quad (x^i)' = x^i + \alpha^3(\delta_0^i x^3 + \delta_3^i x^0) \ .$$

Wieder folgt mit 21.12.8, 21.12.9 und 21.6.9, wobei wir erneut mit $\alpha_3 \to -\alpha_3$ das Beobachter-Ruhesystem vom Spinor-Ruhesystem aus betrachten:

$$(\bar{\psi}\gamma^0\psi)' = (\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi)' = (\psi^\dagger\psi)' = (\psi_L^\dagger\psi_L + \psi_R^\dagger\psi_R)'$$

$$= \psi_L^\dagger \exp(-\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3^\dagger)\exp(-\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\psi_L$$

$$+ \psi_R^\dagger \exp(\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3^\dagger)\exp(\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\psi_R$$

$$\approx \psi_L^\dagger(\mathbb{1} - \alpha^3\sigma_3)\psi_L + \psi_R^\dagger(\mathbb{1} + \alpha^3\sigma_3)\psi_R$$

$$= (\psi_L^\dagger\psi_L + \psi_R^\dagger\psi_R) + \alpha^3(\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger)\begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

$$= \psi^\dagger\psi + \alpha^3\psi^\dagger\begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_3 \end{pmatrix}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi + \alpha^3\psi^\dagger\gamma^0\begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_3 \\ -\sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\psi$$

$$= \bar{\psi}\gamma^0\psi + \alpha^3\bar{\psi}\gamma^3\psi \ .$$

Für $i = 1, 2$ gilt:

$$(\bar{\psi}\gamma^i\psi)' = (\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\psi)' = (\psi^\dagger\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}\psi)'$$

$$= ((\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger)\begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix})' = (-\psi_L^\dagger\sigma_i\psi_L + \psi_R^\dagger\sigma_i\psi_R)'$$

$$= -\psi_L^\dagger \exp(-\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3^\dagger)\sigma_i\exp(-\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\psi_L + \psi_R^\dagger(\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3^\dagger)\sigma_i(\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\psi_R$$

$$
\begin{aligned}
&\approx -\psi_L^\dagger(\mathbb{1} - \frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\sigma_i(\mathbb{1} - \frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\psi_L \\
&\quad + \psi_R^\dagger(\mathbb{1} + \frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\sigma_i(\mathbb{1} + \frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\psi_R \\
&\approx -\psi_L^\dagger\sigma_i\psi_L + \psi_R^\dagger\sigma_i\psi_R \\
&\quad + \psi_L^\dagger\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3\sigma_i\psi_L + \psi_L^\dagger\sigma_i\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3\psi_L + \psi_R^\dagger\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3\sigma_i\psi_R + \psi_R^\dagger\sigma_i\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3\psi_R \\
&= -\psi_L^\dagger\sigma_i\psi_L + \psi_R^\dagger\sigma_i\psi_R = (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger)\begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\
&= \psi^\dagger\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\psi = \bar{\psi}\gamma^i\psi\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{\psi}\gamma^3\psi)' &= (\psi^\dagger\gamma^0\gamma^3\psi)' = (\psi^\dagger\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_3 \\ -\sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\psi)' \\
&= ((\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger)\begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix})' = (-\psi_L^\dagger\sigma_3\psi_L + \psi_R^\dagger\sigma_3\psi_R)' \\
&= -\psi_L^\dagger\exp(-\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3^\dagger)\sigma_3\exp(-\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\psi_L + \psi_R^\dagger\exp(\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3^\dagger)\sigma_3\exp(\frac{1}{2}\alpha^3\sigma_3)\psi_R \\
&= -\psi_L^\dagger\exp(-\alpha^3\sigma_3^\dagger)\sigma_3\psi_L + \psi_R^\dagger\exp(\alpha^3\sigma_3^\dagger)\sigma_3\psi_R \\
&\approx -\psi_L^\dagger(\mathbb{1} - \alpha^3\sigma_3)\sigma_3\psi_L + \psi_R^\dagger(\mathbb{1} + \alpha^3\sigma_3)\sigma_3\psi_R \\
&= -\psi_L^\dagger\sigma_3\psi_L + \psi_R^\dagger\sigma_3\psi_R + \alpha^3\psi_L^\dagger\mathbb{1}\psi_L + \alpha^3\psi_R^\dagger\mathbb{1}\psi_R \\
&= (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger)\begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} + \alpha^3(\psi_L^\dagger\psi_L + \psi_R^\dagger\psi_R) \\
&= \psi^\dagger\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_3 \\ -\sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\psi + \alpha^3\psi^\dagger\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma^3\psi + \alpha^3\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^3\psi + \alpha^3\bar{\psi}\gamma^0\psi\ .
\end{aligned}
$$

□

Lemma 22.2.3 *Da für den Vierervektor $j^\mu := \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ gilt $j^0 \geq 0$ und $\partial_\mu j^\mu = 0$ kann j^μ als Strom der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden.*

Beweis.

$$
j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = |\psi_L|^2 + |\psi_R|^2 \geq 0\ , \tag{22.2.20}
$$

$$\left\{\begin{array}{c} (i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi(p,x) = \vec{0} \\ \bar{\psi}(p,x)(i\hbar c\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + mc^2\mathbb{1}) = \vec{0} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu)\psi + \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu\psi) \tag{22.2.21}$$

$$= \frac{1}{i\hbar c}(-mc^2\mathbb{1} + mc^2\mathbb{1}) = 0 \; . \qquad \square$$

Da sich $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ unter Lorentztransformationen wie ein Vierervektor transformiert und $\bar{\psi}\psi$ wie ein Viererskalar, können wir das folgende Wirkungsfunktional aufstellen, deren Variation nach $\bar{\psi}$ beim Verschwinden von ψ auf dem Rand die Dirac-Gleichung liefert:

$$\mathcal{S}[\bar{\psi}, \partial_\mu\bar{\psi}, \psi, \partial_\mu\psi] := \int\limits_{\mathbb{R}^4} \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi\, d^4x \; . \tag{22.2.22}$$

22.3 Die Diracschen Gamma-Matrizen

Wir haben oben die Diracschen Gamma-Matrizen in der Weyl-Darstellung eingeführt:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \; , \; \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \; ,$$

Diese Darstellung kann man mittels zwei Sätzen von erweiterten Pauli-Matrizen formal noch etwas allgemeiner schreiben. Dazu führen wir σ_μ und $\bar{\sigma}_\mu$, bzw. σ^μ und $\bar{\sigma}^\mu$ ein:

$$\sigma_\mu := (-\mathbb{1}, \sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_\mu = (-\mathbb{1}, -\sigma_i) \quad \text{bzw.} \tag{22.3.1}$$

$$\sigma^\mu := (\mathbb{1}, \sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma_i) \; . \tag{22.3.2}$$

Daraus folgt sofort

$$2\sigma_0\bar{\sigma}_0 = 2\mathbb{1} = -2\eta_{00}\mathbb{1} \; ,$$

$$2\sigma_i\bar{\sigma}_i = -2(\sigma_i)^2 = -2\mathbb{1} = -2\eta_{ii}\mathbb{1} \; ,$$

$$\sigma_0\bar{\sigma}_i + \sigma_i\bar{\sigma}_0 = \sigma_i - \sigma_i = \mathbf{0} = -2\eta_{0i}\mathbb{1} \; ,$$

$$\sigma_i\bar{\sigma}_j + \sigma_j\bar{\sigma}_i = -\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = \mathbf{0} = -2\eta_{ij}\mathbb{1} \; ,$$

also zusammengefaßt

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu = -2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1} \; . \tag{22.3.3}$$

Damit können wir die Diracschen Gamma-Matrizen in der Weyl-Darstellung schreiben als:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} . \tag{22.3.4}$$

Für die Gamma-Matrizen in der Weyl-Darstellung und in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$ gilt:

Lemma 22.3.1

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} . \tag{22.3.5}$$

$$\gamma_* := \gamma^5 := \gamma_5 := (-i)^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{22.3.6}$$

Beweis. Unsere Metrik $\eta^{\mu\nu}$ ist die 'Plus'-Minkowski-Metrik $\mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$ und damit folgt:

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2\gamma^0\gamma^0 = 2\mathbb{1} = -2\eta^{00}\mathbb{1} ,$$

$$\{\gamma^i, \gamma^i\} = 2\gamma^i\gamma^i = -2\mathbb{1} = -2\eta^{ii}\mathbb{1} ,$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} = -2\eta^{0i}\mathbb{1} ,$$

und für $i \neq j$:

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma_j\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_j\sigma_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} \cdot \mathbb{1} = -2\eta^{ij}\mathbb{1} .$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 &:= (-i)^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i \begin{pmatrix} -\sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma_2\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} +\sigma_1\sigma_2\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i\mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

□

Die *Weyl-Darstellung* heißt auch *chirale Darstellung* und in dieser Darstellung nehmen die Projektoren auf linkshändige, bzw. rechtshändige Spinoren eine besonders einfache Form an:

$$P_L := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) \quad \text{und} \quad P_R := \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) . \tag{22.3.7}$$

Dirac selbst hat bei der Einführung seiner Dirac-Gleichung im Jahr 1928 eine andere Darstellung verwendet, die man heute als *Dirac-Darstellung* oder *Standard-Darstellung* bezeichnet. Um zu dieser Darstellung zu gelangen multipliziert man die Dirac-Gleichung mit γ^0 und wendet dann noch eine unitäre Transformation U an:

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\gamma^0(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i + mc\mathbb{1})\psi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\mathbb{1}p_0 + \gamma^0\gamma^i p_i + mc\gamma^0)\psi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\gamma^0\gamma^i p_i + mc\gamma^0)\psi = -\mathbb{1}p_0\psi = \mathbb{1}\frac{E}{c}\psi \ .$$

Mit $\tilde{\alpha}^i := \gamma^0\gamma^i$ und $\tilde{\beta} := \gamma^0$ folgt die Dirac-Gleichung mit den Dirac-Matrizen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ in der *Weyl-Darstellung*:

$$\tilde{\alpha}^i := \gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix} ,$$

$$\tilde{\beta} := \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} ,$$

$$(c\tilde{\alpha}^i p_i + \tilde{\beta}mc^2)\psi = \mathbb{1}E\psi \ .$$

Jetzt wenden wir auf die Dirac-Gleichung die folgende unitäre Transformation an:

$$U := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad U^{-1} = U^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} .$$

$$\alpha := U\tilde{\alpha}U^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} ,$$

$$\beta := U\tilde{\beta}U^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} ,$$

und erhalten die Dirac-Gleichung in der *Dirac-Darstellung* oder *Standard-Darstellung*:

$$(c\alpha^i p_i + \beta mc^2)\psi = \mathbb{1}E\psi \ , \text{ bzw.} \tag{22.3.8}$$

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad \text{oder} \quad \hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \quad \text{mit} \quad \hat{H} := c\alpha^i p_i + \beta mc^2 = -i\hbar c\alpha^i\partial_i + \beta mc^2 \ . \tag{22.3.9}$$

Manche Autoren, die wie wir die 'Plus'-Minkowski-Metrik diag$(-1, +1, \ldots, +1)$ verwenden, wünschen sich aber dennoch ein positives Vorzeichen in der Antikommutator-Relation der Gamma-Matrizen γ^μ. Wenn man die Dirac-Matrizen mittels einer unitärer Transformation abändert, dann bleibt die Dirac-Gleichung forminvariant, multipliziert man jedoch die Dirac-Matrizen mit einem Faktor, so ändert sich natürlich auch der Term $mc\mathbb{1}$ in der Dirac-Gleichung entsprechend.

Freedman u. Van Proeyen (2012) errichen das positive Vorzeichen in der Antikommutator-Relation der Gamma-Matrizen γ^μ durch den Übergang zu den Gammamatrizen $\tilde{\gamma}^\mu := \gamma^5\gamma^\mu$:

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \tilde{\gamma}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \tag{22.3.10}$$

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} := \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} . \tag{22.3.11}$$

$$\tilde{\gamma}_* := \tilde{\gamma}^5 := \tilde{\gamma}_5 := (-i)^5\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{22.3.12}$$

Weinberg (1995b) wählt $\tilde{\gamma}^\mu := -i\gamma^\mu$:

$$\tilde{\gamma}^0 = -i\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \tilde{\gamma}^i = -i\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \tag{22.3.13}$$

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} := \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} . \tag{22.3.14}$$

$$\tilde{\gamma}_* := \tilde{\gamma}^5 := \tilde{\gamma}_5 := (-i)^5\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{22.3.15}$$

Aus den Gamma-Matrizen kann man jetzt auch eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ konstruieren. Diese Darstellung $\Sigma^{\mu\nu}$ heißt Spintensor und findet Verwendung in der Transformation des Diracschen Bispinors ψ unter Lorentztransformationen und in der Dirac-Gleichung in gekrümmten Raumzeiten (s.u.).

Lemma 22.3.2

$$\Sigma^{\mu\nu} := -\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{22.3.16}$$

erfüllt die Beziehung

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} \tag{22.3.17}$$

und ist deshalb eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$. *Damit läßt sich eine Darstellung* $\tilde{\Lambda}(\Lambda)$ *einer Lorentztransformation auf einen Dirac-Spinor* ψ *schreiben als:*

$$\psi' = \tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi = \exp(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}\Sigma_{\rho\sigma})\psi . \tag{22.3.18}$$

Anmerkung: das Minuszeichen in der Definition von $\Sigma^{\mu\nu}$ korrespondiert mit dem Minuszeichen im Antikommutator $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$ in der Weyl-Darstellung der Gamma-Matrizen γ^μ bei unserer 'Plus'-Minkowski-Metrik $\mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$.

Beweis. Wir beginnen mit dem Kommutator von $[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho]$:

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = -\frac{1}{4}(2\gamma^\mu\gamma^\nu + 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}) = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \eta^{\mu\nu}\mathbb{1})\ ,$$

$$\begin{aligned}
[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = \Sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho - \gamma^\rho\Sigma^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho) \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + 2\eta^{\rho\mu}\gamma^\nu) \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - 2\eta^{\rho\nu}\gamma^\mu + 2\eta^{\rho\mu}\gamma^\nu) \\
&= \eta^{\rho\nu}\gamma^\mu - \eta^{\rho\mu}\gamma^\nu = \gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\rho\mu}\ .
\end{aligned}$$

Jetzt zum Kommutator von $[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}]$:

$$\begin{aligned}
[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] &= -\frac{1}{4}([\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma] - [\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\sigma\gamma^\rho]) \\
&= -\frac{1}{4}(\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\sigma\Sigma^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu}\gamma^\sigma\gamma^\rho + \gamma^\sigma\gamma^\rho\Sigma^{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{4}(\gamma^\rho\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\sigma + (\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\rho\mu})\gamma^\sigma - \gamma^\rho\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\sigma + \gamma^\rho(\gamma^\mu\eta^{\nu\sigma} - \gamma^\nu\eta^{\sigma\mu}) \\
&\qquad - \gamma^\sigma\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho - (\gamma^\mu\eta^{\nu\sigma} - \gamma^\nu\eta^{\sigma\mu})\gamma^\rho + \gamma^\sigma\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho - \gamma^\sigma(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\rho\mu})) \\
&= -\frac{1}{4}(\eta^{\rho\mu}(-\gamma^\nu\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\nu) - \eta^{\nu\rho}(-\gamma^\mu\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&\qquad + \eta^{\sigma\mu}(-\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho) - \eta^{\nu\sigma}(-\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\rho)) \\
&= -(\eta^{\rho\mu}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} + \eta^{\sigma\mu}\Sigma^{\rho\nu} - \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\rho\mu}) \\
&= \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\rho\nu} \\
&= \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho}\ .
\end{aligned}$$

Damit erfüllen die $\Sigma^{\mu\nu}$ die Kommutator-Relationen der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$, siehe 21.7.10, stellen also eine Darstellung von $\mathfrak{so}(3,1)$ im Raum der 4-dimensionalen Diracschen Bispinoren ψ dar, die sich nach 21.7.13 unter einer Darstellung einer Lorentztransformation also folrgendermaßen transformieren:

$$\psi' = \tilde{\Lambda}\psi = \exp(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}\Sigma_{\rho\sigma})\psi\ . \qquad \square$$

22.4 Dirac Gleichung mit elektromagnetischem Feld

Zunächst soll hier an die kovariante Darstellung der Maxwell-Gleichungen des elektromagnetischen Feldes erinnert werden. Auf die Beschreibung des Elektromagnetismus als einer $U(1)$-Eichtheorie werden wir in Kapitel 24.2 eingehen.

Wir verwenden nach wie vor unsere 'Plus'-Minkowski-Metrik $\mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$ und für die EM-Felder die folgenden Bezeichnungen:

$$A^\mu := \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \ , \quad j^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \ , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \tag{22.4.1}$$

Die ersten beiden Maxwell-Gleichungen sind, wie wir später sehen werden, 'rein geometrischer' Natur:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \ . \quad \text{(Gauß-Faradaysches Gesetz)} \tag{22.4.2}$$

Die beiden anderen Maxwell-Gleichungen sind dynamischer Natur und folgen aus dem Extremum des Wirkungsfunktionals $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}[A_\nu, \partial_\mu A_\nu] := \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) d^4x := \int_{\mathbb{R}^4} (-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\nu j^\nu) d^4x \ , \tag{22.4.3}$$

Natürlich soll die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ ein Skalar sein, aber daß $\mathcal{L}$ nun im Fall der Elektrodynamik genau diese Form hat ist nicht theoretischen Überlegungen zu verdanken, sondern die Forderung nach Übereinstimmung mit den Experimenten. Inzwischen ist allerdings klar, daß die Elektrodynamik der klassische Grenzfall der Quantenelektrodynamik ist, und wenn man versucht die Lagrangefunktion der QED aufzustellen, so erhält man zusätzliche Einschränkungen an die Lagrangefunktion:
dort würde etwa ein Term der Form $A_\nu A^\nu$ zu einer Masse der Photonen führen und Terme mit einer Kombination von A_ν und $\partial_\mu A_\nu$ in höherer als vierter Potenz würden die Theorie unrenormierbar machen.

Die Lagrange-Gleichungen lauten dann (siehe etwa A.1.17):

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \stackrel{!}{=} 0 \ . \tag{22.4.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = j^\nu \ .$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha \ .$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \eta^{\alpha\alpha'} \eta^{\beta\beta'} [(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha) F_{\alpha'\beta'} + F_{\alpha\beta} (\delta^\mu_{\alpha'} \delta^\nu_{\beta'} - \delta^\mu_{\beta'} \delta^\nu_{\alpha'})]$$

$$= -\frac{1}{4}[(\eta^{\mu\alpha'}\eta^{\nu\beta'} - \eta^{\nu\alpha'}\eta^{\mu\beta'})F_{\alpha'\beta'} + F_{\alpha\beta}(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu})]$$

$$= -\frac{1}{4}[(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) + (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})] = -F^{\mu\nu} \; .$$

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} -j^\nu \quad \text{bzw.}$$

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} \stackrel{!}{=} j^\nu \; . \quad \text{(Gauß-Ampèresches Gesetz)} \tag{22.4.5}$$

Die Maxwell-Gleichungen sind hier partielle Differentialgleichungen des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$. Eine Transformation von A^μ, die $F^{\mu\nu}$ und damit die Maxwell-Gleichungen invariant läßt, heißt eine Eichtransformation. Zum Beispiel ist

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\mu) \tag{22.4.6}$$

eine solche Eichtransformation.

Wenn man nun die Elektrodynamik mit der Dirac-Gleichung koppeln möchte, so ist ein möglicher Weg die Ersetzung in der Wirkungsfunktion:

$$A_\mu j^\mu \quad \rightarrow \quad A_\mu q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \; ,$$

d.h. man ersetzt den elektrodynamischen Viererstrom durch den Wahrscheinlichkeitsdichten-Viererstrom der Dirac-Gleichung mal der elektrischen Ladung q des Teilchens. Dadurch ergibt sich die folgende Wirkungsfunktion:

$$\mathcal{S} = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L} d^4x \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2 \mathbb{1})\psi \; + A_\mu q \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi}(i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu + A_\mu q \gamma^\mu - mc^2 \mathbb{1})\psi \; - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi}(i\hbar c \gamma^\mu (\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c} A_\mu) - mc^2 \mathbb{1})\psi \; - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&=: \bar{\psi}(i\hbar c \gamma^\mu \nabla_\mu - mc^2 \mathbb{1})\psi \; - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \; .
\end{aligned} \tag{22.4.7}$$

Der Ausdruck

$$\nabla_\mu := (\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c} A_\mu) \tag{22.4.8}$$

heißt auch *kovariante Ableitung*, was aus der Darstellung des Elektromagnetismus als einer Eichtheorie (siehe Kapitel 24.2) verständlich werden wird.

Anmerkung: in $\nabla_\mu = (\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A_\mu)$ steht q für die elektrische Ladung des Dirac-Teilchens, d.h. bei einem Elektron ist $q = -e$. In der 'Minus'-Minkowski-Metrik diag$(+1, -1, \ldots, -1)$ der meisten QM-Bücher wird natürlich aus unserem $+q$ ein $-q$.

Das obige Vorgehen der Kopplung des elektromagnetischen Feldes an ein Dirac-Teilchen heißt in der Physik *minimale Kopplung*, denn natürlich wären ja auch kompliziertere Formen der Kopplung denkbar.

Diese minimale Kopplung hat nun die Eigenschaft, daß sie das Wirkungsfunktional $\mathcal{S}$, bzw. die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$, unter einer lokalen $U(1)$-Eichtransformation invariant läßt:

$$\psi'(x^\mu) := e^{-i\frac{q}{\hbar c}\chi(x^\mu)}\psi(x_\mu)\ ,\ A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\mu) \quad \Rightarrow \tag{22.4.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\hbar c\gamma^\mu(\partial_\mu - iA'_\mu\frac{q}{\hbar c}) - mc^2\mathbb{1})\psi' - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu\frac{q}{\hbar c}\chi(x^\mu) - i\frac{q}{\hbar c}(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\mu))) - mc^2\mathbb{1})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A_\mu) - mc^2\mathbb{1})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathcal{L}\ .\end{aligned}$$

Damit lautet die Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Vektorpotential:

$$(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi = (i\hbar c\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A_\mu) - mc^2\mathbb{1})\psi = \vec{0}\ . \tag{22.4.10}$$

22.5 Die CPT-Symmetrien

Wir hatten bereits oben in 22.2.3 gesehen, daß für den Paritäts-Operator $\mathcal{P}$, der eine Rauminversion beschreibt, $\mathcal{P}\psi_L = \psi_R$ gilt, und daß $\mathcal{P}$ in der Weyl-Darstellung die folgende Form hat (22.2.2):

$$\mathcal{P} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\ . \tag{22.5.1}$$

Bei einer Rauminversion $x^i \to -x^i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ geht also die Dirac-Gleichung über in

$$\mathcal{P}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}\psi = \vec{0}\ .$$

Bei einer Zeitinversion $t \to -t$ geht die Dirac-Gleichung über in

$$\mathcal{T}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\psi = \vec{0}\ ,$$

wobei sich $\mathcal{T}$ in der Weyl-Darstellung ergibt als:

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_0\mathcal{K} := i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} := \text{Komplexkonjugation}\ . \tag{22.5.2}$$

Beweis. Einerseits führt $t' = -t$ zu

$$x'_0 = -x_0\ ,\ j'_i = -j_i\ ,\ A'_i = -A_i \quad \text{für } i \in \{1,2,3\}\ ,$$

$$\begin{aligned} i\hbar c\gamma^\mu \nabla'_\mu &= i\hbar c\gamma^\mu[\partial'_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A'_\mu] \\ &= i\hbar c[\gamma^0(\partial'_0 - i\frac{q}{\hbar c}A'_0) + \gamma^i(\partial'_i - i\frac{q}{\hbar c}A'_i)] \\ &= i\hbar c[\gamma^0(-\partial_0 - i\frac{q}{\hbar c}A_0) + \gamma^i(\partial_i + i\frac{q}{\hbar c}A_i)]\ . \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\mathcal{T}_0\mathcal{T}_0 = i\gamma^1\gamma^3 \cdot i\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^3 \cdot \gamma^1\gamma^3 = \mathbb{1}\ ,$$

$$\mathcal{T}(-\mathcal{T}) = \mathcal{T}_0\mathcal{K}(-i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}) = \mathcal{T}_0\mathcal{T}_0 = \mathbb{1}\ , \quad \text{also}$$

$$\mathcal{T}^{-1} = -\mathcal{T} = -i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}\ , \quad \mathcal{T}^\dagger = (i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K})^\dagger = i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K} = \mathcal{T}\ ,$$

also ist $\mathcal{T}$ ein antiunitärer Operator. Weiter ist in unserer Weyl-Darstellung der Gamma-Matrizen

$$(\gamma^2)^* = -\gamma^2\ ,$$

$$\begin{aligned} \gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^0\ ,\ \gamma^1\gamma^3\gamma^1\gamma^1\gamma^3 = \gamma^1\ , \\ \gamma^1\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^2\ ,\ \gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^3 = \gamma^3\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu)\mathcal{T}^{-1} &= i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}[i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu](-i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}) \\ &= i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}[i\hbar c\gamma^0\nabla_0 + i\hbar c\gamma^1\nabla_1 + i\hbar c\gamma^2\nabla_2 + i\hbar c\gamma^3\nabla_3](-i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}) \\ &= i\gamma^1\gamma^3[-i\hbar c\gamma^0\nabla_0^* - i\hbar c\gamma^1\nabla_1^* - i\hbar c(\gamma^2)^*\nabla_2^* - i\hbar c\gamma^3\nabla_3^*](i\gamma^1\gamma^3) \\ &= i\hbar c[-\gamma^0\nabla_0^* + \gamma^1\nabla_1^* + \gamma^2\nabla_2^* + \gamma^3\nabla_3^*] \\ &= i\hbar c[\gamma^0(-\partial_0 - i\frac{q}{\hbar c}A_0) + \gamma^1(\partial_1 + i\frac{q}{\hbar c}A_1) \\ &\quad + \gamma^2(\partial_2 + i\frac{q}{\hbar c}A_2) + \gamma^3(\partial_3 + i\frac{q}{\hbar c}A_3)] \\ &= i\hbar c[\gamma^0(-\partial_0 - i\frac{q}{\hbar c}A_0) + \gamma^i(\partial_i + i\frac{q}{\hbar c}A_i)]\ . \end{aligned}$$

Also ist

$$[(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi]' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{T}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\psi = \vec{0}\ . \qquad \square$$

Bei einer Ladungskonjugation $q \to -q$ geht die Dirac-Gleichung über in

$$\mathcal{C}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\psi = \vec{0}\ ,$$

wobei sich $\mathcal{C}$ in der Weyl-Darstellung ergibt als:

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_0\mathcal{K} := i\gamma^2\mathcal{K} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} := \text{Komplexkonjugation}\ . \tag{22.5.3}$$

Beweis. Einerseits führt $q' = -q$ zu

$$i\hbar c\gamma^\mu\nabla'_\mu = i\hbar c\gamma^\mu[\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu]\ .$$

Andererseits ist

$$\mathcal{C}_0\mathcal{C}_0 = i\gamma^2 \cdot i\gamma^2 = \mathbb{1}\ ,$$

$$\mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{C}_0\mathcal{K}\mathcal{C}_0\mathcal{K} = i\gamma^2\mathcal{K}(i\gamma^2\mathcal{K}) = i\gamma^2(-i(\gamma^2)^*) = \mathcal{C}_0\mathcal{C}_0 = \mathbb{1}\ , \quad \text{also}$$

$$C^{-1} = \mathcal{C} = i\gamma^2\mathcal{K}\ , \quad \mathcal{C}^\dagger = (i\gamma^2)^\dagger\mathcal{K} = i\gamma^2\mathcal{K} = \mathcal{C}\ ,$$

also ist $\mathcal{C}$ ein unitärer Operator. Weiter ist in unserer Weyl-Darstellung der Gamma-Matrizen

$$(\gamma^2)^* = -\gamma^2\ ,$$

$$\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = \gamma^0\ ,\ \gamma^2\gamma^1\gamma^2 = \gamma^1\ ,$$
$$\gamma^2\gamma^2\gamma^2 = -\gamma^2\ ,\ \gamma^2\gamma^3\gamma^2 = \gamma^3\ .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu)\mathcal{C}^{-1} &= i\gamma^2\mathcal{K}[i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu](i\gamma^2\mathcal{K}) \\
&= i\gamma^2\mathcal{K}[i\hbar c\gamma^0\nabla_0 + i\hbar c\gamma^1\nabla_1 + i\hbar c\gamma^2\nabla_2 + i\hbar c\gamma^3\nabla_3](i\gamma^2\mathcal{K}) \\
&= i\gamma^2[-i\hbar c\gamma^0\nabla_0^* - i\hbar c\gamma^1\nabla_1^* - i\hbar c(\gamma^2)^*\nabla_2^* - i\hbar c\gamma^3\nabla_3^*](-i(\gamma^2)^*) \\
&= i\gamma^2[-i\hbar c\gamma^0\nabla_0^* - i\hbar c\gamma^1\nabla_1^* + i\hbar c\gamma^2\nabla_2^* - i\hbar c\gamma^3\nabla_3^*](i\gamma^2) \\
&= i\hbar c[\gamma^0\nabla_0^* + \gamma^1\nabla_1^* + \gamma^2\nabla_2^* + \gamma^3\nabla_3^*] \\
&= i\hbar c[\gamma^\mu(\partial_0 + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu)]\ .
\end{aligned}$$

Also ist

$$[(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi]' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{C}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\psi = \vec{0}\ .$$

□

Wir haben also gezeigt, daß die Dirac-Gleichung mit minimaler Kopplung an die klassische Elektrodynamik die Symmetrien der Ladungskonjugation $\mathcal{C}$, der Partität $\mathcal{P}$ und der Zeitinversion $\mathcal{T}$ einzeln erhält. Das Produkt dieser Symmetrien lautet in der Weyl-Darstellung:

$$\begin{aligned}\mathcal{CPT} &= (i\gamma^2\mathcal{K})(\gamma^0)(i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}) = (i\gamma^2)(\gamma^0)(-i\gamma^1\gamma^3) \\ &= \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^5 \; . \end{aligned} \tag{22.5.4}$$

Es zeigt sich, daß beim Übergang von dem hier beschriebenen Modell der Dirac-Gleichung eines Teilchens mit minimaler Kopplung an die klassische Elektrodynamik zu einem quantisierten minimal-gekoppelten Dirac- und Maxwell-Feld die Symmetrien $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ und $\mathcal{T}$ einzeln erhalten bleiben.

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie (QFT) tauchte die Aussage, daß das Produkt $\mathcal{CPT}$ in einer lorentzinvarianten und lokalen QFT, welche den Zusammenhang von Spin & Statistik berücksichtigt (d.h. Teilchen mit halbzahligen Spin: Fermionen-Operatoren, die an raumartigen Punkten antikommutieren, Teilchen mit ganzzahligem Spin: Bosonen-Operatoren, die an raumartigen Punkten kommutieren) zum ersten Mal implizit in einer Arbeit von J. Schwinger 1951 auf.

G. Lüders (1954) und W. Pauli (1955) veröffentlichten dann ausführlichere Beweise, so daß das $\mathcal{CPT}$-Theorem heute auch unter dem Namen Lüders-Pauli-Theorem bekannt ist. Diese Beweise stützen sich auf:
Lorentz-Invarianz, Kausalität, Lokalität, Vakuum (d.h. Existenz eines nach unten beschränkten Hamilton-Operators), S-Matrix-Theorie (d.h. Existenz wechselwirkungsfreier In-Out-Zustände). Eine moderne Darstellung des Lüders-Pauli-Beweises findet sich in Weinberg (1995a), S. 244 ff.

Etwas später veröffentlichte R. Jost (1957) einen etwas allgemeineren Beweis im Rahmen der axiomatischen QFT. Dieser Weg ist ausführlich in dem inzwischen klassischen Buch Streater u. Wightman (1969), S. 188 ff. (amerikanische Originalausgabe 1964) beschrieben. Allerdings ist der heutige Stand der Dinge, daß man mit diesen analytischen Axiomensystemen von Wightman, Haag-Kastler et al. letztlich nur relativ triviale QFT's beschreiben kann, wie die Konstruktionen von Segal, Glimm, Jaffe in den 1970'er Jahren gezeigt haben. Das Auffinden einer exakten mathematischen Basis für die Yang-Mills-QFTs des Standardmodells ist immer noch eine große ungelöste Frage und ein Millenium-Preis-Problem.

Im Jahr 1956 schlugen die Theoretiker Lee und Yang nach einer Analyse zahlreicher Experimente die Verletzung der Parität $\mathcal{P}$ beim β-Zerfall der Schwachen Wechselwirkung vor, was 1957 experimentell eindeutig verifiziert werden konnte. Im Jahr 1964 konnten Cronin und Fitch die Verletzung von $\mathcal{CP}$ im Zerfall von neutralen Kaonen, ebenfalls ein Prozeß der Schwachen Wechselwirkung, nachweisen.

Einige String-Theorien und die Loop-Quantum-Gravity (LQG) postulieren eine Verletzung von $\mathcal{CPT}$ auf raumzeitlich deutlich kleineren Skalen als sie heute experimentell zugänglich sind.

22.6 Majorana-Spinoren

Wir hatten soeben gesehen, daß die Ladungskonjugation $\mathcal{C}$ den Übergang von einem geladenen Teilchen zu seinem Antiteilchen vermittelt, also etwa von einem Elektron zu einem Positron. Wenn wir es mit ungeladenen Dirac-Teilchen zu tun haben, dann muß also für dessen Dirac-Spinor $\mathcal{C}\psi = \psi$ gelten.

In der Weyl-Darstellung hatten wir für $\mathcal{C}$ erhalten

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \mathcal{K} := i\gamma^2 \mathcal{K} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} := \text{Komplexkonjugation} \ , \tag{22.6.1}$$

$$\mathcal{C}_0 = i\gamma^2 = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_2 \\ -\sigma_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{22.6.2}$$

Aus $\mathcal{C}\psi = \psi$ mit $\psi^T = (\psi_{L,1}, \psi_{L,2}, \psi_{R,1}, \psi_{R,2})$ folgt

$$(\psi^*_{R,2}, -\psi^*_{R,1}, -\psi^*_{L,2}, \psi^*_{L,1}) = (\psi_{L,1}, \psi_{L,2}, \psi_{R,1}, \psi_{R,2}) \ ,$$

also

$$\psi_{R,1} = -\psi^*_{L,2} \ , \quad \psi_{R,2} = \psi^*_{L,1} \ .$$

Damit kann man den Majorana-Spinor schreiben als

$$\psi^T = (\psi_{L,1}, \psi_{L,2}, -\psi^*_{L,2}, \psi^*_{L,1}) \ . \tag{22.6.3}$$

Der Majorana-Spinor enthält also statt vier unabhängigen, komplexen Variablen nur noch zwei unabhängige, komplexe Variable, oder vier unabhängige reelle Variable. Wenn man für $\psi_{L,1} = \varphi_1 + i\varphi_2$ und $\psi_{L,2} = \varphi_3 + i\varphi_4$ mit reellen Variablen $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ schreibt, dann kann man den komplexen Majorana-Spinor ψ in einen reellen Majorana-Spinor φ umwandeln:

$$A\psi := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -i & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \\ -\varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 - i\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \varphi \ . \tag{22.6.4}$$

Wenn man zu dieser Darstellung übergeht, muß man natürlich auch die Diracschen Gamma-Matrizen γ^μ zu $A\gamma^\mu A^{-1}$ abändern, damit weiterhin die Dirac-Gleichung gültig ist.

22.7 Die Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Raumzeit

Es seien an einem Punkt p der gekrümmten 4-dimensionalen Raumzeit M die Vektoren $\{\partial_\mu\}$ und $\{dx^\mu\}$ die Basen des Tangentialraums T_pM und des Kotangentialraums

T_p^*M. Mittels des Vierbeins ${e_a}^\mu$, bzw. ${e^a}_\mu$, (siehe 10.2.1 und 10.2.3) kann man nun die Orthonormalbasen $\{e_a\}$ und $\{\theta^a\}$ einführen:

$$e_a := {e_a}^\mu \partial_\mu \ , \quad \theta^a := {e^a}_\mu dx^\mu \ . \tag{22.7.1}$$

Damit kann man lokal am Punkt $p \in M$ von der Metrik $g_{\mu\nu}$ der gekrümmten Raumzeit zu einer Lorentz-Metrik η_{ab} übergehen:

$$g_{\mu\nu} = {e^a}_\mu {e^b}_\nu \eta_{ab} \ . \tag{22.7.2}$$

In Bezug auf diese Lorentz-Metrik definiert man jetzt die Diracschen Gamma-Matrizen:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} := \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = -2\eta^{ab}\mathbb{1} \ . \tag{22.7.3}$$

Wir hatten in 22.3.18 für die Transformation eines Dirac-Spinors ψ gefunden:

$$\psi' = \tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi = \exp(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}\Sigma_{\rho\sigma})\psi \ .$$

Jetzt suchen wir eine kovariante Ableitung $\nabla_a\psi$, die sich sowohl als lokaler Lorentz-Vektor wie auch als Spinor transformieren soll, d.h. wir verlangen

$$(\nabla_a\psi)' \stackrel{!}{=} \tilde{\Lambda}(\Lambda){\Lambda_a}^{\mathrm{b}}\nabla_b\psi \ .$$

Daß dies möglich ist, zeigt das folgende Lemma. Wir folgen hier Nakahara (2003), S.300 ff.

Lemma 22.7.1 *Die kovariante Ableitung $\nabla_a\psi$ mit*

$$\nabla_a\psi := {e_a}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi := {e_a}^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{2}{\Gamma^a}_\mu{}^b\Sigma_{ab})\psi \tag{22.7.4}$$

transformiert sich unter einer Lorentztransformation Λ sowohl als lokaler Lorentz-Vektor wie auch als Spinor, d.h.

$$(\nabla_a\psi)' \stackrel{!}{=} \tilde{\Lambda}(\Lambda){\Lambda_a}^b\nabla_b\psi \ . \tag{22.7.5}$$

Beweis. Sei Λ eine lokale Lorentztransformation der Form (siehe 21.7.13)

$$\Lambda = \exp(\frac{1}{2}\lambda^{ab}m_{[ab]}) \ ,$$

bzw. bei infinitesimalen λ^{ab} (siehe 21.7.14):

$${\Lambda^a}_b = \delta^a_b + {\lambda^a}_b \ .$$

Die entsprechende Darstellung dieser Lorentztransformation im Raum der Dirac-Spinoren ist (22.3.18):

$$\tilde{\Lambda}(\Lambda) = \exp(\frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab}) \ ,$$

bzw. bei infinitesimalen λ^{ab}:

$$\tilde{\Lambda}(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab} \; .$$

Wir machen den Ansatz

$$\nabla_a\psi := e_a{}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi$$

und fragen zunächst nach dem Transformationsverhalten von $e_a{}^\mu\partial_\mu\psi$:

$$(e_a{}^\mu\partial_\mu\psi)' = \Lambda_a{}^b e_b{}^\mu\partial_\mu(\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi) = \Lambda_a{}^b e_b{}^\mu((\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\psi + \tilde{\Lambda}(\Lambda)\partial_\mu\psi) \; .$$

Für $e_a{}^\mu\Omega_\mu\psi$ als Vierervektor und Spinor ergibt sich:

$$(e_a{}^\mu\Omega_\mu\psi)' = \Lambda_a{}^b e_b{}^\mu\Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi \; .$$

Damit folgt für $(\nabla_a\psi)$:

$$(\nabla_a\psi)' = \Lambda_a{}^b e_b{}^\mu((\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\psi + \tilde{\Lambda}(\Lambda)\partial_\mu\psi) + \Lambda_a{}^b e_a{}^\mu\Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi$$

Mit der Forderung, daß sich $(\nabla_a\psi)$ folgendermaßen transformieren soll

$$(\nabla_a\psi)' \stackrel{!}{=} \tilde{\Lambda}(\Lambda)\Lambda_a{}^{\mathrm{b}}\nabla_b\psi$$

folgt also

$$\tilde{\Lambda}(\Lambda)\Lambda_a{}^{\mathrm{b}}\nabla_b\psi = \Lambda_a{}^b e_b{}^\mu((\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\psi + \tilde{\Lambda}(\Lambda)\partial_\mu\psi) + \Lambda_a{}^b e_a{}^\mu\Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}(\Lambda)\Lambda_a{}^{\mathrm{b}} e_b{}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi &= \Lambda_a{}^b e_b{}^\mu(\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\psi + \tilde{\Lambda}(\Lambda)\partial_\mu\psi) \\ &\quad + \Lambda_a{}^b e_a{}^\mu\Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\tilde{\Lambda}(\Lambda)\Omega_\mu = (\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda) + \Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda) \quad \Rightarrow$$

$$\Omega'_\mu = \tilde{\Lambda}(\Lambda)\Omega_\mu\tilde{\Lambda}^{-1}(\Lambda) - (\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\tilde{\Lambda}^{-1}(\Lambda) \; .$$

Mit einer infinitesimalen Transformation $\tilde{\Lambda}(\Lambda)$ wird dies zu

$$\begin{aligned}\Omega'_\mu &= (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab})\Omega_\mu(\mathbb{1} - \frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab}) \\ &\quad - (\partial_\mu\frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab})(\mathbb{1} - \frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab}) \\ &\simeq \Omega_\mu + \frac{1}{2}\lambda^{ab}[\Sigma_{ab}, \Omega_\mu] - \frac{1}{2}\partial_\mu\lambda^{ab}\Sigma_{ab} \; .\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, daß sich $\frac{1}{2}\Gamma^a{}_\mu{}^b\Sigma_{ab}$ unter einer infinitesimalen Transformation $\tilde{\Lambda}(\Lambda)$ genauso wie Ω_μ transformiert. Für die Cartansche Zusammenhangs-1-Form $\omega^a{}_b$ (10.8.1) hatten wir das folgende Transformationsverhalten gefunden (10.9.10):

$$\omega' = \Lambda\omega\Lambda^{-1} - d\Lambda \cdot \Lambda^{-1} ,$$

und mit einer infinitesimalen Transformation Λ (siehe 21.7.14)

$$\Lambda^a_{\ b} \simeq \delta^a_b + \lambda^a_{\ b}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned}(\omega')^a{}_b &= (\delta^a_c + \lambda^a_{\ c})\omega^c{}_d(\delta^d_b - \lambda^d_{\ b}) - d\lambda^a_{\ d} \cdot (\delta^d_b - \lambda^d_{\ b}) \\ &\simeq \omega^a{}_b + \lambda^a_{\ c}\omega^c{}_b - \omega^a{}_d\lambda^d_{\ b} - d\lambda^a_{\ b} .\end{aligned}$$

Von der Zusammenhangs-1-Form $\omega^a{}_b$ kann man zu den Zusammenhangs-Koeffizienten $\Gamma^a{}_{\mu b}$ übergehen

$$\omega^a{}_b =: \Gamma^a{}_{\mu b}\, dx^\mu .$$

Für diese Zusammenhangs-Koeffizienten Γ gilt dann folgendes Transformationsverhalten:

$$(\Gamma^a{}_{\mu b})' = \Gamma^a{}_{\mu b} + \lambda^a_{\ c}\Gamma^c{}_{\mu b} - \Gamma^a{}_{\mu c}\lambda^c_{\ b} - d\lambda^a_{\ b} .$$

Und damit folgt für $\frac{1}{2}\Gamma^a{}_\mu{}^b\Sigma_{ab}$:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}\Gamma^a{}_\mu{}^b\Sigma_{ab})' &= \frac{1}{2}(\Gamma^a{}_\mu{}^b)'\Sigma_{ab} \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma^a{}_\mu{}^b\Sigma_{ab} + \lambda^a_{\ c}\Gamma^c{}_\mu{}^b\Sigma_{ab} - \Gamma^a{}_\mu{}^c\lambda_c^{\ b}\Sigma_{ab} - (d\lambda^{ab})\Sigma_{ab}) .\end{aligned}$$

Nun ist Σ_{ab} eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$, siehe 22.3.17, und erfüllt daher die Kommutatorrelation:

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \eta_{bc}\Sigma_{ad} - \eta_{ac}\Sigma_{bd} - \eta_{bd}\Sigma_{ac} + \eta_{ad}\Sigma_{bc} .$$

Daraus ergibt sich mit $\lambda^{ab} = -\lambda^{ba}$ und $\Sigma_{ab} = -\Sigma_{ba}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lambda^{ab}[\Sigma_{ab}\, , \frac{1}{2}\Gamma^c{}_\mu{}^d\Sigma_{cd}] &= \frac{1}{4}\lambda^{ab}\Gamma^c{}_\mu{}^d[\Sigma_{ab}\, , \Sigma_{cd}] \\ &= \frac{1}{4}\lambda^{ab}\Gamma^c{}_\mu{}^d(\eta_{bc}\Sigma_{ad} - \eta_{ac}\Sigma_{bd} - \eta_{bd}\Sigma_{ac} + \eta_{ad}\Sigma_{bc}) \\ &= \frac{1}{4}(\lambda^a_{\ c}\Gamma^c{}_\mu{}^d\Sigma_{ad} - \lambda^{ab}\eta_{ac}\Gamma^c{}_\mu{}^d\Sigma_{bd}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \lambda^a_{\ d}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{ac} + \lambda^{ab}\eta_{ad}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{bc}) \\
&= \frac{1}{4}(\lambda^a_{\ c}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{ad} + \lambda^b_{\ c}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{bd} \\
&\quad - \lambda^a_{\ d}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{ac} - \lambda^b_{\ d}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{bc}) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda^a_{\ c}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{ad} - \lambda^a_{\ d}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{ac}) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda^a_{\ c}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{ad} - \Gamma^{a\ d}_{\ \mu}\lambda^b_{\ d}\Sigma_{ba}) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda^a_{\ c}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{ad} - \Gamma^{a\ c}_{\ \mu}\lambda^b_{\ c}\Sigma_{ba}) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda^a_{\ c}\Gamma^{c\ b}_{\ \mu}\Sigma_{ab} - \Gamma^{a\ c}_{\ \mu}\lambda_c^{\ b}\Sigma_{ab}) \ .
\end{aligned}
$$

Damit können wir also $(\frac{1}{2}\Gamma^{a\ b}_{\ \mu}\Sigma_{ab})'$ schreiben als

$$
(\frac{1}{2}\Gamma^{a\ b}_{\ \mu}\Sigma_{ab})' = \frac{1}{2}(\Gamma^{a\ b}_{\ \mu}\Sigma_{ab} + \lambda^{ab}[\Sigma_{ab}\, , \, \frac{1}{2}\Gamma^{c\ d}_{\ \mu}\Sigma_{cd}] - (d\lambda^{ab})\Sigma_{ab})
$$

und damit transformiert sich

$$
\frac{1}{2}\Gamma^{a\ b}_{\ \mu}\Sigma_{ab} \quad \text{ebenso wie} \quad \Omega_\mu \ . \qquad \square
$$

Anmerkung: wir haben an die Zusammenhangs-Koeffizienten $\Gamma^{a\ b}_{\ \mu}$ keine weiteren Forderungen gestellt, insbesondere können sie also neben der Krümmung auch eine Torsion der Raumzeit beschreiben. Da aber Σ_{ab} antisymmetrisch ist, spielt also in Ω_μ nur der antisymmetrische Teil von $\Gamma^{a\ b}_{\ \mu}$ eine Rolle, d.h.

$$
\Omega_\mu = \frac{1}{2}\Gamma^{a\ b}_{\ \mu}\Sigma_{ab} = \frac{1}{4}\Gamma^{[a\ b]}_{\ \mu}\Sigma_{ab} \ . \tag{22.7.6}
$$

Mit Hilfe dieser kovarianten Ableitung können wir jetzt die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ (siehe 22.4.7, 22.4.8) und die Wirkungsfunktion $\mathcal{S}$ in einer gekrümmten Raumzeit formulieren:

$$
\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^a e_a^{\ \mu}\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi \, - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \tag{22.7.7}
$$

$$
\nabla_\mu := (\partial_\mu + \Omega_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A_\mu) \ , \quad \Omega_\mu = \frac{1}{2}\Gamma^{a\ b}_{\ \mu}\Sigma_{ab} \ . \tag{22.7.8}
$$

$$
\mathcal{S} = \int\limits_M \sqrt{-g}\mathcal{L}d^4x \ . \tag{22.7.9}
$$

Der Differential-Operator in $\mathcal{L}$ heißt der Dirac-Operator in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit:

$$
i\hbar c\nabla\!\!\!\!/ := i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu = i\hbar c\gamma^a e_a^{\ \mu}\nabla_\mu \ . \tag{22.7.10}
$$

22.8 Elliptische lineare partielle Differential-Operatoren

Aufgrund der Minkowski-Metrik ist $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ ein hyperbolischer linearer Differentialoperator. Da man über elliptische lineare Differentialoperatoren aber wesentlich mehr weiß, als über hyperbolische, haben sich viele Physiker für das *Euklidische Programm* entschieden: durch analytische Fortsetzung der Zeit x^0 ins Komplexe zu $x^0_E := ix^0$, eine sog. Wick-Rotation, ergibt sich:

$$ds^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad \Rightarrow \quad ds_E^2 = +(x_E^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \ .$$

Statt in der Minkowski-Raumzeit rechnet man also im 4-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{E}^4$, statt der nichtkompakten Lorentz-Gruppe $O(3,1)$ benutzt man die kompakte Gruppe $O(4)$, und statt des hyperbolischen d'Alembert-Operators $\Box f = \partial^\mu \partial_\mu f = 0$, der eine Wellengleichung beschreibt, den 4-dimensionalen elliptischen Laplace-Operator $\Box_E = \partial_E^\mu \partial_{E\mu} f = 0$, der eine Potentialgleichung beschreibt. Auch wenn dieses *Euklidische Programm* in der Störungstheorie des Standardmodells funktioniert sind aus mathematischer wie physikalischer Sicht ernsthafte Zweifel an diesem Vorgehen angebracht, insbesondere bei der Quantisierung der Gravitation (siehe etwa Penrose (2004), und insb. die Arbeiten von Renate Loll et al., z.B. in Guilini u. a. (2003)).

Da wir aber in diesem Manuskript den Zusammenhang zwischen Geometrie, Topologie und Physik beleuchten und dabei bis zu den berühmten Atiyah-Singer-Indexsätzen als einer umfassenden Verallgemeinerung des Satzes von Gauß-Bonnet gelangen wollen, und da all diese tiefen Sätze eben nur für elliptische lineare Differential- und Pseudodifferential-Operatoren gelten, führen wir den elliptischen Dirac-Operator ein, sobald wir wissen, was denn ein elliptischer linearer partieller Differentialoperator (LPDO) genau ist. Wir fassen uns hier kurz, lassen die Pseudodifferential-Operatoren völlig beiseite und verweisen für eine ausführlichere Diskussion auf den Anhang Kapitel E.3, aus dem wir hier auch einige einleitende Definitionen und Betrachtungen zitieren.

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M entspricht auf einer lokalen Karte einem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$. Auf einer solchen lokalen Karte der Mannigfaltigkeit führt man für LPDOs der Ordnung d die übliche Multiindex-Schreibweise ein:

$$\begin{aligned}
& x := (x^1, \ldots, x^n) \ , \\
& \alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n! \ , \\
& \beta \leq \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \beta_j \leq \alpha_j \ , \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \ , \\
& D_{x^j} := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} \ , \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \ , \\
& D_x^\alpha := \prod_{j=1}^n D_{x^j}^{\alpha_j} \ , \\
& P(x, D) := \sum_{|\alpha|=0}^d a_\alpha(x) \, D_x^\alpha \ .
\end{aligned} \tag{22.8.1}$$

Für einen LPDO 2. Ordnung sieht das ausführlich aufgeschrieben so aus:

$$P(x,D) = a_0(x) + \sum_{j=1}^{n} a_1^j(x)\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^{n} a_2^{jk}(x)\,(-1)\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}\ . \tag{22.8.2}$$

Hierbei wurde die Multiindex-Schreibweise vereinfacht zu:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a_{|\alpha|=0} := a_{(0,\ldots,0)}\ , \\ a_1^j &:= a^j_{|\alpha|=1} := a_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}\ , \\ a_2^{jk} &:= a^{jk}_{|\alpha|=2} := \begin{cases} a_{(0,\ldots,0,2,0,\ldots,0)} & \text{für } j=k\ , \\ a_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)} & \text{für } j\neq k\ . \end{cases} \end{aligned}$$

Von diesem Typ ist z.B. der in der Physik häufig auftauchende Laplace-Operator

$$L_x = -\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} - \sum_{j=1}^{n} p^j(x)\,\frac{\partial}{\partial x^j} - q(x)\ . \tag{22.8.3}$$

Für das Differenzieren von Produkten von Funktionen in $\mathbb{R}^n$ gilt eine verallgemeinerte Leibniz-Formel, die wie im gewöhnlichen Fall mittels vollständiger Induktion bewiesen wird. Seien α, β Multiindizes, dann ist:

$$D_x^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D_x^\beta f(x))\,(D_x^{\alpha-\beta} g(x))\ . \tag{22.8.4}$$

Eine Standard-Methode der Behandlung von linearen partiellen Differentialgleichungen (LPDGL) ist die Fouriertransformation, da sich hierdurch Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umwandeln lassen. Die üblichste Fouriertransformation ist eine Abbildung $\mathcal{F}:\ L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist L^1 der Raum der Lebesgue-meßbaren komplex-wertigen Funktionen mit der 1-Norm, d.h. $\|f\|_1 = \int dt\,|f(t)|$, und C der Raum der komplex-wertigen stetigen Funktionen. Aus funktionalanalytischer Sicht ist es jedoch günstiger die Fouriertransformation als eine symmetrische Abbildung zwischen zwei gleichen Räumen zu definieren. Optimal ist dabei eine Einschränkung auf eine Teilmenge aus L^1, den sog. Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nämlich den Teilraum der komplex-wertigen glatten Funktionen, d.h. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ Funktionen, die für $|x| \to \infty$ schneller als jedes Polynom in x abfallen:

Definition 22.8.1 *Der Raum der schnellfallenden Funktionen (für $|x| \to \infty$) heißt Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,|\,D_x^\alpha f(x) \leq C_{m,\alpha}(1+|x|)^{-m}\,, \textit{für alle } m, \alpha\}\ . \tag{22.8.5}$$

Sei $P(x,D) := \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha$ ein LPDO der Ordnung d auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann kann man mittels der Fouriertransformation zur folgenden Darstellung von $P(x,D)$ gelangen:

$$\begin{aligned}
(P(x,D)f)(x) &= \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha f(x) \\
&= \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \xi^\alpha \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, (\sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha)\, \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \sigma(x,\xi) \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi\ , \qquad (22.8.6)
\end{aligned}$$

$$\sigma(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha\ . \qquad (22.8.7)$$

Der Einfachheit halber setzen wir $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ mit einer kompakte Menge K voraus. Wenn man nichtkompakte Mengen für x zulassen möchte, dann braucht man zusätzlich entsprechende Regularitätsbedingungen im Unendlichen.

Man nennt $\sigma(x,\xi)$ das *Symbol* des Operators $P(x,D)$. Dieses Symbol eines LPDO ist ein Polynom des Grades d in ξ. Der in ξ^d homogene Teil des Symbols, also $\sigma_H(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$, heißt *Hauptteil* des Symbols.

Es zeigt sich, daß wesentliche Aussagen über eine LPDGL nur vom Hauptteil des Symbols abhängen! Wir stellen jetzt nur die einfache Definition der Elliptizität für LPDOs vor. Für die deutlich aufwändigere und mächtigere Definition der Elliptizität von Pseudo-DO verweisen wir wieder auf den Anhang Kapitel E.3.

Definition 22.8.2 *Das Symbol $\sigma(x,\xi)$ eines LPDO heißt elliptisch, wenn sein Hauptteil keine Nullstelle hat, d.h. wenn $|\sigma_H(x,\xi)| \ge 0$ für alle $x \in K$ und alle $|\xi| \ne 0$. Ein LPDO $P(x,D)$ heißt elliptisch, wenn sein Symbol $\sigma(x,\xi)$ elliptisch ist.*

Diese Elliptizitätsbedingung läßt sich in Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \ge 2$ noch verschärfen.

Lemma 22.8.3 *Sei das Symbol $\sigma(x,\xi)$ eines LPDO elliptisch, dann gilt auch*

$$|\sigma_H(x,\xi)| \ge C_1 |\xi|^d \quad \textit{für } |\xi| \ne 0\ , \qquad (22.8.8)$$

$$|\sigma_H(x,\xi)| \ge C_2 (1+|\xi|)^d \quad \textit{für } |\xi| \ne 0\ . \qquad (22.8.9)$$

Beweis. Für $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ und $\xi \in U := \{\xi \,|\, |\xi| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $K \times U \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine kompakte Menge. Der Hauptteil des Symbols $\sigma_H(x, \xi)$ ist eine stetige und positive Funktion auf der kompakten Menge $K \times U$ und nimmt dort also ein positives Minimum $C_1 > 0$ an. Damit folgt

$$\frac{1}{|\xi|^d}|\sigma_H(x,\xi)| = |\sigma_H(x, \frac{\xi}{|\xi|})| \geq C_1 \quad \Rightarrow \quad |\sigma_H(x,\xi)| \geq C_1|\xi|^d \; .$$

Auch der Hauptteil des Symbols $\sigma_H(x, \frac{\xi}{1+|\xi|})$ ist eine stetige und positive Funktion auf der kompakten Menge $K \times U$ und nimmt dort also ein positives Minimum $C_2 > 0$ an. Damit folgt

$$\frac{1}{(1+|\xi|)^d}|\sigma_H(x,\xi)| = |\sigma_H(x, \frac{\xi}{1+|\xi|})| \geq C_2 \quad \Rightarrow \quad |\sigma_H(x,\xi)| \geq C_2(1+|\xi|)^d \; . \qquad \square$$

22.9 Der euklidische Dirac-Operator

Wir führen jetzt die Gamma-Matrizen für einen euklidischen Dirac-Operator ein:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \tag{22.9.1}$$

und daraus folgt in der euklidischen Metrik diag$(+1, +1, +1, +1)$:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}\mathbb{1} \; . \tag{22.9.2}$$

Beweis. Mit der euklidischen Metrik δ^{ab} folgt:

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2\gamma^0\gamma^0 = 2\mathbb{1} = 2\delta^{00}\mathbb{1} \; ,$$

$$\{\gamma^i, \gamma^i\} = 2\gamma^i\gamma^i = 2\mathbb{1} = 2\delta^{ii}\mathbb{1} \; ,$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} = 2\delta^{0i}\mathbb{1} \; ,$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_j\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_j\sigma_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} = 2\delta^{ij}\mathbb{1} \; , \text{ für } i \neq j \; .$$

$$\begin{aligned}
\gamma_5 := -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 &= (-i)\begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_2\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} \\
&= (-i)\begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} = (-i)\begin{pmatrix} i\mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\mathbb{1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \; .
\end{aligned} \qquad \square$$

In 22.7.7 und 22.7.8 hatten wir für den Dirac-Operator in einer gekrümmten Raumzeit erhalten

$$P(x, D) := i\hbar c \nabla\!\!\!/ = (i\hbar c \gamma^a e_a{}^\mu \nabla_\mu) \quad \text{mit} \tag{22.9.3}$$

$$\nabla_\mu := (\partial_\mu + \Omega_\mu - i\frac{q}{\hbar c} A_\mu) \ , \quad \Omega_\mu = \frac{1}{2} \Gamma^a{}_\mu{}^b \Sigma_{ab} \ . \tag{22.9.4}$$

Der Hauptteil des Symbols ist also

$$\sigma_H(x, \xi) = i\hbar c \gamma^a e_a{}^\mu \xi_\mu = i\hbar c \gamma^a \xi_a \ . \tag{22.9.5}$$

Nun ist

$$(\gamma^a \xi_a)(\gamma^b \xi_b) = \xi_a \xi_b \gamma^a \gamma^b = \xi_a \xi_b \delta^{ab} = \xi^b \xi_b = |\xi|^2 \ .$$

Damit ist

$$\sigma_H(x, \xi) > 0 \quad \text{für} \quad \xi \neq 0 \ , \tag{22.9.6}$$

und damit ist der Dirac-Operator $P(x, D)$ mit den Gamma-Matrizen der euklidischen Metrik tatsächlich ein elliptischer LPDO.

23 Faserbündel und Krümmung

23.1 Charles Ehresmann (1905-1979)

Abbildung 23.1: C. Ehresmann, unbekannt (1949), CC-BY-SA-2.0 de. Bildausschnitt des Originals. (Math. Inst. Oberwolfach) [http://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Ehresmann]

Ehresmann wurde in Straßburg im Elsass geboren und besuchte dort die Schule. Ab 1924 studierte er an der berühmten *École normale supérieure* (ENS) in Paris. Nach Militärdienst und einer kurzen Zeit als Gymnasiallehrer setzte er seine mathematischen Studien 1930-1931 in Göttingen und 1932-1934 in Princeton fort. 1934 wurde er in Paris bei Élie Cartan promoviert und forschte dann am *Centre national de la recherche scientifique* (CNRS). Danach arbeitete er als Dozent in Straßburg, in Clermont-Ferrand (wohin die Universität Straßburg kriegsbedingt ausgelagert worden war), und schließlich als Professor für Topologie in Paris. Daneben nahm er Einladungen zu Gastprofessuren weltweit an.

Für einige Jahre arbeitete Ehresmann in der von Jean Dieudonné, Henri Cartan, u.a. gegründeten berühmten Gruppe *Nicolas Bourbaki* mit, die sich um einen streng axiomatischen Aufbau der Mathematik auf den Spuren Hilberts bemühte. Ehresmann arbeitete zunächst wie sein Doktorvater Élie Cartan über Lie-Gruppen, dann wandte er sich Untersuchungen der Homologie verschiedener Mannigfaltigkeiten, der Grundlegung der Theorie der Faserbündel und Differentialtopologie und schließlich der Kategorientheorie zu. 1957 gründete er die mathematische Zeitschrift *Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle Categoriques*. 1965 veröffentlichte er das Lehrbuch *Catégories et structures* und 1969 das Lehrbuch *Algèbre*. Nach seinem Tod erschienen von 1980-1983 seine gesammelten Werke in sieben Bänden.

Jean Dieudonné beschrieb Ehresmann einmal so:

> „... er zeichnete sich aus durch seine Ehrlichkeit, seine Einfachheit und die völlige Abwesenheit von jedem Dünkel und Karrierestreben. Er war ein herausragender Lehrer, und zwar nicht so sehr wegen der Brillianz seiner Vorlesungen, sondern vor allem wegen der Inspiration und unermüdlichen Un-

terstützung, die er seinen fortgeschrittenen Studenten großzügig schenkte. ...”

[Quelle: Wikipedia-Ehresmann (2010)].

23.2 Faserbündel

In der theoretischen Physik haben wir es immer wieder mit Vektorfeldern, Tensorfeldern, Spinorfeldern und Symmetriefeldern über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit zu tun. Wenn M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und $TM := \cup_{p\in M} T_pM$ der zugehörige Tangentialraum, dann kann man die Dynamik des Systems im einfachsten Fall in dem Produktraum $M \otimes TM$ beschreiben. Wenn nun aber im betrachteten System nichttriviale Randbedingungen vorliegen, dann kann es sein, daß das System nur noch lokal als Produktraum beschrieben werden kann, daß aber *global* eine *Verdrehung* vorliegt. Als einfaches Beispiel einer solchen globalen Verdrehung sei hier das Möbiusband angeführt: die Mannigfalltigkeit M ist hier S^1, eine Kreislinie, und darüber befindet sich als *Faser* das Intervall $[-1, 1]$. Ohne Verdrehung erhalten wir den Zylinder als Produktraum $S^1 \times [-1, 1]$, mit einer Verdrehung jedoch das Möbiusband, das nur noch lokal als Produktraum darstellbar ist. Die geeignete mathematische Struktur zur Beschreibung solcher topologischer Räume ist das *Faserbündel*. Grundlegende Untersuchungen zur Theorie der Faserbündel wurden von Charles Ehresmann und Norman Steenrod durchgeführt. Steenrod schrieb auch eines der ersten Lehrbücher zu diesem Thema (Steenrod (1951)). Wir folgen in dieser kurzen Einführung häufig Nakahara (2003), S. 348 ff., allerdings mit gelegentlich abweichenden Bezeichnungen und Beweisen (und immer wieder gilt: „Notation is a nightmare” (Evans, 1998)).

Definition 23.2.1 *Ein differenzierbares Faserbündel wird bezeichnet als* (E, M, π, F, G), *bzw. abgekürzt als* $E \xrightarrow{\pi} M$ *und besteht aus folgenden Strukturen:*

1. *der differenzierbaren Mannigfaltigkeit* E *als dem Totalraum,*
2. *der differenzierbaren Mannigfaltigkeit* M *als der Basis,*
3. *der differenzierbaren Mannigfaltigkeit* F *als der Faser,*
4. *der Projektion* π, *einer surjektiven Abbildung* $\pi : E \to M$, *welche die lokale Produkttopologie definiert:*
   $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = E_p \cong F$, *d.h. das Urbild von* p, *die sog. Faser über* p, *sei also homöomorph zu* F. *Lokal ist also* $E_p \cong p \times F$, *und dies soll auch für eine offene Umgebung* U *von* $p \in M$ *gelten, d.h.* $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$,
5. *einer offenen Überdeckung vom* M *mit sog. Karten* U_i, $M = \bigcup_i U_i$, *mit Diffeomorphismen* $\phi_i : E_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$, *die lokale Trivialisierungen genannt werden,*
6. *einer Menge von Diffeomorphismen, genannt Kartenwechsel,*
   $t_{ij} := \phi_i\phi_j^{-1} : U_j \times F \to U_i \times F$, *welche den Übergang zwischen zwei überlappenden Trivialisierungen* $U_i \times F$ *und* $U_j \times F$ *beschreiben. Dabei sollen die Kartenwechsel*

Elemente einer topologischen Gruppe G sein, genannt Strukturgruppe, die von links auf die Faser wirkt, d.h. $\phi_j^{-1}(p, f_j) = \phi_i^{-1}(p, t_{ij} f_j)$.
Mit $t_{ij} \in G$ folgt: $t_{ii}(p) = e$ (Identität), $t_{ij}(p) = t_{ji}^{-1}(p)$ und $t_{ij}(p)t_{jk}(p) = t_{ik}(p)$.

Die Definition eines Faserbündels wird mit der folgenden Zeichnung klarer:

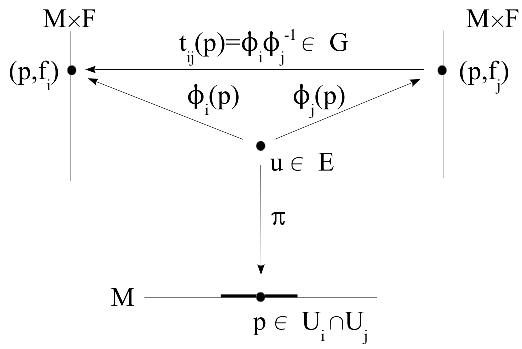

Abbildung 23.2: Faserbündel (E, M, π, F, G), bzw. $E \xrightarrow{\pi} M$

Die Kartenwechsel $t_{ij}(p)$, welche die Karten U_i und U_j miteinander verknüpfen, heißen in der Physik *Eichtransformationen.* Sie sind jedoch nicht eindeutig bestimmt, denn seien etwa t_{ij} und $\tilde{t}_{ij}$ zwei verschiedene Kartenwechsel, dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{ij}(p) &= \tilde{\phi}_i(p, f_i)\tilde{\phi}_j^{-1}(p, f_j) \\ &= \tilde{\phi}_i(p, f_i)\phi_i^{-1}(p, f_i)\phi_i(p, f_i)\phi_j^{-1}(p, f_j)\phi_j(p, f_j)\tilde{\phi}_j^{-1}(p, f_j)\ ,\end{aligned}$$

und mit $g_i(p) := \phi_i(p, f_i)\tilde{\phi}_i^{-1}(p, f_i) \in G$ über U_i folgt

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i^{-1}(p)t_{ij}(p)g_j(p)\ . \tag{23.2.1}$$

Diese $g_i(p)$ heißen in der Physik die *Eichungs-Freiheitsgrade* in der Karte U_i.

Eine wichtige Struktur eines Faserbündels ist ein sog. *Schnitt*, eine Abbildung der Basis in den Totalraum. Ein *lokaler Schnitt* ist eine Abbildung $\sigma : U_i \subset M \to E$, so daß $\pi \circ \sigma = Id_{U_i}$, ein *globaler Schnitt* eine Abbildung $\sigma : M \to E$ mit $\pi \circ \sigma = Id_M$. Die Frage, unter welchen Bedingungen es globale Schnitte in einem Faserbündel gibt und wann ein Faserbündel isomorph zu einem trivialen Bündel ist, läßt sich im allgemeinen nicht trivial beantwoorten und wird u.a. in der Theorie der *Charakteristischen Klassen* der algebraischen Topologie behandelt (siehe Kapitel 25).

Ein sehr häufig auftauchendes Faserbündel ist das *Vektorbündel* $(E, M, \pi, V, GL(k, R))$, mit $R = \mathbb{R}$ oder $R = \mathbb{C}$, bei welchem die Faser F ein k-dimensionaler Vektorraum über der m-dimensionalen Basis M ist. Das Standardbeispiel für ein Vektorbündel ist das Tangentialbündel $(TM, M, \pi, \mathbb{R}^m, GL(m, \mathbb{R}))$. Wenn für $p \in U_i \cap U_j$ zwei verschiedene Trivialisierungen $\phi_i(u) = (p, V_i)$ und $\phi_j(u) = (p, V_j)$ gegeben seien, dann ist der Kartenwechsel $t_{ij}(p)$ eine lineare Abbildung, d.h. $V_i = t_{ij}(p)V_j$ mit $t_{ij}(p) \in GL(m, \mathbb{R})$. Ein

Vektorfeld ist in der Sprache der Faserbündel also einfach ein Schnitt im Vektorbündel TM. Jedes Vektorbündel hat zumindest einen globalen Schnitt, den Nullschnitt, denn der Vektor 0 bleibt unter jedem Kartenwechsel invariant. Entsprechendes gilt für das Kotangentialbündel und beliebige Tensorbündel.

Im Zusammenhang mit den erwähnten *Charakteristischen Klassen*, insb. den *Chern-Klassen* (siehe Kapitel 25.5), spielen die komplexen Linienbündel eine Rolle. Bei einem Linienbündel $(L, M, \pi, \mathbb{C}, \mathbb{C})$, bzw. abgekürzt als $L \xrightarrow{\pi} M$, ist die Faser einfach eine komplexe Linie $F = \mathbb{C}$ und auch dieStrukturgruppe ist $G = GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Lemma 23.2.2 *Wenn es in einem komplexen Linienbündel* $(L, M, \pi, \mathbb{C}, \mathbb{C})$ *einen nichtverschwindenden, globalen Schnitt* $\sigma : M \to L$ *gibt, dann ist das Linienbündel isomorph zu einem trivialen Bündel.*

Beweis. Sei $L_p = \mathbb{C}$ die Faser an der Stelle $p \in M$ und $\sigma : M \to L$ ein globaler Schnitt mit $\sigma(p) \neq 0$. Dann ist $\sigma(p)$ eine Basis für L_{p}. Damit ist die folgende Abbildung f ein Isomorphismus:

$$f : M \times \mathbb{C} \to L \quad \text{mit} \quad f : (p, \lambda) \mapsto \lambda \cdot \sigma(p)\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

Man sieht sofort, daß dies nur funktioniert, falls für alle $p \in M$ tatsächlich $\sigma(p) \neq 0$ ist.

Korollar 23.2.3 *Eine Anwendung findet dieses Lemma, wenn man das Produktbündel aus L mit seinem dualen Bündel* L^* *betrachtet. Sei also* $E \xrightarrow{\pi} M$ *mit* $E := L \otimes L^* \simeq \mathbb{C}$. *Der Schnitt* $\sigma(p) = (z, z^*)$ *mit* $z \in \mathbb{C}$ *und* $|z|^2 = 1$ *ist ein globaler, nichtverschwindender Schnitt und also ist* $L \otimes L^*$ *isomorph zu einem trivialen Bündel.*

Grundlegend für die modernen physikalischen Eichfeldtheorien und speziell die Yang-Mills-Theorien ist die Struktur des *Prinzipalbündels* (P, M, π, G, G), bzw. kurz $P \xrightarrow{\pi} M$, gelegentlich auch *Hauptfaserbündel* genannt. Hierbei besteht die Faser aus der Strukturgruppe G mit einer zusätzlichen Rechtsmultiplikation innerhalb der Faser $\pi^{-1}(p)$. Seien $p \in U_i \subset M\ ,\ u \in P\ ,\ g_i, a \in G$, dann gilt

$$\phi_i(u) = (p, g_i) \quad \Rightarrow \quad \phi_i(ua) := (p, g_i a)\ . \tag{23.2.2}$$

Da $ua \in \pi^{-1}(p)$ gilt also $\pi(ua) = \pi(u) = p$. Diese Definition ist unabhängig von der Trivialisierung, denn

$$ua = \phi_i^{-1}(p, g_i a) = \phi_i^{-1}(p, t_{ij}(p) g_j a) = \phi_j^{-1}(p, g_j a)\ .$$

Weil bei einem Prinzipalbündel die Faser und die Strukturgruppe übereinstimmen, gibt es hier nun eine ausgezeichnete lokale Trivialisierung, die sog. *kanonische lokale Trivialisierung*. Sei σ_i ein lokaler Schnitt in P über U_i, $p \in U_i \subset M$ und $u \in \pi^{-1}(p)$, dann gibt es ein eindeutiges $g_i(u) \in G$ mit $u = \sigma_i(p)g_i(u)$. Jetzt definiert man die *kanonische lokale Trivialisierung* ϕ_i als

$$\phi_i(u) := (p, g_i(u)) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_i(\sigma_i(p)) = (p, e) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_i(p) = \phi_i^{-1}(p, e)\ . \tag{23.2.3}$$

Daraus folgt dann auch, daß bei einem Prinzipalbündel zwei lokale Schnitte $\sigma_i(p)$ über U_i und $\sigma_j(p)$ über U_j in $p \in U_i \cap U_j$ mittels eines Kartenwechsels $t_{ij}(p)$ miteinander zusammenhängen:

$$\begin{aligned}\sigma_i(p) &= \phi_i^{-1}(p, e) = \phi_j^{-1}(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j^{-1}(p, e\, t_{ji}(p)) \\ &= \phi_j^{-1}(p, e)t_{ji}(p) = \sigma_j(p)t_{ji}(p)\ .\end{aligned} \tag{23.2.4}$$

Satz 23.2.4 *Ein Prinzipalbündel* (P, M, π, G, G) *ist genau dann trivial, d.h. global als Produktraum* $P \cong M \times G$ *darstellbar, wenn es einen globalen Schnitt gibt.*

Beweis. Seien $P \cong M \times G$ und $\phi : P \to M \times G$ eine globale Trivialisierung und $g \in G$, dann ist $\sigma(p) := \phi^{-1}(p, g)$ ein globaler Schnitt.

Sei umgekehrt $\sigma(p)$ ein globaler Schnitt in P. Jedes Element $u \in \pi^{-1}(p) \subset P$ läßt sich eindeutig darstellen als $u = \sigma(p)g_u$ mit einem $g_u \in G$. Dann ist die Abbildung $\phi : u \mapsto (p, g_u)$ ein Homöomorphismus und damit $P \cong M \times G$. □

Aus Sicht der Physik möchte man Felder in Form von Vektoren, Tensoren oder Spinoren mit einer inneren topologischen Symmetriegruppe G über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M beschreiben. Daher benötigt man als Struktur eine Verbindung eines Prinzipalbündels mit Vektoren, etc. Diese Struktur liefern sog. *assoziierte Faserbündel*, die zu Beginn der 1940'er Jahre von dem französischen Mathematiker Charles Ehresmann eingeführt wurden.

Definition 23.2.5 *Sei* P *ein Prinzipalbündel* (P, M, π, G, G), *und* F *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf welche* G *von links wirkt, dann wird im Produktraum* $P \times F$ *eine Wirkung von* G *definiert als*

$$(u, f) \mapsto (ug, g^{-1}f) \quad \text{für} \quad u \in P,\ f \in F,\ (u, f) \in P \times F,\ g \in G\ . \tag{23.2.5}$$

Das assoziierte Faserbündel (E, M, π, G, G, F) *ist dann die Menge der Äquivalenzklassen* $(P \times F)/\sim$, *in welcher die Punkte* $(u, f) \sim (ug, g^{-1}f)$ *äquivalent sind (d.h.* G *wird als eine innere Symmetrie von* $P \times F$ *betrachtet). In der Sprache der Physik ist das assoziierte Faserbündel* E *also gleich* $P \times F \mod$ *Eichtransformationen.*

In der Physik wird häufig die Spezialisierung eines *assoziierten Faserbündels* auf das *assoziierte Vektorbündel* $E := (P \times_\rho V)/\sim$ benutzt, in welchem F ein k-dimensionaler Vektorraum V ist und G auf V mittels einer k-dimensionalen Darstellung $\rho(g)$ wirkt mit der Äquivalenzrelation $(u, v) \mapsto (ug, \rho(g^{-1})v)$. Die Projektion $\pi_E : E \to M$ wird dann als $\pi_E(u,v) := \pi(u) = p$ definiert und ist invariant unter der Wirkung von G, denn $\pi_E(ug, \rho(g^{-1})v) = \pi(ug) = p = \pi(u) = \pi_E(u,v)$. Die Kartenwechsel in E sind durch $\rho(t_{ij}(p))$ gegeben, wobei die $t_{ij}(p)$ die Kartenwechsel des Prinzipalbündels P sind.

Man kann auch den umgekehrten Weg gehen und mit dem Vektorbündel (E, M, π, V, G) starten. Mit dessen Kartenwechsel $t_{ij}(p) \in G$ definiert man ein *assoziiertes Prinzipalbündel* $P(E) := (P, M, \pi, G, G)$ und daraus dann den Produktraum $E' := (P \times_\rho V)/\sim$.

Ein spezielles mit einem Vektorbündel $(E, M, \pi, V, GL(k,R))$ assoziiertes Prinzipalbündel, das letztlich auf das von Élie Cartan im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen von Spinoren eingeführte Rahmenfeld (moving frame, repère mobile) zurückgeht, ist das sog. *Rahmenbündel* $LM := (E, M, \pi, GL(k,R), GL(k,R))$. Hierbei errichtet man zunächst über $p \in M$ eine Faser, die aus allen (lokalen) Basen von V besteht, und die Menge all dieser Basen ist ja homöomorph zu $GL(k)$. Also ist LM das zum Vektorbündel E assoziierte Prinzipalbündel. Da nun $GL(k,\mathbb{R})$ und $GL(k,\mathbb{C})$ keine Spinordarstellungen erlauben, nutzen Physiker lieber eine Faser, die aus orthonormierten Basen besteht, denn dann ist die Strukturgruppe im Fall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $SO(k)$, bzw. im Fall einer Lorentzschen Mannigfaltigkeit über der 4-dimensionalen Raumzeit $SO(1,3)$, und es können problemlos assoziierte Spinorbündel definiert werden.

Da nun ein Prinzipalbündel und ein assoziiertes Vektorbündel über die gleichen Kartenwechsel $t_{ij}(p) \in G$ verfügen und alle globalen topolischen Informationen in diesen Kartenwechsln enthalten sind, kann man das folgende Korrolar zu obigem Satz formulieren:

Korollar 23.2.6 *Ein Vektorbündel E ist genau dann trivial, d.h. global als Produktraum $E \cong M \times V$ darstellbar, wenn es in seinem assoziierten Prinzipalbündel einen globalen Schnitt gibt.*

23.3 Faserbündel-Abbildungen

Sei (E, M, π, F, G), bzw. kurz $E \xrightarrow{\pi} M$, ein Faserbündel mit der Faser F über der Basis-Mannigfaltigkeit M. Sei weiter $f : N \to M$ eine Abbildung von einer Basis-Mannigfaltigkeit N in die Basis-Mannigfaltigkeit M, dann kann man über N auf die folgende Weise ein *Rücktransport-Bündel* konstruieren:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

f^*E wird als Teilraum von $N \times E$ mit der Faser F definiert:

$$f^*E := \{(p,u) \in N \times E \,|\, f(p) = \pi(u)\} \,, \tag{23.3.1}$$

wobei für $p \in N$ die Faser F_p von f^*E eine Kopie der Faser $F_{f(p)}$ von E sein soll. Aus dieser Konstruktion folgt für die Kartenwechsel:

$$t^*_{ij}(p) = t_{ij}(f(p) \ . \tag{23.3.2}$$

Des weiteren werden häufiger auch Produkt- und Summen-Faserbündel benötigt. Das *Produkt-Faserbündel* wird folgendermaßen definiert:
seien (E, M, π, F, G) und (E', M', π', F', G') zwei Faserbündel, dann ist das Produkt-Faserbündel

$$(E \times E', M \times M', \pi \times \pi', F \oplus F', G \oplus G') \ . \tag{23.3.3}$$

Man beachte, daß die Faser von $E \times E'$ als $F \oplus F'$ über $M \times M'$ erklärt wird.

Das üblichste Summen-Faserbündel ist das *Whitney-Summen-Bündel*:
seien (E, M, π, F, G) und (E', M, π', F', G') zwei Faserbündel über der gleichen Basis-Mannigfaltigkeit M, dann ist das Whitney-Summen-Bündel $E \oplus E'$ das Rücktransport-Bündel von $E \times E'$ bezüglich der Abbildung $f : M \to M \times M$:

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' & \xrightarrow{\pi_2} & E \times E' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi \times \pi'} \\ M & \xrightarrow{f} & M \times M \end{array}$$

Konkret heißt das mit:

$$E \oplus E' := \{(u, u') \in E \times E' \,|\, \pi \times \pi'(u, u') = (p, p)\} \ , \tag{23.3.4}$$

mit der Fiber $F \oplus F' = \pi^{-1}(p) \oplus (\pi')^{-1}(p) \simeq (\pi \times \pi')^{-1}(p, p)$.

Aus dieser Konstruktion folgt für die Kartenwechsel:

$$t^{E \oplus E'}_{ij}(p) = \begin{pmatrix} t^E_{ij}(p) & 0 \\ 0 & t^{E'}_{ij}(p) \end{pmatrix} \ . \tag{23.3.5}$$

23.4 Zusammenhang und Krümmung von Prinzipalbündeln

Wir hatten bei der Diskussion der Riemannschen Geometrie gesehen, daß die Tangentialräume T_pM (d.h. die Fasern) über verschiedenen Punkten p der Mannigfaltigkeit M zunächst nicht miteinander verknüpft sind. Erst durch die Definition eines Zusammenhangs können Vektoren der Fasern T_pM und $T_{p+\epsilon}M$ miteinander verglichen und eine kovariante Ableitung definiert werden. Dabei hatten wir den sog. *affinen Zusammenhang* (oder *Koszul-Zusammenhang*) als eine bilineare Abbildung mit Leibniz-Regel auf Vektorfeldern über der Mannigfaltigkeit M eingeführt.

Diese Gedanken hat nun Ehresmann für allgemeinere Faserbündeln erweitert. Wir wollen hier eine kurze Einführung in den *Ehresmann-Zusammenhang* und die Definition einer Krümmung im Fall von Prinzipalbündeln geben. Eine ausführliche Diskussion über die verschiedenen Zusammenhang-Definitionen und ihre Äquivalenz im Fall von Tangentialbündeln findet sich in Spivak (1979), II. Wir folgen Choquet-Bruhat u. a. (1978), S. 287 ff., Nakahara (2003), S. 374 ff. und Bleecker (1981), S. 29 ff..

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist die Klärung des Begriffs *Paralleltransport* in einem Prinzipalbündel, analog zum Paralleltransport in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Vor den Details soll zunächst eine Übersicht über den Gedankengang dargestellt werden.

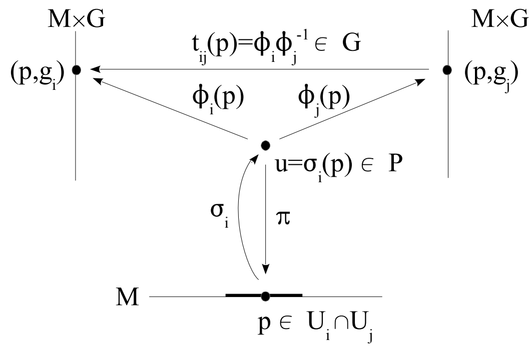

Abbildung 23.3: Prinzipalbündel (P, M, π, G, G), bzw. $P \overset{\pi}{\to} M$

Übersicht:

Seien $P \overset{\pi}{\to} M$, bzw. (P, M, π, G, G), ein Prinzipalbündel über der Basis M und die Strukturgruppe G eine Liegruppe. Nun betrachtet man an der Stelle $u \in P$ mit $\pi(u) = p \in M$ den Tangentialraum T_uP des Totalraums P (nicht zu verwechseln mit T_pM, dem Tangentialraum der Basis M). Ein spezieller Teilraum von T_uP, genannt *vertikaler Teilraum* V_uP, besteht aus jenen Tangentialvektoren in u, die tangential zur Faser $\pi^{-1}(p)$ durch u sind. Der durch $T_uP = V_uP \oplus H_uP$ definierte, zu V_uP komplementäre Raum H_uP heißt *horizontaler Teilraum*. Um einen Zusammenhang zwischen den einzelnen Fasern herzustellen, verlangt man daß die Räume H_uP differenzierbar von $u \in P$ abhängen sollen. Um die Kompatibilität mit der Gruppenstruktur innerhalb einer Faser $\pi^{-1}(p)$ herzustellen definiert man den Zusammenhang im vertikalen Teilraum V_uP wie folgt:
sei $g \in G$ und die Rechtsmultiplikation in einer Faser $R_g : \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p)$ mit $R_gu = ug$, dann sollen die horizontalen Teilräume H_uP und $H_{ug}P$ über die induzierte lineare Abbildung R_{g*} mit $H_{ug} = R_{g*}H_u$ zusammenhängen.

Im nächsten Schritt betrachtet man eine beliebige Kurve $\gamma(t) \in M$, $t \in [0, 1]$ zwischen zwei Punkten $p, p' \in M$ und liftet diese Kurve in P, so daß $\tilde{\gamma}(0) = u$, $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$

und alle Tangentialvektoren $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(t)}$ an $\tilde{\gamma}(t)$ in den horizontalen Teilräumen $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ liegen. Dann liegt der Punkt $u' = \tilde{\gamma}(1)$ über p' und wir haben einen Paralleltransport des Tangentialvektors $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(0)}$ in den Tangentialvektor $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(1)}$ konstruiert.

Details:

Wir folgen hier (mit abweichenden Bezeichnungen) Choquet-Bruhat u. a. (1978), S.287, und stellen zum besseren Verständnis drei verschiedene äquivalente Definitionen eines Zusammenhangs in einem Prinzipalbündel $P \xrightarrow{\pi} M$ vor.

Definition 23.4.1 (Z1) *Sei P ein Prinzipalbündel $P \xrightarrow{\pi} M$ mit $u \in P$, $\pi(u) = p \in M$, in der Karte $U_i \subset M$, dann heißt die Abbildung $\sigma_{i*} : T_pM \to T_uP$ ein Zusammenhang, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *σ_{i*} ist linear,*
2. *$\pi_*(\sigma_{i*}) = Id$ auf T_pM,*
3. *$(\sigma_i g)_* = R_{g*}\sigma_{i*}$ für alle $g \in G$,*
4. *σ_{i*} hängt differenzierbar von $u \in P$ ab.*

Sei $\gamma(t) \in M$, $t \in [0,1]$ eine beliebige Kurve zwischen zwei Punkten $p, p' \in M$. Jetzt können wir $\gamma(t)$ folgendermaßen in die Kurve $\tilde{\gamma}(t)$ in P liften:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) = \sigma_{i*}(\frac{d}{dt}\gamma(t)) \quad \text{mit } \tilde{\gamma}(0) = u \ .$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\tilde{\gamma}(t)$, für die lokal um u herum eine eindeutige Lösung existiert. Durch $\tilde{\gamma}_*(t) := \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t)$ wird der Paralleltransport eines Vektors $\tilde{\gamma}_*(0) = \sigma_{i*}(\gamma_*(0))$ definiert. Der lineare Raum H_uP mit $\pi(u) = p$

$$H_uP := \sigma_{i*}(T_pM)$$

heißt *horizontaler Teilraum* von T_uP .

Dies bringt uns sofort zur zweiten Definition eines Zusammenhangs in einem Prinzipalbündel, der Definition von Ehresmann.

Definition 23.4.2 (Z2) *Sei P ein Prinzipalbündel $P \xrightarrow{\pi} M$ mit $\pi(u) = p \in M$. Dann heißt die eindeutige Zerlegung des Tangentialraums T_uP in einen horizontalen Teilraum H_uP und einen vertikalen Teilraum V_uP der Ehresmann-Zusammenhang, wenn gilt:*

1. *$V_uP := \{\tilde{X}^V \in T_uP \,|\, \pi_*(\tilde{X}^V) = 0\}$,*
2. *$T_uP = H_uP \oplus V_uP$,*
3. *jedes glatte Vektorfeld $\tilde{X}$ auf P ist in jedem Punkt $u \in P$ darstellbar als $\tilde{X} = \tilde{X}^H + \tilde{X}^V$ mit $\tilde{X}^H \in H_uP$ und $\tilde{X}^V \in V_uP$,*
4. *$H_{ug}P = R_{g*}H_uP$,*
5. *H_uP hängt differenzierbar von $u \in P$ ab.*

Sei $\mathfrak{g}$ die Liealgebra der Liegruppe G und $A \in \mathfrak{g}$. Wir setzen jetzt voraus, daß eine parametrisierte Kurve $g(t) \in G$ mit $t \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann als

$$g(t) = e^{tA} \in G \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = A \in \mathfrak{g} \;, \tag{23.4.1}$$

was insbesondere für Matrix-Liegruppen gilt. Dann führt die Rechtsmultiplikation $R_g : P_p \to P_p$ mit $u \mapsto ug$ und $g(t) = e^{tA} \in G$ zu einer durch $t \in \mathbb{R}$ parametrisierten Kurve innerhalb der Faser $\pi^{-1}(p) = P_p \cong G$, denn $\pi(u) = \pi(ug) = p$. Der Tangentialvektor an die Kurve $ug(t)$ im Punkt $u \in P$ ist

$$A^{\#}(u) := \frac{d}{dt}(ue^{tA})|_{t=0} = uA \;. \tag{23.4.2}$$

$A^{\#}$ ist tangential zu $P_p = \pi^{-1}(p)$ an jeder Stelle $u \in P$. Daher kann $A^{\#}$ als ein Vektorfeld in der Faser P_p betrachtet werden und wird gelegentlich als das *fundamentale Vektorfeld* bezeichnet. Dieses Vektorfeld $A^{\#}$ definiert den *vertikalen Teilraum* V_uP von T_uP und das entsprechende Komplement dazu heißt der *horizontale Teilraum* H_uP, also

$$T_uP = V_uP \oplus H_uP \;. \tag{23.4.3}$$

Zunächst einmal ist klar, daß die Abbildung $\# : \mathfrak{g} \to V_uP$ mit $A \mapsto A^{\#}$ ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $\mathfrak{g}$ und V_uP ist. Darüber hinaus erhält die Abbildung $\#$ aber auch die Lie-Algebra Struktur, d.h.

$$[A^{\#}, B^{\#}] = [A, B]^{\#} \;, \tag{23.4.4}$$

denn

$$\begin{aligned} A^{\#}B^{\#}(u) &= A^{\#}(\frac{d}{dt_2}(ue^{t_2 B})|_{t=0}) = A^{\#}(u)B \\ &= \frac{d}{dt_1}(ue^{t_1 A})|_{t_1=0}B = uAB \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$[A^{\#}, B^{\#}](u) = u[A, B] = \frac{d}{dt}(ue^{t[A,B]})|_{t=0} = [A, B]^{\#}(u) \;.$$

Nun ist man ja an der Möglichkeit eines Paralleltransports von Vektoren aus T_uP interessiert. Mit der Rechtsmultiplikation $R_g u = ug$ innerhalb einer Faser ist bereits der Paralleltransport eines Vektors $\tilde{X}^V$ aus dem vertikalen Teilraum V_uP als $R_{g*}\tilde{X}^V$ festgelegt. Andererseits gibt es jedoch bislang noch keinen Paralleltransport für Vektoren $\tilde{X}^H$ des horizontalen Teilraums H_uP, weder in vertikaler noch in horizontaler Richtung. Dies leistet nun die folgende $\mathfrak{g}$-wertige Zusammenhang 1-Form ω, eine Projektion von T_uP nach $\mathfrak{g} \cong V_uP$.

Definition 23.4.3 (Z3) *1.* $\omega : T_uP \to \mathfrak{g} \cong V_uP$, *2.* $\omega_u(A^{\#}) = A$ *für* $A \in \mathfrak{g} \cong V_uP$,

3. $R_g^*\omega_{ug} = g^{-1}\omega_u g$ *für* $g \in G$, *d.h.*
$R_g^*\omega_{ug}(\tilde{X}) = \omega_{ug}(R_{g*}\tilde{X}) = g^{-1}\omega_u(\tilde{X})g$ *mit* $\tilde{X} \in T_uP$,

4. ω_u *hängt differenzierbar von* $u \in P$ *ab.*

Statt ω_u schreiben wir häufig auch einfach ω, wenn es eindeutig ist, daß ω am Punkt $u \in P$ gemeint ist.

Zunächst einmal ist die adjungierte Abbildung $Ad_{g^{-1}}\omega_u := g^{-1}\omega_u g$ eine Abbildung nach $\mathfrak{g}$, d.h. $Ad : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, denn nach Definition ist die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = T_eG = \{a \in G \,|\, a = \frac{d}{dt}g(t)|_{t=0},\, g(t) = \exp(ta) \in G\}$$

und mit $a \in \mathfrak{g}$ folgt sofort $g^{-1}ag \in \mathfrak{g}$. Weiter folgt aus der Definition von ω auch die Definition von H_uP:

$$\omega : T_uP \to \mathfrak{g} \cong V_uP \quad \Rightarrow \quad H_uP := \ker\omega = \{\tilde{X} \in T_uP \,|\, \omega(\tilde{X}) = 0\} \,. \qquad (23.4.5)$$

Zunächst soll gezeigt werden, daß die obige Definition Z3 einer $\mathfrak{g}$-wertigen Zusammenhang 1-Form ω tatsächlich auch zur Definition Z2 des Ehresmann-Zusammenhangs führt. Sei $g \in G$, dann gilt

$$u \in P\ ,\ \tilde{X}^H \in H_uP \subset T_uP \quad \Rightarrow \quad \omega_u(\tilde{X}^H) = 0\ ,$$

$$\omega_{ug}(R_{g*}\tilde{X}^H) = R_g^*\omega_{ug}(\tilde{X}^H) = g^{-1}\omega_u(\tilde{X}^H)g = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{g*}H_uP \subset H_{ug}P\ .$$

Umgekehrt ist R_{g*} invertierbar, denn $R_{g*}^{-1} = R_{g^{-1}*}$, und daraus folgt, daß jeder Vektor $\tilde{Y}^H \in H_{ug}P$ sich als $\tilde{Y}^H = R_{g*}\tilde{X}^H$ mit einem vorgegebenen $\tilde{X}^H \in H_uP$ ausdrücken läßt, also $H_{ug}P \subset R_{g*}H_uP$. Und damit folgt $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$.

In der Physik arbeitet man nun vorwiegend nicht mit dieser globalen Zusammenhangform ω, sondern mit lokalen Zusammenhangformen $\mathcal{A}_i$, die auf lokalen Karten $U_i \subset M$ definiert sind. Diese heißen in der Physik *Eichpotentiale* oder *Yang-Mills-Potentiale*.

Natürlich stellt sich die Frage, ob es überhaupt in jedem Prinzipalbündel eine globale Zusammenhangform ω gibt. Die Frage läßt sich bejahen, indem man aus lokalen Zusammenhangformen $\mathcal{A}_i$ explizit eine globale Zusammenhangform ω konstruiert. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Dabei bezeichne d_p das Differential auf P, im Gegensatz zu d, dem Differential auf M. Wenn $\tilde{\gamma}(t)$ eine Kurve in P mit $u = \tilde{\gamma}(0)$ und der Tangente $\tilde{X} = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t)|_{t=0}$ in u ist, dann gilt für $d_P g_i$, wie für jede Differentialform, $d_P g_i(\tilde{X}) = \tilde{X}(g_i) = \frac{d}{dt}g_i|_{t=0}$.

Definition 23.4.4 *Seien* U_i *eine Karte einer offenen Überdeckung von* M, $\sigma_i : U_i \to P$ *ein lokaler Schnitt und* $\omega \in \mathfrak{g} \times T^*P$ *eine globale Zusammenhangform, dann ist die lokale Zusammenhangform* $\mathcal{A}_i$ *auf* U_i *definiert als*

$$\mathcal{A}_i := \sigma_i^*\omega \in \mathfrak{g} \times \Omega^1(U_i)\ . \qquad (23.4.6)$$

Satz 23.4.5 *Seien $\mathcal{A}_i$ eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form auf U_i, $\sigma_i : U_i \to P$ ein lokaler Schnitt mit der Trivialisierung $\phi_i(u) = (p, g_i(u))$, dann gibt es eine globale $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form ω auf P mit $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$, die auf U_i die folgende Form hat:*

$$\omega_i = g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i \ . \tag{23.4.7}$$

Damit die einzelnen ω_i auf überlappenden Karten U_i und U_j tatsächlich eine eindeutige Zusammenhangform ω bilden, müssen die $\mathcal{A}_i$ zusammen mit den Kartenwechseln $t_{ij} \in G$ die folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllen:

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \ . \tag{23.4.8}$$

Beweis. Zunächst soll $\sigma_i^* \omega_i = \mathcal{A}_i$ gezeigt werden. Wir verwenden jetzt für $u = \sigma_i(p)$ die kanonischen Trivialisierung, so daß $g_i(u) = e$ gilt und damit

$$\omega_i = \pi^* \mathcal{A}_i + d_P g_i \ .$$

Sei $X \in T_p M$, dann wenden wir den Rücktransport (pullback) σ_i^* auf ω_i an, so daß $\sigma_i^* \omega_i$ jetzt eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form über U_i ist:

$$\begin{aligned} \sigma_i^* \omega_i(X) &= \omega_i(\sigma_{i*} X) = \pi^* \mathcal{A}_i(\sigma_{i*} X) + d_P e(\sigma_{i*} X) \\ &= \mathcal{A}_i(\pi_* \sigma_{i*} X) = \mathcal{A}_i(X) \ . \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, daß dieses ω_i aus 23.4.7 die Bedingungen der obigen Definition Z3 des Ehresmann-Zusammenhangs erfüllt. Sei $A^\# \in V_u P$ mit $A \in \mathfrak{g}$, dann ist $\pi_*(A^\#) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \omega_i(A^\#) &= g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i(A^\#) g_i + g_i^{-1} d_P g_i(A^\#) = g_i^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* A^\#) g_i + g_i^{-1} d_P g_i(A^\#) \\ &= g_i^{-1} d_P g_i(A^\#) = g_i^{-1}(u) A^\# g_i(u) = g_i^{-1}(u) \frac{d}{dt} g_i(u e^{tA})|_{t=0} \\ &= g_i^{-1}(u) \frac{d}{du'} g_i(u')|_{u'=u} \frac{d}{dt}(u e^{tA})|_{t=0} \ . \end{aligned}$$

In der kanonischen Trivialisierung gilt für ein festes $u \in P$

$$u = \sigma_i(p) = e \cdot \sigma_i(p) = g_i(u) \cdot \sigma_i(p) \ , \text{wegen} \quad g(u) = g^{-1}(u) = e \ .$$

Jeder Punkt $u' \in P$ läßt sich damit als $u' = g_i(u') \cdot u$ schreiben und daraus folgt:

$$\frac{d}{du'} g_i(u')|_{u'=u} = 1 \ ,$$

und daraus folgt für $\omega_i(A^\#)$:

$$\omega_i(A^\#) = A \ .$$

Also ist die Bedingung 2 der Definition Z3 erfüllt.

Nun zur Bedingung 3 der Definition Z3. Sei $X \in T_u P$ und $h \in G$. Wir betrachten den Rücktransport (pullback) R_h^* auf $\omega_{i,uh}$, d.h. auf ω_i an der Stelle uh. Dabei sei $\tilde{\gamma}(t)$ eine Kurve in P mit $u = \tilde{\gamma}(0)$ und der Tangente $\tilde{X} = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t)|_{t=0}$.

$$\begin{aligned}
R_h^*\omega_{i,uh}(\tilde{X}) &= \omega_{i,uh}(R_{h*}\tilde{X}) = g_{i,uh}^{-1}\pi^*\mathcal{A}_i(R_{h*}\tilde{X})g_{i,uh} + g_{i,uh}^{-1}d_P g_{i,uh}(R_{h*}\tilde{X}) \\
&= h^{-1}g_{i,u}^{-1}\mathcal{A}_i(\pi_* R_{h*}\tilde{X})g_{i,u}h + g_{i,uh}^{-1}d_P g_{i,uh}(R_{h*}\tilde{X}) \\
&= h^{-1}g_{i,u}^{-1}\mathcal{A}_i(\pi_*\tilde{X})g_{i,u}h + h^{-1}g_{i,u}^{-1}\frac{d}{dt}g_{i,\tilde{\gamma}(t)h}|_{t=0} \\
&= h^{-1}g_{i,u}^{-1}\pi^*\mathcal{A}_i(\tilde{X})g_{i,u}h + h^{-1}g_{i,u}^{-1}\frac{d}{dt}g_{i,\tilde{\gamma}(t)}|_{t=0}\, h \\
&= h^{-1}g_{i,u}^{-1}\pi^*\mathcal{A}_i(\tilde{X})g_{i,u}h + h^{-1}g_{i,u}^{-1}d_P g_{i,u}(\tilde{X})\, h \\
&= h^{-1}\omega_{i,u}(\tilde{X})h \; .
\end{aligned}$$

Damit ist die Bedingung 3 der Definition Z3 erfüllt.

Es bleibt nun nur noch zu zeigen, daß die lokalen Zusammenhänge ω_i und ω_j im überlappenden Gebiet $U_i \cap U_j$ konsistent zu einem globalen Zusammenhang ω verbunden werden können. Seien $\gamma(t)$ eine Kurve in M mit $\gamma(0) = p$ und $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} = X$ und $u = \sigma_j(p) = \sigma_i(p)t_{ij}(p)$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_{j*}X &= \frac{d}{dt}\sigma_j(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\sigma_i(\gamma(t))\, t_{ij}(\gamma(t)))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\sigma_i(\gamma(t))|_{t=0}\, t_{ij}(\gamma(0)) + \sigma_i(\gamma(0))\,\frac{d}{dt}t_{ij}(\gamma(t))|_{t=0} \\
&= R_{t_{ij}(p)*}\frac{d}{dt}\sigma_i(\gamma(t))|_{t=0} + u\, t_{ij}^{-1}(p)\,\frac{d}{dt}t_{ij}(\gamma(t))|_{t=0} \\
&= R_{t_{ij}(p)*}(\sigma_{i*}X) + u\,\frac{d}{dt}(t_{ij}^{-1}(p)\, t_{ij}(\gamma(t)))|_{t=0} \; .
\end{aligned}$$

Nun ist $t_{ij}^{-1}(p)t_{ij}(\gamma(t))|_{t=0} = e$ an der Stelle $\gamma(0) = p$ und daraus folgt mit 23.4.1

$$\frac{d}{dt}(t_{ij}^{-1}(p)\, t_{ij}(\gamma(t)))|_{t=0} \in T_e G = \mathfrak{g} \quad \Rightarrow$$

$$u\,\frac{d}{dt}(t_{ij}^{-1}(p)\, t_{ij}(\gamma(t)))|_{t=0} = (\frac{d}{dt}(t_{ij}^{-1}(p)\, t_{ij}(\gamma(t)))|_{t=0})^{\#} = (t_{ij}^{-1}(p)\, dt_{ij}(X))^{\#} \; .$$

Damit erhalten wir schließlich für $\sigma_{j*}X$

$$\sigma_{j*}X = R_{t_{ij}(p)*}(\sigma_{i*}X) + (t_{ij}^{-1}(p)\, dt_{ij}(X))^{\#} \; .$$

Jetzt wenden wir ω auf diese Gleichung an und erhalten

$$\begin{aligned}
\omega(\sigma_{j*}X) &= \omega(R_{t_{ij}(p)*}(\sigma_{i*}X)) + \omega((t_{ij}^{-1}(p)\,dt_{ij}(X))^{\#}) \quad \Rightarrow \\
\sigma_j^*\omega(X) &= R^*_{t_{ij}(p)}\omega(\sigma_{i*}X) + t_{ij}^{-1}(p)\,dt_{ij}(X) \\
&= t_{ij}^{-1}(p)\omega(\sigma_{i*}X)t_{ij}(p) + t_{ij}^{-1}(p)\,dt_{ij}(X) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_j(X) = t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i(X)t_{ij} + t_{ij}^{-1}\,dt_{ij}(X) \quad \text{bzw.}$$

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\,dt_{ij}\ . \qquad \square$$

Möglicherweise gibt es auf dem Prinzipalbündel P mehrere globale Zusammenhänge ω. Jeder globale Zusammenhang ω enthält aber im Gegensatz zu einem einzelnen lokalen Zusammenhang $\mathcal{A}_i$ auf U_i die globalen topologischen Informationen von P.

Mit dem globalen Zusammenhang ω läßt sich jetzt der Paralleltransport definieren. Dazu betrachtet man einen sog. *horizontalen Lift* einer beliebige Kurve $\gamma(t) \in M$, $t \in [0,1]$ zwischen zwei Punkten $p_0, p_1 \in M$ und sucht eine geliftete Kurve $\tilde{\gamma}(t)$ in P, so daß $\tilde{\gamma}(0) = u_0$, $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ und daß alle Tangentialvektoren $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(t)}$ an $\tilde{\gamma}(t)$ in den horizontalen Teilräumen $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ liegen. Der nächste Satz zeigt, daß dies eindeutig möglich ist.

Satz 23.4.6 *Sei $\gamma(t) \in M$, $t \in [0,1]$ eine beliebige Kurve zwischen zwei Punkten $p_0, p_1 \in M$ und $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Dann gibt es einen eindeutigen horizontalen Lift $\tilde{\gamma}(t) \in P$ mit $\tilde{\gamma}(0) = u_0$ und $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$, wobei $g_i(\gamma(t))$ die Lösung folgender Differentialgleichung ist:*

$$\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t)) = -\mathcal{A}_i(X)|_{\gamma(t)}g_i(\gamma(t))\ . \tag{23.4.9}$$

Beweis. Sei $\sigma_i : U_i \subset M \to P$ ein Schnitt. Wenn es einen horizontalen Lift $\tilde{\gamma}(t)$ gibt, dann kann dieser geschrieben werden als $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g_i(\gamma(0)) = g_i(p_0) = e$ wählen kann, wodurch $\tilde{\gamma}(0) = \sigma_i(\gamma(0)) = \sigma_i(p_0) = u_0$ wird. X sei der Tangentenvektor an $\gamma(t)$ an der Stelle t' mit $t_0 \leq t' \leq t_1$, d.h. $\gamma(t') = p$ und $\tilde{X} = \tilde{\gamma}_*X$ sei der Tangentenvektor an $\tilde{\gamma}(t)$ an der Stelle t', d.h. $\tilde{\gamma}(t') = u$. Wie im vorherigen Beweis folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= \tilde{\gamma}_*(t')X = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t)|_{t=t'} = \frac{d}{dt}(\sigma_i(\gamma(t))\,g_i(\gamma(t)))|_{t=t'} \\
&= \frac{d}{dt}\sigma_i(\gamma(t))|_{t=t'}\,g_i(\gamma(t')) + \sigma_i(\gamma(t'))\,\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t))|_{t=t'} \\
&= R_{g_i(\gamma(t'))*}\frac{d}{dt}\sigma_i(\gamma(t))|_{t=t'} + u\,g_i^{-1}(\gamma(t'))\,\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t))|_{t=t'}
\end{aligned}$$

$$= R_{g_i(\gamma(t'))*}(\sigma_{i*}X) + u\,\frac{d}{dt}(g_i^{-1}(\gamma(t'))\,g_i(\gamma(t)))|_{t=t'}\ .$$

Nun ist $g_i^{-1}(\gamma(t'))g_i(\gamma(t))|_{t=t'} = e$ und daraus folgt mit 23.4.1

$$\frac{d}{dt}(g_i^{-1}(\gamma(t'))\,g_i(\gamma(t)))|_{t=t'} \in T_eG = \mathfrak{g} \quad \Rightarrow$$

$$u\,\frac{d}{dt}(g_i^{-1}(\gamma(t'))\,g_i(\gamma(t)))|_{t=t'} = (\frac{d}{dt}(g_i^{-1}(\gamma(t'))\,g_i(\gamma(t)))|_{t=t'})^{\#} = (g_i^{-1}(\gamma(t'))\,dg_i(X)|_{t'})^{\#}\ .$$

Damit erhalten wir schließlich für $\tilde{X}$ an der Stelle t'

$$\tilde{X} = R_{g_i(\gamma(t'))*}(\sigma_{i*}X) + (g_i^{-1}(\gamma(t'))\,dg_i(X)|_{t'})^{\#}\ .$$

Nun soll ja $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(t')}$ im horizontalen Teilraum $H_{\tilde{\gamma}(t')}P$ liegen, d.h. $\omega(\tilde{X}) = 0$, und daraus folgt

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{X}) &= \omega(R_{g_i(\gamma(t'))*}(\sigma_{i*}X)) + \omega((g_i^{-1}(\gamma(t'))\,dg_i(X)|_{t'})^{\#}) \\ &= g_i^{-1}(\gamma(t'))\omega(\sigma_{i*}X)g_i(\gamma(t')) + g_i^{-1}(\gamma(t'))\,dg_i(X) = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$dg_i(X) = -\omega(\sigma_{i*}X)g_i(\gamma(t')) = -\sigma_i^*\omega(X)g_i(\gamma(t')) = -\mathcal{A}_i(X)|_{\gamma(t')}g_i(\gamma(t')) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t)) = -\mathcal{A}_i(X)|_{\gamma(t)}g_i(\gamma(t))\ .$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für $g_i(\gamma(t))$, die nach dem Satz von Picard-Lindelöf für die Anfangswerte $\gamma(0) = p_0$ und $g_i(\gamma(0)) = e$ in einer geeigneten Umgebung von p_0 eine eindeutige Lösung hat (siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238). In dieser Umgebung um p_0 hat dann auch der horizontale Lift $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$ eine eindeutige Lösung.

Wenn der Punkt p_1 im Existenzbereich dieser Lösung liegt, so ist mit $g_i(p_1) = g_i(\gamma(1))$ auch $\tilde{\gamma}(1) = \sigma_i(\gamma(1))g_i(\gamma(1))$ gegeben und damit der Paralleltransport von $\tilde{\gamma}(0)$ nach $\tilde{\gamma}(1)$ definiert. □

Mit diesem Ergebnis kann man jetzt eine kovariante Ableitung in H_uP definieren. Wir folgen Nakahara (2003), S. 385 ff., und definieren die *äußere kovariante Ableitung* für vektorwertige r-Formen.

Definition 23.4.7 *Sei $\phi \in \Omega^r(P) \times V$ eine r-Form auf dem Prinzipalbündel P mit Werten in einem k-dimensionalen Vektorraum V, d.h. $\phi : TP \wedge \ldots \wedge TP \to V$. Im allgemeinen Fall hat dann ϕ die Darstellung*

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^{k} \phi^\alpha \otimes e_\alpha \quad \textit{mit} \quad \phi^\alpha \in \Omega^r(P) \textit{ und } \{e_\alpha\} \textit{ einer Basis von } V\ . \tag{23.4.10}$$

Seien weiter $\tilde{X}_i = \tilde{X}_i^H + \tilde{X}_i^V$ *mit* $1 \leq i \leq r+1$ *Tangentialvektoren aus* T_uP *mit* $\tilde{X}_i^H \in H_uP$ *und* $\tilde{X}_i^V \in V_uP$*, dann wird die äußere kovariante Ableitung* $D\phi \in \Omega^{r+1} \times V$ *definiert als Differential* $d_P\phi$ *auf Vektoren in horizontaler Richtung* H_uP*:*

$$D\phi(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{r+1}) := d_P\phi(\tilde{X}_1^H,\ldots,\tilde{X}_{r+1}^H) \tag{23.4.11}$$

$$:= \sum_{\alpha=1}^{k} d_p\phi^\alpha(\tilde{X}_1^H,\ldots,\tilde{X}_{r+1}^H) \otimes e_\alpha \ .$$

Aus der Linearität von ϕ und von D folgt, daß $D\phi(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{r+1}) = 0$ ist, wenn ein $\tilde{X}_i^H = 0$ ist $(1 \leq i \leq r+1)$.

Definition 23.4.8 *Die Krümmungs* 2*-Form* Ω *wird als die äußere kovariante Ableitung der Zusammenhangs* 1*-Form* ω *definiert, bzw. am Ort* $u \in P$ *als* ω_u*, also als:*

$$\Omega := D\omega \ \in \Omega^2(P) \times \mathfrak{g} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_u := D\omega_u \ \in \Omega^2(P) \times V_uP \ . \tag{23.4.12}$$

Lemma 23.4.9 *Für die Krümmungs* 2*-Form* Ω *gilt für Verschiebungen in* V_uP *ebenso wie für die Zusammenhangs* 1*-Form* ω *der Ausdruck*

$$R_g^*\Omega_{ug} = g^{-1}\Omega_u g \quad \textit{mit } g \in G \ . \tag{23.4.13}$$

Beweis. Aus 6.3.4 folgt $d_P R_g^*\Omega = R_g^* d_P\Omega$ und aus der Definition des Zusammenhangs $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$ folgt für $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_uP$: $(R_{g*}\tilde{X}_u)^H = R_{g*}\tilde{X}_u^H$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} R_g^*\Omega_{ug}(\tilde{X},\tilde{Y}) &= \Omega_{ug}(R_{g*}\tilde{X}, R_{g*}\tilde{Y}) = d_p\omega_{ug}((R_{g*}\tilde{X})^H, (R_{g*}\tilde{Y})^H) \\ &= d_p\omega_{ug}((R_{g*}\tilde{X}^H), (R_{g*}\tilde{Y}^H)) = R_g^* d_p\omega_{ug}(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) \\ &= d_p R_g^*\omega_{ug}(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) = d_p(g^{-1}\omega_u g)(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) \\ &= g^{-1} d_p\omega_u(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) g = g^{-1}\Omega_u(\tilde{X},\tilde{Y}) g \ . \end{aligned}$$

□

Wenn $\zeta \in \Omega^p(M)$ eine p-Form auf M ist und $\eta \in \Omega^q(M)$ eine q-Form, dann gilt

$$\zeta \wedge \eta = (-1)^{pq}\eta \wedge \zeta \quad \text{bzw.} \quad \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq}\eta \wedge \zeta = 0 \ .$$

Dies gilt natürlich nicht mehr, wenn jetzt ζ und η keine einfachen Differentialformen sind, sondern wie hier im Fall der Prinzipalbündel $\mathfrak{g}$-wertige Differentialformen. Daher definiert man den Kommutator für $\mathfrak{g}$-wertige Differentialformen:

Definition 23.4.10 *Seien* $\zeta \in \Omega^p(P) \times \mathfrak{g}$ *und* $\eta \in \Omega^q(P) \times \mathfrak{g}$*, dann ist der Kommutator* $[\zeta, \eta]$ *definiert als*

$$[\zeta, \eta] := \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq}\eta \wedge \zeta \ . \tag{23.4.14}$$

Ausführlich formuliert erhält man mit einer Basis $\{T_\alpha\}$ von $\mathfrak{g}$ für den Kommutator $[\zeta, \eta]$ also

$$\zeta = \zeta^\alpha \otimes T_\alpha \; , \; \eta = \eta^\beta \otimes T_\beta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} [\zeta, \eta] &= \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta T_\alpha T_\beta - (-1)^{pq} \eta^\beta \wedge \zeta^\alpha T_\beta T_\alpha \\ &= \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta T_\alpha T_\beta - \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta T_\beta T_\alpha = \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta \otimes [T_\alpha, T_\beta] \\ &= \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta \otimes f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma \; . \end{aligned} \tag{23.4.15}$$

Völlig analog zur Krümmung in der Riemannschen Geometrie (siehe 10.8.5) gilt auch für die Krümmung von Prinzipalbündeln wieder eine wichtige Cartansche Strukturgleichung:

Satz 23.4.11 (Cartansche Strukturgleichung) *Seien $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_u P$, dann gilt für die Krümmungs 2-Form Ω und die Zusammenhangs 1-Form ω:*

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](\tilde{X}, \tilde{Y}) \quad \Leftrightarrow \tag{23.4.16}$$

$$\begin{aligned} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) + [\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})] \\ &= (d_P\omega + \omega \wedge \omega)\,(\tilde{X}, \tilde{Y}) \; . \end{aligned} \tag{23.4.17}$$

Beweis. Die Gleichheit der beiden Formulierungen folgt sofort aus 23.4.14, denn da ω eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form ist gilt:

$$[\omega, \omega] = \omega \wedge \omega - (-1)^1 \omega \wedge \omega = 2\,\omega \wedge \omega \quad \text{und}$$

$$(\omega \wedge \omega)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \omega(\tilde{X})\omega(\tilde{Y}) - \omega(\tilde{Y})\omega(\tilde{X}) = [\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})] \; .$$

Jetzt zum eigentlichen Beweis.

(1) Seien $\tilde{X}, \tilde{Y} \in H_u P$, dann ist $\omega(\tilde{X}) = 0$ und $\omega(\tilde{Y}) = 0$ und für Ω gilt

$$\begin{aligned} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= d_P\omega(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) = d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) + [\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})] \; . \end{aligned}$$

(2) Seien jetzt $\tilde{X} \in H_u P$ und $\tilde{Y} \in V_u P$, also $\tilde{Y}^H = 0$, dann ist

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d_P\omega(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(\tilde{X}) = 0 \; .$$

Es gilt also zu beweisen, daß auch $d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ ist. Hierfür greifen wir auf die immer wieder hilfreiche Formel 10.2.12 zurück und erhalten

$$d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}\omega(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\omega(\tilde{X}) - \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = \tilde{X}\omega(\tilde{Y}) - \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \; .$$

Nun kann man $\tilde{Y} \in V_uP$ schreiben als $\tilde{Y} =: B^{\#} = \frac{d}{dt}(ue^{tB})|_{t=0}$ mit $B \in \mathfrak{g}$ (siehe 23.4.2) und damit ist $\tilde{X}\omega(\tilde{Y}) = \tilde{X}B = 0$, weil ja B konstant ist. Also bleibt nur noch der Ausdruck $\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}])$ übrig. Hierfür erinnern wir uns an den Zusammenhang von Kommutator und Lie-Ableitung (10.3.3). Sei $\tilde{Y}$ das von $g(t)$ erzeugte Vektorfeld, dann gilt

$$\mathcal{L}_{\tilde{Y}}\tilde{X} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(R_{g^{-1}(t)*}\tilde{X}|_{ug} - \tilde{X}|_u) \ .$$

Nach Definition des Ehresmann Zusammenhangs gilt $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$, und damit folgt

$$\mathcal{L}_{\tilde{Y}}\tilde{X} = [\tilde{Y}, \tilde{X}] \in H_uP \quad \Rightarrow \quad \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0 \ .$$

(3) Der Fall $\tilde{X} \in V_uP$ und $\tilde{Y} \in H_uP$ ist völlig analog zum soeben behandelten Fall $\tilde{X} \in H_uP$ und $\tilde{Y} \in V_uP$.

(4) Nun zum letzten Fall mit $\tilde{X}, \tilde{Y} \in V_uP$. Zunächst ist wieder wie oben

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d_P\omega(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) = 0 \ .$$

Und ebenso wie oben können wir $\tilde{X}, \tilde{Y} \in V_uP$ schreiben als $\tilde{X} =: A^{\#} = \frac{d}{dt}(ue^{tA})|_{t=0}$ und $\tilde{Y} =: B^{\#} = \frac{d}{dt}(ue^{tB})|_{t=0}$ mit $A, B \in \mathfrak{g}$ (siehe 23.4.2) und damit sind $\tilde{X}\omega(\tilde{Y}) = \tilde{X}B = 0$ und $\tilde{Y}\omega(\tilde{X}) = \tilde{Y}A = 0$, weil ja A und B konstant sind und wir erhalten mit 10.2.12:

$$d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}\omega(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\omega(\tilde{X}) - \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = -\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \ .$$

Sei nun $[\tilde{X}, \tilde{Y}] =: C^{\#}$, dann folgt mit 23.4.4

$$d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = -\omega(C^{\#}) = -C = -[A, B] = -[\omega(A^{\#}), \omega(B^{\#})] = -[\omega(\tilde{X})\omega(\tilde{Y})] \ ,$$

also

$$\Omega(X, Y) = 0 = d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) + [\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})] \ . \qquad \square$$

Analog zur Bianchi-2 Identität 10.8.7 in der Riemannschen Geometrie kann man auch für die Krümmung von Prinzipalbündeln eine Bianchi Identität ableiten:

Lemma 23.4.12 *Sei Ω eine Krümmungs 2-Form, dann gilt*

$$D\Omega = 0 \ . \tag{23.4.18}$$

Beweis. Sowohl die Zusammenhangs 1-Form ω als auch die Krümmungs 2-Form Ω sind $\mathfrak{g}$-wertige Formen und können also nach einer Basis $\{T_\alpha\}$ von $\mathfrak{g}$ entwickelt werden:

$$\omega = \omega^\alpha T_\alpha \ , \quad \Omega = \Omega^\alpha T_\alpha \ .$$

Mit 23.4.15 und 23.4.17 erhält man

$$\Omega = d_P\omega + \omega \wedge \omega = (d_P\omega^\alpha)T_\alpha + (\omega^\beta \wedge \omega^\gamma){f_{\beta\gamma}}^\alpha T_\alpha \ ,$$

$$\Omega^\alpha = d_P\omega^\alpha + (\omega^\beta \wedge \omega^\gamma) f_{\beta\gamma}{}^\alpha \ .$$

$$d_P\Omega^\alpha = (d_P\omega^\beta \wedge \omega^\gamma - \omega^\beta \wedge d_P\omega^\gamma) f_{\beta\gamma}{}^\alpha \ .$$

$$\begin{aligned} D\Omega(\tilde X, \tilde Y, \tilde Z) &= d_P\Omega(\tilde X^H, \tilde Y^H, \tilde Z^H) = \\ &= (d_P\omega^\beta(\tilde X^H, \tilde Y^H) \wedge \omega^\gamma(\tilde Z^H) - \omega^\beta(\tilde X^H) \wedge d_P\omega^\gamma(\tilde Y^H, \tilde Z^H)) f_{\beta\gamma}{}^\alpha T_\alpha \\ &= 0 \quad \text{wegen} \quad \omega(\tilde X^H) = \omega(\tilde Z^H) = 0 \ . \end{aligned}$$ □

Wie bereits oben beschreiben, arbeitet man in der Physik nun vorwiegend nicht mit der globalen Zusammenhangform ω, sondern mit den lokalen $\mathfrak{g}$-wertigen Zusammenhang 1-Formen $\mathcal{A}_i$, den sogenannten *Eich-Potentialen*, oder *Yang-Mills-Potentialen*, die auf den lokalen Karten $U_i \subset M$ definiert sind. Die entsprechenden lokalen $\mathfrak{g}$-wertigen Krümmungs 2-Formen $\mathcal{F}_i$ heißen in der Physik *Feldstärken*, oder *Yang-Mills Feldstärken*.

Definition 23.4.13 *Seien U_i eine Karte einer offenen Überdeckung von M, $\sigma_i : U_i \to P$ ein lokaler Schnitt und Ω eine globale Krümmungsform, dann ist die lokale Krümmungsform $\mathcal{F}_i$ auf U_i definiert als*

$$\mathcal{F}_i := \sigma_i^*\Omega \ . \tag{23.4.19}$$

Entsprechend der Cartanschen Strukturgleichung (23.4.16, 23.4.17) gilt für die lokalen Krümmungsformen:

Satz 23.4.14 *Mit $X, Y \in T_pM$, $p \in U_i \subset M$ gilt:*

$$\mathcal{F}_i(X,Y) = d\mathcal{A}_i + \frac{1}{2}[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i](X,Y) \quad \Leftrightarrow \tag{23.4.20}$$

$$\mathcal{F}_i(X,Y) = d\mathcal{A}_i(X,Y) + [\mathcal{A}_i(X), \mathcal{A}_i(Y)] = (d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i)(X,Y) \ . \tag{23.4.21}$$

Beweis. Es ist $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega$, mit 6.3.4 folgt $\sigma_i^* d_P\omega = d\sigma_i^*\omega$ und mit 6.2.1 folgt $\sigma_i^*(\omega \wedge \omega) = (\sigma_i^*\omega) \wedge (\sigma_i^*\omega)$ und damit folgt die Behauptung sofort aus der Cartansche Strukturgleichung 23.4.16, bzw. 23.4.17. □

Dieses Ergebnis legt nun die Definition einer kovarianten Ableitung einer $\mathfrak{g}$-wertigen p-Form $\eta_i \in \Omega^p(U_i)$ auf $U_i \subset M$ nahe:

Definition 23.4.15

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\eta_i(X, Y_1, \ldots, Y_p) &:= d\eta_i(X, Y_1, \ldots, Y_p) + [\mathcal{A}_i(X), \eta_i(Y_1, \ldots, Y_p)] \\ &:= (d\eta_i + (\mathcal{A}_i \wedge \eta_i - (-1)^p \eta_i \wedge \mathcal{A}_i))(X, Y_1, \ldots, Y_p) \ . \end{aligned} \tag{23.4.22}$$

Damit schreibt sich 23.4.21 als

$$\mathcal{F}_i(X,Y) = \mathcal{D}\mathcal{A}_i(X,Y) = d\mathcal{A}_i(X,Y) + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i(X,Y)\ . \tag{23.4.23}$$

In dieser Schreibweise wird dann aus der Bianchi-2 Identität 23.4.18

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}\mathcal{F}_i = \mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{A}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\mathcal{D}\mathcal{F}_i(X,Y_1,Y_2) = d\mathcal{F}_i(X,Y_1,Y_2) + [\mathcal{A}_i(X), \mathcal{F}_i(Y_1,Y_2)] = 0\ . \end{aligned} \tag{23.4.24}$$

Beweis. Man beginnt wieder mit 23.4.17 und projiziert diese Gleichung mit σ_i^* auf M:

$$\Omega = d_P\omega + \omega\wedge\omega \quad \Rightarrow \quad d_P\Omega = (d_P\omega)\wedge\omega - \omega\wedge(d_P\omega) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_i^* d_P\Omega = \sigma_i^*((d_P\omega)\wedge\omega - \omega\wedge(d_P\omega)) \quad \Rightarrow$$

$$d\sigma_i^*\Omega = (d\sigma_i^*\omega)\wedge(\sigma_i^*\omega) - (\sigma_i^*\omega)\wedge(d\sigma_i^*\omega) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}_i &= d\mathcal{A}_i\wedge\mathcal{A}_i - \mathcal{A}_i\wedge d\mathcal{A}_i \\ &= d\mathcal{A}_i\wedge\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i\wedge\mathcal{A}_i\wedge\mathcal{A}_i - (\mathcal{A}_i\wedge d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i\wedge\mathcal{A}_i\wedge\mathcal{A}_i) \\ &= \mathcal{F}_i\wedge\mathcal{A}_i - \mathcal{A}_i\wedge\mathcal{F}_i = [\mathcal{F}_i, \mathcal{A}_i] \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_i = d\mathcal{F}_i + [\mathcal{A}_i, \mathcal{F}_i] = 0\ . \qquad \square$$

Wenn man in der Karte U_i Koordinaten einführt, dann schreibt sich die Feldstärke $\mathcal{F}_i$ als Funktion des Eichpotentials $\mathcal{A}_i$ in der Form der *Yang-Mills Gleichungen*

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i,\nu}dx^\nu \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{A}_i = (\partial_\mu\mathcal{A}_{i,\nu})dx^\mu\wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu\mathcal{A}_{i,\nu} - \partial_\nu\mathcal{A}_{i,\mu})dx^\mu\wedge dx^\nu$$

und

$$\mathcal{A}_i\wedge\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_{i,\mu}dx^\mu)\wedge(\mathcal{A}_{i,\nu}dx^\nu) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{i,\mu}\mathcal{A}_{i,\nu} - \mathcal{A}_{i,\nu}\mathcal{A}_{i,\mu})dx^\mu\wedge dx^\nu \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{F}_{i,\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\mathcal{A}_{i,\nu} - \partial_\nu\mathcal{A}_{i,\mu})dx^\mu\wedge dx^\nu \\ &\qquad + \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{i,\mu}\mathcal{A}_{i,\nu} - \mathcal{A}_{i,\nu}\mathcal{A}_{i,\mu})dx^\mu\wedge dx^\nu \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{i,\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_{i,\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{i,\mu} + [\mathcal{A}_{i,\mu}, \mathcal{A}_{i,\nu}] \; . \tag{23.4.25}$$

Wenn man jetzt noch berücksichtigt, daß $\mathcal{F}_{i,\mu\nu}$ und $\mathcal{A}_{i,\mu}$ ja $\mathfrak{g}$-wertige Formen sind und diese nach der Basis $\{T_\alpha\}$ von $\mathfrak{g}$ entwickelt, dann nehmen die Yang-Mills Gleichungen die folgende explizite Form an:

$$[\mathcal{A}_{i,\mu}, \mathcal{A}_{i,\nu}] = [\mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta T_\beta, \mathcal{A}_{i,\nu}{}^\gamma T_\gamma] = \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta \mathcal{A}_{i,\nu}{}^\gamma [T_\beta, T_\gamma] = \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta \mathcal{A}_{i,\nu}{}^\gamma f_{\beta\gamma}{}^\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}_{i,\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu \mathcal{A}_{i,\nu}{}^\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\alpha + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta \mathcal{A}_{i,\nu}{}^\gamma \; . \tag{23.4.26}$$

Als letztes soll noch gezeigt werden, daß sich die lokalen Krümmungs 2-Formen $\mathcal{F}_i$ (Feldstärken) bei einem Kartenwechsel $U_i \to U_j$ wie Tensoren transformieren.

Lemma 23.4.16 *Seien U_i und U_j überlappende Karten von M mit den Kartenwechseln $t_{ij} \in G$, dann gilt die folgende Kompatibilitätsbedingung:*

$$\mathcal{F}_j = t_{ij}^{-1}\, \mathcal{F}_i\, t_{ij} \; .$$

Beweis. Seien auf $U_i \cap U_j$ zwei lokale Krümmungen (Feldstärken) $\mathcal{F}_i = d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i$ und $\mathcal{F}_j = d\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j \wedge \mathcal{A}_j$ gegeben. Zunächst soll dt_{ij}^{-1} bestimmt werden.

$$0 = d(\mathbb{1}) = d(t_{ij}^{-1} t_{ij}) = (dt_{ij}^{-1}) t_{ij} + t_{ij}^{-1}(dt_{ij}) \quad \Rightarrow \quad d(t_{ij}^{-1}) = -t_{ij}^{-1}(dt_{ij}) t_{ij}^{-1} \; . \tag{23.4.27}$$

Das Transformationsverhalten der lokalen Zusammenhang 1-Form (Eichpotential) $\mathcal{A}_i$ bei einem Kartenwechsel kennen wir aus 23.4.8

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \; ,$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_j &= d\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j \wedge \mathcal{A}_j \\
&= d(t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \\
&\quad + (t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \wedge (t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \\
&= \{-t_{ij}^{-1}(dt_{ij}) \wedge t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} d\mathcal{A}_i t_{ij} + (-1)^1 t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge dt_{ij}\} \\
&\quad + \{-t_{ij}^{-1} dt_{ij} t_{ij}^{-1} \wedge dt_{ij}\} \\
&\quad + \{t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge dt_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1} dt_{ij}\} \\
&= t_{ij}^{-1} \{d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i\} t_{ij} = t_{ij}^{-1}\, \mathcal{F}_i\, t_{ij} \; .
\end{aligned}$$

□

23.5 Kovariante Ableitung in assoziierten Vektorbündeln

So schön die Theorie der Prinzipalbündel auch ist, in der Physik benötigt man zu dem geeigneten Prinzipalbündel, das die innere Symmetrie des Systems beschreibt, auch ein *assoziiertes Vektorbündel*, *Tensorbündel*, oder *Spinorbündel* zur Beschreibung des entsprechenden Feldes. Hier beschreiben wir jetzt die Konstruktion des assoziiierten Vektorbündels.

Das zu einem Prinzipalbündel P assoziierte Vektorbündel ist $E := (P \times_\rho V)/\sim$, das ist die Menge der Äquivalenzklassen von $(P \times_\rho V)$ mit der Äquivalenzrelation $(u, v) \sim (ug, \rho(g^{-1})v)$. Hierbei ist V ein k-dimensionaler Vektorraum und G wirkt auf V mittels einer k-dimensionalen Darstellung $\rho(g)$, d.h. $(u, v) \mapsto (ug, \rho(g^{-1})v)$. Die Projektion $\pi_E : E \to M$ wird dann als $\pi_E(u, v) := \pi(u) = p$ definiert und ist invariant unter der Wirkung von G, denn $\pi_E(ug, \rho(g^{-1})v) = \pi(ug) = p = \pi(u) = \pi_E(u, v)$. Die Kartenwechsel in E sind durch $\rho(t_{ij}(p))$ gegeben, wobei die $t_{ij}(p)$ die Kartenwechsel des Prinzipalbündels P sind. Die Multiplikation mit einem Skalar ist im Vektorbündel definiert als $c \cdot [u, v] := [u, cv]$, wenn $[u, v]$ eine Äquivalenzklasse aus E und $c \in \mathbb{R}$ ist.

Achtung: $[\cdot, \cdot]$ bezeichnet hier und im Folgenden keinen Kommutator, sondern eine Äquivalenzklasse von $(P \times_\rho V)/\sim$.

Wenn man eine kovariante Ableitung in diesem assoziierten Vektorbündel konstruieren will, dann definiert man zunächst genau wie beim reinen Prinzipalbündel einen Paralleltransport mittels eines horizontalen Lifts. Sei $\gamma(t) \in M$, $t \in [0, 1]$ eine beliebige Kurve zwischen zwei Punkten $p_0, p_1 \in M$ und $\tilde{\gamma}(t)$ die geliftete Kurve in P, so daß $\tilde{\gamma}(0) = u_0$, $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ und daß alle Tangentialvektoren $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(t)}$ an $\tilde{\gamma}(t)$ in den horizontalen Teilräumen $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ liegen. Ein Schnitt $s(\gamma(t))$ in E ist dann die t-abhängige Äquivalenzklasse

$$s(\gamma(t)) := [\tilde{\gamma}(t), v(\gamma(t))] \, ,$$

und $s(\gamma(t))$ ist per Definition genau dann parallel transportiert, wenn $\frac{d}{dt} v(\gamma(t)) = 0$ ist.

Diese Definition des Paralleltransports ist tatsächlich unabhängig vom speziellen Lift $\tilde{\gamma}(t)$, denn wenn $\tilde{\gamma}_2(t) := \tilde{\gamma}(t) \cdot a$, mit $a \in G$, ein anderer Lift von $\gamma(t)$ ist, so ergibt sich:

$$[\tilde{\gamma}(t), v(\gamma(t))] = [\tilde{\gamma}(t)a, \rho(a^{-1})v(\gamma(t))] = [\tilde{\gamma}_2(t), \rho(a^{-1})v(\gamma(t))] \, .$$

Wegen

$$\frac{d}{dt} v(\gamma(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \rho(a^{-1}) v(\gamma(t)) = \rho(a^{-1}) \frac{d}{dt} v(\gamma(t)) = 0$$

folgt aus dem Paralleltransport bzgl. $\tilde{\gamma}(t)$ der Paralleltransport bzgl. $\tilde{\gamma}_2(t)$.

Infolgedessen definiert man also die kovariante Ableitung eines Schnitts eines assoziierten Vektorbündels als:

Definition 23.5.1 *Sei $X \in T_{p_0}M$ der Tangentialvektor an $\gamma(t)$ am Punkt $p_0 \in M$. Dann ist die kovariante Ableitung des Schnitts $s(\gamma(t))$ definiert als*

$$\nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} := [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} v(\gamma(t))|_{t=0}] \ .$$

Ein kovariantes Differential kann definiert werden als

$$\nabla s(X) := \nabla_X s \ .$$

Zunächst einmal sieht man, daß die hier definierte kovariante Ableitung ∇_X die Leibniz-Regeln erfüllt, denn sei etwa $c \in C^1(\mathbb{R})$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_X(c(t)s(\gamma(t)))|_{t=0} = \nabla_X[\tilde{\gamma}(t), c(t)v(\gamma(t))]|_{t=0} &= [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}(c(t)v(\gamma(t)))]|_{t=0} \\
&= [\tilde{\gamma}(0), \frac{dc(t)}{dt} v(\gamma(t))]|_{t=0} + [\tilde{\gamma}(0), c(t)\frac{d}{dt} v(\gamma(t))]|_{t=0} \\
&= \frac{dc(t)}{dt}[\tilde{\gamma}(0), v(\gamma(t))]|_{t=0} + c(t)[\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} v(\gamma(t))]|_{t=0} \\
&= (\frac{dc(t)}{dt} s(\gamma(t))|_{t=0}) + (c(t)\nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0}).
\end{aligned}$$

Die anderen Leibniz-Regeln für ∇_X folgen aufgrund der Eigenschaften von $\frac{d}{dt}$ und der Linearität im zweiten Argument von $[\cdot,\cdot]$ analog.

Diese Definition ist unabhängig vom speziellen Lift $\tilde{\gamma}(t)$, denn sei wieder $\tilde{\gamma}_2(t) := \tilde{\gamma}(t) \cdot a$ mit $a \in G$ ein anderer Lift von $\gamma(t)$, dann ist das entsprechende Element der Äquivalenzklasse $[\tilde{\gamma}(t), v(\gamma(t))]$ jetzt $[\tilde{\gamma}(t) \cdot a, \rho(a^{-1})v(\gamma(t))]$, und daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
\nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} &:= [\tilde{\gamma}(0)a, \frac{d}{dt}\rho(a^{-1})v(\gamma(t))|_{t=0}] \\
&= [\tilde{\gamma}(0)a, \rho(a^{-1})\frac{d}{dt} v(\gamma(t))|_{t=0}] \\
&= [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} v(\gamma(t))|_{t=0}] \ .
\end{aligned}$$

Wiederum interessieren Physiker sich vornehmlich für die lokale Form der kovarianten Ableitung ∇_X. Sei $\sigma_i : U_i \subset M \to P$ ein lokaler Schnitt im Prinzipalbündel P und $\gamma(t) \in U_i$, $t \in [0,1]$ eine beliebige Kurve zwischen zwei Punkten $p_0, p_1 \in U_i$ und $\tilde{\gamma}(t)$ der horizontale Lift von γ(t) in P mit $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g_i(\gamma(0)) = g_i(p_0) = e$ wählen kann, wodurch $\tilde{\gamma}(0) = \sigma_i(\gamma(0)) = \sigma_i(p_0) = u_0$ wird. In 23.4.9 hatten wir für $g_i(\gamma(t))$ die folgende Differentialgleichung gefunden

$$\frac{d}{dt} g_i(\gamma(t)) = -\mathcal{A}_i(X)|_{\gamma(t)} g_i(\gamma(t)) \ .$$

Hier benötigen wir aber k-dimensionale Darstellungen von G, bzw. $\mathfrak{g}$, die auf V wirken, und damit schreibt sich die obige Differentialgleichung als

$$\frac{d}{dt}\rho(g_i(\gamma(t))) = -\rho(\mathcal{A}_i(X))|_{\gamma(t)}\,\rho(g_i(\gamma(t)))\ .$$

Wir wählen eine orthonormale Basis $\{e^V_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,k}$ im Vektorraum V und konstruieren damit einen lokalen Schnitt $e_\alpha(p)$ mit $p \in U_i$ in E:

Definition 23.5.2

$$e_\alpha(p) := [\sigma_i(p), e^V_\alpha] \quad \textit{mit } p \in U_i\ .$$

Dann ist

$$e_\alpha(\gamma(t)) = [\sigma_i(\gamma(t)), e^V_\alpha] = [\tilde{\gamma}(t)g_i^{-1}(\gamma(t)), e^V_\alpha] = [\tilde{\gamma}(t), \rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))e^V_\alpha]\ .$$

Wie in 23.4.27 gilt

$$\frac{d}{dt}(\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))) = -\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))\,(\frac{d}{dt}\rho(g_i(\gamma(t))))\,\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))\ .$$

Damit und mit 23.4.9 ergibt sich für die kovariante Ableitung von $e_\alpha(\gamma(t))$

$$\begin{aligned}
\nabla_X e_\alpha(\gamma(t))|_{t=0} &= [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))e^V_\alpha|_{t=0}] \\
&= [\tilde{\gamma}(0), -\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))\,(\frac{d}{dt}\rho(g_i(\gamma(t))))\,\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))e^V_\alpha|_{t=0}] \\
&= [\tilde{\gamma}(0)(g_i^{-1}(\gamma(0))), \rho(\mathcal{A}_i(X))|_{\gamma(0)}e^V_\alpha] \\
&= [\sigma_i(\gamma(0)), \rho(\mathcal{A}_i(X))|_{\gamma(0)}e^V_\alpha]\ .
\end{aligned}$$

Die $\rho(\mathcal{A}_i)$ sind $k \times k$ dimensionale Darstellungen der $\mathfrak{g}$-wertigen 1-Formen $\mathcal{A}_i$. Wenn man nun die $\rho(\mathcal{A}_i)$ nach der Basis $\{\rho(T_\alpha)\}$ von $\rho(\mathfrak{g})$ entwickelt so folgt:

$$\rho(\mathcal{A}_i) = \rho(\mathcal{A}_{i,\mu})dx^\mu = {\mathcal{A}_{i,\mu}}^\beta\rho(T_\beta)dx^\mu$$

und mit $X = \frac{d}{dt}$ folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_X e_\alpha(\gamma(t))|_{t=0} &= [\sigma_i(\gamma(0)), \frac{dx^\mu}{dt}{\mathcal{A}_{i,\mu}}^\beta\rho(T_\beta)e^V_\alpha] \\
&= \frac{dx^\mu}{dt}{\mathcal{A}_{i,\mu}}^\beta\rho(T_\beta)[\sigma_i(\gamma(0)), e^V_\alpha] \\
&= \frac{dx^\mu}{dt}{\mathcal{A}_{i,\mu}}^\beta\rho(T_\beta)e_\alpha(\gamma(0))\ .
\end{aligned}$$

Wenn $\gamma(t) = x^\mu$ eine Koordinatenlinie ist, dann ist $X = \partial_\mu$ und der obige Ausdruck vereinfacht sich zu

$$\nabla_{\partial_\mu} e_\alpha(x^\mu(t))|_{t=0} = \mathcal{A}_{i,\mu}{}^{\beta}\rho(T_\beta)e_\alpha(x^\mu(0)) \; .$$

Wenn jetzt $s(\gamma(t))$ ein Schnitt in E ist mit

$$\begin{aligned} s(\gamma(t)) &:= [\sigma_i(\gamma(t)), v_i(\gamma(t))] = [\sigma_i(\gamma(t)), v_i^\alpha(\gamma(t))e_\alpha^V] \\ &= v_i^\alpha(\gamma(t))[\sigma_i(\gamma(t)), e_\alpha^V] = v_i^\alpha(\gamma(t))\, e_\alpha(\gamma(t)) \; , \end{aligned}$$

dann ergibt sich für die kovariante Ableitung mit der Leibniz-Regel sofort

$$\begin{aligned} \nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} &= [\sigma_i(\gamma(0)), \{\frac{dv_i^\alpha(\gamma(t))}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i,\mu}{}^{\beta}\rho(T_\beta)\}|_{t=0}\, e_\alpha^V] \\ &= \{\frac{dv_i^\alpha(\gamma(t))}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i,\mu}{}^{\beta}\rho(T_\beta)\}|_{t=0}\, [\sigma_i(\gamma(0)), e_\alpha^V] \\ &= \frac{dx^\mu}{dt}\{\frac{\partial v_i^\alpha(\gamma(t))}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i,\mu}{}^{\beta}\rho(T_\beta)\}|_{t=0}\, e_\alpha(\gamma(0)) \; . \end{aligned}$$

Diese Definition ist tatsächlich von der verwendeten lokalen Karte unabhängig, denn seien in $U_i \cap U_j$ die Schnitte $\sigma_i(p)$ und $\sigma_j(p)$ in P durch einen Kartenwechsel t_{ij} verknüpft, d.h. $\sigma_j(p) = \sigma_i(p)t_{ij}(p)$, dann folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} &= [\sigma_i(\gamma(0)), \{\frac{dv_i^\alpha(\gamma(t))}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i,\mu}{}^{\beta}\rho(T_\beta)\}|_{t=0}\, e_\alpha^V] \\ &= [\sigma_j(\gamma(0))t_{ij}^{-1}, \{\frac{dv_j^\alpha(\gamma(t))}{dt}\rho(t_{ij}) + \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{j,\mu}{}^{\beta}\rho(t_{ij})\rho(T_\beta)\}|_{t=0}\, e_\alpha^V] \\ &= [\sigma_j(\gamma(0)), \{\frac{dv_j^\alpha(\gamma(t))}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{j,\mu}{}^{\beta}\rho(T_\beta)\}|_{t=0}\, e_\alpha^V] \; . \end{aligned}$$

24 Eichtheorien

Wir folgen hier Nakahara (2003), S. 399 ff., Jost (1995), S.86 ff. und Zeidler (2011), S. 843 ff.

24.1 Chen Ning Yang (*1922)

Abbildung 24.1: C.N. Yang

Yang ist einer der bedeutendsten theoretischen Physiker des 20. Jh. Er wurde in Hefei in China als Sohn eines Mathematikprofessors geboren und verbrachte seine Kindheit und Jugend bei seinen Eltern auf dem Campus der Tsinghua Universität von Peking. Während des japanisch-chinesischen Krieges war die Tsinghua Universität zur Universität von Kunming ausgelagert worden und dort in Kunming studierte Yang Physik. Nach dem Krieg erhielt Yang im Jahr 1946 ein Forschungsstipendium für die USA und er ging an die Universität von Chicago zu Enrico Fermi und wurde 1948 mit einer Arbeit „*Über die Winkelverteilung von Kernreaktionen und Koinzidenzmessungen*" bei Edward Teller promoviert. Im Jahr 1949 wurde er ans 'Institute for Advanced Study' in Princeton eingeladen und im Jahr 1965 nahm er eine Professur an der 'State University of New York at Stony Brook' (SUNYSB) an und wirkte als Direktor am dort neugegründeten Institut für Theoretische Physik.

Im Jahr 1971 war es Yang zum ersten Mal wieder möglich China zu besuchen. In den Jahren davor nutzte er regelmäßig seine Aufenthalte am CERN in Genf für Treffen mit seinem Vater, der dazu aus China anreiste. Nach der chinesischen Kulturrevolution half Yang intensiv dabei die chinesische Physik-Community wieder aufzubauen, nahm nach seiner Emeritierung am SUNYSB im Jahr 1999 eine Ehrenprofessur an der Tsinghua Universität von Peking an, übersiedelte später nach Peking und nahm eine Professur am dortigen 'Center for Advanced Study' (CASTU) an.

Seine wichtigsten Beiträge zur theoretischen Physik sind:

- zusammmen mit Robert L. Mills die später sog. Yang-Mills-Theorie, eine nicht-abelsche Eichtheorie. Interessanterweise wurde diese Theorie unabhängig und etwa gleichzeitig von Ronald Shaw in seiner Dissertation bei Abdus Salam entwickelt. Yang und Mills erkannten, daß sich ihr Modell nicht wie von ihnen gewünscht auf die starke Wechselwirkung anwenden ließ, da die Austauschbosonen masselos sein mußten, um die Eichinvarianz zu gewährleisten - was sie aber wegen der Kurzreichweitigkeit der Starken Wechselwirkung nicht sein konnten. Dennoch publizierten sie ihre Arbeit, weil sie nach eigenen Worten von der mathematischen Schönheit der Theorie beeindruckt waren. Erst 1974 entdeckte Yang die schon lange in der Mathematik vorhandene geometrische Struktur der Prinzipalbündel als die angemessene Beschreibung für die Yang-Mills Theorien. Diesen Zugang wandte er dann auf eine Theorie der 'Magnetischen Monopole' (eine Lieblingsidee von Dirac) und auf 'globale Phasenfaktoren' in der Quantenmechanik (z.B. den Aharanov-Bohm-Effekt) an.

- zusammen mit Tsung-Dao Lee im Jahr 1956 die Vorhersage einer möglichen Paritätsverletzung der Schwachen Wechselwirkung, die dann 1957 von Chien-Shiung Wu von der Columbia Universität experimentell bestätigt wurde. Hierfür erhielten Yang & Lee 1957 den Nobelpreis - wobei leider Frau Wu nicht berücksichtigt wurde.
- Yang forschte auch intensiv über Fragen der Statistischen Mechanik, so etwa über Vielteilchenprobleme der Quantenmechanik und über Lösungen von Ising-Modellen (Spin-Gitter-Modellen). Aus der Beschäftigung mit der Quanten–Statistischen Mechanik entwickelte er die berühmte Yang-Baxter-Gleichung, die ein eindrückliches Anwendungsbeispiel des mathematischen Gebiets der 'Quantengruppen' und 'Hopf-Algebren' in der theoretischen Physik darstellt.

In dem unten referierten Interview von Dianzhou Zhang mit Chen Ning Yang findet sich der schöne Satz, den Yang wohl auf einer Konferenz in Seoul im Jahr 1983 geäußert hat:

> „About ten years ago, I gave a talk on physics in Seoul, South Korea. I joked: "There exist only two kinds of modern marthematical books: one which you cannot read beyond the first page, and one which you cannot read beyond the first sentence. The *Mathematical Intelligencer* later reprinted this yoke of mine. But I suspect many mathematicians themselves agree wth me."

Yang erhielt neben dem Nobelpreis von 1957 zahlreiche Preise und Ehrungen, darunter die National Medal of Science (1986), die Albert Einstein Medal (1995) und den Lars Onsager Prize (1999).

Quelle: Wikipedia-Yang (2017), An Interview with Chen Ning Yang: Zeidler (2011), S. 4-7].

24.2 Elektromagnetismus als $U(1)$ Eichtheorie

Das einfachste Beispiel ist Maxwells Theorie des Elektromagnetismus, die als eine Eichtheorie mit der Eichgruppe $U(1) := \{e^{i\Theta} | \Theta \in \mathbb{R}\}$ beschrieben werden kann. Als Prinzipalbündel wählt man $P(M, U(1))$ und als assoziiertes Vektorbündel $E = P \times_\rho \mathbb{C}$, wobei ρ die natürliche Identifikation eines Elements von $U(1)$ mit einer komplexen Zahl ist. Die Liegruppe $U(1)$ ist eindimensional und abelsch, also sind alle Strukturkonstanten ${f_{\alpha\beta}}^{\gamma} = 0$ und man benötigt auch keine Gruppenindizes α, β. Weiter wählen wir für dieses Beispiel den topologisch trivialen Fall, bei dem P einfach der Produktraum $P(M, U(1)) = M \times U(1)$ ist, mit der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit M als Basismannigfaltigkeit, d.h. $M = \mathbb{R}^4$. Die Minkowski-Metrik sei mit $c = 1$ wie üblich $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Die lokale Zusammenhang 1-Form $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$, das Eichpotential, ist wegen der Trivialität des Prinzipalbündels global gültig.

Die lokale Krümmungs 2-Form $\mathcal{F}$, die Feldstärke, ist dann mit 23.4.21:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{A} \\ &= (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) dx^\mu \otimes dx^\nu \; . \end{aligned} \tag{24.2.1}$$

Die Bianchi-2 Identität 23.4.24 schreibt sich wegen der abelschen Gruppenstruktur einfach als

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} d\mathcal{F} &= d(\frac{1}{2!}\mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{1}{2!}(\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu}) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2!}(\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} - \partial_\lambda \mathcal{F}_{\nu\mu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} - \partial_\nu \mathcal{F}_{\mu\lambda} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} - \partial_\mu \mathcal{F}_{\lambda\nu}) dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= (\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda}) dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu = 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0 \; . \quad \text{(Bianchi-2 Identität)} \tag{24.2.2}$$

In der Physik verwendet man anstelle von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{F}$ das Eichpotential A und den Feldstärketensor F, die sich von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{F}$ gerade um den Lie-Algebra-Faktor i unterscheiden:

$$\mathcal{A} =: iA \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} =: iF_{\mu\nu} \; . \tag{24.2.3}$$

Die Bianchi-2 Identität für $F_{\mu\nu}$ heißt auch Jacobi-Identität und liefert die beiden 'geometrischen' Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \; . \quad \text{(Gauß-Faradaysches Gesetz)} \tag{24.2.4}$$

Die Komponenten des dreidimensionalen elektrischen Feld-Vektors $E = E^i \partial_i$ und des dreidimensionalen magnetischen Feld-Pseudovektors $B = B^i \partial_i$, mit $i, j, k \in \{1, \dots, 3\}$, werden in der Physik als spezielle Komponenten des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ definiert. Das heißt, E und B sind keine Vierervektoren!

$$E^i := E_i := F^{0i} \; , \tag{24.2.5}$$

$$B^i := B_i := \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk} \ . \tag{24.2.6}$$

Aufgrund unserer Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$ ist $F_{0i} = -F^{0i}$ und $F_{jk} = F^{jk}$.

Die Beziehung zwischen B^i und F_{jk} kann umgekehrt werden, denn für das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} in $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta^l_j\delta^m_k - \delta^m_j\delta^l_k = \eta^l_j\eta^m_k - \eta^m_j\eta^l_k \quad \Rightarrow \tag{24.2.7}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}B^i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm}F_{lm} = \frac{1}{2}(\eta^l_j\eta^m_k - \eta^m_j\eta^l_k)F_{lm} \\ &= \frac{1}{2}(F_{jk} - F_{kj}) = F_{jk} \ .\end{aligned} \tag{24.2.8}$$

$$B^1 = F_{23} \ , \ B^2 = F_{31} \ , \ B^3 = F_{12} \quad \Rightarrow \tag{24.2.9}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{24.2.10}$$

Der entsprechende kontravariante Feldstärketensor ergibt sich zu

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\mu'}F_{\mu'\nu'}\eta^{\nu'\nu} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} .\end{aligned} \tag{24.2.11}$$

Die Bianchi-2 Identität 24.2.2 liefert die ersten beiden Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, die also rein geometrischer Natur sind.

Setzt man jetzt in 24.2.4 $\lambda = 0, \ \mu = j, \ \nu = k$ so folgt

$$0 = \partial_0 F_{jk} + \partial_k F_{0j} + \partial_j F_{k0} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\partial_0 F_{jk} + \partial_k F_{0j} + \partial_j F_{k0}) = \partial_0 B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_j F_{k0} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_k F_{0j}$$

$$= \partial_0 B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_j F_{k0} + \frac{1}{2}\epsilon^{ikj}\partial_j F_{0k} = \partial_0 B^i + \epsilon^{ijk}\partial_j F_{k0} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}B^i + (\vec{\nabla} \times \vec{E})^i \ . \quad \text{(Faradaysches Gesetz)} \tag{24.2.12}$$

Setzt man $\lambda = i,\ \mu = j,\ \nu = k$ so folgt

$$0 = \partial_i F_{jk} + \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\partial_i F_{jk} + \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki}) = \partial_i B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_k F_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_j F_{ki}$$

$$= \partial_i B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{jki}\partial_i F_{jk} + \frac{1}{2}\epsilon^{kij}\partial_i F_{jk} = \partial_i B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_i F_{jk}$$

$$= \partial_i B^i + \epsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} = \partial_i B^i + 2\partial_i B^i = 3\partial_i B^i \quad \Rightarrow$$

$$0 = \partial_i B^i = \vec{\nabla}\vec{B} \ . \quad \text{(Gaußsches Gesetz für Magnetfelder)} \tag{24.2.13}$$

Die beiden anderen Maxwell-Gleichungen sind dynamischer Natur und folgen aus dem Extremum des Wirkungsfunktionals $\mathcal{S}[A]$:

$$\mathcal{S}[A] := \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) d^4x := \int\limits_{\mathbb{R}^4} (\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{i}\mathcal{A}_\nu j^\nu) d^4x \ , \tag{24.2.14}$$

$$\mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\nu j^\nu = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\alpha'}\eta^{\beta\beta'}F_{\alpha'\beta'} + A_\alpha \eta^{\alpha\beta} j_\beta \ . \tag{24.2.15}$$

Natürlich soll die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ ein Skalar sein, aber daß $\mathcal{L}$ nun im Fall der klassischen Elektrodynamik genau diese Form hat ist nicht theoretischen Überlegungen zu verdanken, sondern der Forderung nach Übereinstimmung mit den Experimenten. Inzwischen ist allerdings klar, daß die Elektrodynamik der klassische Grenzfall der Quantenelektrodynamik ist, und wenn man versucht die Lagrangefunktion der QED aufzustellen, so erhält man zusätzliche Einschränkungen an die Lagrangefunktion:
dort würde etwa ein Term der Form $A_\nu A^\nu$ zu einer Masse der Photonen führen und Terme mit einer Kombination von A_ν und $\partial_\mu A_\nu$ in höherer als vierter Potenz würden die Theorie unrenormierbar machen.

Die Lagrange-Gleichungen lauten dann (siehe etwa A.1.17):

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \stackrel{!}{=} 0 \ . \tag{24.2.16}$$

Im Einzelnen ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \delta^\nu_\alpha \eta^{\alpha\beta} j_\beta = j^\nu \ .$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha \; .$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\alpha'}\eta^{\beta\beta'}[(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha)F_{\alpha'\beta'} + F_{\alpha\beta}(\delta^\mu_{\alpha'}\delta^\nu_{\beta'} - \delta^\mu_{\beta'}\delta^\nu_{\alpha'})] \\ &= -\frac{1}{4}[(\eta^{\mu\alpha'}\eta^{\nu\beta'} - \eta^{\nu\alpha'}\eta^{\mu\beta'})F_{\alpha'\beta'} + F_{\alpha\beta}(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu})] \\ &= -\frac{1}{4}[(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) + (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})] = -F^{\mu\nu} \; .\end{aligned}$$

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} \stackrel{!}{=} j^\nu \; . \quad \text{(Gauß-Ampèresches Gesetz)} \tag{24.2.17}$$

Wie oben kann man dies wieder in Differentialgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ umschreiben. Mit $\nu = 0$ folgt

$$\partial_\mu F^{0\mu} = \partial_i F^{0i} = \vec{\nabla}\vec{E} = j^0 \; . \quad \text{(Gaußsches Gesetz)} \tag{24.2.18}$$

Mit $\nu = i$ folgt

$$\frac{\partial F^{i0}}{\partial t} + \partial_k F^{ik} = j^i \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial E^i}{\partial t} + \epsilon^{lik}\partial_k B_l = -\frac{\partial E^i}{\partial t} + \epsilon^{ikl}\partial_k B_l = j^i \quad \Rightarrow$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})^i - \frac{\partial E^i}{\partial t} = j^i \; . \quad \text{(Ampèresches Gesetz)} \tag{24.2.19}$$

24.3 Yang-Mills $SU(n)$ Eichtheorie

Im Jahr 1954 erweiterten Yang und Mills das Konzept der Beschreibung der Elektrodynamik als einer $U(1)$-Eichtheorie auf die nichtabelschen Liegruppen $SU(n)$. Ihr Ziel war eine mögliche Anwendung dieses Ansatzes auf die 'Starke Wechselwirkung'. Dieser erste Versuch wurde zunächst als erfolglos aufgegeben, weil die Austauschbosonen der Theorie masselos sein mußten, um die Eichinvarianz sicherzustellen. Erst als in den 1960'er Jahren durch die Arbeiten von Goldstone, Higgs u.a. ein Mechanismus gefunden war, wie die Eichbosonen durch *spontane Symmetriebrechung* Masse erhalten konnten, wurden die Arbeiten an den $SU(n)$-Theorien wieder aufgenommen. Im Jahr 1967 formulierten

Salam, Glashow und Weinberg die $SU(2)$-Theorie der Schwachen Wechselwirkung, und ab 1969 entwickelten Gell-Mann, Fritzsch und Leutwyler die Quantenchromodynamik (QCD) als eine $SU(3)$-Eichtheorie. Doch erst mit dem Nachweis der Renormierbarkeit der quantisierten Yang-Mills-Theorien durch Gerardus 't Hooft Anfang der 1970'er Jahre fanden diese Theorien große Anerkennung und etablierten sich als das *Standardmodell der Teilchenphysik*. Einen gewissen Abschluß fanden diese Forschungen als im Jahr 2012 am LHC-Beschleuniger des CERN der erste experimentelle Nachweis eines Higgs-Bosons gelang.

Wegen der massiven Nichtlinearitäten der Yang-Mills-Theorien erfolgen heute physikalische Untersuchung hierzu nicht mehr über störungstheoretische analytische Methoden, sondern numerisch über Gitterrechnungen (Gittereichtheorien). In der Mathematik sind die quantisierten Yang-Mills-Theorien ein aktuelles Forschungsgebiet und eines der berühmten, ungelösten Millennium-Probleme des 'Clay Mathematics Institute' (CMI) in Cambridge/Massachusetts.

Feynman startete einen ersten, aber erfolglosen Versuch einer Quantisierung der Gravitation als einer Yang-Mills-Theorie. Erst Ashtekar, Smolin und Rovelli gelang auf diesem Weg Ende der 1980'er Jahre mit der sog. Schleifenquantengravitation (Loop quantum gravity, LQG) ein Durchbruch.

Wir wählen für dieses Beispiel wieder den topologisch trivialen Fall, bei dem P einfach der Produktraum $P(M, SU(n)) = M \times SU(n)$ ist, mit der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit M als Basismannigfaltigkeit, d.h. $M = \mathbb{R}^4$. Die Minkowski-Metrik sei mit $c = 1$ wie üblich $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Die lokale Zusammenhang 1-Form $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu = \mathcal{A}_\mu{}^\alpha T_\alpha dx^\mu$, das Yang-Mills-Potential, ist wegen der Trivialität des Prinzipalbündels global gültig. Dabei haben wir $\mathcal{A}_\mu$ als eine $\mathfrak{g}$-wertige Form wieder nach der Basis $\{T_\alpha\}$ von $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ entwickelt. Die lokale Krümmungs 2-Form $\mathcal{F}$, die Yang-Mills-Feldstärke, ist dann mit 23.4.26:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha dx^\mu \otimes dx^\nu \quad \text{mit} \tag{24.3.1}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu{}^\alpha + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{A}_\mu{}^\beta \mathcal{A}_\nu{}^\gamma \; . \tag{24.3.2}$$

Die Bianchi-2 Identität 23.4.24 ist unverändert gültig:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} := d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0 \; . \tag{24.3.3}$$

Die beiden anderen Yang-Mills-Gleichungen sind dynamischer Natur und folgen aus dem Extremum des Wirkungsfunktionals $\mathcal{S}[\mathcal{A}]$:

$$\mathcal{S}[\mathcal{A}] := \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(\mathcal{A}_\nu, \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) d^4x := \int\limits_{\mathbb{R}^4} (\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_\nu \mathcal{J}^\nu)) d^4x \; , \tag{24.3.4}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_\nu, \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}({\mathcal{F}_{\mu\nu}}^\alpha T_\alpha \mathcal{F}^{\mu\nu\beta} T_\beta) + \mathrm{tr}({\mathcal{A}_\nu}^\alpha T_\alpha \mathcal{J}^{\nu\beta} T_\beta)\ . \tag{24.3.5}$$

Hierbei erfolgt die Spurbildung über die Matrix $T_\alpha T_\beta \in \mathfrak{su}(n)$. Diese Spurbildung ergibt eine Invariante, da sie in $\mathfrak{su}(n)$ ja gerade das inneres Produkt $g_\mathfrak{g}$ ist (21.5.6). Wir wählen die T_α jetzt orthonormal, d.h.

$$\mathrm{tr}(T_\alpha T_\beta) = g_{\mathfrak{g},\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{24.3.6}$$

und erhalten für die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_\nu, \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) = \frac{1}{4}({\mathcal{F}_{\mu\nu}}^\alpha {\mathcal{F}^{\mu\nu}}_\alpha) + {\mathcal{A}_\nu}^\alpha {\mathcal{J}^\nu}_\alpha\ .$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten dann (siehe etwa A.1.17):

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu {\mathcal{A}_\nu}^\alpha)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\mathcal{A}_\nu}^\alpha} \stackrel{!}{=} 0\ . \tag{24.3.7}$$

Im Einzelnen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu {\mathcal{A}_\nu}^\alpha)} &= -\partial_\mu\Big(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu {\mathcal{A}_\nu}^\alpha)} \frac{1}{4} {\mathcal{F}_{\kappa\lambda}}^\zeta {\mathcal{F}^{\kappa\lambda}}_\zeta\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\partial_\mu\Big(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu {\mathcal{A}_\nu}^\alpha)} {\mathcal{F}_{\kappa\lambda}}^\zeta g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} g_{\mathfrak{g},\zeta\zeta'} {\mathcal{F}_{\kappa'\lambda'}}^{\zeta'}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu\Big(\frac{\partial {\mathcal{F}_{\kappa\lambda}}^\zeta}{\partial(\partial_\mu {\mathcal{A}_\nu}^\alpha)}\, g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} g_{\mathfrak{g},\zeta\zeta'}\, {\mathcal{F}_{\kappa'\lambda'}}^{\zeta'}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu\Big(\frac{\partial {\mathcal{F}_{\kappa\lambda}}^\zeta)}{\partial(\partial_\mu {\mathcal{A}_\nu}^\alpha)}\, {\mathcal{F}^{\kappa\lambda}}_\zeta\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu\Big(\frac{\partial(\partial_\kappa {\mathcal{A}_\lambda}^\zeta - \partial_\lambda {\mathcal{A}_\kappa}^\zeta)}{\partial(\partial_\mu {\mathcal{A}_\nu}^\alpha)}\, {\mathcal{F}^{\kappa\lambda}}_\zeta\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu((\delta^\mu_\kappa \delta^\nu_\lambda \delta^\zeta_\alpha - \delta^\nu_\kappa \delta^\mu_\lambda \delta^\zeta_\alpha)\, {\mathcal{F}^{\kappa\lambda}}_\zeta) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu[({\mathcal{F}^{\mu\nu}}_\alpha - {\mathcal{F}^{\nu\mu}}_\alpha) = -\partial_\mu {\mathcal{F}^{\mu\nu}}_\alpha\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\mathcal{A}_\nu}^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial {\mathcal{A}_\nu}^\alpha}\Big(\frac{1}{4} {\mathcal{F}_{\kappa\lambda}}^\zeta {\mathcal{F}^{\kappa\lambda}}_\zeta + {\mathcal{A}_\kappa}^\zeta {\mathcal{J}^\kappa}_\zeta\Big) \\
&= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial {\mathcal{A}_\nu}^\alpha}[{\mathcal{F}_{\kappa\lambda}}^\zeta g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} g_{\mathfrak{g},\zeta\zeta'} {\mathcal{F}_{\kappa'\lambda'}}^{\zeta'}] + {\mathcal{J}^\nu}_\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_{\nu}{}^{\alpha}}[\mathcal{F}_{\kappa\lambda}{}^{\zeta}]\, g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} g_{\mathfrak{g},\zeta\zeta'} \mathcal{F}_{\kappa'\lambda'}{}^{\zeta'} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_{\nu}{}^{\alpha}}[\mathcal{F}_{\kappa\lambda}{}^{\zeta}]\, \mathcal{F}^{\kappa\lambda}{}_{\zeta} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}[f_{\beta\gamma}{}^{\zeta}\delta^{\nu}_{\kappa}\delta^{\beta}_{\alpha}\mathcal{A}_{\lambda}{}^{\gamma} + f_{\beta\gamma}{}^{\zeta}\delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\alpha}\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}]\, \mathcal{F}^{\kappa\lambda}{}_{\zeta} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}[f_{\alpha\beta}{}^{\zeta}\delta^{\nu}_{\kappa}\mathcal{A}_{\lambda}{}^{\beta} + f_{\beta\alpha}{}^{\zeta}\delta^{\nu}_{\lambda}\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}]\, \mathcal{F}^{\kappa\lambda}{}_{\zeta} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}[-f_{\beta\alpha}{}^{\zeta}\delta^{\nu}_{\kappa}\mathcal{A}_{\lambda}{}^{\beta} + f_{\beta\alpha}{}^{\zeta}\delta^{\nu}_{\lambda}\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}]\, \mathcal{F}^{\kappa\lambda}{}_{\zeta} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}f_{\beta\alpha}{}^{\zeta}[\delta^{\nu}_{\lambda}\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta} - \delta^{\nu}_{\kappa}\mathcal{A}_{\lambda}{}^{\beta}]\, \mathcal{F}^{\kappa\lambda}{}_{\zeta} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}f_{\beta\alpha}{}^{\zeta}[\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\kappa\nu}{}_{\zeta} - \mathcal{A}_{\lambda}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\nu\lambda}{}_{\zeta}] + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}f_{\beta\alpha}{}^{\zeta}[\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\kappa\nu}{}_{\zeta} - \mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\nu\kappa}{}_{\zeta}] + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= f_{\beta\alpha}{}^{\zeta}\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\kappa\nu}{}_{\zeta} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} = f_{\beta\alpha\zeta}\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= -f_{\beta\zeta\alpha}\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta} + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha}\ .
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir in der letzten Zeile von der totalen Antisymmetrie von $f_{\beta\alpha\zeta}$ Gebrauch gemacht (siehe 21.5.7).

Wenn man jetzt die Lagrange-Gleichung mit dem zu T_α dualen $\mathfrak{su}(n)$-Basisvektor T^α multipliziert, so folgt

$$
\begin{aligned}
(-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \mathcal{A}_{\nu}{}^{\alpha})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_{\nu}{}^{\alpha}})T^\alpha &= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}{}_{\alpha}T^\alpha - f_{\beta\zeta\alpha}\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta}T^\alpha + \mathcal{J}^{\nu}{}_{\alpha}T^\alpha \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu\alpha}T_\alpha - \mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta}f_{\beta\zeta}{}^{\alpha}T_\alpha + \mathcal{J}^{\nu\alpha}T_\alpha \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - \mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}\mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta}[T_\beta, T_\zeta] + \mathcal{J}^{\nu} \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - [\mathcal{A}_{\kappa}{}^{\beta}T_\beta, \mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta}T_\zeta] + \mathcal{J}^{\nu} \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - [\mathcal{A}_{\kappa}, \mathcal{F}^{\kappa\nu}] + \mathcal{J}^{\nu} \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - [\mathcal{A}, \mathcal{F}]^{\nu} + \mathcal{J}^{\nu} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}]^{\nu} \stackrel{!}{=} \mathcal{J}^{\nu}\ . \tag{24.3.8}
$$

Häufig findet man diese Yang-Mills Gleichung auch in einer Formulierung mit dem Hodge-Stern-Operator (siehe Kapitel 20.1).

Mit 20.1.21 läßt sich jetzt das Yang-Mills Wirkungsfunktional $\mathcal{S}[A]$ sehr kompakt schreiben als

$$\mathcal{S}[A] = -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\star\mathcal{F}) + \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(\mathcal{A}\wedge\star\mathcal{J}) \ . \tag{24.3.9}$$

Satz 24.3.1 *Die Yang-Mills Gleichung 24.3.8 lautet dann:*

$$-\mathcal{D}(\star\mathcal{F}) \overset{!}{=} \star\mathcal{J} \ . \tag{24.3.10}$$

Mit dem Hodge-adjungierten Operator $\mathcal{D}^\dagger$ läßt sich dies auch schreiben als

$$-\mathcal{D}^\dagger\mathcal{F} = \mathcal{J} \ . \tag{24.3.11}$$

Beweis. In $M = \mathbb{R}^4$ sind $\mathcal{F}$ und $\star\mathcal{F}$ jeweils $\mathfrak{g}$-wertige 2-Formen und damit ist $\mathcal{D}(\star\mathcal{F})$ eine $\mathfrak{g}$-wertige 3-Form. Hierbei ergibt sich für $\mathcal{D}$ angewandt auf eine $\mathfrak{g}$-wertige 2-Form $\eta = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ (siehe **??**):

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\eta &:= d\eta + [\mathcal{A},\eta] := d\eta + (\mathcal{A}\wedge\eta - (-1)^2\eta\wedge\mathcal{A})\\ &= d\eta + (\mathcal{A}\wedge\eta - \eta\wedge\mathcal{A})\end{aligned}$$

und das können wir auch schreiben als

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\eta &:= \mathcal{D}_\lambda(\eta_{\mu\nu})dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\\ &= (d_\lambda\eta_{\mu\nu} + (\mathcal{A}_\lambda\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\mathcal{A}_\lambda))\, dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\\ &= (d_\lambda{\eta_{\mu\nu}}^\alpha T_\alpha + ({\mathcal{A}_\lambda}^\beta T_\beta {\eta_{\mu\nu}}^\gamma T_\gamma - {\eta_{\mu\nu}}^\gamma T_\gamma {\mathcal{A}_\lambda}^\beta T_\beta)\, dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\\ &= (d_\lambda{\eta_{\mu\nu}}^\alpha T_\alpha + {\mathcal{A}_\lambda}^{\ \beta}{\eta_{\mu\nu}}^\gamma[T_\beta,T_\gamma])\, dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\\ &= (d_\lambda{\eta_{\mu\nu}}^\alpha + {\mathcal{A}_\lambda}^\beta{\eta_{\mu\nu}}^\gamma {f_{\beta\gamma}}^\alpha)\, T_\alpha\, dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu \ .\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\star\mathcal{F}) &= \frac{1}{3!}\mathcal{D}_\lambda(\star\mathcal{F})_{\mu_3\mu_4}dx^\lambda\wedge dx^{\mu_3}\wedge dx^{\mu_4}\\ &= \frac{1}{3!}\mathcal{D}_\lambda(\frac{\sqrt{|g|}}{2}\,{\tilde\epsilon^{\mu_1\mu_2}}_{\mu_3\mu_4}\mathcal{F}_{\mu_1\mu_2})\,dx^\lambda\wedge dx^{\mu_3}\wedge dx^{\mu_4}\\ &= \frac{1}{3!}\mathcal{D}_\lambda(\frac{\sqrt{|g|}}{2}\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2})\,dx^\lambda\wedge dx^{\mu_3}\wedge dx^{\mu_4}\\ &= \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{|g|}}{2}\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2})\,dx^\lambda\wedge dx^{\mu_3}\wedge dx^{\mu_4} \ .\end{aligned}$$

Jetzt kann der Wert von λ im 4-Dimensionalen aufgrund der Antisymmetrie von $dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4}$ nur μ_1 oder μ_2 sein, also folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\star\mathcal{F}) &= \frac{\sqrt{|g|}}{3!}\frac{1}{2}\left(\epsilon_{\lambda\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{D}_{\mu_1}(\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2}) + \epsilon_{\mu_1\lambda\mu_3\mu_4}\mathcal{D}_{\mu_2}(\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2})\right) dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{3!}\,\epsilon_{\lambda\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{D}_{\mu_1}(\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2})\, dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{3!}\,\epsilon_{\lambda\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{J}^{\mu_2}\, dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{3!}\left(-\epsilon_{\mu_2\lambda\mu_3\mu_4}\,\mathcal{J}^{\mu_2}\right) dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{3!}\left(-\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\,\mathcal{J}^{\mu_1}\right) dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\
&= -(\star\mathcal{J})\;.
\end{aligned}$$

Für den Hodge-adjungierten Operator $\mathcal{D}^\dagger$ in einer 4-dimensionalen Lorentzschen Mannigfaltigkeit gilt mit 20.1.25 und $m = 4$ und $\star\mathcal{F} \in \Omega^2(\mathbb{R}^4) \times \mathfrak{g}$, d.h. $r = 2$:

$$\mathcal{D}^\dagger = (-1)^{mr+m} \star \mathcal{D} \star = \star\mathcal{D}\star\;,$$

und damit folgt mit $m = 4$ und $\mathcal{J} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4) \times \mathfrak{g}$, d.h. $r = 1$:

$$-\mathcal{D}^\dagger(\mathcal{F}) = -\star\mathcal{D}\star(\mathcal{F}) = \star\star\mathcal{J} = (-1)^{1+r(m-r)}\mathcal{J} = \mathcal{J}\;. \qquad \square$$

25 Charakteristische Klassen

25.1 Shiing-Shen Chern (1911 - 2004)

Shiing-Shen Chern wurde 1911 in Jiaxing in der Provinz Zhejiang in China geboren. Im Jahr 1926 begann der 15-jährige Chern sein Studium der Mathematik an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Nankai Universität in Tianjin und erwarb dort im Jahr 1930 seinen Bachelor. Danach arbeitete er als Assistent am Mathematischen Institut der Tsinghua University in Peking (Beijing). Im Jahr 1932 besuchte der Hamburger Mathematiker Wilhelm Blaschke die Tsinghua Universität, war von Chern sehr beeindruckt und lud diesen an die Universität Hamburg ein. Von 1934-1936 promovierte Chern bei Blaschke in Hamburg, danach schickte dieser Chern weiter zu Élie Cartan nach Frankreich. Im Jahr 1937 nahm Chern eine Professur an der Tsinghua Universität an und ging dann 1943 wegen des Krieges in China in die USA, wo er einen Platz am Institute for Advanced Study in Princeton fand. Dort arbeitete er insbesondere über die sog. *Charakteristischen Klassen* in der Differentialgeometrie. 1946 kehrte er nach Shanghai zurück, um dann schließlich 1949 erneut nach Princeton zu gehen. Von 1960 bis zu seiner Emeritierung 1979 arbeitete er an der University of California, Berkeley.

Abbildung 25.1: Shiing-Shen Chern
K. Jacobs (1976), CC-BY-SA-2.0 de.
[http://de.wikipedia.org/wiki/
Shiing-Shen_Chern]

Bei seinen regelmäßigen Besuchen in China und Taiwan gründete Chern das Nankai-Institut für Mathematik in Tianjin (das heutige Chern-Institut für Mathematik) und ein mathematisches Forschungsinstitut in Taipei, Taiwan. Von 2000 an verbrachte Chern seine letzten Jahre in Tianjin, China.

Heinz Hopf, einer der Begründer der algebraischen Topologie, machte schon in den 1930'er Jahren darauf aufmerksam, daß die Mathematiker doch nach einem intrinsischen Beweis für den verallgemeinerten Satz von Gauß-Bonnet suchen sollten, der ohne eine Einbettung der Mannigfaltigkeit M in einen umgebenden Raum $\mathbb{E}^{m+1}$ auskommt, da die Euler Charakteristik $\chi(M)$ als eine topologische Invariante nur von M abhängt. Es hat dann aber noch bis 1944 gedauert, bis Shiing-Shen Chern ein solcher intrinsischer Beweis des verallgemeinerten Gauß-Bonnet Satzes mittels der später nach ihm benannten *Chernschen Charakteristischen Klassen* gelang (Chern (1944)). Der Beweis von Chern findet sich z.B. in Spivak (1979), V, S. 385 ff.

Cherns Arbeiten erstrecken sich über das ganze Feld der Differentialgeometrie, am bekanntesten sind seine Beiträge zum *Satz von Gauss-Bonnet*, den *Charakteristischen Klassen* (*Chern Klassen*), der *Chern-Simons Theorie* und den *Komplexen Mannigfaltigkeiten*. In seinen letzten Jahren warb er für das Studium der *Finsler Geometrie*.

Sehr schön und lesenswert ist der Nachruf von Chern und Chevalley auf ihren gemeinsamen Lehrer Élie Cartan (Chern u. Chevalley (1952)).

[Quelle: Wikipedia-Chern (2015)]

25.2 Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908 - 1988)

Pontrjagin wurde 1908 in Moskau geboren und war einer der einflußreichsten Mathematiker der Sowjetunion. Er verlor im Alter von 14 Jahren bei einer Gasofenexplosion sein Augenlicht. Dank der intensiven Unterstützung seiner Mutter Tatyana Andreevna, die ihrem Sohn mathematische Bücher und später auch Forschungspublikationen der Topologen Hopf, Whitney u.a. vorlas, konnte Pontrjagin Mathematik an der Moskauer Lomonossow-Universität studieren und wurde 1935 bei Alexandrow promoviert. Seit 1934 arbeitete er am Mathematischen Institut der sowjetischen Akademie der Wissenschaften, dem berühmten Steklow-Institut, und seit 1935 leitete er dort als Professor eine eigene Abteilung für Topologie und Funktionalanalysis.

Pontrjagin arbeitete jahrzehntelang auf dem Gebiet der algebraischen Topologie. Mit seinem Namen verbunden sind die Dualität von Homologiegruppen, eine Theorie der Charaktere für kommutative topologische Gruppen, Beiträge zur Theorie der Charakteristischen Klassen, Grundlagen der Kobordismentheorie. Im Jahr 1938 erschien sein klassisches Werk über Topologische Gruppen (siehe: Pontryagin (1966)). Später arbeitete er auf dem Gebiet der Theorie der Optimalen Steuerungen.

Zu seinen berühmtesten Schülern gehören Anosov, Boltyansky, Postnikov, Rokhlin und Zelikin.

Pontrjagin hatte einen bedeutenden Einfluß auf die sowjetische Wissenschaftspolitik, war der Chef eines Gremiums, das über das Erscheinen aller mathematischer Fachbücher entschied und arbeitete als Chefredakteur der wichtigsten sowjetischen mathematischen Zeitschrift *Matematitscheski sbornik*. Zudem vertrat er die Sowjetunion in der Internationalen Mathematischen Union (IMU).

Trotz seiner zahlreichen begabten russisch-jüdischen Schüler, die Pontrjagin persönlich alle förderte, engagierte er sich immer wieder mit Äußerungen und Initiativen gegen den von ihm so genannten *zionistischen Einfluß in der Wissenschaft*. Dies wurde etwa sehr deutlich, als er im Vorstand der IMU versuchte die Verleihung der Fields-Medaille im Jahr 1978 an den russisch-jüdischen Mathematiker Margulis zu verhindern - glücklicherweise erfolglos.

[Quelle: Wikipedia-Pontrjagin (2016)]

25.3 Grundgedanken zu Charakteristischen Klassen

In der Einführung zum Abschnitt Faserbündel (Kapitel 23.2) hatten wir geschrieben:

„In der theoretischen Physik haben wir es immer wieder mit Vektorfeldern, Tensorfeldern, Spinorfeldern und Symmetriefeldern über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit zu tun. Wenn M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und $TM := \cup_{p\in M} T_pM$ der zugehörige Tangentialraum, dann kann man die Dynamik des Systems im einfachsten Fall in dem Produktraum $M \otimes TM$ beschreiben. Wenn nun aber im betrachteten System nichttriviale Randbedingungen vorliegen, dann kann es sein, daß das System nur noch lokal als Produktraum beschrieben werden kann, daß aber *global* eine *Verdrehung* vorliegt. Als einfaches Beispiel einer solchen globalen Verdrehung sei hier das Möbiusband angeführt: die Mannigfalltigkeit M ist hier S^1, eine Kreislinie, und darüber befindet sich als *Faser* das Intervall $[-1, 1]$. Ohne Verdrehung erhalten wir den Zylinder als Produktraum $S^1 \times [-1, 1]$, mit einer Verdrehung jedoch das Möbiusband, das nur noch lokal als Produktraum darstellbar ist."

Jetzt stellt sich also die Frage: gibt es möglichst einfach berechenbare topologische Invarianten, um die *Nichttrivialität*, bzw. die *Verdrehung* eines Faserbündels zu beschreiben? Die Antwort lautet ja und die gesuchten topologischen Invarianten sind die sog. *Charakterischen Klassen*, von denen die gebräuchlichsten *de Rham Kohomologie-Klassen* der Basis-Mannigfaltigkeit M sind.

Die ersten Überlegungen zu diesem Thema erfolgten 1935 von Stiefel und Whitney bei ihren Untersuchungen zu Vektorfeldern über Mannigfaltigkeiten. Im Jahr 1942 begann Pontrjagin an der Universität Moskau mit der Untersuchung der Homologie-Gruppen von Grassmann-Mannigfaltigkeiten.

Chern erweiterte die Untersuchungen zu den Charakteristischen Klassen, insb. zu den später nach ihm benannten *Chern Klassen*, auf eine sehr bedeutsame Weise und mit diesem Hilfsmittel gelang ihm 1944 der erste intrinsische Beweis des verallgemeinerten *Gauß-Bonnet Satzes* (siehe z.B. Spivak (1979), V, S. 385 ff.). Später führte Hirzebruch die Untersuchungen zu den Charakteristischen Klassen fort und konnte damit den *Riemann-Roch-Hirzebruch Satz* und den *Hirzebruchschen Signatursatz* beweisen (siehe Hirzebruch (1978)), beides Spezialfälle der erst später entdeckten *Atiyah-Singer-Indexsätze*, an dessen Entstehung Hirzebruch durch seine zahlreichen Arbeiten zusammen mit Atiyah großen Anteil hatte.

Wie in der algebraischen Topologie üblich, gibt es heute zahlreiche verschiedene Zugänge zu den Charakteristischen Klassen. Wir wählen hier die Methode von Chern-Weil, weil sie direkt mit den Krümmungen der Prinzipalbündel arbeitet, und so für Physiker mit Interessen an Eichtheorien einen recht intuitiven Einstieg ermöglicht. Die Idee von Chern und Weil ist recht einfach: wenn die Krümmung des Prinzipalbündels flach ist, dann ist das Prinzipalbündel mit Sicherheit trivial, also auch global eine Produktmannigfaltigkeit. Also sollte es eine Verbindung zwischen den lokalen Krümmungen und der Nichttrivialität des Prinzipalbündels geben. Diese Verbindung stellen die sog. *Invarianten Polynome* her.

Für theoretische Physiker eignen sich insbesondere die schönen Darstellungen von Nakahara (2003), S. 419 ff, Alvarez-Gaumé u. Ginsparg (1985) und Bär (2011), denen wir hier folgen. Gelegentlich greifen wir auch auf die mathematischen Grundlagenwerke von Kobayashi u. Nomizu (1969), S. 293 ff. und Gilkey (1995), S.121 ff. zurück. Umfassende mathematische Grundlagenwerke zu den Charakteristischen Klassen sind Milnor u. Stasheff (1974) und Bott u. Tu (1982), S. 266 ff.

Wir beschränken unsere Darstellung hier im Wesentlichen auf die Charakteristischen Klassen, die in den einfachsten *Atiyah-Singer-Indexsätzen* vorkommen - das sind die Chern-Charaktere, die Todd-Klassen und die Euler-Klassen.

25.4 Der Chern-Weil Satz

Definition 25.4.1 *Sei G eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$ der invertierbaren, komplexen $n \times n$ Matrizen und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Dann wird I^r definiert als der Vektorraum der symmetrischen, G-invarianten, r-linearen Funktionen auf $\mathfrak{g}$:*

$$I^r(G) := \{\tilde{P} \,|\, \tilde{P} : \overset{r}{\otimes}\mathfrak{g} \to \mathbb{C}\} \,, \quad \textit{mit} \tag{25.4.1}$$

$$\tilde{P}(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_r) = \tilde{P}(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_i,\ldots,a_r)\,, \quad a_1,\ldots,a_r \in \mathfrak{g}\,, \tag{25.4.2}$$

$$\tilde{P}(Ad_g a_1,\ldots,Ad_g a_r) = \tilde{P}(g^{-1}a_1 g,\ldots,g^{-1}a_r g) = \tilde{P}(a_1,\ldots,a_r)\,, \quad g \in G\,. \tag{25.4.3}$$

Seien $\tilde{P} \in I^p(G)$ und $\tilde{Q} \in I^q(G)$, dann läßt sich ein Produkt $I^p(G) \otimes I^q(G) \to I^{p+q}(G)$ definieren

$$\tilde{P}\tilde{Q}(a_1,\ldots,a_p,a_{p+1}\ldots,a_{p+q}) := \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\pi}\tilde{P}(a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(p)})\tilde{Q}(a_{\pi(p+1)},\ldots,a_{\pi(p+q)}) \tag{25.4.4}$$

und mit diesem Produkt ist $I^*(G) := \oplus_{r\geq 0} I^r(G)$ eine Algebra.

Sei $\tilde{P} \in I^r(G)$, dann heißt

$$P(a) := \tilde{P}(a,\ldots,a) \quad \textit{mit } a \in \mathfrak{g} \tag{25.4.5}$$

ein Ad G invariantes Polynom, oder kurz invariantes Polynom.

Diese Definitionen kommen hier etwas unvermittelt. Ihre Sinnhaftigkeit und Mächtigkeit wird sich erst im folgenden erschließen. Insbesondere ist die geforderte Symmetrie von $\tilde{P}$, wie wir sogleich sehen werden, für den Beweis des Satzes von Chern-Weil notwendig.

Warum wird $P \in I^r(G)$ als ein Polynom bezeichnet? Nun, $\tilde{P} \in I^r(G)$ ist eine multilineare Funktion und wenn wir $\tilde{P}(ta, \ldots, ta)$ mit $t \in \mathbb{R}$ nach t entwickeln erhalten wir ein Polynom vom Grad r in t.

Umgekehrt kann man auch aus $P \in I^r(G)$ wieder $\tilde{P} \in I^r(G)$ gewinnen. Man entwickle

$$P(t_1a_1 + \ldots + t_ra_r) = \tilde{P}(t_1a_1 + \ldots + t_ra_r, \ldots, t_1a_1 + \ldots + t_ra_r)$$

nach den t_i. Dann ist

$$\tilde{P}(a_1, \ldots, a_r) = \frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^1 \cdots \partial t^r} P(t_1a_1 + \ldots + t_ra_r)\,|_{t_1=\ldots=t_r=1} \, . \tag{25.4.6}$$

Diese Konstruktion heißt *Polarisation* von P.

Wir sind nun aber noch nicht fertig mit den vorbereitenden Definitionen, denn was im Zusammenhang mit den Chern-Klassen wirklich interessiert, sind invariante Polynome von lokalen Krümmungsformen, bzw. in der Sprache der Physiker, von Yang-Mills-Feldstärken. Diese Krümmungsformen sind nun aber nicht einfach nur Elemente aus $\mathfrak{g}$, sondern eben zugleich Differentialformen. Daher verallgemeinert man die obigen Definitionen von invarianten Polynomen auf invariante Polynome von $\mathfrak{g}$-wertigen Differentialformen.

Definition 25.4.2 *Sei (P_M, M, π, G, G) ein Prinzipalbündel über der Mannigfaltigkeit M mit der Strukturgruppe G, welches eine Liegruppe über $\mathbb{C}$ sei. Statt einem Prinzipalbündel P_M könnten wir ebenso ein Vektorbündel E_M mit der Strukturgruppe G nehmen. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathfrak{g}$-wertige p-Form auf M, d.h.*

$$\mathcal{A} \in \Omega^p(M) \times \mathfrak{g} \quad \textit{und} \quad \mathcal{A} = T^\alpha \eta_\alpha \, , \tag{25.4.7}$$

wobei die T^α eine Basis von $\mathfrak{g}$ bilden und die $\eta_\alpha \in \Omega^p(M)$. Da die $\tilde{P}$ multilineare Funktionen sind, genügt es die folgende Erweiterung von $\tilde{P}$ auf $\mathfrak{g}$-wertige p-Formen des Typs $\mathcal{A}_i = X_i\eta_i$ mit $X_i \in \mathfrak{g}$ und $\eta_i \in \Omega^{p_i}$ mit $1 \leq i \leq r$ zu betrachten:

$$\tilde{P}(X_1\eta_1, \ldots, X_r\eta_r) := \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r \tilde{P}(X_1, \ldots, X_r) \, , \tag{25.4.8}$$

$$P(X\eta) := \eta \wedge \ldots \wedge \eta P(X) = \eta \wedge \ldots \wedge \eta \tilde{P}(X, \ldots, X) \, . \tag{25.4.9}$$

Den Kommutator der $\mathfrak{g}$-wertigen p-Form $\mathcal{A} = X\eta$ und der $\mathfrak{g}$-wertigen p_i-Formen $\mathcal{B}_i = X_i\eta_i$ definiert man dann als:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}, \mathcal{B}_i] &:= \eta \wedge \eta_i [X, X_i] = XX_i\eta \wedge \eta_i - X_iX\eta \wedge \eta_i \\ &= XX_i\eta \wedge \eta_i - (-1)^{pp_i} X_iX\eta_i \wedge \eta \, . \end{aligned} \tag{25.4.10}$$

Dabei ist $\eta \wedge \eta = 0$ für p-Form mit ungeradem p, siehe 6.1.12.

Nach diesen Definitionen können wir jetzt den zentralen *Satz von Chern und Weil* beweisen. Wir folgen im Beweis Nakahara (2003), S. 422, weil dieser Beweis im Gegensatz zu vielen rein mathematisch orientierten Darstellungen mit der *lokalen* Zusammenhangs-1-Form $\mathcal{A}$ (dem Yang-Mills-Potential), und der *lokalen* Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}$ (der Yang-Mills-Feldstärke) arbeitet, was Physikern üblicherweise näher liegt, als die entsprechenden *globalen* Formen.

Satz 25.4.3 (Chern-Weil) *1. Seien P ein invariantes Polynom von $\mathfrak{g}$-wertigen Differentialformen und $\mathcal{F}$ eine Krümmungs-2-Form, dann gilt*

$$dP(\mathcal{F}) = 0\ . \tag{25.4.11}$$

2. Sei $[P]$ die de-Rham-Kohomologie-Klasse von P, dann werden die Krümmungs-2-Formen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$, die zu den Zusammenhangs-1-Form $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ gehören, durch P in die gleiche Klasse $[P]$ abgebildet, d.h. $P(\mathcal{F}) - P(\mathcal{F}')$ ist exakt.

Beweis. 1. Wegen der Linearität von d genügt es, die Behauptung für ein invariantes Polynom $\tilde{P}_r$ vom Grad r zu beweisen.

Seien $g(t) = \exp(tX) \in G$ mit $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$, $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{g}$ dann folgt:

$$\tilde{P}_r(g(t)^{-1}X_1 g(t), \ldots, g(t)^{-1}X_r g(t)) = \tilde{P}_r(X_1, \ldots, X_r) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_r(g(t)^{-1}X_1 g(t), \ldots, g(t)^{-1}X_r g(t))\,|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{r} \tilde{P}_r(X_1, \ldots, -XX_i + X_i X, \ldots, X_r) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \tilde{P}_r(X_1, \ldots, [X_i, X], \ldots, X_r) \stackrel{!}{=} 0\ .\end{aligned} \tag{25.4.12}$$

Seien wie oben $\mathcal{A} = X\eta$ eine $\mathfrak{g}$-wertige p-Form und $\mathcal{B}_i = X_i\eta_i$ $\mathfrak{g}$-wertige p_i-Formen, dann folgt:

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_r(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{i-1}, [\mathcal{B}_i, \mathcal{A}], \mathcal{B}_{i+1}, \ldots, \mathcal{B}_r) \\ &= \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_{i-1} \wedge \eta_i \wedge \eta \wedge \eta_{i+1} \wedge \ldots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i X, X_{i+1}, \ldots, X_r) \\ &\quad - (-1)^{pp_i}\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_{i-1} \wedge \eta \wedge \eta_i \wedge \eta_{i+1} \wedge \ldots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \ldots, X_{i-1}, XX_i, X_{i+1}, \ldots, X_r) \\ &= (-1)^{p(p_1+\ldots+p_i)}\eta \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i X, X_{i+1}, \ldots, X_r) \\ &\quad - (-1)^{p(p_1+\ldots+p_i)}\eta \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \ldots, X_{i-1}, XX_i, X_{i+1}, \ldots, X_r) \\ &= (-1)^{p(p_1+\ldots+p_i)}\eta \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X_i, X], X_{i+1}, \ldots, X_r)\ .\end{aligned}$$

Mit 25.4.12 folgt

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^{r} \tilde{P}_r(X_1, \ldots, [X_i, X], \ldots, X_r) \\ &= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{p(p_1+\ldots+p_i)}\tilde{P}_r(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{i-1}, [\mathcal{B}_i, \mathcal{A}], \mathcal{B}_{i+1}, \ldots, \mathcal{B}_r)\end{aligned} \tag{25.4.13}$$

Als nächstes soll $d\tilde{P}_r(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_r)$ berechnet werden. Dazu bemerken wir:

$$\begin{aligned}
d(\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_r) &= \sum_{i=1}^r(-1)^{p_i(p_1+\ldots+p_{i-1})}((d\eta_i)\wedge\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_{i-1}\wedge\eta_{i+1}\wedge\ldots\wedge\eta_r)\\
&= \sum_{i=1}^r(-1)^{(p_i+1)(p_1+\ldots+p_{i-1})}(-1)^{p_i(p_1+\ldots+p_{i-1})}\\
&\quad\cdot(\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_{i-1}\wedge(d\eta_i)\wedge\eta_{i+1}\wedge\ldots\wedge\eta_r)\\
&= \sum_{i=1}^r(-1)^{(p_1+\ldots+p_{i-1})}(\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_{i-1}\wedge(d\eta_i)\wedge\eta_{i+1}\wedge\ldots\wedge\eta_r)\;.
\end{aligned}$$

Also ist

$$d\tilde{P}_r(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_r)=\sum_{i=1}^r(-1)^{(p_1+\ldots+p_{i-1})}\tilde{P}_r(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_{i-1},d\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_{i+1},\ldots,\mathcal{B}_r)\;.\qquad(25.4.14)$$

Jetzt seien alle $\mathcal{B}_i=\mathcal{F}$, also gleich der Krümmungs-2-Form, also $p_i=2$, und $\mathcal{A}$ sei die entsprechende Zusammenhangs-1-Form, also $p=1$. Dann folgt

$$d\tilde{P}_r(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F})=\sum_{i=1}^r\tilde{P}_r(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F},d\mathcal{F},\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F})\;.$$

25.4.13 schreibt sich in diesem Fall mit $[\mathcal{F},\mathcal{A}]=-[\mathcal{A},\mathcal{F}]$ (siehe 23.4.14) als

$$0=\sum_{i=1}^r\tilde{P}_r(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F},[\mathcal{F},\mathcal{A}],\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F})=-\sum_{i=1}^r\tilde{P}_r(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F},[\mathcal{A},\mathcal{F}],\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F})\;.$$

Dies subtrahieren wir von $d\tilde{P}_r(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F})$ und erhalten mit $\mathcal{DF}=d\mathcal{F}+[\mathcal{A},\mathcal{F}]$ (siehe **??**):

$$\begin{aligned}
d\tilde{P}_r(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^r\tilde{P}_r(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F},d\mathcal{F}+[\mathcal{A},\mathcal{F}],\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F})\\
&= \sum_{i=1}^r\tilde{P}_r(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F},\mathcal{DF},\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F})=0\;,\qquad(25.4.15)
\end{aligned}$$

weil $\mathcal{DF}=d\mathcal{F}+[\mathcal{A},\mathcal{F}]=0$ ist - dies ist ja gerade die Bianchi-Identität (23.4.24).

2. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$', zwei Krümmungs-2-Formen und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ die entsprechende Zusammenhangs-1-Formen. Dann kann man eine zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ interpolierende Zusammenhangs-1-Form $\mathcal{A}_t$ definieren:

$$\mathcal{A}_t:=\mathcal{A}+t\Theta:=\mathcal{A}+t(\mathcal{A}'-\mathcal{A})\quad\text{mit }0\le t\le 1\;.\qquad(25.4.16)$$

Die $\mathcal{A}_t$ entsprechende Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_t$ ist dann

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t &= d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t \wedge \mathcal{A}_t = d(\mathcal{A} + t\Theta) + (\mathcal{A} + t\Theta) \wedge (\mathcal{A} + t\Theta) \\ &= d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + td\Theta + t(\Theta \wedge \mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \Theta) + t^2(\Theta \wedge \Theta) \\ &= \mathcal{F} + t(d\Theta + \mathcal{A} \wedge \Theta + \Theta \wedge \mathcal{A}) + t^2(\Theta \wedge \Theta) \\ &= \mathcal{F} + t(d\Theta + [\mathcal{A}, \Theta]) + t^2(\Theta \wedge \Theta) \\ &= \mathcal{F} + t\mathcal{D}\Theta + t^2(\Theta \wedge \Theta) \; . \end{aligned} \tag{25.4.17}$$

Im nächsten Schritt wird jetzt von der Symmetrie von $\tilde{P}$ in seinen Argumenten Gebrauch gemacht:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} P_r(\mathcal{F}_t) &= \frac{d}{dt} \tilde{P}_r(\mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) = r\tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta + 2t\Theta \wedge \Theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \qquad (25.4.18) \\ &= r\tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) + 2rt\tilde{P}_r(\Theta \wedge \Theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \; .\end{aligned}$$

Nun muß man aber sorgfältig zwischen $\mathcal{D}\mathcal{F}_t$ und $\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t$ unterscheiden, denn für $\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t$ gilt die Bianchi-Identität (23.4.24)

$$\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t = d\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] = 0 \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{F}_t = -[\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] \; ,$$

während man für $\mathcal{D}\mathcal{F}_t$ finden:

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_t = d\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t] = -[\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t] = [\mathcal{A} - \mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] = -t[\Theta, \mathcal{F}_t] = t[\mathcal{F}_t, \Theta] \; . \tag{25.4.19}$$

Man beachtet, daß Θ eine 1-Form ist und $\mathcal{F}_t$ eine 2-Form und erhält

$$d\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) = \tilde{P}_r(d\Theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) + (-1)(r-1)\tilde{P}_r(\Theta, d\mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \; .$$

Nun kann man 25.4.13 verwenden, diesmal mit $\mathcal{B}_1 = \Theta$ und $\mathcal{B}_2 = \ldots = \mathcal{B}_r = \mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{pp_1} \tilde{P}_r([\Theta, \mathcal{A}], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}) + \sum_{i=2}^{r} (-1)^{p(p_1 + \ldots + p_i)} \tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t \ldots, \mathcal{F}_t, [\mathcal{F}_t, \mathcal{A}], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \\ &= (-1)\tilde{P}_r([\Theta, \mathcal{A}], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}) + (-1) \sum_{i=2}^{r} \tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t \ldots, \mathcal{F}_t, [\mathcal{F}_t, \mathcal{A}], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \\ &= (-1)\tilde{P}_r([\mathcal{A}, \Theta], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}) + \sum_{i=2}^{r} \tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t \ldots, \mathcal{F}_t, [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \\ &= (-1)\tilde{P}_r([\mathcal{A}, \Theta], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}) + (r-1)\tilde{P}_r(\Theta, [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

$$= \tilde{P}_r([\mathcal{A},\Theta],\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}) - (r-1)\tilde{P}_r(\Theta,[\mathcal{A},\mathcal{F}_t],\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t)\ , \tag{25.4.20}$$

wobei $[\Theta,\mathcal{A}] = [\mathcal{A},\Theta]$ und $[\mathcal{F}_t,\mathcal{A}] = -[\mathcal{A},\mathcal{F}_t]$ (siehe 23.4.14) und die Symmetrie von $\tilde{P}$ angewandt wurde.
Dies addiert man zu $d\tilde{P}_r(\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t)$ und erhält mit $\mathcal{D}\mathcal{F}_t = d\mathcal{F}_t + [\mathcal{A},\mathcal{F}_t]$ (siehe **??**):

$$d\tilde{P}_r(\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t) = \tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t) - (r-1)\tilde{P}_r(\Theta,D\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t)\ . \tag{25.4.21}$$

Für $\mathcal{D}\mathcal{F}_t$ setzt man 25.4.19 ein und erhält

$$d\tilde{P}_r(\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t) = \tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t) - (r-1)t\tilde{P}_r(\Theta,[\mathcal{F}_t,\Theta],\dots,\mathcal{F}_t)\ . \tag{25.4.22}$$

Nun kann man sich 25.4.20 statt mit $\mathcal{A}$ auch mit Θ aufschreiben, denn beides sind ja 1-Formen:

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{P}_r([\Theta,\Theta],\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}) - (r-1)\tilde{P}_r(\Theta,[\Theta,\mathcal{F}_t],\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t)\\
&= \tilde{P}_r(\Theta\wedge\Theta+\Theta\wedge\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}) + (r-1)\tilde{P}_r(\Theta,[\mathcal{F}_t,\Theta],\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t)\\
&= 2\tilde{P}_r(\Theta\wedge\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}) + (r-1)\tilde{P}_r(\Theta,[\mathcal{F}_t,\Theta],\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$-(r-1)t\tilde{P}_r(\Theta,[\mathcal{F}_t,\Theta],\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t) = 2t\tilde{P}_r(\Theta\wedge\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F})\ .$$

Damit schreibt sich 25.4.22 als

$$d\tilde{P}_r(\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t) = \tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t) + 2t\tilde{P}_r(\Theta\wedge\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F})\ .$$

Dies vergleicht man mit 25.4.18 und findet

$$\frac{d}{dt}P_r(\mathcal{F}_t) = r\,d\tilde{P}_r(\Theta,\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t)\ . \tag{25.4.23}$$

Wenn man dies nun von $t=0$ bis $t=1$ integriert folgt:

$$P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) = P_r(\mathcal{F}_1) - P_r(\mathcal{F}_0) = d\left(r\int\limits_0^1 \tilde{P}_r(\mathcal{A}'-\mathcal{A},\mathcal{F}_t,\dots,\mathcal{F}_t)\right)\ . \tag{25.4.24}$$

□

Damit unterscheiden sich $P_r(\mathcal{F}')$ und $P_r(\mathcal{F})$ nur um eine exakte Form und liegen somit in der selben Klasse $[P]$.

Definition 25.4.4 *Sei (P_M, M, π, G, G) ein Prinzipalbündel über der Mannigfaltigkeit M mit der Strukturgruppe G, welches eine Liegruppe über $\mathbb{C}$ sei, oder ein entsprechendes Vektorbündel (E_M, M, π, F, G), sei P ein invariantes Polynom von $\mathfrak{g}$-wertigen Differentialformen, dann heißt die de-Rham-Kohomologie-Klasse $[P]$ die charakteristische Klasse $\chi(P)$, bzw. ausführlicher geschrieben $\chi_{P_M}(P)$, bzw. $\chi_{E_M}(P)$.*

Der Chern-Weil Satz zeigt also, daß es eine Abbildung von der Algebra der invarianten Polynome $\mathfrak{g}$-wertiger Differentialformen $I^*(G)$ in die Algebra der de-Rham-Kohomologie-Klassen $H^*(M)$ gibt. André Weil hat gezeigt, daß diese Abbildung tatsächlich ein Homomorphismus ist und bezüglich des Rücktransports (pullback) von Bündelabbildungen auch die Eigenschaft der *Natürlichkeit* aufweist:

Satz 25.4.5 (Weil Homomorphismus) *1. Sei $\chi(P)$ eine charakteristische Klasse auf einem Prinzipalbündel (P_M, M, π, G, G), oder einem entsprechenden Vektorbündel (E_M, M, π, F, G), dann ist die Abbildung*

$$\chi : I^*(G) \to H^*(M) \tag{25.4.25}$$

ein Homomorphismus. (Man unterscheide hier das Prinzipalbündel P_M vom invarianten Polynom P.)

2. Seien P_M das Prinzipalbündel (P_M, M, π, G, G), oder E_M ein entsprechenden Vektorbündel, und sei $f : N \to M$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Basismannigfaltigkeiten, dann gilt für die charakteristischen Klassen des Prinzipalbündels P_M und des sog. Rücktransportbündel $P_N := f^*P_M$ die Eigenschaft der sog. Natürlichkeit:

$$\chi_{f^*P_M} = f^*\chi_{P_M} \ . \tag{25.4.26}$$

Beweis. 1. Seien $P_r \in I^r(G)$, $P_s \in I^s(G)$ und sei eine $\mathfrak{g}$-wertige Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}$ gegeben als $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\alpha T_\alpha$ mit $\mathcal{F}^\alpha \in \Omega^2(M)$ und $T_\alpha \in \mathfrak{g}$, dann folgt für das Produkt der r-Form P_r mit der s-Form P_s aufgrund von 25.4.4:

$$\begin{aligned}
P_r P_s(\mathcal{F}) = & \frac{1}{(r+s)!} \mathcal{F}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}^{\alpha_r} \wedge \mathcal{F}^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}^{\beta_s} \\
& \cdot \tilde{P}_r(T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_r}) \tilde{P}_s(T_{\beta_1}, \ldots, T_{\beta_r}) \\
= & P_r(\mathcal{F}) \wedge P_s(\mathcal{F}) \ .
\end{aligned}$$

Da $P_r(\mathcal{F}) \in H^r(M)$ und $P_s(\mathcal{F}) \in H^s(M)$ und $P_r P_s(\mathcal{F}) \in H^{r+s}(M)$ ist die Abbildung χ ein Homomorphismus.

2. Sei $\mathcal{A}$ eine Zusammenhangs-1-Form auf P_M, dann ist die rücktransportierte Form $f^*\mathcal{A}$ eine Zusammenhangs-1-Form auf dem Rücktransportbündel f^*P_M, denn:

auf zwei überlappenden Karten U_i und U_j von M gilt mit der Kartenwechselfunktion t_{ij} (siehe 23.4.8):

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \ ;$$

für $f^*\mathcal{A}_j$ gilt dann auf den überlappenden Karten $f^{-1}(U_i)$ und $f^{-1}(U_j)$ von N:

$$f^*(\mathcal{A}_j) = f^*(t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) = f^*(t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij}) + f^*(t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \ ,$$

da f^* linear ist. Weiter folgt mit $f^*(\psi \wedge \omega) = f^*(\psi) \wedge f^*(\omega)$ (siehe 6.2.5) und $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$ (siehe 6.3.4):

$$f^*(\mathcal{A}_j) = f^*(t_{ij}^{-1})(f^*\mathcal{A}_i) f^*(t_{ij}) + f^*(t_{ij}^{-1}) df^*(t_{ij}) \ ,$$

womit also auch $f^*\mathcal{A}_j$ die Kompatibilitätsbedingung einer Zusammenhangs-1-Form auf dem Rücktransportbündel f^*P_M erfüllt. Ebenso folgt für den Rücktransport der Krümmungs-2-Form $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} f^*(\mathcal{F}) &= f^*(d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) = f^*(d\mathcal{A}) + f^*(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \\ &= df^*(\mathcal{A}) + f^*(\mathcal{A}) \wedge f^*(\mathcal{A}) \ . \end{aligned}$$

Damit folgt dann für das invariante Polynom P_r

$$f^*(P(\mathcal{F})) = P(f^*(\mathcal{F})) \quad \Rightarrow \quad f^*\chi_{P_M}(P) = \chi_{f^*P_M}(P) \ . \qquad \square$$

Der zweite Punkt des obigen Beweises hat die schöne Folge, daß die charkteristischen Klassen von trivialen Prinzipal- oder Vektorbündeln über einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten M selbst trivial sind, d.h. daß $\chi_{P_M}[P] \simeq \mathbb{1}$ ist, denn:

sei (P_M, M, π, G, G) ein triviales Prinzipalbündel über einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten M und f die Abbildung von M in einen Punkt $p_0 \in M$, also $f : M \to \{p_0\}$. Dann ist natürlich das Prinzipalbündel $(P_{\{p_0\}}, \{p_0\}, \pi, G, G)$ über dem Punkt $\{p_0\}$ ein triviales Prinzipalbündel, die entsprechende Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}$ ist die Identität und die entsprechende charakteristische Klasse $\chi_{\{p_0\}} = 1$, d.h. ist trivial. Daraus folgt:

$$\chi_{P_M}(P) = \chi_{f^*\{p_0\}}(P) = f^*\chi_{\{p_0\}}(P) \simeq \mathbb{1} \ . \tag{25.4.27}$$

25.5 Chern-Klassen

Chern geht von einem komplexen Vektorbündel (E_M, M, π, F, G) aus, dessen Faser $F = \mathbb{C}^k$ und dessen Struktur-Liegruppe $G = GL(k, \mathbb{C})$ mit der entsprechenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist. Aufgrund des Satzes von Chern-Weil (25.4.11) werden alle Krümmungs-2-Formen $\mathcal{F}$ durch ein invariantes Polynom P in die gleiche de-Rham-Kohomologie-Klasse $[P]$ abgebildet. Also ist man in Bezug auf die Charakteristischen Klassen frei eine beliebige Zusammenhangs-1-Form $\mathcal{A}$ zu wählen. Häufig führt man auf F ein hermitesches Skalarprodukt ein und wählt dann für $\mathcal{A}$ eine metrische Zusammenhangs-1-Form. Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man auf der Faser $F = \mathbb{C}^k$ eine orthonormale Basis (hier *Rahmen*, bzw. engl. *frame* genannt) defineren und wählt folglich als Struktur-Liegruppe $G = U(k)$, die Matrixgruppe der unitären Matrizen, die orthonormale Basen in orthonormale Basen abbilden. Die Zusammenhangs- und Krümmungsformen sind dann Elemente von $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(k)$, wobei $i \cdot \mathfrak{u}(k)$ hermitesche Matrizen sind. Bei dieser Konstruktion spricht man dann von einem *Rahmenbündel* (*frame bundle*). Wenn dieses Rahmenbündel E_M orientierbar ist, dann reduziert sich die Struktur-Liegruppe auf $G = SU(k)$, gerade jene Liegruppen, welche die Grundlage der modernen physikalischen Eichtheorien darstellen.

Chern definiert nun die folgende Funktion $c(\mathcal{F})$, die sog. totale Chern-Klasse, und die Funktionen $c_j(\mathcal{F})$, die j-ten Chern-Klassen:

Definition 25.5.1

$$c(\mathcal{F}) := \det(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) \;, \tag{25.5.1}$$

bzw. mit $t \in \mathbb{R}$

$$c(t\mathcal{F}) := \det(\mathbb{1} + \frac{it\mathcal{F}}{2\pi}) = \sum_{j=0}^{k} c_j(\mathcal{F})\, t^j \;. \tag{25.5.2}$$

Zunächst soll gezeigt, daß $c(\mathcal{F})$ tatsächlich ein invariantes Polynom im Sinne der Chern-Weil Theorie ist.

Lemma 25.5.2 *1.* $c(\mathcal{F})$ *ist ein invariantes Polynom.*

2. Für die $c_j(\mathcal{F})$ *gilt:*

$$c_0(\mathcal{F}) = 1 \;, \tag{25.5.3}$$

$$c_1(\mathcal{F}) = (\frac{i}{2\pi})\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) \;, \tag{25.5.4}$$

$$c_2(\mathcal{F}) = (\frac{i}{2\pi})^2 \frac{1}{2}[-\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}) + \mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F})]], \tag{25.5.5}$$

$$\begin{aligned} c_3(\mathcal{F}) = {} & (\frac{i}{2\pi})^3[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}) \\ & + \frac{1}{6}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F})] \;, \end{aligned} \tag{25.5.6}$$

$$\begin{aligned} c_4(\mathcal{F}) = {} & (\frac{i}{2\pi})^4[-\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}) \\ & + \frac{1}{8}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}) \\ & - \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}) \\ & + \frac{1}{24}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F})\wedge\mathrm{tr}(\mathcal{F})] \;. \end{aligned} \tag{25.5.7}$$

$$\ldots = \ldots$$

$$\ldots = \ldots$$

$$c_k(\mathcal{F}) = (\frac{i}{2\pi})^k \det(\mathcal{F}) \;, \tag{25.5.8}$$

$$c_j(\mathcal{F}) = 0 \quad \text{für } 2j > m,\; j > k \;. \tag{25.5.9}$$

Beweis. Die Invarianz von $c(\mathcal{F})$ unter G folgt sofort aus den Eigenschaften der Determinanten:

$$c(g^{-1}\mathcal{F}g) = \det(g^{-1}(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi})g) = \det(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) = c(\mathcal{F}) \; .$$

Daß $c(\mathcal{F})$ auch ein symmetrisches Polynom in $\mathcal{F}$ ist kann man folgendermaßen sehen. Zunächst nehmen wir an, daß die $k \times k$ Matrix $i\mathcal{F}$ und damit auch $\mathbb{1} + i\mathcal{F}/(2\pi)$ diagonalisierbar sind, d.h. Elemente von $GL_{diag}(k, \mathbb{C})$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) &= \det(\mathrm{diag}(1+\lambda_1, \ldots, 1+\lambda_k)) = \prod_{j=1}^{k}(1+\lambda_j) \\
&= \exp\{\ln \prod_{j=1}^{k}(1+\lambda_j)\} = \exp\{\sum_{j=1}^{k} \ln(1+\lambda_j)\} \\
&= \exp\{\mathrm{tr}[\ln(1 + \mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi})]\} \; .
\end{aligned}$$

Wenn man den Logarithmus und die Exponentialfunktion als Potenzreihen entwickelt erhält man also eine Potenzreihe in $\mathrm{tr}(\mathcal{F})$. Da $\mathcal{F}$ eine 2-Form ist verschwinden die $c_j(\mathcal{F})$ für alle $2j > m = \dim(M)$ trivialerweise. Daher ist $c(\mathcal{F})$ ein symmetrisches Polynom. Die Polynomreihe kann aber auch nicht weiter als bis zu $c_k(\mathcal{F})$ gehen, denn der höchste Term von $c(\mathcal{F})$ ist:

$$c_k(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{k} \lambda_j = \det(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) = (\frac{i}{2\pi})^k \det(\mathcal{F}) \; .$$

Um die anderen $c_j(\mathcal{F})$ zu bestimmen kann man den Logarithmus als Potenzreihe schreiben:

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j$$

und erhält damit

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) &= \exp\{\mathrm{tr}[(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) - \frac{1}{2}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) + \frac{1}{3}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) + \ldots]\} \\
&= \exp\{\mathrm{tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) + \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) + \\
&\quad - \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) + \ldots\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\{\mathrm{tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi})\} \wedge \exp\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi})\} \\
&\quad \wedge \exp\{\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi})\} \\
&\quad \wedge \exp\{-\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi})\} \ \wedge \ldots \\
&= \{1 + (\frac{i}{2\pi})\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) + \frac{1}{2!}(\frac{i}{2\pi})^2\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}) \\
&\quad + \frac{1}{3!}(\frac{i}{2\pi})^3\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}) \\
&\quad + \frac{1}{4!}(\frac{i}{2\pi})^4\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}) + \ldots\} \\
&\quad \wedge \{1 - \frac{1}{2}(\frac{i}{2\pi})^2)\,\mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2}(\frac{i}{2\pi})^2)^2\,\mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \ldots\} \\
&\quad \wedge \{1 + \frac{1}{3}(\frac{i}{2\pi})^3\,\mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \ldots\} \\
&\quad \wedge \{1 - \frac{1}{4}(\frac{i}{2\pi})^4\,\mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \ldots\} \\
&\quad \wedge \ldots\ .
\end{aligned}
$$

Nun faßt man Terme gleicher Ordnung in $\mathcal{F}$ zusammen und erhält:

$$
\begin{aligned}
c_0(\mathcal{F}) &= 1\ , \\
c_1(\mathcal{F}) &= (\frac{i}{2\pi})\,\mathrm{tr}(\mathcal{F})\ , \\
c_2(\mathcal{F}) &= (\frac{i}{2\pi})^2[-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F})]\ , \\
c_3(\mathcal{F}) &= (\frac{i}{2\pi})^3[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F})]\ , \\
c_4(\mathcal{F}) &= (\frac{i}{2\pi})^4[-\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \\
&\quad + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \\
&\quad - \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})
\end{aligned}
$$

$$+ \frac{1}{4!} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F})] \ .$$

Dieses Ergebnis kann man nun von den diagonalisierbaren Matrizen $GL_{diag}(k, \mathbb{C})$ auf ganz $GL(k, \mathbb{C})$ ausdehnen, weil die diagonalisierbaren Matrizen $GL_{diag}(k, \mathbb{C})$ dicht in $GL(k, \mathbb{C})$ liegen und die totale Chern-Klasse c als Polynom stetig ist. Diese Dichtheits-Aussage kann man folgerndermaßen sehen: aus der linearen Algebra wissen wir, daß jede Matrix $A \in GL(k, \mathbb{C})$ in der Form $A = C^{-1} \cdot D \cdot C$ geschrieben werden kann, wobei $C \in GL(k, \mathbb{C})$ und D eine obere Dreiecks-Matrix ist (Stichwort: Jordansche Normalform, siehe z.B. Koecher (1992), S. 238 ff.):

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & \cdots & D_{1k} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & D_{kk} \end{pmatrix} \ .$$

Jetzt kann man eine Matrix $D_{\vec{\epsilon}}$ mit 'kleinem' $\vec{\epsilon} := (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$ konstruieren,

$$(D_{\vec{\epsilon}})_{ij} := \begin{cases} D_{ij} + \epsilon_i & \text{für } i = j \ , \\ D_{ij} & \text{für } i \neq j \ , \end{cases}$$

so daß alle D_{ii}voneinander verschieden sind, und damit alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $D_{\vec{\epsilon}}$ voneinander verschieden sind, und sich damit $D_{\vec{\epsilon}}$ diagonalisieren läßt. Als Matrixnorm verwenden wir

$$||D||^2 := \sum_{ij}^{k} |D_{ij}|^2$$

und erhalten damit

$$\lim_{\vec{\epsilon} \to \vec{0}} ||D_{\vec{\epsilon}} - D||^2 = \lim_{\vec{\epsilon} \to \vec{0}} \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i^2 = 0 \ .$$

Also liegt $GL_{diag}(k, \mathbb{C})$ bzgl. der üblichen Matrixnorm dicht in $GL(k, \mathbb{C})$. □

Da $c(\mathcal{F})$ ein invariantes Polynom im Sinne der Chern-Weil Theorie ist und $\mathcal{F}$ eine $\mathfrak{g}$-wertige Krümmungs-2-Form, deshalb folgt zunächst einmal, daß $c(\mathcal{F})$ ein Element des de Rham Kohomologie-Rings H^{2*} über M mit komplexen Koeffizienten ist:

$$c(\mathcal{F}) \in H^{2*}(M, \mathbb{C}) \ .$$

Wenn man nun zu einem Rahmenbündel übergeht, d.h. ein hermitesches Skalarprodukt auf der Faser $F = \mathbb{C}^k$ einführt und eine metrische Zusammenhang-1-Form $\mathcal{A}$ und eine Orthonormalbasis und $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(k)$ wählt, dann ist $c(\mathcal{F})$ sogar reell:

$$c(\mathcal{F}) \in H^{2*}(M, \mathbb{R}) \subset H^{2*}(M, \mathbb{C}) \ , \tag{25.5.10}$$

denn $i\mathcal{F} \in i \cdot \mathfrak{u}(k)$ ist hermitesch und damit folgt

$$\begin{aligned}\overline{(c(\mathcal{F}))} &= \overline{(\det(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}))} = \det(\mathbb{1} + \overline{(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi})}) \\ &= \det(\mathbb{1} + (\frac{i\mathcal{F}}{2\pi})) = c(\mathcal{F})) \ .\end{aligned}$$

Von Bedeutung ist auch, wie die Chern-Klasse eines Whitney-Summen-Bündels (23.3.4) auf das Produkt der einzelnen Chern-Klassen zurückgeführt werden kann.

Lemma 25.5.3 *Seien $\mathcal{F}_{E_1}$ und $\mathcal{F}_{E_2}$ die Krümmungs-2-Formen der komplexen Vektorbündel, bzw. Prinzipalbündel E_1 und E_2, dann gilt:*

$$c(\mathcal{F}_{E_1 \oplus E_2}) = c(\mathcal{F}_{E_1}) \wedge c(\mathcal{F}_{E_2}) \ . \tag{25.5.11}$$

Beweis. Die Fasern von $E_1 \oplus E_2$ sind ja $F_1 \oplus F_2$ und daher ist Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_{E_1 \oplus E_2}$ blockdiagonal:

$$\mathcal{F}_{E_1 \oplus E_2} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{E_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_{E_2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}c(\mathcal{F}_{E_1 \oplus E_2}) &= \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}_{E_1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}_{E_2} \end{pmatrix} \\ &= \det(\mathbb{1} + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}_{E_1}) \wedge \det(\mathbb{1} + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}_{E_2}) \\ &= c(\mathcal{F}_{E_1}) \wedge c(\mathcal{F}_{E_2}) \ .\end{aligned}$$

□

Für ein komplexes Linienbündel $L := (E_M, M, \pi, F, G)$ mit Faser $F = \mathbb{C}^1$ und Strukturgruppe $G \in GL(1, \mathbb{C})$ folgt sofort:

$$c(\mathcal{F}) = c_0(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) = 1 + \lambda_1 = 1 + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F} \ . \tag{25.5.12}$$

Da für ein beliebiges komplexes Vektorbündel (E_M, M, π, F, G) gilt

$$c(\mathcal{F}) = \det(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) = \prod_{j=1}^{k}(1 + \lambda_j) \tag{25.5.13}$$

kann man die totale Chern-Klasse von (E_M, M, π, F, G) auch interpretieren als die Chern-Klasse eines Whitney-Summen-Bündels von k komplexen Linienbündeln:

$$c(\mathcal{F}_M) = c(\mathcal{F}_{L_1}) \wedge \ldots \wedge c(\mathcal{F}_{L_k}) \ . \tag{25.5.14}$$

Die Konstruktion einer Abbildung von $f : L_1 \oplus \ldots \oplus L_k \to E_M$, bzw. des Rücktransports f^*, wird in der Literatur als das *Splitting-Prinzip* bezeichnet (siehe Bott u. Tu (1982), S. 275 ff., oder Shanahan (1978), S. 191).

Wenn man das Produktbündel $L \otimes L^*$ aus einem komplexen Linienbündel L und seinem dualen Bündel L^* bildet, dann hat $L \otimes L^*$ einen nichtverschwindenden, globalen Schnitt und ist damit ein triviales Bündel (23.2.3). Damit ist die Chern-Klasse $c(\mathcal{F})$ von $L \otimes L^*$ trivial, d.h.

$$c(\mathcal{F}_M) = c(\mathcal{F}_L) \wedge c(\mathcal{F}_{L^*}) \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad c_1(\mathcal{F}_M) = c_1(\mathcal{F}_L) + c_1(\mathcal{F}_{L^*}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1(\mathcal{F}_{L^*}) = -\lambda_1(\mathcal{F}_L) \; . \tag{25.5.15}$$

25.6 Chern-Charaktere

Die Chern-Charaktere gehen ebenso wie die Chern-Klassen von einem komplexen Vektorbüdel (E_M, M, π, F, G) aus, dessen Faser $F = \mathbb{C}^k$ und dessen Struktur-Liegruppe $G = U(k)$ ist, so daß $i\mathfrak{g}$ aus hermiteschen und damit diagonalisierbaren Matrizen besteht. Sie sind eng verwandt mit den Chern-Klassen, wie man unmittelbar aus der folgenden Definition sehen kann.

Definition 25.6.1

$$ch(\mathcal{F}) := \operatorname{tr} \exp(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}) \; , \tag{25.6.1}$$

bzw. mit $t \in \mathbb{R}$

$$ch(t\mathcal{F}) := \operatorname{tr} \exp(\frac{it\mathcal{F}}{2\pi}) = \sum_{j=0} ch_j(\mathcal{F})\, t^j \; , \tag{25.6.2}$$

$$ch_j(\mathcal{F}) = \frac{1}{j!} \operatorname{tr}((\frac{i\mathcal{F}}{2\pi})^j) \; , \tag{25.6.3}$$

wobei die Multiplikation in $\mathcal{F}^j$ *natürlich die äußere Multiplikation* $\wedge$ *ist.*

Da der Chern-Charakter $ch(\mathcal{F})$ eine Potenzreihe in $\operatorname{tr}(\mathcal{F})$ ist, der wie die Chern-Klasse $c(\mathcal{F})$ für alle $2j > m = \dim(M)$ verschwindet, ist $ch(\mathcal{F})$ ein symmetrisches Polynom.

Für die $ch_j(\mathcal{F})$ gilt:

$$ch_0(\mathcal{F}) = \operatorname{tr}(\mathbb{1}) = k \; , \tag{25.6.4}$$

$$ch_1(\mathcal{F}) = (\frac{i}{2\pi}) \operatorname{tr}(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}) \; , \tag{25.6.5}$$

$$ch_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}(\frac{i}{2\pi})^2 \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) = \frac{1}{2}[-2c_2(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})] \; . \tag{25.6.6}$$

$$\ldots = \ldots \; .$$

25.7 Additive und multiplikative Charakteristische Klassen

Wir folgen hier vorwiegend dem schönen Vortrag von Prof. Christian Bär aus dem Jahr 2006 am MPI für Gravitationsphysik in Postdam-Golm (Bär (2011)). Der Gedanke, aus den Chern-Klassen neue additive und multiplikative Charakteristische Klassen zu konstruieren geht im Wesentlichen auf die Arbeiten von Hirzebruch (1978) zurück.

Da die Chern-Klassen invariante Polynome von $\mathfrak{g}$-wertigen Differentialformen sind versucht man sie mit Hilfe von Potenzreihen in andere invariante Polynome transformieren. Die j-te Chern-Klassen $c_j(\mathcal{F})$ ist ja aufgrund des Satzes von Chern-Weil gerade der de Rham Kohomologie-Vektorraum $H^{2j}(M,\mathbb{R})$. Diese de Rham Kohomologie-Klassen bilden die kommutative, graduierte Algebra

$$H^{2*}(M,\mathbb{R}) = \bigoplus_j H^{2j}(M,\mathbb{R}) \; . \tag{25.7.1}$$

Graduiert bedeutet hier, daß gilt

$$H^{2j}(M,\mathbb{R}) \cdot H^{2k}(M,\mathbb{R}) \subset H^{2(j+k)}(M,\mathbb{R}) \; . \tag{25.7.2}$$

Verallgemeinert betrachtet man also eine kommutative, graduierte Algebra $R = \bigoplus_j R^j$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit dem Einselement 1 und der Graduierung $R^j \cdot R^k \subset R^{j+k}$.

Definition 25.7.1 *Sei $R = \bigoplus_j R^j$ eine kommutative, graduierte Algebra über einem Körper $\mathbb{K}$ mit dem Einselement 1, und sei $g(x)$ eine formale Potenzreihe über $\mathbb{K}$, d.h.*

$$g(x) := \sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j \quad \mathit{mit}\ g_j \in \mathbb{K} \; . \tag{25.7.3}$$

Dann definiert man den folgenden Vektorraum-Endomorphismus

$$\Lambda_g : R \to R \; , \quad \Lambda_g|_{R^j} := (-1)^{j+1} \cdot j \cdot g_j \; . \tag{25.7.4}$$

Damit gilt $\Lambda_g(R^j) \subset R^j$.

Angewandt auf $H^{2*}(M,\mathbb{R})$ heißt das:

$$\Lambda_g : R \to R \; , \quad \Lambda_g|_{H^{2j}} := (-1)^{j+1} \cdot j \cdot g_j \; . \tag{25.7.5}$$

Natürlich stellt sich hier sofort die Frage, warum kommt in der Definition von Λ_g der Faktor$(-1)^{j+1} \cdot j$ vor? In der nächsten Definition der Abbildung $g_R : R \to R$ kommt ein Term der Form $\Lambda_g(\log(c))$ vor, und der Faktor $(-1)^{j+1} \cdot j$ kompensiert gerade den Faktor $(-1)^{j+1}\frac{1}{j}$ der Potenzreihe des Logarithmus.

Mit Hilfe von $g(x)$ und Λ_g kann man nun die folgende Abbildung $g_R : R \to R$ definieren:

Definition 25.7.2 (Additive Klassen) *Sei c ein Element der kommutativen, graduierte Algebra $R = \bigoplus_j R^j$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit dem Einselement 1, und sei $g(x)$ eine formale Potenzreihe über $\mathbb{K}$, d.h.*

$$c \in R\ , \quad c := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j\ , \tag{25.7.6}$$

$$g_R : R \to R\ , \quad g_R(c,k) := k \cdot g_0 \cdot 1 + \Lambda_g(\log(c))\ , \tag{25.7.7}$$

$$\textit{mit } k \in \mathbb{N} \textit{ und } \log(1+y) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{y^l}{l}\ . \tag{25.7.8}$$

Seien $c = c(\mathcal{F})$ die totale Chern-Klasse eines komplexen Vektorbündels oder Prinzipalbündels E vom Rang k über der Basismannigfaltigkeit M, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $R^j = H^{2j}(M,\mathbb{R})$, $R = H^{2*}(M,\mathbb{R})$, dann heißt

$$\tilde{g}_E(c) := k \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_E))) \tag{25.7.9}$$

die additive Klasse von E bezüglich g.

Dabei ist die Summe der Terme von $\log(c)$ vom Grad j ein endlicher polynomialer Ausdruck in den $c_1, \ldots, c_j$.

Additiv heißen die Klassen $\tilde{g}_E(c)$ weil gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{E_1 \oplus E_2}(c) &= (k_1 + k_2) \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1} \oplus \mathcal{F}_{E_2}))) \\
&= (k_1 + k_2) \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}) \wedge c(\mathcal{F}_{E_2}))) \\
&= (k_1 + k_2) \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}))) + \log(c(\mathcal{F}_{E_2}))) \\
&= (k_1 + k_2) \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}))) + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_2}))) \\
&= \tilde{g}_{E_1}(c) + \tilde{g}_{E_2}(c)\ .
\end{aligned} \tag{25.7.10}$$

Die obige Definition der additiven Klasse $\tilde{g}_E(c)$ bezüglich der Funktion g (25.7.8, 25.7.9) erscheint zunächst etwas undurchsichtig. Das folgende Lemma beweist eine Spektralform von $\tilde{g}_E(c)$ und klärt so die Zusammenhänge.

Lemma 25.7.3 *Sei die Chern-Klasse $c(\mathcal{F}_E)$ in Diagonalform gegeben, d.h.*

$$c(\mathcal{F}_E) = \prod_{j=1}^{k} (1 + \lambda_j)\ .$$

Dann gilt für die additive Klasse $\tilde{g}_E(c)$ bezüglich der Funktion g die Spektralformel:

$$\tilde{g}_E(c) = \sum_{j=1}^{k} g(\lambda_j)\ . \tag{25.7.11}$$

Beweis.

$$c(\mathcal{F}_E) = \prod_{j=1}^{k}(1+\lambda_j) \quad \Rightarrow$$

$$\log(c(\mathcal{F}_E)) = \sum_{j=1}^{k} \log(1+\lambda_j) = \sum_{j=1}^{k}[\lambda_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 + \frac{1}{3}\lambda_j^3 \mp \ldots] \ .$$

Der l-te Term von Λ_g ist nach Definition gerade

$$\Lambda_g^{(l)} = (-1)^{l+1} \cdot l \cdot (\log(g))_l \ ,$$

wobei $(\log(g))_l$ gerade der Vorfaktor des x^l-Terms in der Potenzreihe von $g(x)$ ist, d.h.

$$g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (g)_l x^l \ .$$

Damit folgt für $\tilde{g}_E(c)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_E(c) &= kg_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_E)) \\
&= kg_0 + \sum_{j=1}^{k}[\Lambda_g^{(1)}\lambda_j - \frac{1}{2}\Lambda_g^{(2)}\lambda_j^2 \pm \ldots] \\
&= kg_0 + \sum_{j=1}^{k}[(g)_1\lambda_j + (g)_2\lambda_j^2 + \ldots] \\
&= \sum_{j=1}^{k}[g_0 + (g)_1\lambda_j + (g)_2\lambda_j^2 + \ldots] \\
&= \sum_{j=1}^{k} g(\lambda_j) \ .
\end{aligned}$$

□

Als Beispiel betrachten wir für die formale Potenzreihe $g(x)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion:

$$g(x) := e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \ . \tag{25.7.12}$$

Damit folgt:

$$g_0 = 1 \ , \ g_1 = 1 \ , \ g_2 = \frac{1}{2} \ , \ \ldots \ , \quad c_0(\mathcal{F}_E) = 1 \ ,$$

$$\Lambda_{e^x}|_{H^0(M,\mathbb{R})} = 0 \ , \ \Lambda_{e^x}|_{H^2(M,\mathbb{R})} = 1 \ , \ \Lambda_{e^x}|_{H^4(M,\mathbb{R})} = -1 \ , \ \dots \ .$$

Der Faktor $(-1)^{j+1} \cdot j$ in Λ_{e^x} kompensiert gerade die Vorfaktoren der Potenzreihenentwicklung des Logarithmus und man erhält also die Potenzreihe $g(x) = e^x$ mit $x^j = c_j(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned}\log(c(\mathcal{F})) &= \log(1 + c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots) \\ &= (c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots) - \frac{1}{2}(c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots)^2 + \dots \\ &= c_1(\mathcal{F}) + (c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2} c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \dots \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{E,0}(c) = k \ , \ \tilde{g}_{E,1}(c) = c_1(\mathcal{F}) \ , \ \tilde{g}_{E,2}(c)_2 = -(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2} c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) \ , \ \dots \ . \tag{25.7.13}$$

Also ist $\tilde{g}_E(c) = ch(\mathcal{F})$, d.h. der bereits oben behandelten totale Chern-Charakter.

Auf ganz analoge Weise kann man jetzt mittels einer Funktion $f(x)$ und $\Lambda_{\log(f)}$ multiplikative Klassen $f_R : R \to R$ definieren:

Definition 25.7.4 (Multiplikative Klassen) *Sei c ein Element der kommutativen, graduierte Algebra $R = \bigoplus_j R^j$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit dem Einselement 1, und sei $g(x)$ eine formale Potenzreihe über $\mathbb{K}$, d.h.*

$$c \in R \ , \quad c := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \ , \tag{25.7.14}$$

$$f_R : R \to R \ , \quad f_R(c) := \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c))) \ , \tag{25.7.15}$$

$$\textit{mit } k \in \mathbb{N} \textit{ und } \log(1+y) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{y^l}{l} \ . \tag{25.7.16}$$

Seien $c = c(\mathcal{F})$ die totale Chern-Klasse eines komplexen Vektorbündels oder Prinzipalbündels E vom Rang k über der Basismannigfaltigkeit M, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $R^j = H^{2j}(M,\mathbb{R})$, $R = H^{2*}(M,\mathbb{R})$, dann heißt

$$\tilde{f}_E(c) := \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F}_E)))) \ , \tag{25.7.17}$$

$$\textit{mit } \log(1+y) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{y^l}{l} \ . \tag{25.7.18}$$

die multiplikative Klasse von E bezüglich g.

Multiplikativ heißen die Klassen $\tilde{f}_E(c)$ weil gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{E_1 \oplus E_2}(c) &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F}_{E_1} \oplus \mathcal{F}_{E_2})))) \\
&= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}) \wedge c(\mathcal{F}_{E_2})))) \\
&= \exp(\Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1})) + \log(c(\mathcal{F}_{E_2})))) \\
&= \exp(\Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}))) + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_2})))) \\
&= \exp(\Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1})))) \wedge \exp(\Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_2})))) \\
&= \tilde{f}_{E_1}(c) \wedge \tilde{f}_{E_2}(c) \; . \qquad (25.7.19)
\end{aligned}$$

Die obige Definition der multiplikativen Klasse $\tilde{f}_E(c)$ bezüglich der Funktion g (25.7.17, 25.7.18) erscheint zunächst etwas undurchsichtig. Das folgende Lemma beweist eine Spektralform von $\tilde{f}_E(c)$ und klärt so die Zusammenhänge.

Lemma 25.7.5 *Sei die Chern-Klasse $c(\mathcal{F}_E)$ in Diagonalform gegeben, d.h.*

$$c(\mathcal{F}_E) = \prod_{j=1}^{k}(1 + \lambda_j) \; .$$

Dann gilt für die multiplikativen Klasse $\tilde{f}_E(c)$ bezüglich der Funktion g die Spektralformel:

$$\tilde{f}_E(c) = \prod_{j=1}^{k} g(\lambda_j) \; . \qquad (25.7.20)$$

Beweis.

$$c(\mathcal{F}_E) = \prod_{j=1}^{k}(1 + \lambda_j) \quad \Rightarrow$$

$$\log(c(\mathcal{F}_E)) = \sum_{j=1}^{k} \log(1 + \lambda_j) = \sum_{j=1}^{k}[\lambda_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 + \frac{1}{3}\lambda_j^3 \mp \ldots] \; .$$

Der l-te Term von $\Lambda_{\log(g)}$ ist nach Definition gerade

$$\Lambda_{\log(g)}^{(l)} = (-1)^{l+1} \cdot l \cdot (\log(g))_l \; ,$$

wobei $(\log(g))_l$ gerade der Vorfaktor des x^l-Terms in der Potenzreihe von $(\log(g))(x)$ ist, d.h.

$$(\log(g))(x) = \sum_{l=1}^{\infty}(\log(g))_l x^l \; .$$

Damit folgt für $\tilde{f}_E(c)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_E(c) &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F}_E)))) \\
&= \exp(\sum_{j=1}^{k}[\Lambda^{(1)}_{\log(g)}\lambda_j - \frac{1}{2}\Lambda^{(2)}_{\log(g)}\lambda_j^2 \pm \ldots]) \\
&= \exp(\sum_{j=1}^{k}[(\log(g))_1\lambda_j + (\log(g))_2\lambda_j^2 + \ldots]) \\
&= \exp(\sum_{j=1}^{k}[(\log(g))(\lambda_j)]) = \prod_{j=1}^{k}\exp[(\log(g))(\lambda_j)] \\
&= \prod_{j=1}^{k} g(\lambda_j) \; . \qquad \square
\end{aligned}$$

25.8 Todd-Klassen

Die totale Todd-Klasse wird als multiplikative Charakteristische Klasse aus der totalen Chern-Klasse abgeleitet. Als Potenzreihe $g(x)$ dient hier die erzeugende Funktion des Bernoulli-Polynoms $B_m(n)$ mit $n = 0$ (siehe Richter u. Schiekel (2004), S. 9 ff.):

$$g(x) := \frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{B_j}{j!} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\,x^{2j} \tag{25.8.1}$$

mit den Bernoulli-Zahlen

$$B_0 := 1 \; , \; B_1 := -\frac{1}{2} \; , \quad \text{für } i \geq 1 : \quad B_{2j} := -\sum_{k=0}^{2j-1}\binom{2j}{k}\frac{B_k}{(2j-k+1)} \; , \; B_{2j+1} := 0 \; , \tag{25.8.2}$$

$$\text{insb. } B_4 = \frac{1}{6} \; , \; B_6 = -\frac{1}{30} \; , \; B_8 = \frac{1}{42} \; , \; \ldots \; . \tag{25.8.3}$$

Wenn man sich, wie wir in dieser Arbeit, dem Atiyah-Singer-Indexsätzen von der geometrisch-topologischen Seite her nähert, wird man sich vermutlich die Frage stellen: warum wählt man für eine neue aus der Chern-Klasse abgeleitete Charakteristische Klasse für $g(x)$ gerade die erzeugende Funktion des Bernoulli-Polynoms? Diese und weitere ähnliche Fragen finden ihre Antwort, wenn man spezielle in der Geometrie verwendete elliptische Differentialoperatoren betrachtet, bei denen Funktionen des Typs

$\frac{x}{1-e^{-x}}$ ganz natürlich als Spektralfunktionen auftauchen. Diese Zusammenhänge stellt Gilkey (1995) sehr schön dar.

Also können wir schreiben:

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \ldots \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\log(g(x)) &= (\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \ldots) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \ldots)^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + \ldots = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}x^2 + \ldots \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Lambda_{\log(g)}|_{H^0(M,\mathbb{R})} = 0 \; , \; \Lambda_{\log(g)}|_{H^2(M,\mathbb{R})} = \frac{1}{2} \; , \; \Lambda_{\log(g)}|_{H^4(M,\mathbb{R})} = \frac{1}{12} \; , \; \ldots \; .$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_E(c) &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F})))) \\ &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(c_1(\mathcal{F}) + (c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \ldots)) \\ &= \exp(\frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \ldots) \\ &= 1 + (\frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \ldots) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \ldots)^2 + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \ldots) + \frac{1}{8}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F}) + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \ldots \; . \qquad (25.8.4)\end{aligned}$$

Diese aus der totalen Chern-Klasse abgeleitete multiplikative Charakteristische Klasse heißt Todd-Klasse:

$$Td(\mathcal{F}) := \tilde{f}_E(c) \; , \qquad (25.8.5)$$

$$Td_0(\mathcal{F}) = 1 \; , \; Td_1(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \; , \; Td_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) \; , \; \ldots \; . \qquad (25.8.6)$$

Mit 25.7.20 folgt aus der Spektraldarstellung der Chern-Klasse $c(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j)$ die Spektralformel für die Todd-Klasse:

$$Td(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^k g(\lambda_j) = \prod_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{1 - e^{-\lambda_j}} \; . \qquad (25.8.7)$$

25.9 Pontrjagin-Klassen

Die Pontrjagin-Klassen sind Charakteristische Klassen für reelle Vektorbündel. Ein einfacher Zugang zu diesen Pontrjagin-Klassen ist es, das reelle Vektorbündel E zu komplexifizieren und dann die Pontrjagin-Klassen über die Chern-Klassen zu definieren. Sei also E das reelle k-dimensionale Vektorbündel (E_M, M, π, F, G), dann bezeichnen wir dessen Komplexifizierung als

$$E^{\mathbb{C}} := E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \,. \tag{25.9.1}$$

Komplexifiziert wird hier der reelle Vektorraum der Faser F, indem dessen Körper $\mathbb{R}$ erweitert wird zum Körper $\mathbb{C}$. Wir bezeichnen im Folgenden das konjugiert Komplexe der Zahl $z \in \mathbb{C}$ als $\bar{z}$, da der $*$ weiterhin entweder die Rücktransport- (pullback-) Abbildung oder die de Rham Kohomologie-Algebra $H^*(M, \mathbb{R})$ bezeichnen soll.

Zunächst noch einige Bemerkungen zur Reellisierung und Komplexifizierung von linearen Abbildungen in Vektorräumen, wobei wir Bott u. Tu (1982), S. 286 ff. folgen. Man kann eine komplex-lineare Abbildung in $\mathbb{C}^k$

$$L : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k \,, \qquad \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_k \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} \,. \tag{25.9.2}$$

auch als reell-lineare Abbildung in einem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^{2k}$ auffassen:

$$L_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k} \,, \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{2k} \end{pmatrix} = L_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2k} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } x_{2j-1} + i x_{2j} := z_j \,. \tag{25.9.3}$$

Umgekehrt kann man $\mathbb{R}^{2k}$ natürlich in $\mathbb{C}^{2k}$ einbetten, so daß die Abbildung $L_{\mathbb{R}}$ nun als als eine Abbildung in $\mathbb{C}^{2k}$ betrachtet wird, d.h.

$$L_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k} \quad \Rightarrow \quad L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : \mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k} \,. \tag{25.9.4}$$

Die Reellisierung und Komplexifizierung seien an einem kleinen Beispiel gezeigt:

Beispiel: Sei eine Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben mit

$$\begin{aligned} Lz &:= \lambda z := (\alpha + i\beta) z := (\alpha + i\beta)(x_1 + i x_2) \\ &= (\alpha x_1 - \beta x_2) + i(\beta x_1 + \alpha x_2) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$L_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,.$$

Entsprechend ergibt sich für eine Abbildung $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit

$$L \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$L_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_{11})_{\mathbb{R}} & (\lambda_{12})_{\mathbb{R}} \\ (\lambda_{21})_{\mathbb{R}} & (\lambda_{22})_{\mathbb{R}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\beta_{11} & \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ \beta_{11} & \alpha_{11} & \beta_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\beta_{21} & \alpha_{22} & -\beta_{22} \\ \beta_{21} & \alpha_{21} & \beta_{22} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} .$$

□

Lemma 25.9.1 *Sei $L : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ eine komplex-lineare Abbildung, d.h. eine komplexe $k \times k$ Matrix, dann gibt es eine Ähnlichkeitstransformation mit einer unitären $2k \times 2k$ Matrix B, so daß*

$$B^{-1}(L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})B = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \bar{L} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq L \oplus \overline{L} \,. \tag{25.9.5}$$

Beweis. Die Idee ist es $L_{\mathbb{R}}$ zu diagonalisieren. Dies sieht man zunächst am übersichtlichsten für $k = 1$:

$$L := \alpha + i\beta \quad \Rightarrow \quad L_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} ,$$

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = B^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} B^{-1}(L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})B &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & -\beta + i\alpha \\ \alpha - i\beta & \beta - i\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \bar{L} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für $k = 2$ ergibt sich:

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ -i & & i & \\ & 1 & & 1 \\ & -i & & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = B^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i & & \\ & & 1 & i \\ 1 & -i & & \\ & & 1 & -i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$B^{-1}(L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})B =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & & \\ & & 1 & i \\ 1 & -i & & \\ & & 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\beta_{11} & \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ \beta_{11} & \alpha_{11} & \beta_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\beta_{21} & \alpha_{22} & -\beta_{22} \\ \beta_{21} & \alpha_{21} & \beta_{nn} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ -i & & i & \\ & 1 & & 1 \\ & -i & & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_{11}+i\beta_{11} & -\beta_{11}+i\alpha_{11} & \alpha_{12}+i\beta_{12} & -\beta_{12}+i\alpha_{12} \\ \alpha_{21}+i\beta_{21} & -\beta_{21}+i\alpha_{21} & \alpha_{22}+i\beta_{22} & -\beta_{22}+i\alpha_{22} \\ \alpha_{11}-i\beta_{11} & -\beta_{11}-i\alpha_{11} & \alpha_{12}-i\beta_{12} & -\beta_{12}-i\alpha_{12} \\ \alpha_{21}-i\beta_{21} & -\beta_{21}-i\alpha_{21} & \alpha_{22}-i\beta_{22} & -\beta_{22}-i\alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ -i & & i & \\ & 1 & & 1 \\ & -i & & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}+i\beta_{11} & \alpha_{12}+i\beta_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21}+i\beta_{21} & \alpha_{22}+i\beta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{11}-i\beta_{11} & \alpha_{12}-i\beta_{12} \\ 0 & 0 & \alpha_{21}-i\beta_{21} & \alpha_{22}-i\beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \bar{L} \end{pmatrix} .$$

Ebenso ergibt sich für beliebiges $k > 2$ mit den folgenden Matrizen für B und B^{-1}:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ -i & & & & i & & & \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & -i & & & & i & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ & & & -i & & & & i \end{pmatrix} ,$$

$$B^{-1} = B^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & & & & & & \\ & & 1 & i & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & i \\ 1 & -i & & & & & & \\ & & 1 & -i & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & -i \end{pmatrix} ,$$

$$B^{-1}(L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})B = \ldots = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \bar{L} \end{pmatrix} . \qquad \square$$

Nun ist bei einem reellen Vektorbündel $F = \overline{F}$ und damit $F^{\mathbb{C}} = \overline{F^{\mathbb{C}}}$ und also $E^{\mathbb{C}} \simeq \overline{E^{\mathbb{C}}}$. Mit 25.5.2 folgt, daß $c_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})$ den Faktor $(i/2\pi)^j$ enthält und damit folgt:

$$c_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) = c_j(\mathcal{F}_{\overline{E^{\mathbb{C}}}}) = (-1)^j c_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \quad \Rightarrow$$

$$c_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) = 0 \quad \text{für } j \text{ ungerade} . \tag{25.9.6}$$

Daraus folgt die Definition der Pontrjagin-Klassen:

Definition 25.9.2

$$p_j(\mathcal{F}_E) := \begin{cases} (-1)^j c_{2j}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \in H^{4j}(M,\mathbb{R}) \ , & \\ 0 & \text{für } 4j > m, \ 2j > k \ . \end{cases} \tag{25.9.7}$$

$$p(\mathcal{F}_E) := \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} p_j(\mathcal{F}_E) \in H^{4*}(M,\mathbb{R}) \quad \mathit{mit}\ [\frac{k}{2}] := \begin{cases} k/2 & \text{für } k \text{ gerade} \ , \\ (k-1)/2 & \text{für } k \text{ ungerade} \ . \end{cases} \tag{25.9.8}$$

Die Bedingung $p_j(\mathcal{F}_E) = 0$ für $4j > m, \ 2j > k$ folgt aus der entsprechenden Bedingung für $c_{2j}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})$, siehe 25.5.9.

Lemma 25.9.3 *Seien $\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}$ und $\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}$ die Krümmungs-2-Formen der komplexifizierten Vektorbündel $E_1^{\mathbb{C}}$ und $E_2^{\mathbb{C}}$, dann gilt wie für die Chern-Klassen:*

$$p(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}} \oplus E_2^{\mathbb{C}}}) = p(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge p(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \ . \tag{25.9.9}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} p_j(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}} \oplus E_2^{\mathbb{C}}}) &= (-1)^j c_{2j}(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}} \oplus E_2^{\mathbb{C}}}) \\ &= (-1)^j \sum_{\substack{m,n \\ m+n=2j}} c_m(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge c_n(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \\ &= (-1)^j \sum_{\substack{m',n' \\ m'+n'=j}} c_{2m'}(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge c_{2n'}(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \\ &= \sum_{\substack{m',n' \\ m'+n'=j}} (-1)^{m'} c_{2m'}(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge (-1)^{n'} c_{2n'}(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \\ &= \sum_{\substack{m',n' \\ m'+n'=j}} p_{m'}(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge p_{n'}(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung

$$p(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}} \oplus E_2^{\mathbb{C}}}) = p(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge p(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \ . \qquad \square$$

Wenn man an einer konkreteren Gestalt der Pontrjagin-Klassen interessiert ist, dann geht man zu einem Rahmenbündel über, d.h. man führt ein symmetrisches Skalarprodukt auf der Faser $F = \mathbb{R}^k$ ein und eine metrische Zusammenhang-1-Form $\mathcal{A}$ und eine Orthonormalbasis und als Struktur-Liegruppe die orthogonale Gruppe $O(k)$. Damit sind dann die Zusammenhang-1-Form $\mathcal{A}$ und die Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}$ schiefsymmetrische reelle Matrizen aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(k)$.

Lemma 25.9.4 *Eine reelle, schiefsymmetrische Matrix A mit geradzahliger Dimension läßt sich auf folgende Form diagonalisieren:*

$$A \simeq \begin{pmatrix} -i\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & i\lambda_1 & & & \vdots \\ \vdots & & -i\lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & i\lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \textit{mit } \lambda_j \in \mathbb{R} \; . \tag{25.9.10}$$

Beweis. Das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda\mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$ hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung. Dies sei der Eigenwert μ_1 mit dem Eigenvektor $\mid e_1\rangle$. Bei einer schiefsymmetrischen reellen Matrix A folgt, daß μ_1 rein imaginär ist, denn

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_1\langle e_1 \mid e_1\rangle = \langle e_1 \mid \mu_1 e_1\rangle = \langle e_1 \mid Ae_1\rangle \\ &= \langle A^\dagger e_1 \mid e_1\rangle = \langle A^T e_1 \mid e_1\rangle = \langle -Ae_1 \mid e_1\rangle \\ &= -\langle \mu_1 e_1 \mid e_1\rangle = -\overline{\mu_1}\langle e_1 \mid e_1\rangle = -\overline{\mu_1} \; . \end{aligned}$$

Weiter sind A und $A^T = -A$ unitär äquivalent, d.h. sie haben die gleichen Eigenwerte μ_j. Sofern die Eigenwerte nicht 0 sind kommen sie also immer paarweise als $\pm\mu_j = \pm i\lambda_j$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$ vor. □

Korollar 25.9.5 *Die obige reelle, schiefsymmetrische Matrix A mit geradzahliger Dimension läßt sich auch unitär auf die folgende Form Block-diagonalisieren:*

$$A \simeq \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \textit{mit } \lambda_j \in \mathbb{R} \; , \tag{25.9.11}$$

denn

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +i & -1 \\ -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & +i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & +i\lambda \\ \lambda & -i\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & +i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\lambda & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Damit läßt sich jetzt die totale Pontrjagin-Klasse schreiben als:

$$p(\mathcal{F}_E) = \det(\mathbb{1} + \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \; , \tag{25.9.12}$$

denn:

$$c(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) = 1 + c_2(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) + c_4(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) + \ldots + c_{[\frac{k}{2}]}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \tag{25.9.13}$$

$$= \det(\mathbb{1} + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & & & \vdots \\ \vdots & & 1+\lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & 1-\lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}(1+\lambda_j)(1-\lambda_j) = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}(1-\lambda_j^2) \quad \Rightarrow \tag{25.9.14}$$

$$p(\mathcal{F}_E) = 1 + p_1(\mathcal{F}_E) + p_2(\mathcal{F}_E) + \ldots + p_{[\frac{k}{2}]}(\mathcal{F}_E)$$

$$= 1 - c_2(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) + c_4(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \mp \ldots + (-1)^{[\frac{k}{2}]}c_k(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})$$

$$= \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}(1+\lambda_j^2) = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}(1+i\lambda_j)(1-i\lambda_j)$$

$$= \det(\mathrm{diag}(1+i\lambda_1, 1-i\lambda_1, \ldots, 1+i\lambda_{[\frac{k}{2}]}, 1-i\lambda_{[\frac{k}{2}]}))$$

$$= \det(\mathbb{1} + \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \ . \tag{25.9.15}$$

Konkret heißt das also für den Fall eines Rahmenbündels mit schiefsymmetrischen reellen Krümmungs-2-Formen $\mathcal{F}_E$ aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(k)$, weshalb $\mathrm{tr}(\mathcal{F}_E) = 0$ ist, daß für die Pontrjagin-Klassen gilt:

$$p_0(\mathcal{F}_E) = 1 \ , \tag{25.9.16}$$

$$p_1(\mathcal{F}_E) = -c_2(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) = (\frac{i}{2\pi})^2[\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})] = -\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \ , \tag{25.9.17}$$

$$p_2(\mathcal{F}_E) = c_4(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) = (\frac{i}{2\pi})^4[-\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})$$

$$+ \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})$$

$$= \frac{1}{128\pi^4}[\mathrm{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \wedge \mathrm{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) - 2\,\mathrm{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})] \ , \tag{25.9.18}$$

$$\ldots = \ldots$$

$$p_{[\frac{k}{2}]}(\mathcal{F}_E) = c_k(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) = (\frac{1}{2\pi})^k \det(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \ . \qquad (25.9.19)$$

Das Standardbeispiel ist eine vierdimensionale Riemannsche Mannigfalltigkeit M mit dem Tangentialbündel TM als reellem Vektorbündel F. Man geht zu einem Rahmenbündel über, d.h. man führt an $p \in M$ das übliche symmetrische Skalarprodukt auf der Faser $F = T_pM = \mathbb{R}^4$ ein und als Struktur-Liegruppe die orthogonale Gruppe $O(4)$. Damit sind dann die Zusammenhang-1-Form $\mathcal{A}$ und die Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}$ schiefsymmetrische reelle Matrizen aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(4)$. Damit sind $m = \dim(M) = 4$ und $k = \dim(F) = \dim(TM) = 4$. Seien also $p \in M$, $\{e_a\}$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraums T_pM und $\{\theta^a\}$ die entsprechende duale Basis des Kotangentialraums T_p^*M, und $R_{ab} = \frac{1}{2}R_{abcd}\theta^c \wedge \theta^d$ die Cartansche Krümmungs-2-Form (10.8.3), dann folgt wegen der Schiefssymmetrie von $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(4)$, daß $\mathrm{tr}(R) = 0$ ist, und damit folgt für die entsprechenden Pontrjagin-Klassen:

$$p_0(R) = 1 \ , \qquad (25.9.20)$$

$$p_1(R) = -c_2(R) = -\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}(R \wedge R) \ , \qquad (25.9.21)$$

$$p_2(R) = c_4(R) = \frac{1}{128\pi^4}[\mathrm{tr}(R \wedge R) \wedge \mathrm{tr}(R \wedge R) - 2\,\mathrm{tr}(R \wedge R \wedge R \wedge R)] \ . \qquad (25.9.22)$$

Da R eine 2-Form ist, wäre $p_2(R)$ eine 8-Form in einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit, d.h. $p_2(R) = 0$. Dennoch wird dieser Ausdruck von $p_2(R)$ für die Konstruktion der Euler-Klasse herangezogen (s.u.), indem man $p_2(R)$ in diesem Kontext nur als Matrix und nicht als Differentialform betrachtet.

25.10 $\hat{A}$-Klassen

Die $\hat{A}$-Klassen heißen auch $\hat{A}$-Geschlecht (A-Dach-Geschlecht), oder Dirac-Geschlecht, und wurden neben anderen Charakteristischen Klassen von Hirzebruch eingeführt. Sie tauchen im Atiyah-Singer-Indexsatz für euklidische Dirac-Operatoren auf Spinbündeln auf und sind daher besonders für Physiker interessant.

Analog zu den multiplikativen Charakteristischen Klassen der Chern-Klasse definiert man zunächst multiplikative Charakteristische Klassen zur Pontrjagin-Klasse.

Definition 25.10.1 (Multiplikative Klassen) *Sei p ein Element der kommutativen, graduierten Algebra $R = \bigoplus_j R^j$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit dem Einselement 1, und sei $g(x)$ eine formale Potenzreihe über $\mathbb{K}$, d.h.*

$$p \in R \ , \quad p := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j \ ,$$

$$f_R : R \to R \ , \quad f_R(p) := \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(p))) \ , \tag{25.10.1}$$

$$\textit{mit } k \in \mathbb{N} \textit{ und } \log(1+y) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{y^l}{l} \ . \tag{25.10.2}$$

Seien $p = p(\mathcal{F})$ die totale Pontrjagin-Klasse eines reellen Vektorbündels oder Prinzipalbündels E vom Rang k über der Basismannigfaltigkeit M, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $R^j = H^{4j}(M, \mathbb{R})$, $R = H^{4*}(M, \mathbb{R})$, dann heißt

$$\tilde{f}_E(p) := \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F})))) \ . \tag{25.10.3}$$

die multiplikative Klasse von E bezüglich g.

Multiplikativ heißen die Klassen $\tilde{f}_E(p)$ weil ebenso wie in 25.7.19 gilt:

$$\tilde{f}_{E_1 \oplus E_2}(p) = \tilde{f}_{E_1}(c) \wedge \tilde{f}_{E_2}(c) \ . \tag{25.10.4}$$

Die von Bär (2011) (S. 20 ff.) stammende obige kunstvolle Definition und Konstruktion der multiplikativen Klasse $\tilde{f}_E(p)$ bezüglich g eignet sich nun, wie wir sogleich sehen werden, sehr gut für die Reihenentwicklung in $\mathcal{F}$. Andererseits verbirgt diese Definition die ebenso bedeutsame Spektraldarstellung von $\tilde{f}_E(p)$, die zunächst aufgezeigt werden soll.

Lemma 25.10.2 *Seien die λ_j mit $j \in 1, \ldots, [\frac{k}{2}]$ die Eigenwerte von $\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}$. Dann gilt für multiplikative Klasse $\tilde{f}_E(p)$ bezüglich g die folgende Spektraldarstellung:*

$$\tilde{f}_E(p) = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} g(\lambda_j^2) \ . \tag{25.10.5}$$

Beweis. Für die totale Pontrjagin-Klasse p gilt (25.9.15):

$$p = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} (1 + \lambda_j^2) \quad \Rightarrow$$

$$\log(p) = \sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \log(1 + \lambda_j^2) = \sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{1}{l} (\lambda_j^2)^l \ .$$

Nach Definition (25.7.5) gilt für den l-ten Term von Λ_g, hier als $\Lambda_{g,l}$ bezeichnet, in Bezug auf den l-ten Term von g, hier als g_l bezeichnet:

$$\Lambda_{g,l} = (-1)^{l+1} \cdot l \cdot g_l \quad \Rightarrow$$

$$\Lambda_{\log(g),l} = (-1)^{l+1} \cdot l \cdot (\log(g)_l) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\log(g)}(\log(p)) &= \sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} \cdot l \cdot (\log(g)_l (-1)^{l+1} \frac{1}{l} (\lambda_j^2)^l) \\ &= \sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{l=0}^{\infty} (\log(g)_l (\lambda_j^2)^l) = \sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \log(g(\lambda_l^2) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\tilde{f}_E(p) = e^{\Lambda_{\log(g)}(\log(p))} = e^{\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \log(g(\lambda_l^2)} = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} e^{\log(g(\lambda_l^2)} = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} g(\lambda_l^2) \ . \qquad \square$$

Die totale $\hat{A}$-Klasse wird nun als multiplikative Charakteristische Klasse aus der totalen Pontrjagin-Klasse abgeleitet. Als Potenzreihe $g(x)$ dient hier die folgende Funktion:

$$g(x) := \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sinh(\frac{\sqrt{x}}{2})} \ . \tag{25.10.6}$$

Mit dem obigen Lemma folgt sofort die Spektraldarstellung von $\hat{A}(\mathcal{F})$:

$$\hat{A}(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \frac{\frac{\lambda_j}{2}}{\sinh(\frac{\lambda_j}{2})} \ . \tag{25.10.7}$$

Nun zur Reihenentwicklung. Man stellt $g(x)$ als Potenzreihe dar und findet für die ersten Glieder:

$$\sinh(\frac{\sqrt{x}}{2}) = (\frac{\sqrt{x}}{2}) + \frac{1}{3!}(\frac{\sqrt{x}}{2})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\sqrt{x}}{2})^5 + \frac{1}{7!}(\frac{\sqrt{x}}{2})^7 + \dots \ , \tag{25.10.8}$$

$$\frac{\sinh(\frac{\sqrt{x}}{2})}{(\frac{\sqrt{x}}{2})} = 1 + \frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \dots \ .$$

Mit

$$1 + y := \frac{\sinh(\frac{\sqrt{x}}{2})}{(\frac{\sqrt{x}}{2})} = 1 + \frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \dots \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{(1+y)} = 1 - y + y^2 - y^3 \pm \dots \tag{25.10.9}$$

folgt

$$
\begin{aligned}
g(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sinh(\frac{\sqrt{x}}{2})} &= \frac{1}{(1+y)} \\
&= 1 - [\frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \ldots] \\
&\quad + [\frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \ldots]^2 \\
&\quad - [\frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \ldots]^3 \pm \ldots \\
&= 1 - [\frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \ldots] \\
&\quad + [(\frac{1}{3!\cdot 4})^2 x^2 + \frac{2}{3!5!\cdot 64}x^3 + \ldots] \\
&\quad - [(\frac{1}{3!\cdot 4})^3 x^3 + \ldots] \pm \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{24}x + (\frac{-1}{5!\cdot 16} + \frac{1}{3!3!\cdot 16})x^2 - (\frac{1}{7!\cdot 64} - \frac{2}{3!5!\cdot 64} + \frac{1}{3!3!3!\cdot 64})x^3 \pm \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{24}x + \frac{-3!3! + 5!}{3!3!5!\cdot 16}x^2 - (\frac{3!3!3!5! - 2\cdot 3!3!7! + 5!7!}{3!3!3!5!7!\cdot 64})x^3 \\
&= 1 - \frac{1}{24}x + \frac{84}{3!3!5!\cdot 16}x^2 - \frac{267840}{3!3!3!5!7!\cdot 64}x^3 \pm \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5!\cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{24}x + \frac{7}{5760}x^2 - \frac{31}{967680}x^3 \pm \ldots\ .
\end{aligned}
$$

Nun muß $\log(g(x))$ als Potenzreihe bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
\log(g(x)) = \log(1+z) &= \frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \mp \ldots \\
&= \log(1 + (-\frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5!\cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \ldots)) \\
&= [-\frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5!\cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \ldots] \\
&\quad - \frac{1}{2}[-\frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5!\cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \ldots]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{3}[-\frac{1}{24}x+\frac{7}{2!3!5!\cdot 4}x^2-\frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3\pm\ldots]^3\mp\ldots\\
&=-\frac{1}{24}x+(\frac{-1}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}+\frac{7}{2!3!5!\cdot 4})x^2\\
&\quad+(-\frac{31}{2!2!2!4!7!}+\frac{7}{4\cdot 6\cdot 2!3!5!\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 6})x^3+\ldots\\
&=-\frac{1}{24}x+(\frac{-5+7}{2!3!5!\cdot 4})x^2+(\frac{-93+147-70}{2!2!2!4!7!\cdot 3})x^3+\ldots\\
&=-\frac{1}{24}x+\frac{1}{3!5!\cdot 4}x^2-\frac{1}{2!3!7!\cdot 3}x^3+\ldots\\
&=-\frac{1}{24}x+\frac{1}{2880}x^2-\frac{1}{181440}x^3+\ldots
\end{aligned}
$$

Mit 25.7.4 angewandt auf $H^{4*}(M,\mathbb{R})$ ergibt sich für Λ_g:

$$
\Lambda_g : H^{4*}(M,\mathbb{R}) \to H^{4*}(M,\mathbb{R})\ , \quad \Lambda_g|_{H^{4j}} := (-1)^{j+1}\cdot j\cdot g_j\ , \tag{25.10.10}
$$

also in diesem Fall:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{\log(g)}|_{H^0(M,\mathbb{R})}=0\ ,\ \Lambda_{\log(g)}|_{H^{4\cdot 1}(M,\mathbb{R})}=-\frac{1}{24}\ ,\\
&\Lambda_{\log(g)}|_{H^{4\cdot 2}(M,\mathbb{R})}=-\frac{1}{3!5!\cdot 2}=-\frac{1}{1440}\ ,\\
&\Lambda_{\log(g)}|_{H^{4\cdot 3}(M,\mathbb{R})}=-\frac{1}{2!3!7!}=-\frac{1}{60480}\ .
\end{aligned}
$$

Die aus der Pontrjagin-Klasse $p(\mathcal{F}_E)$ abgeleitete multiplikative Charakteristische Klasse $\hat{A}(\mathcal{F}) := \tilde{f}_E(p)$ ergibt sich dann mit den Termen bis zur dritten Ordnung zu:

$$
\begin{aligned}
\log(p(\mathcal{F})) &= \log(p_0(\mathcal{F})+p_1(\mathcal{F})+p_2(\mathcal{F})+p_3(\mathcal{F})+\ldots)\\
&=\log(1+p_1(\mathcal{F})+p_2(\mathcal{F})+p_3(\mathcal{F})+\ldots)\\
&=[p_1(\mathcal{F})+p_2(\mathcal{F})+p_3(\mathcal{F})+\ldots]\\
&\quad-\frac{1}{2}[p_1(\mathcal{F})+p_2(\mathcal{F})+p_3(\mathcal{F})+\ldots]^2\\
&\quad+\frac{1}{3}[p_1(\mathcal{F})+p_2(\mathcal{F})+p_3(\mathcal{F})+\ldots]^3\\
&=p_1(\mathcal{F})+[p_2(\mathcal{F})-\frac{1}{2}p_1(\mathcal{F})\wedge p_1(\mathcal{F})]\\
&\quad+[p_3(\mathcal{F})-p_1(\mathcal{F})\wedge p_2(\mathcal{F})+\frac{1}{3}p_1(\mathcal{F})\wedge p_1(\mathcal{F})\wedge p_1(\mathcal{F})]\ .
\end{aligned}
$$

$$\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F}))) = -\frac{1}{24}p_1(\mathcal{F}) - \frac{1}{3!5!\cdot 2}[p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})]$$
$$- \frac{1}{2!3!7!}[p_3(\mathcal{F}) - p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) + \frac{1}{3}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \; .$$

$$\begin{aligned}\hat{A}(\mathcal{F}) &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F})))) \\ &= 1 + \Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F}))) + \frac{1}{2!}[\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F})))]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}[\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F})))]^3 + \dots \end{aligned} \tag{25.10.11}$$

Geordnet nach Potenzen führt das zu:

$$\hat{A}(\mathcal{F}) = \hat{A}(\mathcal{F})_0 + \hat{A}(\mathcal{F})_1 + \hat{A}(\mathcal{F})_2 + \hat{A}(\mathcal{F})_3 + \dots \; , \quad \text{mit} \tag{25.10.12}$$

$$\hat{A}(\mathcal{F})_0 = 1 \; , \tag{25.10.13}$$

$$\hat{A}(\mathcal{F})_1 = -\frac{1}{24}p_1(\mathcal{F}) \; , \tag{25.10.14}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}(\mathcal{F})_2 &= -\frac{1}{3!5!\cdot 2}(p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})) + \frac{1}{2!\cdot 24\cdot 24}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \\ &= \frac{1}{3!5!\cdot 2\cdot 4}[-4p_2(\mathcal{F}) + (\frac{1}{3!5!\cdot 4} + \frac{1}{2!\cdot 24\cdot 24})p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\ &= \frac{1}{3!5!\cdot 2\cdot 4}[-4p_2(\mathcal{F}) + \frac{2+5}{3!5!\cdot 2\cdot 4}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\ &= \frac{1}{5760}[-4p_2(\mathcal{F}) + 7p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \; , \end{aligned} \tag{25.10.15}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}(\mathcal{F})_3 &= -\frac{1}{2!3!7!}[p_3(\mathcal{F}) - p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) + \frac{1}{3}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\ &\quad + \frac{1}{3!5!\cdot 2\cdot 24}[p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\ &\quad - \frac{1}{3!\cdot 24\cdot 24\cdot 24}[p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\ &= \frac{1}{3\cdot 2!3!7!\cdot 4\cdot 4}[-48(p_3(\mathcal{F}) - p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) + \frac{1}{3}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})) \\ &\quad + 84(p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})) \\ &\quad - 35(p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}))] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 2!3!7! \cdot 4 \cdot 4}[-48p_3(\mathcal{F}) + 132p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - 93p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})]$$
$$= \frac{1}{2!3!7! \cdot 4 \cdot 4}[-16p_3(\mathcal{F}) + 44p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - 31p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})]$$
$$= \frac{1}{967680}[-16p_3(\mathcal{F}) + 44p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - 31p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] . \tag{25.10.16}$$

25.11 Euler-Klasse

Sei M eine $2l$-dimensionale orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, also $m := \dim(M) = 2l$ und sei T_pM der entsprechende Tangentialraum der Dimension $k = \dim(T_pM) = 2l$ am Punkt $p \in M$. Man betrachtet das reelle Vektorbündel $(E_M, M, \pi, T_pM, SO(2l))$ als Rahmenbündel, d.h. man führt das übliche symmetrische Skalarprodukt auf der Faser $F = T_pM = \mathbb{R}^{2l}$ ein und als Struktur-Liegruppe die orthogonale Gruppe $O(2l)$. Wegen der Orientierbarkeit kann man die Struktur-Liegruppe auf die spezielle orthogonale Gruppe $SO(2l)$ einschränken. Seien also $p \in M$, $\{e_a\}$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraums T_pM und $\{\theta^a\}$ die entsprechende duale Basis des Kotangentialraums T_p^*M, und $R_{ab} = \frac{1}{2}R_{abcd}\theta^c \wedge \theta^d$ die Cartansche Krümmungs-2-Form (10.8.3). Damit ist dann die Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_E := R$ eine schiefsymmetrische reelle Matrix aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2l)$.

In 25.9.10 hatten wir gesehen, daß jede reelle schiefsymmetrische Matrix A der Dimension $2l$ unitär äquivalent zu folgender Diagonalmatrix ist:

$$A \simeq \begin{pmatrix} -i\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & i\lambda_1 & & & \vdots \\ \vdots & & -i\lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & i\lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_j \in \mathbb{R} . \tag{25.11.1}$$

Dies ist auch unitär aquivalent zu der folgende reellen Darstellung

$$A \simeq \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & & -\lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} . \tag{25.11.2}$$

Also ist

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{l} \lambda_i^2 . \tag{25.11.3}$$

Dies legt es nahe, als grundlegende Struktur die Quadratwurzel von $\det(A)$ zu betrachten.

Definition 25.11.1 *Sei A eine reelle schiefsymmetrische Matrix der Dimension $2l$ mit den Eigenwerten $\{\mp\lambda_i \,|\, i = 1, \ldots, l\}$, dann heißt die Quadratwurzel von $\det(A)$ die Pfaffsche Determinate $Pf(A)$:*

$$Pf(A) := (\det(A))^{\frac{1}{2}} = (-1)^l \prod_{i=1}^{l} \lambda_i \,. \tag{25.11.4}$$

Hierbei ist der Faktor $(-1)^l$ ein frei wählbarer Phasenfaktor.

Lemma 25.11.2

$$Pf(A) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)\, A_{\pi(1)\pi(2)} A_{\pi(3)\pi(4)} \cdots A_{\pi(2l-1)\pi(2l)} \,. \tag{25.11.5}$$

Beweis. Da $\det(A)$ invariant unter unitären Transformationen ist, folgt das gleiche auch für $Pf(A)$. Also kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A die Form von 25.11.2 hat. Dann gibt es 2^l Permutationen im obigen Ausdruck für $Pf(A)$, die A_{ij} in A_{ji} überführen und $l!$ Permutationen, welche die Indexpaare vertauschen. Also folgt

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)\, A_{\pi(1)\pi(2)} A_{\pi(3)\pi(4)} \cdots A_{\pi(2l-1)\pi(2l)} &= (-1)^l A_{12} A_{34} \cdots A_{2l-1,2l} \\ &= (-1)^l \prod_{i=1}^{l} \lambda_i = Pf(A) \,. \qquad \square \end{aligned}$$

Jetzt wird die Euler-Klasse als die Quadratwurzel der Pontrjagin-Klasse $p_l(\mathcal{F}_E)$ definiert:

Definition 25.11.3 *Sei M eine $2l$-dimensionale orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, also $m := \dim(M) = 2l$ und sei T_pM der entsprechende Tangentialraum der Dimension $k = \dim(T_pM) = 2l$ am Punkt $p \in M$ und sei $(E_M, M, \pi, T_pM, SO(2l))$ das reelle Rahmenbündel, dessen Cartansche Krümmungs-2-Form R eine $\mathfrak{so}(2l)$-Matrix ist, dann ist die Eulerklasse $e(R)$ die Wurzel der Pontrjagin-Klasse $p_l(R)$, d.h.*

$$e(R) \wedge e(R) := p_l(R) = \det(\frac{1}{2\pi} R) \quad \Leftrightarrow \tag{25.11.6}$$

$$e(R) = (\frac{1}{2\pi})^l Pf(R) \,. \tag{25.11.7}$$

Für ungeradzahlig-dimensionale Mannigfaltigkeiten wird $e(R) = 0$ definiert.

Für eine 2-dimensionale, orientierbare, randlose Riemannsche Mannigfaltigkeit M ergibt sich also:

$$e(R) = (\frac{1}{2\pi})Pf(R) = \frac{(-1)^1}{(4\pi)^1 1}\epsilon^{ab}R_{ab} = -\frac{1}{2\pi}R_{12}\ . \tag{25.11.8}$$

Und für eine 4-dimensionale, orientierbare, randlose Riemannsche Mannigfaltigkeit M ergibt sich:

$$\begin{aligned} e(R) = (\frac{1}{2\pi})^2 Pf(R) &= \frac{(-1)^2}{(4\pi)^2 2}\sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi)\, R_{\pi(1)\pi(2)}R_{\pi(3)\pi(4)} \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2}\epsilon^{abcd}R_{ab}\wedge R_{cd}\ . \end{aligned} \tag{25.11.9}$$

26 Die Indexsätze von Atiyah und Singer

26.1 Friedrich E. P. Hirzebruch (1927 - 2012)

Friedrich Hirzebruch war einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker in der zweiten Hälfte des 20. Jh. Er wurde bekannt für seine grundlegenden Beiträge in der algebraischen Geometrie, Topologie und Zahlentheorie.

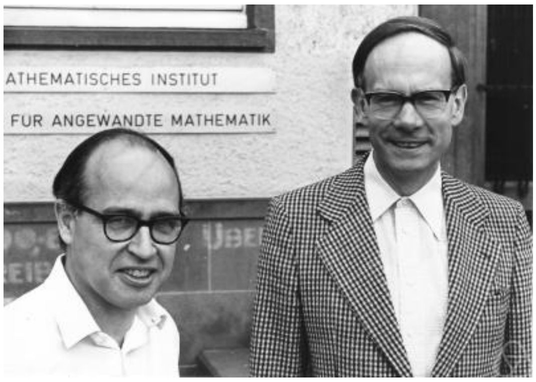

Abbildung 26.1: Atiyah & Hirzebruch,
K. Jacobs (1977), CC-BY-SA-2.0 de.
(Math. Inst. Oberwolfach)
[http://de.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Hirzebruch]

Hirzebruch wurde 1927 in Hamm in Nordrhein-Westalen geboren. Hirzebruchs Vater arbeitete als Rektor und als ein sehr inspirierender Mathematik-Lehrer an einem Gymnasium und brachte seinen Sohn schon in frühen Jahren mit der Schönheit der Mathematik in Berührung. Im Jahr 1945 wurde er in den letzten Wochen des Krieges noch von der Deutschen Wehrmacht in eine Luftabwehr-Batterie einberufen, überstand aber glücklicherweise die letzten Kriegsmonate unbeschadet. Von 1945 bis 1950 studierte er Mathematik, Physik und Mathematische Logik an der Universität in Münster und an der ETH Zürich. In Zürich wurde er im Jahr 1950 bei Behnke und Hopf promoviert. Das Thema seiner Dissertation war: *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.* Im Jahr 1952 heirateten er und Inge Spitzley und hatten gemeinsam drei Kinder, von denen die beiden älteren Töchter dann auch Mathematik studierten.

Von 1952 bis 1954 forschte Hirzebruch in Princeton am Institute for Advanced Study. Dort arbeitete er u.a. mit Kodaira und Bott zusammen und dort entstand sein *Signatursatz* und darauf aufbauend der heute sog. *Hirzebruch-Riemann-Roch-Satz,* eine Vorstufe zu den *Atiyah-Singer-Indexsätzen.* Anschließend übernahm er eine Assistenzprofessur in Princeton, bis er dann 1956 einem Ruf als Ordinarius an die Universität Bonn folgte, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1993 arbeitete. In diesen Jahren nahm er auch zahlreiche kurze Gastprofessuren weltweit an.

Gleich zu Beginn seiner Bonner Zeit erschien im Jahr 1956 Hirzebruchs bis heute berühmtes Buch *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie* und er startete mit großem Enthusiasmus seine bald ebenso berühmten *Bonner Mathematische*

Arbeitstagungen, zu denen er die internationale Mathematiker-Elite nach Bonn holen konnte. Im Jahr 1969 gründete er den *Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik* an der Universität Bonn, der dann im Jahr 1980 in das *Max-Planck-Institut für Mathematik* in Bonn überging.

Seine wichtigsten mathematischen Beiträge waren:

- Signatursatz und Hirzebruch-Riemann-Roch-Satz,
- komplexe Manigfaltigkeiten,
- zusammen mit Atiyah die topologische K-Theorie,
- algebraische Flächen,
- Singularitäten in der Topologie,
- und, und, und ...

Hirzebruch war neben seinen Forschungen und seiner bedeutsamen wissenschaftlichen Organisationsarbeit auch ein engagierter und inspirierender Lehrer, so daß aus seinem Institut viele bedeutende Mathematiker hevorgingen. Es seien an dieser Stelle nur drei Hirzebruch-Schüler gesondert erwähnt:

- Don Zagier, der Hirzebruch als Direktor des Max-Planck Institus für Mathematik in Bonn nachfolgte.
- Bernhelm Booß-Bavnbek, der eine schöne Einführung zum Atiyah-Singer-Indexsatz publiziert hat (Booß (1977), bzw. auf englisch Booss u. Bleecker (1985), und deutlich erweitert und aktualisiert in Booss u. Bleecker (2013).
- Winfried Scharlau, dem wir ein wunderbares Buch über Hirzebruch und seine Zeit verdanken (Scharlau (2017)). In dieser Biographie berichtet Scharlau u.a. auf S. 351, daß Hirzebruchs letzte Publikation den Titel trug „Why do I like Chern, and why do I like Chern classes?”, erschienen zu Cherns 100. Geburtstag.

Hirzebruchs Ehrungen waren zahlreich, u.a. Wolf-Preis für Mathematik 1988, Albert-Einstein-Medaille 1999, Stefan-Banach-Medaille 1999, u.v.a.

[Quellen: Wikipedia-Hirzebruch (2016), und insb. der sehr schöne Nachruf von Atiyah & Zagier Atiyah u. Zagier (2014)].

26.2 Sir Michael Atiyah (*1929)

Atiyah ist einer der einflußreichsten Mathematiker des 20. Jh. und besonders interessiert am Dialog zwischen der Mathematik und der theoretischen Physik. Siehe dazu etwa den neueren Artikel von Atiyah mit Dijkgraaf und Hitchin '*Geometry and Physics*': Atiyah u. a. (2010).

Abbildung 26.2: M. Atiyah

Atiyah wurde in London geboren, verbrachte jedoch seine Schulzeit in Khartoum in Sudan und in Kairo in Ägypten. Zum Studium der Mathematik kehrte er nach England zurück und wurde bei Hodge in Cambridge promoviert mit einer Arbeit zum Thema: *Some Applications of Topological Methods in Algebraic Geometry.* Er heiratete 1955 Lily Brown und hat mit ihr drei Söhne. Es folgten Aufenthalte am 'Institute for Advanced Study' in Princeton, dann erneut an der 'Cambridge University' und schließlich eine Professur an der 'University of Oxford'. Atiyah engagierte sich auch gesellschaftspolitisch in der 'Pugwash Conferences on Science and World Affairs'.

Seine wichtigsten mathematischen Beiträge sind der *Atiyah–Bott Fixpunktsatz*, der *Atiyah-Singer-Indexsatz* (der uns hier interessieren soll), zusammen mit Friedrich Hirzebruch die *topologische K-Theorie*, zusammen mit Lars Gårding *hyperbolische Differential-Gleichungen*, zusammen mit Jones *Yang-Mills Theorien*, zusammen mit Witten *M-Theorie* und *topologische Quantenfeld-Theorien*, und, und, und ... - siehe auch: Michael Atiyah, „Collected Works" in 6 Bänden (Atiyah (1988), Atiyah (2005)):

- Vol. I: frühe Arbeiten, beginnend mit Atiyahs erster Publikation 1952 in seinem zweiten Jahr als Undergraduate-Student, und Arbeiten zu allgemeinen Themen.
- Vol. II: frühe Arbeiten zur K-Theory, und die gemeinsamen Arbeiten mit Hirzebruch et al.
- Vol. III und IV: die vielen Arbeiten von 1963-84 auf dem Gebiet der Indexsätze elliptischer Operatoren, zusammen mit Hirzebruch, Singer, Bott, Patodi, Gårding.
- Vol. V: von 1977 an verschoben sich Atiyahs Interessen in Richtung Eichtheorien und Verbindungen zwischen Geometrie und Physik.
- Vol. VI: die Arbeiten von 1987-2002 behandeln die Themen Skyrmionen (stabile Wirbel eines Feldes als topologisches Modell für Elementarteilchen), "Atiyah's Axiome" für topologische Quantenfeld-Theorien, Monopole, Knoten, K-Theorie, and M-Theorie.

Atiyah selbst nennt als die Mathematiker, die ihn am meisten beeinflußt haben: Riemann, Hamilton, ganz besonders Weyl, und in der Gegenwart Penrose, Hörmander, Connes und Bismut. Atiyah erhielt zahlreiche Preise, darunter 1966 die Fields-Medaille und 2004 zusammen mit Singer den Abel-Preis. [Quelle: Wikipedia-Atiyah (2010)].

26.3 Isadore M. Singer (*1924)

Abbildung 26.3: I. Singer
G.M. Bergman (1977), CC BY-SA 3.0.
(Math. Inst. Oberwolfach)
[http://de.wikipedia.org/wiki/Isadore_M._Singer,]

Isadore Manuel Singer ist ein bedeutender US-amerikanischer Mathematiker auf dem Gebiet der Analysis, der sich immer für die Verbindungen der modernen Differentialgeometrie zur theoretischen Physik interessiert hat.

Er wurde 1924 in Detroit geboren, studierte an der 'University of Michigan' und wurde 1950 bei Irving Segal an der 'University of Chicago' promoviert mit einer Arbeit zum Thema: *Lie-Algebren unbeschränkter Operatoren.* Er heiratete 1961 Sheila Ruff, mit der er fünf Kinder hat. Singer arbeitete nach seiner Promotion am 'Massachusetts Institute of Technology' (MIT), dann folgten Aufenthalte an verschiedenen Universitäten in den USA, u.a. am 'Institute for Advanced Study' in Princeton, bis er 1983 ans 'MIT' zurückkehrte. Singer engagierte sich in der 'National Academy of Sciences', der 'American Academy of Arts and Sciences' und der 'American Mathematical Society' (AMS).

Seine wichtigsten mathematischen Beiträge sind der *Atiyah-Singer-Indexsatz*, der *Atiyah-Singer-Patodi Indexsatz für berandete Mannigfaltigkeiten* und die *Theorie der analytischen Torsion* (auf der Basis der Eigenwerte des Laplaceoperators).

Singer erhielt zahlreiche Preise, darunter 1988 die Wigner-Medaille und 2004 zusammen mit Atiyah den Abelpreis. [Quelle: Wikipedia-Singer (2016)].

26.4 Atiyah-Singer-Indexsatz für Vektorbündel

Die Fragestellung des Index eines elliptischen, partiellen Differentialoperators (EPDO) geht auf den russischen Mathematiker Israel Gel'fand zurück, der im Jahr 1960 herausgefunden hatte, daß der sog. *analytische Index* eines EPDO eine Homotopie-Invariante ist.

Im Rahmen der Funktionalanalysis von Fredholm-Operatoren zeigt man, daß Fredholm-Operatoren einen wohldefinierten *analytischen Index* besitzen. Dieser Index eines Fredholm-Operators F ist gerade die Dimension des Lösungsraums der homogenen Gleichung ($Fy = 0$) minus der Dimension des Raums der Nebenbedingungen einer inhomogenen Gleichung ($Fy = g$) - siehe Anhang D.5.10:

$$\mathrm{ind}(F) = \dim(\ker(F)) - \dim(\mathrm{coker}) = \dim(\ker(F)) - \dim(F^\dagger) \; .$$

In der Theorie der EPDO, d.h. der elliptischen Pseudifferential-Operatoren (EΨDO), zeigt man, daß EΨDOs auf kompakten Mannigfaltigkeiten ohne Rand Fredholm-Operatoren sind, und daß damit also ihr analytischer Index eine Homotopie-Invariante ist (siehe Anhang E.4.3).

Gel'fand stellte also die Frage: kann man diesen analytischen Index auch *geometrisch-topologisch* tiefer verstehen?

Hirzebruch hatte bereits 1953 mit dem *Hirzebruch-Signatur-Satz* und 1954 mit dem *Hirzebruch-Riemann-Roch-Satz* grundlegende Arbeiten zu geometrisch-topologischen Invarianten gelegt. Dabei benutzte Hirzebruch bereits die *Kobordismus-Theorie* und die Theorie der EΨDO. Daß sich aber diese Homotopie-Invariante des analytischen Indexes eines jeden EΨDO als Verallgemeinerung des Gauss-Bonnet-Satzes als ein Integral über Charakteristische Klassen, d.h. geometrische Strukturen, schreiben läßt, ist das große Verdienst von Atiyah und Singer, wobei Hirzebruch, Segal, Bott, Patodi, Gilkey et al., ebenfalls ganz wesentliche Beiträge auf diesem Gebiet geleistet haben.

Wir wollen hier nur den einfachsten Atiyah-Singer-Indexsatz für elliptische Komplexe auf kompakten Mannigfaltigkeiten *ohne Rand* vorstellen. Der ursprüngliche Beweis von Atiyah und Singer aus dem Jahr 1963 benutze die *Kobordismus-Theorie* nach Hizebruch, ihr erster veröffentlichter Beweis im Jahr 1965 die *topologische K-Theorie.* Diese beiden Beweise konstruieren aus dem Hauptsymbol des EΨDO ein Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit und untersuchen Charakkteristische Klassen dieses Vektorbündels. Beide Beweise sind sehr aufwendig und finden sich in Atiyahs *Collected Works* (Atiyah (1988), Bd. III und IV). Leichter zugänglich als diese Originalarbeiten ist jedoch die Darstellung von Gilkey (1995), S. 273 ff.

Gilkey schlug im Jahr 1973 einen neuen Beweis des Atiyah-Singer-Indexsatzes auf Basis einer Entwicklung des sog. *Wärmeleitungskerns* (engl. *heat-kernel*) vor, d.h. des Integralkerns einer Lösung der Wärmeleitungs-PDO. Der Vorschlag wurde noch im gleichen Jahr 1973 von Atiyah, Bott und Patodi durchgeführt. Siehe hierzu die Darstellung des Autors in Schiekel (2011), S. 349 ff., und Gilkey (1995), S. 57 ff. Dieser Beweis ist deutlich kürzer als der K-Theorie Beweis, hat aber den Nachteil, daß die Koeffizienten der vorkommenden Potenzreihen nur bis auf eine endliche Anzahl freier Konstanten bestimmt sind. Um diese freien Konstanten festzulegen, muß man dann Beispiele berechnen, deren Ergebnisse bereits bekannt sind.

Deutlich kürzer und einfacher ist der von Physikern gefundene Beweis eines Atiyah-Singer-Indexsatzes für euklidische chirale Dirac-Operatoren auf Spinbündeln mittels eines *supersymmetrischen Pfadintegrals*. Dieser Pfadintegral-Beweis wurde nach Vorarbeiten von Witten von Alvarez-Gaumé und unabhängig und gleichzeitig auch von Friedan & Windey entdeckt (siehe unser nächstes Kapitel). Inspiriert durch den supersymmetrischen Pfadintegral-Beweis legte Getzler dann im Jahr 1983 einen sehr kurzen und eleganten Beweis auf der Basis einer supersymmetrischen Wärmeleitungs-PDO vor. Die Methode von Getzler ist sehr schön in Roe (1998), S. 151 ff. beschrieben. Die umfassendste moderne mathematische Darstellung der Getzler-Methode und vieler ihrer Anwendungen findet sich im Buch von Berline, Getzler und Vergne (Berline u. a. (2004)). Erwähnenswert ist sicherlich noch, daß der Pfadintegral-Beweis und der Getzler-Beweis sich zunächst nicht auf allgemeine EΨDOs beziehen, sondern nur auf euklidische Dirac-Operatoren auf Spinbündeln. Man kann aber zeigen, daß sich die Gültigkeit dieses Dirac-Operatoren-Indexsatzes aufgrund des Auftretens von Dirac-Operatoren in einer Poincaré-Dualität zwischen der K-Theorie und der K-Homologie auf alle EΨDOs ausdehnen läßt (Roe (1998), S. 166).

Wir hatten im Rahmen der Hodge-Theorie (Kapitel 20.2) den *de Rham Komplex* kennengelernt, eine Verallgemeinerung des Laplace-Operators von Funktionenräumen auf Räume von Differentialformen über *kompakten, orientierbaren, differenzierbaren, randlosen, m-dimensionalen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten M (siehe: 20.2.1, 20.2.2, 20.2.3):

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0 \,, \tag{26.4.1}$$

$$0 \leftarrow \Omega^0(M) \xleftarrow{d_0^\dagger} \Omega^1(M) \xleftarrow{d_1^\dagger} \cdots \xleftarrow{d_{n-2}^\dagger} \Omega^{n-1}(M) \xleftarrow{d_{n-1}^\dagger} \Omega^n(M) \xleftarrow{d_n^\dagger} 0 \,. \tag{26.4.2}$$

$$\Delta_r : \Omega^r(M) \to \Omega^r(M) \,, \quad \Delta_r := d_{r-1} d_{r-1}^\dagger + d_r^\dagger d_r \,. \tag{26.4.3}$$

Diesen *de Rham Komplex* kann man nun weiter zu einem *elliptischen Komplex* verallgemeinern (siehe Anhang Kapitel E.5). Über M gebe es also ein Vektorbündel $\mathcal{V}$, bestehend aus n komplexen k-dimensionalen Vektorräumen und auf diesem Vektorbündel $\mathcal{V}$ gebe es vektorwertige Matrix-EΨDOs P_i der Ordnung d:

$$\mathcal{V} := \{V_i = V_i(M) \,|\, 0 \le i \le n\} \tag{26.4.4}$$

$$\mathcal{P} := \{P_i \,|\, P_i : C^\infty(V_i) \to C^\infty(V_{i+1}),\, 0 \le i \le n, \quad P_i = 0 \quad \text{für}\, i < 0 \,\text{und}\, i \ge n\} \,. \tag{26.4.5}$$

Dann wird ein *elliptischer Komplex* $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ als der folgende Komplex definiert:

$$0 \xrightarrow{P_0} C^\infty(V_1) \xrightarrow{P_1} C^\infty(V_2) \xrightarrow{P_2} \cdots \xrightarrow{P_{n-2}} C^\infty(V_{n-1}) \xrightarrow{P_{n-1}} C^\infty(V_n) \xrightarrow{P_n} 0 , \qquad (26.4.6)$$

$$0 \xleftarrow{P_0^\dagger} C^\infty(V_1) \xleftarrow{P_1^\dagger} C^\infty(V_2) \xleftarrow{P_2^\dagger} \cdots \xleftarrow{P_{n-2}^\dagger} C^\infty(V_{n-1}) \xleftarrow{P_{n-1}^\dagger} C^\infty(V_n) \xleftarrow{P_n^\dagger} 0 , \qquad (26.4.7)$$

mit Δ_i als verallgemeinertem Laplace-Operator der Ordnung $2d$:

$$\Delta_i : C^\infty(V_i) \to C^\infty(V_i) , \quad \Delta_i := P_{i-1}P_{i-1}^\dagger + P_i^\dagger P_i . \qquad (26.4.8)$$

Daß dieser verallgemeinerte Laplace-Operator Δ_i in einem elliptischen Komplex $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ tatsächlich auch ein elliptischer ΨDO und damit ein Fredholm-Operator ist wird in E.5.2 gezeigt.

Weiter kann man für den elliptischen Komplex $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ Kohomologie-Vektorräume definieren:

$$H^i(\mathcal{P},\mathcal{V}) := \ker(P_{i+1})/\operatorname{im}(P_i) \qquad (26.4.9)$$

und zeigen, daß die Kohomologie-Vektorräume $H^i(\mathcal{P},\mathcal{V})$ isomorph zu den Vektorräumen der entsprechenden harmonischen Formen $Harm^i(\mathcal{P},\mathcal{V})$, d.h. zu $\ker(\Delta_i)$, sind.

Definition 26.4.1 *Der analytische Index eines elliptischen Komplexes wird definiert als:*

$$\operatorname{ind}(\mathcal{P},\mathcal{V}) := \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim(H^i(\mathcal{P},\mathcal{V})) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim(\ker(\Delta_i)) . \qquad (26.4.10)$$

Dieser analytische Index ist trotz seiner vergleichsweise einfachen Definition üblicherweise sehr schwierig zu berechnen - aber immerhin ist er klarerweise eine natürliche Zahl!

Für den Index eines Fredholm-Operators A gilt (siehe Anhang Kapitel D.5, D.5.2):

$$\operatorname{ind}(A) := \dim(\ker(A)) - \dim(\operatorname{coker}(A)) = \dim(\ker(A)) - \dim(\ker(A^\dagger)) . \qquad (26.4.11)$$

Wie hängt nun der analytische $\operatorname{ind}(\mathcal{P},\mathcal{V})$ eines elliptischen Komplexes mit der Fredholm-Index Definition zusammen? Hierzu betrachtet man den kurzen elliptischen Komplex

$$0 \xrightarrow{i=P_{-1}} C^\infty(V_1) \xrightarrow{P=P_0} C^\infty(V_2) \xrightarrow{P_1} 0 , \quad \Rightarrow \qquad (26.4.12)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(\mathcal{P},\mathcal{V}) &= (-1)^0 \dim(H^0(\mathcal{P},\mathcal{V})) + (-1)^1 \dim(H^1(\mathcal{P},\mathcal{V})) \\
&= \{\dim(\ker(P)) - \dim(\operatorname{im}(i))\} - \{\dim(\ker(P_1)) - \dim(\operatorname{im}(P))\} \\
&= \dim(\ker(P)) - \{\dim(C^\infty(V_2)) - \dim(\operatorname{im}(P))\}
\end{aligned}$$

$$= \dim(\ker(P)) - \dim(\operatorname{coker}(P)) \,. \tag{26.4.13}$$

Hieraus sieht man, daß die Definition des analytischen $\operatorname{ind}(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ tatsächlich eine Verallgemeinerung der Fredholm-Index Definition auf elliptische Komplexe ist.

Der jetzt zitierte Atiyah-Singer-Indexsatz (Shanahan (1978), S. 18) gilt für die soeben eingeführten elliptische Komplexe $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$.

Satz 26.4.2

$$\textit{analytischer Index} = \textit{topologischer Index} \,. \tag{26.4.14}$$

$$\operatorname{ind}(\mathcal{P}, \mathcal{V}) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int\limits_M \left[ch\left(\oplus_r (-1)^r \mathcal{F}_{V_r}\right) \frac{Td(\mathcal{F}_{TM^{\mathbb{C}}})}{e(\mathcal{F}_{TM})} \right]_{\text{vol}} \,. \tag{26.4.15}$$

Hierbei bedeutet die Bezeichnungsweise $[\bullet]_{\text{vol}}$, daß von der Form in $[\bullet]$ nur der Volumenanteil zu nehmen und über diesen zu integrieren ist. Häufig findet man in der Literatur Darstellungen, in denen als Argumente in Chern-Charakter, Todd-Klasse und Euler-Klasse nur der jeweilige Raum angegeben wird und nicht die entsprechende Krümmungs-2-Form, d.h. man findet die Schreibweise $Td(TM^{\mathbb{C}})$ anstelle von $Td(\mathcal{F}_{TM^{\mathbb{C}}})$.

Zunächst fällt einem an dieser Formel für den Atiyah-Singer-Indexsatz auf, daß der topologische Index auf der rechten Seite eine rationale Zahl zu sein scheint, obwohl der analytische Index auf der linken Seite eine ganze Zahl ist. Weiter stellt sich die Frage, wie diese Formel im Fall von $e(\mathcal{F}_{TM}) = 0$ zu verstehen ist, denn z.B. für einen Torus T^m verschwindet die Krümmung und damit auch $e(\mathcal{F}_{TM})$ - siehe 10.11.2 und 10.11.10. Die genauere Betrachtung der Konstruktion für den Beweis des Atiyah-Singer-Indexsatzes zeigt nun, daß tatsächlich auch der topologische Index ganzzahlig ist und daß sich die Division $ch(\oplus_r (-1)^r \mathcal{F}_{V_r})/e(\mathcal{F}_{TM})$ bei verschwindender Eulerklasse analytisch ausführen läßt (Shanahan (1978), S. 17-19).

26.5 de Rham Komplex mit Atiyah-Singer-Indexsatz

Wir hatten im Rahmen der Hodge-Theorie (Kapitel 20.2) den *de Rham Komplex* kennengelernt, eine Verallgemeinerung des Laplace-Operators von Funktionenräumen auf Räume von Differentialformen über *kompakten, orientierbaren, differenzierbaren, randlosen, m-dimensionalen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten M (siehe: 20.2.1, 20.2.2, 20.2.3). Damit wir den Atiyah-Singer-Indexsatz auf diesen elliptischen Komplex anwenden können, müssen zunächst die Differentialformen komplexifiziert werden:

$$0 \to \Omega^0(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_n} 0 \,, \tag{26.5.1}$$

$$0 \leftarrow \Omega^0(M)^{\mathbb{C}} \xleftarrow{d_0^\dagger} \Omega^1(M)^{\mathbb{C}} \xleftarrow{d_1^\dagger} \cdots \xleftarrow{d_{n-2}^\dagger} \Omega^{n-1}(M)^{\mathbb{C}} \xleftarrow{d_{n-1}^\dagger} \Omega^n(M)^{\mathbb{C}} \xleftarrow{d_n^\dagger} 0 \,. \tag{26.5.2}$$

$$\Delta_r : \Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \,, \quad \Delta_r := d_{r-1} d_{r-1}^\dagger + d_r^\dagger d_r \,. \tag{26.5.3}$$

Den analytischen Index dieses Komplexes kennen wir bereits, es ist gerade die Euler-Charakteristik (26.4.10 und 19.0.22):

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(d, \Omega^*(M)^{\mathbb{C}}) &= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim(H^i(d, \Omega^*(M)^{\mathbb{C}})) \\ &= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim(H^i(d, \Omega^*(M))) = \chi(M) \,. \end{aligned} \tag{26.5.4}$$

Jetzt soll der topologische Index des de Rham Komlexes nach 26.4.15 bestimmt werden. Sei die Dimension der Mannigfaltigkeit M geradzahlig, d.h. $m = 2l$. Im Folgenden schreiben wir anstelle von $\Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$ jetzt $\wedge^r(T^*M)^{\mathbb{C}}$, weil dann der Übergang von $(T^*M)^{\mathbb{C}}$ nach $(TM)^{\mathbb{C}}$ klarer ersichtlich ist. Damit schreibt sich der topologische Index des de Rham Komplexes als:

$$(-1)^{l(l+1)} \int\limits_M \left[ch\left(\oplus_{r=0}^m (-1)^r \mathcal{F}_{\wedge^r (T^*M)^{\mathbb{C}}} \right) \frac{Td(\mathcal{F}_{TM^{\mathbb{C}}})}{e(\mathcal{F}_{TM})} \right]_{\mathrm{vol}} \,. \tag{26.5.5}$$

Für den ersten Faktor mit dem Chern-Charakter findet man wegen der Additivität der Chern-Charaktere:

$$\begin{aligned} & ch\left(\oplus_{r=0}^m (-1)^r \mathcal{F}_{\wedge^r (T^*M)^{\mathbb{C}}} \right) \\ & \quad = 1 - ch(\mathcal{F}_{\wedge^1 (T^*M)^{\mathbb{C}}}) + ch(\mathcal{F}_{\wedge^2 (T^*M)^{\mathbb{C}}}) - \ldots + (-1)^m ch(\mathcal{F}_{\wedge^m (T^*M)^{\mathbb{C}}}) \,. \end{aligned} \tag{26.5.6}$$

Nun ist der Chern-Charakter definiert als (25.6.1)

$$ch(\mathcal{F}_{(T^*M)^{\mathbb{C}}}) := \mathrm{tr} \exp(\frac{i}{2\pi} \mathcal{F}_{(T^*M)^{\mathbb{C}}}) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j} (\mathcal{F}_{(T^*M)^{\mathbb{C}}}) \,, \tag{26.5.7}$$

wenn $\frac{i}{2\pi}\mathcal{F}$ diagonalisiert ist mit den Eigenwerten λ_j, $1 \le j \le m$.

Wir hatten in 25.5.14 gesehen, daß man die totale Chern-Klasse eines Vektorbündels auch als die Chern-Klasse eines Whitney-Summen-Bündels von k komplexen Linienbündeln interpretieren kann (Splitting-Prinzip) und daß für den Eigenwert eines komplexes Linienbündels L und den Eigenwert des dualen komplexen Linienbündels L^* gilt (25.5.15):

$$\lambda_1(\mathcal{F}_{L^*}) = -\lambda_1(\mathcal{F}_L) \,.$$

Damit können wir in 26.5.7 von $\lambda_j(\mathcal{F}_{(T^*M)^\mathbb{C}})$ bzgl. des Kotangentialbündel übergehen zu $\lambda_j(\mathcal{F}_{(TM)^\mathbb{C}})$ bzgl. des Tangentialbündels

$$\lambda_j(\mathcal{F}_{(T^*M)^\mathbb{C}}) = -\lambda_j(\mathcal{F}_{(TM)^\mathbb{C}}) \,, \tag{26.5.8}$$

und erhalten

$$ch(\mathcal{F}_{(T^*M)^\mathbb{C}}) = \sum_{j=1}^{m} e^{-\lambda_j}(\mathcal{F}_{(TM)^\mathbb{C}}) \,. \tag{26.5.9}$$

Daraus folgt für 26.5.6

$$\begin{aligned} ch\left(\oplus_{r=0}^m (-1)^r \mathcal{F}_{\wedge^r(T^*M)^\mathbb{C}}\right) &= 1 - \sum_{j=1}^{m} e^{-\lambda_j}(\mathcal{F}_{(TM)^\mathbb{C}}) + \sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{m} e^{-\lambda_j} \wedge e^{-\lambda_k}(\mathcal{F}_{(TM)^\mathbb{C}}) - \ldots \\ &\quad + (-1)^m e^{-\lambda_1} \wedge e^{-\lambda_2} \wedge \ldots \wedge e^{-\lambda_m}(\mathcal{F}_{(TM)^\mathbb{C}}) \\ &= \prod_{j=1}^{m} (1 - e^{-\lambda_j})(\mathcal{F}_{(TM)^\mathbb{C}}) \,. \end{aligned} \tag{26.5.10}$$

Das ursprüngliche Vektorbündel TM ist ein reelles Vektorbündel und damit ist die ursprüngliche Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_{TM}$ eine schiefsymmetrische reelle Matrix aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(k)$. TM wurde nur deshalb zu $TM^\mathbb{C}$ komplexifiziert, damit man den Atiyah-Singer-Indexsatz anwenden kann. Dabei bleibt aber $\mathcal{F}_{TM^\mathbb{C}}$ weiterhin schiefsymmetrisch und deswegen treten alle Eigenwerte paarweise als $\pm\lambda_j$ auf (siehe 25.9.4). Also können wir den obigen Chern-Charakter auch schreiben als:

$$ch\left(\oplus_{r=0}^m (-1)^r \mathcal{F}_{\wedge^r(T^*M)^\mathbb{C}}\right) = \prod_{j=1}^{m/2} (1 - e^{-\lambda_j})(1 - e^{+\lambda_j})(\mathcal{F}_{(TM)^\mathbb{C}}) \,. \tag{26.5.11}$$

Für den zweiten Faktor von 26.5.5 mit der Todd-Klasse gilt mit 25.8.7:

$$Td(\mathcal{F}_{TM^\mathbb{C}}) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{1 - e^{-\lambda_j}}(\mathcal{F}_{TM^\mathbb{C}}) = \prod_{j=1}^{m/2} \frac{(+\lambda_j)(-\lambda_j)}{(1 - e^{-\lambda_j})(1 - e^{+\lambda_j})}(\mathcal{F}_{TM^\mathbb{C}}) \,. \tag{26.5.12}$$

Für den dritten Faktor, die Euler-Klasse ergibt sich:

$$e(\mathcal{F}_{TM}) = \prod_{j=1}^{m/2} \lambda_j(\mathcal{F}_{TM^\mathbb{C}}) \,. \tag{26.5.13}$$

Jetzt setzen wir das Obige in 26.5.4 und 26.5.5 ein und erhalten als schönes Ergebnis einen verallgemeinerten Gauß-Bonnet-Satz:

$$\chi(M) = \int_M \prod_{j=1}^{m/2} \lambda_j(\mathcal{F}_{TM^\mathbb{C}})|_{\mathrm{vol}} = \int_M e(\mathcal{F}_{TM}) \,. \tag{26.5.14}$$

Als Beispiele sollen eine 2-dimensionale und eine 4-dimensionale, orientierbare, randlose, differenzierbare Mannigfaltigkeit M betrachtet werden. Mit 25.11.8 und 25.11.9 ergeben sich:

$$m = 2: \quad \chi(M) = \frac{-1}{2\pi} \int\limits_M R_{12} \; , \tag{26.5.15}$$

$$m = 4: \quad \chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int\limits_M \epsilon^{abcd} R_{ab} \wedge R_{cd} \; . \tag{26.5.16}$$

Der 2-dimensionale Fall ist gerade der klassische Gauß-Bonnet-Satz!

27 Pfadintegralbeweis eines Atiyah-Singer-Indexsatzes

27.1 Richard (Dick) Feynman (1918 – 1988)

Abbildung 27.1: R. Feynman
T. Thiel (1984), CC BY-SA 3.0.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Feynman]

Feynman wurde 1918 in Far Rockaway in New York als Sohn einer ursprünglich ostjüdischen Familie geboren. Schon in seiner Kindheit begann er damit, Radios zu reparieren und bereits mit 15 Jahren lernte er Differential- und Integralrechnung. Sein Grundstudium absolvierte er am MIT und die Graduiertenausbildung an der Princeton University. Dort wurde er bei 1942 bei Archibald Wheeler promoviert. In seiner Doktorarbeit beschäftigte er sich mit dem Prinzip der Stationären Wirkung in der Quantenmechanik, womit er bereits die Grundlagen zu seiner späteren Pfadintegral-Methode legte. Danach beteiligte er sich in Los Alamos bis zum Kriegsende am Manhattan Project, der Entwicklung der amerikanischen Atombombe. Seine erste Frau Arlene Greenbaum starb schon im Juli 1945 an TBC (die Geschichte dieser Liebe und Ehe wurde 1996 unter dem Titel Infinity verfilmt). Mit seiner dritten Frau Gweneth hatte er einen Sohn und eine Adoptivtochter. Bethe, der sein Chef in Los Alamos gewesen war, berief Feynman an die Cornell University und im Jahr 1951 wechselte Feynman auf eine Professur für Theoretische Physik am Caltech in Kalifornien, wo er bis zu seinem Lebensende verblieb. Feynman verstarb 1988 an den Folgen zweier Krebserkrankungen, hielt aber noch 14 Tage vor seinem Tod eine Abschiedsvorlesung. Seine Vorlesungen, Vortäge und Bücher waren berühmt für ihren unkonventionellen Ansatz, ihren Humor und das Bemühen, immer die Physik hinter den Formeln transparent und verständlich zu machen. Weltweit bekannt wurde der Undergraduate Kurs The Feynman Lectures on Physics in Zusammenarbeit mit Leighton und Sands (1961-64). Sehr schön und lesenswert sind auch Feynmans autobiographischen Essays in „Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman!” (Feynman, 1991) und seine Aufsätze in Vom Wesen physikalischer Gesetze (Feynman,

1993) - darin auf S. 160 der berühmte Ausspruch: „Andererseits kann ich mit Sicherheit behaupten, daß niemand die Quantenmechanik versteht".

In der Physik sind Feynmans wichtigsten Beiträge die Pfadintegral-Methode in der Quantentheorie, die Feynman-Diagramme, die Quantenelektrodynamik, für die er 1965 zusammen mit Schwinger und Tomonaga den Nobelpreis erhielt, Aufsätze zur Suprafluidität, zur starken Wechsellwirkung, zur Quantengravitation und zu neuronalen Netzwerken.

[Quellen: Wikipedia-Feynman (2010), Kleinert (2006)].

27.2 Edward Witten (*1951)

Abbildung 27.2: E. Witten
Ojan (Göteborg, Schweden, 2008), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Edward_Witten]

Edward Witten wurde 1951 in Baltimore, Maryland geboren. Sein Vater Louis Witten war ein theoretischer Physiker, der auf dem Gebiet der Allgemeinen Relativitätstheorie arbeitete. Edward Witten studierte zunächst Geschichte an der 'Brandeis University' und schloß dort mit einem Bachelor ab. 1973 schrieb er sich für Angewandte Mathematik an der 'Princeton University' ein und wechselte dann aber in die theoretische Physik, wo er 1976 bei David Gross promoviert wurde mit einer Arbeit zum Thema: *Some problems in the short distance analysis of gauge theories*. Witten ist seit 1979 mit der italienischen Physikerin Chiara Nappi verheiratet und hat mit ihr drei Kinder. Seit 1987 wirkt Witten als Professor für Mathematische Physik am 'Institute for Advanced Study' in Princeton.

Im Jahr 1982 schlug Dirac den jungen mathematischen Physiker Edward Witten für einen speziellen Preis der Päpstlichen Akademie in Rom mit den Worten vor: „Witten betreibe eine außerordentlich brilliante mathematische Physik" (Farmelo (2009), S. 437). Witten ist wohl zur Zeit weltweit einer der genialsten und einflußreichsten mathematischen Physiker. Außergewöhnlich an seinem Wirken ist, daß er neben bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiet der theoretischen Physik auch ebenso bedeutsame Arbeiten auf dem Gebiet der Reinen Mathematik publiziert hat - und bislang der einzige Physiker ist, der 1990 mit der 'Fields-Medaille' der 'Internationalen Mathematischen Vereinigung' ausgezeichnet wurde. Die Laudatio bei dieser Auszeichnung stammte übrigends von Michael Atiyah. Daneben wurde Witten mit zahlreichen anderen Preisen geehrt, darunter der Dirac-Medaille (1985), der Albert Einstein Medaille (1985), dem Henri Poincaré Preis (2006) und der Lorentz Medaille (2010). Neben seiner wissenschaftlichen Arbeit engagiert sich Witten in der Friedensbewegung 'Americans for Peace Now (APN)', die sich um eine friedliche Lösung des Israelisch-Palästinensischen Konflikts bemüht.

Die physikalisch vielleicht wichtigsten Arbeiten von Witten betreffen:

- das Positive-Energie-Theorem in der Allgemeinen Relativitätstheorie (1981),
- mit Seiberg: supersymmetrische Eichtheorien und Supergravitation,
- mit Seiberg: nichtkommutative Quantenfeldtheorien als Grenzfall von Stringtheorien,
- Dualitäten zwischen den 5 verschiedenen bekannten Stringtheorien und der Vorschlag einer vereinheitlichten Stringtheorie mit dem Namen M-Theorie (ab 1995),
- AdS/CFT Korrespondenz, die eine Verbindung zwischen gewissen Quantenfeldtheorien und einer Quantengravitation herstellt.

Mathematisch besonders bedeutsame Arbeiten waren:

- die Chern-Simons Eichtheorie als Grundlage der mathematischen Theorie der Knoten, der Jones Polynome und von Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten,
- topologische Quantenfeldtheorie (in den späten 1980'er Jahren),
- ein supersymmetrischer Beweis der Morse-Theory in unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten, der in der Folge zu einem ebensolchen supersymmetrischen Beweis eines Atiyah-Singer-Indexsatzes durch Alvarez-Gaumé und unabhängig durch Friedan & Windey führte,
- mit Seiberg: die Seiberg-Witten Invarianten von glatten 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten,
- mit Seiberg: nichtkommutative Geometrie,
- mit Atiyah: M-Theorie.

Während Witten selbst immer noch davon überzeugt ist (Stand Anfang 2016), daß die String-Theorien, bzw. seine gesuchte M-Theorie, der richtige Weg zu einer Quantisierung der Gravitation und einer Großen Vereinheitlichung aller Kräfte in der Physik ist, halten viele andere theoretische Physiker, wie z.B. Lee Smolin (*Three Roads to Quantum Gravity*, Smolin (2001)) und Roger Penrose (*The Road to Reality*, Penrose (2004)) das Programm der String-Theorien für eine anspruchsvolle mathematische Spekulation, der aber zur Zeit sowohl eine exakte mathematische Formulierung als auch jeglicher Kontakt zu physikalischen Experimenten fehlen - also ein Weg, den Wolfgang Pauli mit seinem berühmten Wort ***'Not Even Wrong'*** kommentiert hätte. Dies ist auch der Titel des überaus lesenswerten Buches über das Standardmodell und die Superstring-Theorien von Peter Woit (Woit (2006)).

[Quellen: Wikipedia-Witten (2016), Homepage Witten (2016)].

27.3 Atiyah-Singer-Indexsatz für Spinbündel

Der schöne Beweis des Atiyah-Singer-Indexsatzes für euklidische Dirac-Operatoren auf Spinbündeln mittels eines *supersymmetrischen Pfadintegrals* wurde nach Vorarbeiten von Witten (Witten (1982)) und auf dessen mündliche Anregung hin von Alvarez-Gaumé (Alvarez-Gaumé (1983)) und unabhängig von Friedan & Windey (Windey (1984), Friedan u. Windey (1984)) gefunden.

Wir folgen hier der für Physiker gut geeigneten Einführung von Nakahara (2003) (S. 453 ff.), der didaktisch schönen Einführung von Orlando Alvarez (Alvarez (1995)) und den drei soeben genannten Originalarbeiten von Alvarez-Gaumé und Windey. Allerdings enthalten all diese genannten Arbeiten mehr oder minder subtile Argumentationslücken. Wer immer an einer umfassenderen Diskussion interessiert ist findet diese z.B. in den beiden folgenden schönen Dissertationen: Mostafazadeh (1994), van Loon (2015).

Wir bemühen uns hier um eine für Anfänger geeignete, relativ ausführliche Darstellung.

Satz 27.3.1

$$\mathrm{ind}(\mathcal{P},\mathcal{V}) = \int\limits_M \left[\hat{A}(TM)\right]_{\mathrm{vol}} . \tag{27.3.1}$$

Der Beweis dieses Satzes mittels eines supersymmetrischen Feynman-Pfadintegrals wird den Rest dieses Kapitels in Anspruch nehmen, ist aber besonders für Physiker interessant.

27.4 Index des chiralen Dirac-Operators

Für den euklidischen Dirac-Operator in einer gekrümmten, 4-dimensionalen Raumzeit hatten wir in Kapitel 22.9 erhalten (mit $c = 1$, $\hbar = 1$, mit dem Spin-Zusammenhang Ω_μ, aber ohne den Zusammenhang A_μ für das elektromagnetische Feld):

$$i\nabla\!\!\!/ = i\gamma^\mu \nabla_\mu = i\gamma^a e_a{}^\mu \nabla_\mu \quad \text{mit} \tag{27.4.1}$$

$$\nabla_\mu := (\partial_\mu + \Omega_\mu) \; , \quad \Omega_\mu = \frac{1}{2}\Gamma^a{}_\mu{}^b \Sigma_{ab} \; . \tag{27.4.2}$$

Die Verallgemeinerung des Dirac-Operators in einer 4 dimensionalen Mannigfaltigkeit auf einen Dirac-Operator in einer $m = 2n$ dimensionalen Mannigfaltigkeit M erfolgt über die Verallgemeinerung der vier Diracschen Gamma-Matrizen auf die m Gamma-Matrizen γ^μ einer entsprechenden Clifford-Algebra. Diese wird erzeugt durch die Basis

$$\mathbb{1}, \gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}, \ldots, \gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^m \quad \text{mit } 1 \leq \mu_i \leq m \; , \; \mu_1 < \ldots < \mu_m \; ,$$

und es gelten für die hermiteschen Gamma-Matrizen $\gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\dagger$ die Clifford-Antikommutator-Beziehungen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \,. \tag{27.4.3}$$

Die Clifford-Algebra ist auch ein Vektorraum und dessen Dimension ist 2^m, denn die Basis kann erzeugt werden durch:

$$(\gamma^1)^{i_1} \cdot \ldots \cdot (\gamma^m)^{i_m} \quad \text{mit } i_1, \ldots, i_m \in \{0,1\} \,. \tag{27.4.4}$$

Im nächsten Schritt soll eine Darstellung der Clifford-Algebra in einem geeigneten Fock-Hilbert-Raum konstruiert werden. Aus den Gamma-Operatoren kann man Fermion-Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren eines n-Fermionen-Systems definieren:

$$\begin{aligned}
\hat{c}_1 &:= \frac{1}{2}(\gamma^1 + i\gamma^2) \,, \quad \hat{c}_1^\dagger := \frac{1}{2}(\gamma^1 - i\gamma^2) \,, \\
\hat{c}_2 &:= \frac{1}{2}(\gamma^3 + i\gamma^4) \,, \quad \hat{c}_2^\dagger := \frac{1}{2}(\gamma^3 - i\gamma^4) \,, \\
&\ \cdots \qquad\qquad\quad , \qquad\qquad\qquad \cdots \,, \\
\hat{c}_n &:= \frac{1}{2}(\gamma^{2n-1} + i\gamma^{2n}) \,, \quad \hat{c}_n^\dagger := \frac{1}{2}(\gamma^{2n-1} - i\gamma^{2n}) \,.
\end{aligned} \tag{27.4.5}$$

Jedes Fermion-Vernichtungs- und Erzeugungs-Paar $\hat{c}_\nu, \hat{c}_\nu^\dagger$ kann in einem 2-dimensionalen komplexen Hilbert-Raum dargestellt werden, so daß wir also eine Darstellung der Gamma-Operatoren in einem $2^{\frac{m}{2}} = 2^n$ dimensionalen komplexen Hilbert-Raum suchen. Die folgende Konstruktion mittels der 2-dimensionalen Pauli-Matrizen liefert die gewünschte Darstellung:

$$\begin{aligned}
\gamma^1 &:= \sigma^1 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \ldots \,, \\
\gamma^2 &:= \sigma^2 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \ldots \,, \\
\gamma^3 &:= \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \mathbb{1} \otimes \ldots \,, \\
\gamma^4 &:= \sigma^3 \otimes \sigma^2 \otimes \mathbb{1} \otimes \ldots \,, \\
\gamma^5 &:= \sigma^3 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \ldots \,, \\
\ldots &:= \quad \ldots \,.
\end{aligned} \tag{27.4.6}$$

All diese γ-Matrizen haben die Dimension 2^n, sind hermitesch, antikommutieren gegenseitig und ergeben quadriert $\mathbb{1}_{2^n}$.

Wie auch im Vierdimensionalen definiert man den sog. *Chiralitäts-Operator* $\Gamma = \gamma_* = \gamma^{2n+1}$ als:

$$\Gamma := \gamma^{2n+1} := (-i)^n \gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \,. \tag{27.4.7}$$

Γ antikommutiert mit allen γ^i:

$$\gamma^1\Gamma = \gamma^1 \cdot (-i)^n\gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} = (-i)^n\gamma^2 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \; ,$$

$$\Gamma\gamma^1 = (-i)^n\gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \cdot \gamma^1 = (-i)^n(-1)^{2n-1}\gamma^2 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \; ,$$

$$\{\gamma^1, \Gamma\} = \gamma^1\Gamma + \Gamma\gamma^1 = (-i)^n\gamma^2 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \cdot (1-1) = 0 \; . \tag{27.4.8}$$

Außerdem gilt $\Gamma^2 = \mathbb{1}$:

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &= (-i)^n\gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \, \cdot \, (-i)^n\gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} = (-1)^n\gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \, \cdot \, \gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \\ &= (-1)^n(-1)^{2n-1}\gamma^2 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \, \cdot \, \gamma^2 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \\ &= (-1)^n(-1)^{2n-1}(-1)^{2n-2}\gamma^3 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \, \cdot \, \gamma^3 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} = \ldots \\ &= (-1)^n(-1)^{2n-1}(-1)^{2n-2} \cdot \ldots \cdot (-1)^1 \, \mathbb{1} \\ &= (-1)^{n+\frac{1}{2}(2n)(2n-1)}\mathbb{1} = \mathbb{1} \; . \end{aligned} \tag{27.4.9}$$

Lemma 27.4.1 *Seien γ^μ, $\mu = 1, \ldots, m$ die Erzeugenden einer Clifford-Algebra und $\hat{c}_\nu$, $\hat{c}_\nu^\dagger$ mit $\nu = 1, \ldots, n = \frac{m}{2}$ die entsprechenden Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren eines n-Fermionen-Systems. Dann gilt mit dem Fermion-Teilchenzahl-Operator*

$$\hat{F} := \sum_{\nu=1}^{n} \hat{c}_\nu^\dagger \hat{c}_\nu \; , \tag{27.4.10}$$

$$\Gamma = (-i)^n\gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} = e^{i\pi\hat{F}} = (-1)^{\hat{F}} = (-1)^{\sum_{\nu=1}^n \hat{c}_\nu^\dagger \hat{c}_\nu} \; . \tag{27.4.11}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu &= \frac{1}{4}(\gamma_{2\nu-1} - i\gamma_{2\nu})(\gamma_{2\nu-1} + i\gamma_{2\nu}) = \frac{1}{4}(1 + i\gamma_{2\nu-1}\gamma_{2\nu} - i\gamma_{2\nu}\gamma_{2\nu-1} + 1) \\ &= \frac{1}{2}(1 + i\gamma_{2\nu-1}\gamma_{2\nu}) \; .\end{aligned}$$

Die Operatoren $\hat{c}_\nu^\dagger$, $\hat{c}_\nu$ für festes ν wirken in einem 2-dimensionalen Hilbert-Raum mit der Basis $\{|\,0\rangle, |\,1\rangle\}$. Daher kann man die folgende Relation ausnutzen:

$$(-1)^{\hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu} \,|\,0\rangle = (-1)^0 = 1 = (1 - 2\hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu) \,|\,0\rangle \; ,$$

$$(-1)^{\hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu} \,|\,1\rangle = (-1)^1 = -1 = (1 - 2\hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu) \,|\,1\rangle \; ,$$

$$(-1)^{\hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu} = (1 - 2\hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu) = (-i)\gamma_{2\nu-1}\gamma_{2\nu} \; ,$$

$$(-1)^{\hat{F}} = (-1)^{\sum_{\nu=1}^n \hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu} = \prod_{\nu=1}^{n}(-1)^{\hat{c}_\nu^\dagger\hat{c}_\nu} = (-i)^n\gamma^1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{2n} \; . \qquad \square$$

Damit hat also Γ genau n mal die Eigenwerte $\{+1, -1\}$ und kann nach einer geeigneten Umsortierung geschrieben werden als

$$\Gamma = \begin{pmatrix} +\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{27.4.12}$$

Da Γ mit den hermiteschen γ^μ antikommutiert folgt:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} A^\mu & (S^\mu)^\dagger \\ S^\mu & B^\mu \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\{\Gamma, \gamma^\mu\} &= \Gamma\gamma^\mu + \gamma^\mu\Gamma \\
&= \begin{pmatrix} +\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu & (S^\mu)^\dagger \\ S^\mu & B^\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^\mu & (S^\mu)^\dagger \\ S^\mu & B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^\mu & (S^\mu)^\dagger \\ -S^\mu & -B^\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^\mu & -(S^\mu)^\dagger \\ S^\mu & -B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A^\mu & 0 \\ 0 & -2B^\mu \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$A^\mu = B^\mu = 0 .$$

Damit haben wir die sog. chirale Darstellung der Clifford-Algebra in einem 2^n-dimensionalen Hilbert-Raum H_F konstruiert. H_F ist also reduzibel in die beiden Unterräume H_{F+} und H_{F-}:

$$H_F = H_{F+} \oplus H_{F-} . \tag{27.4.13}$$

Projektoren auf H_{F+} und H_{F-} sind:

$$P_+ = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \Gamma) = \begin{pmatrix} +\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{27.4.14}$$

$$P_- = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +\mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{27.4.15}$$

Der Operator ∇_μ ist antihermitesch, da wir hier eine Mannigfaltigkeit ohne Rand betrachten, und deswegen ist $i\nabla_\mu$ hermitesch. Damit schreibt sich der euklidische Dirac-Operator in der chiralen Darstellung als:

$$i\not{\nabla} = i\gamma^\mu\nabla_\mu = i\nabla_\mu \begin{pmatrix} 0 & (S^\mu)^\dagger \\ S^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (S^\mu i\nabla_\mu)^\dagger \\ S^\mu i\nabla_\mu & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}^\dagger \\ \hat{D} & 0 \end{pmatrix} . \tag{27.4.16}$$

Also gilt für die Operatoren $\hat{D}$ und $\hat{D}^\dagger$:

$$\hat{D} = iS^\mu \nabla_\mu : H_+ \to H_- \ , \quad \hat{D}^\dagger = (iS^\mu \nabla_\mu)^\dagger : H_- \to H_+ \ . \tag{27.4.17}$$

Wir hatten in Kapitel 22.9 gezeigt, daß dieser euklidische Dirac-Operator ein elliptischer Differentialoperator ist, und damit auf einer kompakten Mannigfaltigkeit auch ein Fredholm-Operator (siehe Kapitel E.4). Damit existiert für $i\nabla\!\!\!/$ ein Fredholm-Index, der zugleich eine Homotopie-Invariante ist (siehe D.5.10). Nun ist $i\nabla\!\!\!/$ aber hermitesch und damit ergibt sich sein Index zu 0:

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(i\nabla\!\!\!/) &= \dim(\ker(i\nabla\!\!\!/)) - \dim(\operatorname{coker}(i\nabla\!\!\!/)) \\ &= \dim(\ker(i\nabla\!\!\!/)) - \dim(\ker((i\nabla\!\!\!/)^\dagger)) \\ &= \dim(\ker(\hat{D})) - \dim(\ker(\hat{D}^\dagger)) + \dim(\ker(\hat{D}^\dagger)) - \dim(\ker(\hat{D}^{\dagger\dagger})) \\ &= 0 \ . \end{aligned} \tag{27.4.18}$$

Da der Hilbert-Raum H in der chiralen Darstellung reduzibel ist in H_+ und H_- untersuchen wir im weiteren also nur den Index des *chiralen Dirac-Operators* $\hat{D}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(\hat{D}) &= \dim(\ker(\hat{D})) - \dim(\operatorname{coker}(\hat{D})) \\ &= \dim(\ker(\hat{D})) - \dim(\ker(\hat{D}^\dagger)) \ . \end{aligned} \tag{27.4.19}$$

Satz 27.4.2 *Sei $H := (i\nabla\!\!\!/)^2$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$ beliebig, dann gilt für* $\operatorname{ind}(D)$*:*

$$\operatorname{ind}(\hat{D}) = \operatorname{tr}(e^{-\beta \hat{D}^\dagger \hat{D}}) - \operatorname{tr}(e^{-\beta \hat{D}\hat{D}^\dagger}) = \operatorname{tr}(\Gamma e^{-\beta H}) \ . \tag{27.4.20}$$

Beweis. Wir sind interessiert an $\ker(\hat{D})$ und $\ker(\hat{D}^\dagger)$. Weil nun $\hat{D}^\dagger\hat{D}$ und $\hat{D}\hat{D}^\dagger$ Operatoren mit nichtnegativen, reellen Eigenwerten sind, kann man statt $\hat{D}$ und $\hat{D}^\dagger$ auch $\hat{D}^\dagger\hat{D}$ und $\hat{D}\hat{D}^\dagger$ betrachten, denn:

$$\ker(\hat{D}) = \ker(\hat{D}^\dagger\hat{D}) \quad \text{und} \quad \ker(\hat{D}^\dagger) = \ker(\hat{D}\hat{D}^\dagger) \ .$$

Seien $\mid \varphi_i\rangle$ orthonormale Eigenvektoren von $\hat{D}^\dagger\hat{D}$ zum Eigenwert λ_i. Dann sind für alle $\lambda_i > 0$ die folgenden Vektoren

$$\mid \psi_i\rangle := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\,\hat{D} \mid \varphi_i\rangle$$

orthonormale Eigenvektoren von $\hat{D}\hat{D}^\dagger$ zum gleichen Eigenwert $\lambda_i > 0$, denn:

$$\begin{aligned} \hat{D}\hat{D}^\dagger \mid \psi_i\rangle &= \hat{D}\hat{D}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\,\hat{D} \mid \varphi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\hat{D}(\hat{D}^\dagger\hat{D}) \mid \varphi_i\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\hat{D}\lambda_i \mid \varphi_i\rangle = \lambda_i \mid \psi_i\rangle \ . \end{aligned}$$

$$\langle \psi_i \mid \psi_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle \varphi_i \hat{D} \mid \hat{D} \varphi_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle \varphi_i \mid \hat{D}^\dagger \hat{D} \varphi_j \rangle$$
$$= \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle \varphi_i \mid \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \ .$$

Jetzt soll die Differenz der folgenden beiden Spuren berechnet werden, wobei wir die interessierenden Eigenvektoren von $\ker(D)$ und $\ker(D^\dagger)$, d.h. die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_i = 0$ separat betrachten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(e^{-\beta \hat{D}^\dagger \hat{D}}) - \mathrm{tr}(e^{-\beta \hat{D} \hat{D}^\dagger}) &= \sum_{\substack{i \\ \lambda_i > 0}} \langle \varphi_i \mid e^{-\beta \hat{D}^\dagger \hat{D}}) \varphi_i \rangle + \sum_{\substack{i \\ \lambda_i = 0}} \langle \varphi_i \mid e^{-\beta \hat{D}^\dagger \hat{D}}) \varphi_i \rangle \\
&\quad - \sum_{\substack{i \\ \lambda_i > 0}} \langle \psi_i \mid e^{-\beta \hat{D} \hat{D}^\dagger}) \psi_i \rangle - \sum_{\substack{i \\ \lambda_i = 0}} \langle \psi_i \mid e^{-\beta \hat{D} \hat{D}^\dagger}) \psi_i \rangle \\
&= \sum_{\substack{i \\ \lambda_i > 0}} \langle \varphi_i \mid e^{-\beta \lambda_i}) \varphi_i \rangle + \dim(\ker(\hat{D}^\dagger \hat{D})) \\
&\quad - \sum_{\substack{i \\ \lambda_i > 0}} \langle \psi_i \mid e^{-\beta \lambda_i}) \psi_i \rangle - \dim(\ker(\hat{D} \hat{D}^\dagger)) \\
&= \dim(\ker(\hat{D})) - \dim(\ker(\hat{D}^\dagger)) = \mathrm{ind}\, \hat{D} \ .
\end{aligned}$$

Man sieht hier konkret sehr schön, daß der $\mathrm{ind}\, \hat{D}$ unabhängig von der eingeführten Hilfsgröße β ist.

Mit $H := (i\not{\nabla})^2$ folgt:

$$H := (i\not{\nabla})^2 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}^\dagger \\ \hat{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}^\dagger \\ \hat{D} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}^\dagger \hat{D} & 0 \\ 0 & \hat{D} \hat{D}^\dagger \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Gamma e^{-\beta H} &= \begin{pmatrix} +\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\beta \hat{D}^\dagger \hat{D}} & 0 \\ 0 & e^{-\beta \hat{D} \hat{D}^\dagger} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-\beta \hat{D}^\dagger \hat{D}} & 0 \\ 0 & -e^{-\beta \hat{D} \hat{D}^\dagger} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(\Gamma e^{-\beta H}) = \mathrm{tr}(e^{-\beta \hat{D}^\dagger \hat{D}}) - \mathrm{tr}(e^{-\beta \hat{D} \hat{D}^\dagger}) = \mathrm{ind}\, \hat{D} \ . \qquad \square$$

Nebenbei: die Größe $\mathrm{tr}(\Gamma)$ heißt auch der *Witten-Index*.

Diese Darstellung des Indexes des chiralen Anteils des euklidischen Dirac-Operators $\mathrm{ind}\, \hat{D}$ ist der Ausgangspunkt des Pfadintegralbeweises des Atiyah-Singer-Indexsatzes für diesen speziellen euklidischen Differentialoperator (siehe unten in Kapitel 27.8).

27.5 Grassmann-Mechanik

Wir erinnern zunächst an die klassische Mechanik und folgen dabei vorwiegend Kalka u. Soff (1997), S. 210 ff. Eine Methode, um die Bahn eines klassischen, bosonischen Punktteichens in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M zu beschreiben ist der Lagrange-Formalismus. Wenn $x(t)$ der m-dimensionale Ortsvektor des Teilchens zum Zeitpunkt t ist, dann beschreibt die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$, eine Funktion auf dem Tangentialbündel TM, die Dynamik des Teilchens, die sich als Extremum des Wirkungsfunktionals $\mathcal{S}(x)$ ergibt:

$$\mathcal{S}(x) := \int dt\, \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) \stackrel{!}{=} \text{extremal} . \tag{27.5.1}$$

Das Extremum von $\mathcal{S}(x)$ wird ermittelt, indem die Funktionalableitung oder Fréchet-Ableitung (siehe Anhang Kapitel A) von $\mathcal{S}(x)$ gleich Null gesetzt wird. Die entstehenden Gleichungen heißen die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k}) \stackrel{!}{=} 0 . \tag{27.5.2}$$

Der konjugierte verallgemeinerte Impuls p wird definiert als

$$p_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} . \tag{27.5.3}$$

Die Legendre-Transformierte von $\mathcal{L}$ heißt Hamiltonfunktion $H(x,p)$ und ist eine Funktion von p und damit des Kotangentialbündels T^*M. Wir verwenden die übliche Summenkonvention $p_k\dot{x}^k := \sum_k p_k\dot{x}^k$.

$$H(x,p) := \dot{x}^k p_k - \mathcal{L}(x, \dot{x}) . \tag{27.5.4}$$

Die Hamiltonsche Version des Wirkungsprinzips lautet:

$$\mathcal{I}(x,p) := \int dt\, (\dot{x}^k p_k - H(x,p) \stackrel{!}{=} \text{extremal} . \tag{27.5.5}$$

Daraus folgen die Hamilton-Gleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{x}^k \ , \quad \frac{\partial H}{\partial x^k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = -\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k}) = -\dot{p}_k . \tag{27.5.6}$$

Der erste Teil des Hamiltonschen Wirkungsfuntionals

$$\mathcal{I}_1(x,p) := \int dt\, p_k \dot{x}^k = \int p_k dx^k \tag{27.5.7}$$

definiert die sog. Poincaré-1-Form θ und die zugeordnete symplektische 2-Form ω:

$$\theta := p_k dx^k \ , \quad \omega := d\theta = dp_k \wedge dx^k . \tag{27.5.8}$$

Ein weiterer wichtiger Begriff der Mechanik ist die Poisson-Klammer. Seien $A(x,p)$ und $B(x,p)$ zwei Funktionen des von x und p aufgespannten Phasenraums, dann ist die Poisson-Klammer definiert als

$$[A,B]_- := (\frac{\partial A}{\partial x^k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial x^k}) \ . \tag{27.5.9}$$

Daraus folgt sofort:

$$[x,p]_- = (\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial x^i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial x^k}) = \delta^i_j \ .$$

Für die zeitliche Änderung einer Phasenraumfunktion $A(x,p)$ gilt

$$\frac{dA(x,p)}{dt} = (\frac{\partial A}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}) = (\frac{\partial A}{\partial x^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial x^k}) = [A,H]_- \ . \tag{27.5.10}$$

Von großer Bedeutung ist der Satz von Emmy Noether über eine Erhaltungsgröße, die sog. Noether-Ladung, wenn die Hamiltonfunktion H invariant unter einer infinitesimalen Koordinatentransformation ist.

Lemma 27.5.1 *Sei $H(x,p)$ invariant unter einer infinitesimalen Koordinatentransformation $x' = x + \epsilon f(x)$, dann gilt für die Noether-Ladung Q:*

$$Q := p_k f^k(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \ . \tag{27.5.11}$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $H(x,p) = H(x',p')$.

$$x'^i = \begin{cases} x^i + \epsilon f^i(x) \ , \\ \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j = x^i + \epsilon \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} x^j + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}'_i &= -\frac{\partial H(x',p')}{\partial x'^i} = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x'^i} = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \\ &= \dot{p}_j(\delta^j_i - \epsilon\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) = \dot{p}_i - \epsilon\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i}\dot{p}_j + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \Rightarrow \\ p'_i &= p_i - \epsilon\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i})p_j + \mathcal{O}(\epsilon^2) + c \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x',p') &= H(x,p) + \left.\frac{\partial H(x',p')}{\partial x'^j}\right|_{x'=x} \epsilon f^j(x) - \left.\frac{\partial H(x',p')}{\partial p'_j}\right|_{p'=p} \epsilon\frac{\partial f^k(x)}{\partial x^j})p_k \\ &= H(x,p) + \epsilon\left(\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^j} f^j(x) - \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_j}\frac{\partial f^k(x)}{\partial x^j} p_k\right) \end{aligned}$$

$$= H(x,p) + \epsilon \left(\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^j} \frac{\partial (p_k f^k(x))}{\partial p_j} - \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_j} \frac{\partial (p_k f^k(x))}{\partial x^j} \right)$$

$$= H(x,p) + \epsilon [H,Q]_- = H(x,p) + \epsilon \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \ . \qquad \square$$

Die kanonische Quantisierung in der Quantenmechanik kann man folgendermaßen beschreiben:

- für jedes abgeschlossene physikalische System gibt einen separablen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, dessen Systemzustand durch einen Zustandsvektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, bzw. dessen Äquivalenzklasse $\{c|\psi\rangle \,|\, c \in \mathbb{C},\ |\psi\rangle \in \mathcal{H}\}$, beschrieben wird.
- physikalische Observable werden durch selbstadjungierte Operatoren $\hat{A}$ auf $\mathcal{H}$ beschrieben, und die Messung von $\hat{A}$ in einem Zustand $|\psi\rangle$ wird definiert als

$$\langle \hat{A} \rangle := \frac{\langle \psi | \hat{A} \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \ . \tag{27.5.12}$$

- die Poisson-Klammern der klassischen Mechanik werden ersetzt durch Kommutatoren der entsprechenden selbstadjungierten Operatoren auf $\mathcal{H}$, d.h.

$$[A,B]_- \ \rightarrow \ \frac{-i}{\hbar}[\hat{A},\hat{B}] \ . \tag{27.5.13}$$

- die Zeitentwicklung des Systems kann entweder als eine Zeitentwicklung von $|\psi\rangle$ beschrieben werden (im Schrödinger-Bild), oder als eine Zeitentwicklung von $\hat{A}$ (im Heissenberg-Bild), wobei $\hat{H}$ den Hamilton-Operator bezeichne:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{-i}{\hbar}[\hat{A},\hat{H}] \ . \tag{27.5.14}$$

Die Quantisierung eines abgeschlossenen physikalischen Systems mittels des Feynmanschen Pfadintegrals in der Quantenmechanik verwendet nur klassische Variable, addiert aber überabzählbar viele klassische Pfade eines Teilchens. Siehe hierzu z.B. die ausführliche Darstellung des Autors in Schiekel (2011). Wir wollen im Folgenden eine supersymmetrische Pfadintegraldarstellung verwenden, um den Atiyah-Singer-Indexsatzes für euklidische chirale Dirac-Operatoren auf Spinbündeln zu beweisen. Hierzu benötigen wir aber noch eine Möglichkeit, um Fermionen auf klassische Weise zu beschreiben. In der Quantenmechanik in $\mathbb{R}^3$ wird der Spin-$\frac{1}{2}$ von Fermionen durch 2-stufige Spinoren und die Spin-Operatoren $\widehat{s^i}$, bzw. Pauli-Matrizen σ^i, mit $i \in \{1,2,3\}$ beschrieben:

$$\widehat{s^i} = \frac{\hbar}{2}\sigma^i \quad \text{mit} \quad [\widehat{s^i},\widehat{s^j}] = i\hbar \epsilon^{ij}{}_k \widehat{s^k} \quad \Leftrightarrow \quad [\sigma^i,\sigma^j] = 2i\epsilon^{ij}{}_k \sigma^k \ , \tag{27.5.15}$$

$$\{\widehat{s^i},\widehat{s^j}\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta^{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \{\sigma^i,\sigma^j\} = 2\delta^{ij} \ . \tag{27.5.16}$$

Aufgrund der Antikommutator-Relationen bilden diese quantenmechanischen Spin-Operatoren $\hat{s}^i$ die Generatoren einer Clifford-Algebra mit der Basis

$$\{\mathbb{1}, \widehat{s^1}, \widehat{s^2}, \widehat{s^3}, \widehat{s^1}\widehat{s^2}, \widehat{s^1}\widehat{s^3}, \widehat{s^2}\widehat{s^3}, \widehat{s^1}\widehat{s^2}\widehat{s^3}\} \ .$$

Der Übergang zur klassischen Mechanik kann dann durch den Grenzübergang $\hbar \to 0$ geschehen, und das heißt:

$$\{\widehat{s^i}, \widehat{s^j}\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta^{ij} \quad \to \quad \{s^i, s^j\} = 0 \quad \text{d.h.} \tag{27.5.17}$$

die Clifford-Algebra geht über in eine Grassmann-Algebra.

Die Grassmann-Mechanik für Fermionen wird zunächst genauso aufgebaut, wie die klassische Mechanik für klassische Teilchen, d.h. für Bosonen. Wir untersuchen einen Spin in $\mathbb{R}^m$ mit m *reellen* Grassmann-Variablen $\{\psi^i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ mit den Antikommutatoren $\{\psi^i, \psi^j\} = 0$.

$$\mathcal{S}(x) := \int dt\, \mathcal{L}(\psi(t), \dot{\psi}(t)) \stackrel{!}{=} \text{extremal} \ . \tag{27.5.18}$$

Dies führt wie oben zu den Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^k}) \stackrel{!}{=} 0 \ . \tag{27.5.19}$$

Der konjugierte verallgemeinerte Impuls π wird definiert als

$$\pi_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^k} \ . \tag{27.5.20}$$

Die Legendre-Transformierte von $\mathcal{L}$ heißt Hamiltonfunktion $H(\psi, \pi)$ und ist eine Funktion von π:

$$H(\psi, \pi) := \dot{\psi}^j \pi_j - \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}) \ . \tag{27.5.21}$$

Die Hamiltonsche Version des Wirkungsprinzips lautet:

$$\mathcal{I}(\psi, \pi) := \int dt\, (\dot{\psi}^j \pi_j - H(\psi, \pi) \stackrel{!}{=} \text{extremal} \ . \tag{27.5.22}$$

In den Hamilton-Gleichungen kommt es nun wegen der Antisymmetrie $\dot{\psi}^j \pi_j = -\pi_j \dot{\psi}^j$ zu einem Unterschied zu den bosonischen, klassischen Hamilton-Gleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_k} = -\frac{\partial \pi_j \dot{\psi}^j}{\pi_k} = -\dot{\psi}^k \ , \quad \frac{\partial H}{\partial \psi^k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} = -\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^k}) = -\dot{\pi}_k \ . \tag{27.5.23}$$

Im nächsten Schritt kann man eine Poisson-Klammer für Grassmann-Systeme definieren. Sei also $F(\psi(t), \pi(t))$ eine Funktion der Grassmann-Variablen $\psi(t), \pi(t)$. Dann kann F eine gerade oder ungerade Grassmannfunktion sein, d.h. eine gerade oder ungerade Anzahl an Grassmann-Generatoren enthalten. Dies wird durch die sog. Grassmann-Parität $\mathrm{sgn}(F)$ ausgedrückt. Damit folgt (man beachte, daß auch die Ableitungen einen Faktor (-1) beitragen):

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \dot{\psi}^k \frac{\partial F}{\partial \psi^k} + \dot{\pi}_k \frac{\partial F}{\partial \pi_k} = -(\frac{\partial H}{\partial \pi_k}\frac{\partial F}{\partial \psi^k} + \frac{\partial H}{\partial \psi^k}\frac{\partial F}{\partial \pi_k}) \\ &= (-1)^{\mathrm{sgn}(F)}(\frac{\partial F}{\partial \psi^k}\frac{\partial H}{\partial \pi_k} + \frac{\partial F}{\partial \pi_k}\frac{\partial H}{\partial \psi^k}) \\ &=: [F, H]_+ \ . \end{aligned} \tag{27.5.24}$$

Die neue Poisson-Klammer $[\cdot,\cdot]_+$ ist also definiert als:

Definition 27.5.2

$$[F, G]_+ := (-1)^{\mathrm{sgn}(F)}(\frac{\partial F}{\partial \psi^k}\frac{\partial G}{\partial \pi_k} + \frac{\partial F}{\partial \pi_k}\frac{\partial G}{\partial \psi^k}) \ . \tag{27.5.25}$$

Konkret tauchen 3 spezielle Fälle auf. Seien also C, C_1, C_2 bosonische Funktionen (d.h. $\mathrm{sgn}(C) = \mathrm{sgn}(C_1) = \mathrm{sgn}(C_2) = 0$) und A, A_1, A_2 fermionische Funktionen (d.h. $\mathrm{sgn}(A) = \mathrm{sgn}(A_1) = \mathrm{sgn}(A_2) = 1$), dann folgt (wiederum tragen die Ableitungen auch einen Faktor (-1) bei):

$$[C_1, C_2]_+ = -[C_2, C_1]_+ \ , \tag{27.5.26}$$

$$[C, A]_+ = -[A, C]_+ \ , \tag{27.5.27}$$

$$[A_1, A_2]_+ = [A_2, A_1]_+ \ . \tag{27.5.28}$$

Nun gilt

$$[\psi^i, \psi^j]_+ = 0 \ , \quad [\pi_i, \pi_j]_+ = 0 \ , \tag{27.5.29}$$

und damit folgt

$$[\psi^i, \pi_j]_+ := -(\frac{\partial \psi^i}{\partial \psi^k}\frac{\partial \pi_j}{\partial \pi_k} + \frac{\partial \psi^i}{\partial \pi_k}\frac{\partial \pi_j}{\partial \psi^k}) = -\delta^i_j \ . \tag{27.5.30}$$

Dies gilt allerdings nur, **wenn** die ψ^i und π_j voneinander unabhängig sind, d.h. **wenn** der Übergang von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\psi}^i$ zu den verallgemeinerten Impulsen π_i in der Legendre-Transformation

$$\pi_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^k}$$

umkehrbar ist. Dies ist aber im unten folgenden einfachen Modell des freien Grassmann-Teilchens **nicht** der Fall. Viele Darstellungen in der Literatur berücksichtigen das leider nicht korrekt. Den Ausweg hat Dirac aufgezeigt, indem er eine Verallgemeinerung der Poisson-Klammern eingeführt hat, die Zwangsbedingungen berücksichtigt, die sog. *Dirac-Klammer*. Eine sehr schöne Darstellung, der wir hier folgen, findet sich in Kalka u. Soff (1997), S. 223 ff.

Nehmen wir an, das untersuchte und durch $H(x,p)$ beschriebene, klassische, bosonische, dynamische System in einem $2m$-dimensionalen Phasenraum weise k Zwangsbedingungen der folgenden Form auf:

$$\varphi_j(x,p) = 0 \quad \text{für } 1 \le j \le k \ , \tag{27.5.31}$$

die mit der Zeitentwicklung des Systems verträglich sein sollen, d.h.

$$\dot{\varphi}_j(x,p) = 0 \ . \tag{27.5.32}$$

Diese Zwangsbedingungen nennt man *primäre* Zwangsbedingungen und sie schränken die Hamiltonfunktion auf einen $(2m-k)$-dimensionalen Unterraum des Phasenraums ein. Mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren λ^i kann man jetzt zu einer Hamiltonfunktion $H_0(x,p)$ im vollständigen $2m$-dimensionalen Phasenraum übergehen:

$$H_0(x,p) := H(x,p) - \lambda^j \varphi_j(x,p) = \dot{x}^i p_i - \mathcal{L}(x,\dot{x}) - \lambda^j \varphi_j(x,p) \tag{27.5.33}$$

mit den $2m$ Bewegungsgleichungen

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H_0(x,p)}{\partial p_i} + \lambda^j \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i} \ , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0(x,p)}{\partial x^i} - \lambda^j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \ , \quad \varphi_j(x,p) = 0 \ . \tag{27.5.34}$$

Aus der Kompatibilitäts-Forderung für die Zwangsbedingungen $\dot{\varphi} = 0$ folgt die Forderung

$$\frac{d}{dt}\dot{\varphi}_j(x,p) = [\dot{\varphi}_j(x,p), H(x,p)]_- =: g_j(x,p) \stackrel{!}{=} 0 \ . \tag{27.5.35}$$

Wenn nun die $g_j(x,p)$ nicht bereits 0 sind, so folgen aus $g_j(x,p) = 0$ neue Nebenbedingungen, die man *sekundäre* Zwangsbedingungen nennt.

Die Gesamtheit all dieser Zwangsbedingungen teilt man nun in zwei Klassen ein:

- Zwangsbedingungen 1. Art γ_i deren Kommutatoren mit allen anderen Zwangsbedingungen verschwinden, d.h. $[\gamma_i, \varphi_j]_- = [\gamma_i, \gamma_j]_- = 0$,
- Zwangsbedingungen 2. Art χ_i deren Kommutatoren untereinander nicht verschwinden, d.h. $[\chi_i, \chi_j]_- = C_{ij} \neq 0$.

Für hamiltonsche Systeme mit Zwangsbedingungen 2. Art hat Dirac eine Verallgemeinerung der Poisson-Klammern eingeführt, die heute nach ihm benannten Dirac-Klammern. Seien $A(x,p)$ und $B(x,p)$ Phasenraumfunktionen, dann definiert man:

Definition 27.5.3

$$[A,B]_-^D := [A,B]_- - [A,\chi_i]_-(C^{-1})^{ij}[\chi_j,B]_- \ . \tag{27.5.36}$$

Wenn es keine Zwangsbedingungen 2. Art gibt, dann ist natürlich $[\cdot,\cdot]_-^D = [\cdot,\cdot]_-$. In Bezug auf diese Dirac-Klammer kommutieren jetzt alle Zwangsbedingungen 2. Art:

$$\begin{aligned}[\chi_k,\chi_l]_-^D &= [\chi_k,\chi_l]_- - [\chi_k,\chi_i]_-(C^{-1})^{ij}[\chi_j,\chi_l]_- = [\chi_k,\chi_l]_- - [\chi_k,\chi_i]_-(C^{-1})^{ij}C_{jl}\\ &= [\chi_k,\chi_l]_- - [\chi_k,\chi_i]_-\delta_l^i = 0 \ .\end{aligned}$$

$$[\chi_k,\gamma_l]_-^D = [\chi_k,\gamma_l]_- - [\chi_k,\chi_i]_-(C^{-1})^{ij}[\chi_j,\gamma_l]_- = 0 \ , \quad \text{wegen } [\chi_k,\gamma_l]_- = 0 \ .$$

$$[\chi_k,H]_-^D = [\chi_k,H]_- - [\chi_k,\chi_i]_-(C^{-1})^{ij}[\chi_j,H]_- = 0 \ , \quad \text{wegen } [\chi_k,H]_- = 0 \ .$$

Für Grassmannfunktionen $F(\varphi,\pi)$ und $G(\varphi,\pi)$ definiert man eine entsprechende Dirac-Klammer:

Definition 27.5.4

$$[F,G]_+^D := [F,G]_+ - [F,\chi_i]_+(C^{-1})^{ij}[\chi_j,G]_+ \ . \tag{27.5.37}$$

Mit dieser Dirac-Klammer kann jetzt die kanonische Quantisierung erklärt werden als:

Definition 27.5.5 *Die Dirac-Klammern der klassischen bosonischen oder fermionischen Mechanik werden ersetzt durch Kommutatoren oder Antikommutatoren der entsprechenden selbstadjungierten Operatoren auf einem Hilbert-Raum H, d.h.*

$$[A,B]_-^D \ \to \ \frac{-i}{\hbar}[\hat{A},\hat{B}] \ , \tag{27.5.38}$$

$$[A,B]_+^D \ \to \ \frac{-i}{\hbar}\{\hat{A},\hat{B}\} \ . \tag{27.5.39}$$

Ein freies bosonisches Teilchen mit der Masse $m_B = 1$ wird in einer 3-dimensionalen flachen Mannigfaltigkeit mit der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}_B := \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{27.5.40}$$

beschrieben. Für ein freies Grassmann-Teilchen, d.h. ein klassisches Fermion, mit der Masse $m_F = 1$ wäre wegen $\{\psi^i,\psi^j\} = 0$ und $\{\dot{\psi}^i,\dot{\psi}^j\} = 0$ die analoge Lagrangefunktion identisch 0. Daher wählt man als einfachste nichttriviale Lagrangefunktion für Grassmann-Teilchen

$$\mathcal{L}_F := \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^i\dot{\psi}^j \ . \tag{27.5.41}$$

Der Faktor i ist notwendig, damit die Lagrangefunktion reell ist:

$$\overline{i\psi^i\dot{\psi}^j} = (-i)\overline{\psi^i\dot{\psi}^j} = (-i)(\overline{\dot{\psi}^j}\,\overline{\psi^i}) = (-i)(\dot{\psi}^j\psi^i) = i\psi^i\dot{\psi}^j \ .$$

Aus diesem $\mathcal{L}_F$ folgt dann für den kanonische Impuls

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{\psi}^i} = -\frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^j \tag{27.5.42}$$

und für die Hamiltonfunktion

$$H_F(\psi,\pi) = \dot{\psi}^i\pi_i - \mathcal{L}(\psi,\dot{\psi}) = -\frac{i}{2}\delta_{ij}\dot{\psi}^i\psi^j - \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^i\dot{\psi}^j = \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^j\dot{\psi}^i - \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^i\dot{\psi}^j = 0 \ . \tag{27.5.43}$$

Also ist beim freien Grassmann-Teilchen der Vektor ψ, der das klassische Analogon des Spins darstellen soll, eine Erhaltungsgröße. Gleichzeitig sieht man, daß π und ψ linear abhängig sind, daß also im Sinne der obigen Diskussion die folgende Zwangsbedingung vorliegt, die den Phasenraum einschränkt:

$$\chi_i := \pi_i + \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^j = 0 \ . \tag{27.5.44}$$

Diesen Fall kann man, wie oben beschrieben, im vollständigen Phasenraum mit Lagrange-Parametern für die Zwangsbedingungen formulieren. Es gelten also die Grassmann-Kommutatoren für den vollständigen Phasenraum, d.h. mit der Unabhängigkeit der π_i von den ψ^i:

$$[\psi^i,\psi^j]_+ = 0 \ , \quad [\pi_i,\pi_j]_+ = 0 \ , \quad [\psi^i,\pi_j]_+ = -\delta^i_j \ ,$$

plus dem Ausdruck für die Zwangsbedingungen 2. Art:

$$\begin{aligned} C_{ij} = [\chi_i,\chi_j]_+ &= [\pi_i + \frac{i}{2}\delta_{ik}\psi^k, \pi_j + \frac{i}{2}\delta_{jl}\psi^l]_+ = \frac{i}{2}([\pi_i,\delta_{jl}\psi^l]_+ + [\delta_{ik}\psi^k,\pi_j]_+) \\ &= \frac{i}{2}(\delta_{jl}\delta^l_i + \delta_{ik}\delta^k_j) = -i\delta_{ij} \ , \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(C^{-1})^{ij} = i\delta^{ij} \ .$$

Mit

$$[\psi^i,\chi_k,]_+ = [\psi^i,\pi_k + \frac{i}{2}\delta_{kl}\psi^l]_+ = [\psi^i,\pi_k,]_+ = -\delta^i_k$$

folgt

$$\begin{aligned} [\psi^i,\psi^j]^D_+ &= [\psi^i,\psi^j]_+ - [\psi^i,\chi_k]_+(C^{-1})^{kl}[\chi_l,\psi^j]_+ \\ &= -(-\delta^i_k)(i\delta^{kl})(-\delta^j_l) = -i\delta^{ij} \ . \end{aligned} \tag{27.5.45}$$

Die kanonische Quantisierung ergibt dann:

$$[\psi^i, \psi^j]_+^D = -\delta^{ij} \quad \to \quad \frac{-i}{\hbar}\{\widehat{\psi^i}, \widehat{\psi^j}\} = -\delta^{ij} \ . \tag{27.5.46}$$

D.h. im Fall ohne Zwangsbedingungen wird durch die Quantisierung einfach die Grassmann-Algebra der ψ^i in die Clifford-Algebra der $\widehat{\psi^i}$ übergeführt:

$$\{\psi^i, \psi^j\} = 0 \quad \to \quad \{\widehat{\psi^i}, \widehat{\psi^j}\} = \hbar\delta^{ij} \ . \tag{27.5.47}$$

Im 3-dimensionalen ergibt sich mit 27.5.15 und 27.5.16 und den Pauli-Matrizen $\widehat{\sigma^i}$, bzw. Spin-Matrizen $\widehat{s^i}$:

$$\hat{\psi}^i = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\,\widehat{\sigma^i} = \sqrt{\frac{2}{\hbar}}\,\widehat{s^i} \ . \tag{27.5.48}$$

27.6 Supersymmetrische Mechanik

Wenn sich das obige, freie Grassmann-Teilchen mit der Masse $m_F = 1$ in einer Mannigfaltigkeit M der Dimension $m = 2n$ bewegen soll, so ergänzt man in die Langrangefunktion 27.5.41 um einen Term mit der kinetischen Energie. Wir zeigen dies zunächst für eine flache Riemannsche Mannigfaltigkeit, und anschließend für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik.

$$\mathcal{L} := \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^i\dot{\psi}^j + \frac{1}{2}\delta_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l \ . \tag{27.6.1}$$

Die kanonischen Impulse und die Hamiltonfunktion sind dann:

$$\pi_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^j} = -\frac{i}{2}\delta_{jl}\psi^l \ , \quad p_k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^k} = \delta_{kl}\dot{x}^l \ . \tag{27.6.2}$$

$$\begin{aligned} H(x,p,\psi,\pi) &= \dot{\psi}^j\pi_j + \dot{x}^k p_k - \mathcal{L}(\psi,\dot{\psi}) \\ &= -\frac{i}{2}\delta_{ij}\dot{\psi}^i\psi^j + \delta_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l - \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^i\dot{\psi}^j - \frac{1}{2}\delta_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l \\ &= \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^j\dot{\psi}^i + \frac{1}{2}\delta_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l - \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^i\dot{\psi}^j = \frac{1}{2}\delta_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l \ . \end{aligned} \tag{27.6.3}$$

Lemma 27.6.1 *Ein freies Grassmann-Teilchen mit der Masse $m_F = 1$ und der Hamiltonfunktion $H(x,p,\psi,\pi)$ in einer flachen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension $m = 2n$ ist invariant unter der supersymmetrischen Transformation:*

$$\tilde{x}^j = x^j + i\epsilon\psi^j \ , \quad \tilde{\psi}^j = \psi^j - \epsilon\dot{x}^j \ , \tag{27.6.4}$$

wobei ϵ eine reelle, infinitesimale Grassmann-Zahl sei. Die entsprechende erhaltene Noether-Ladung, von Physikern häufig die Superladung genannt, ist:

$$Q := p_k i\psi^k = i\delta_{kl}\psi^k\dot{x}^l \ . \tag{27.6.5}$$

Beweis. Zunächst einmal gilt für den bosonischen Anteil

$$\dot{p}_k = \begin{cases} m_F \delta_{kl} \ddot{x}^l = \delta_{kl} \ddot{x}^l \\ -\frac{\partial H}{\partial x^k} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \ddot{x}^k = 0 \; .$$

Damit folgt für $\tilde{H}$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\delta_{kl}(\dot{x}^k + i\epsilon\dot{\psi}^k)(\dot{x}^l + i\epsilon\dot{\psi}^l) \simeq \frac{1}{2}\delta_{kl}(\dot{x}^k\dot{x}^l + 2i\epsilon\dot{x}^k\dot{\psi}^l)$$
$$= H + \delta_{kl} i\epsilon\dot{x}^k\dot{\psi}^l = H + \delta_{kl} i\epsilon\frac{d}{dt}(\dot{x}^k\psi^l) - \delta_{kl} i\epsilon\ddot{x}^k\psi^l$$
$$H + \frac{d}{dt}(\delta_{kl} i\epsilon\dot{x}^k\psi^l) \; .$$

Damit stimmt die Hamilton-Wirkung $\mathcal{I}(x, p, \psi, \pi)$ für H und $\tilde{H}$ bis auf einen Oberflächenterm, der Null gesetzt wird, überein und der Satz von Noether kann Anwendung finden. Nach 27.5.11 ist also die Superladung Q eine Erhaltungsgröße:

$$Q := p_k(i\psi^k) = i\delta_{kl}\psi^k\dot{x}^l \; . \qquad \square$$

Auch die Lagrange-Wirkung bleibt unter der obigen *supersymmetrischen* Transformation invariant bis auf einen Oberflächenterm, der wieder Null gesetzt wird, denn:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\delta_{kl}(\dot{x}^k + i\epsilon\dot{\psi}^k)(\dot{x}^l + i\epsilon\dot{\psi}^l) + \frac{i}{2}\delta_{mn}(\psi^m - \epsilon\dot{x}^m)(\dot{\psi}^n - \epsilon\ddot{x}^n)$$
$$\simeq \mathcal{L} + \delta_{kl} i\dot{x}^k\epsilon\dot{\psi}^l - \frac{i}{2}\delta_{mn}\epsilon\dot{x}^m\dot{\psi}^n - \frac{i}{2}\delta_{mn}\psi^m\epsilon\ddot{x}^n$$
$$= \mathcal{L} + i\delta_{kl}\epsilon\dot{x}^k\dot{\psi}^l - \frac{i}{2}\delta_{mn}\epsilon\dot{x}^m\dot{\psi}^n - \frac{i}{2}\delta_{mn}\frac{d}{dt}(\psi^m\epsilon\dot{x}^n) + \frac{i}{2}\delta_{mn}\dot{\psi}^m\epsilon\dot{x}^n$$
$$= \mathcal{L} + i\delta_{kl}\epsilon\dot{x}^k\dot{\psi}^l - \frac{i}{2}\delta_{mn}\epsilon\dot{x}^m\dot{\psi}^n - \frac{i}{2}\delta_{mn}\frac{d}{dt}(\psi^m\epsilon\dot{x}^n) - \frac{i}{2}\delta_{mn}\epsilon\dot{x}^m\dot{\psi}^n$$
$$= \mathcal{L} - \frac{i}{2}\delta_{mn}\frac{d}{dt}(\psi^m\epsilon\dot{x}^n) = \mathcal{L} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(i\delta_{mn}\epsilon\psi^m\dot{x}^n) = \mathcal{L} + \frac{1}{2}\epsilon\frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\delta_\epsilon\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon\frac{dQ}{dt} \; . \tag{27.6.6}$$

Wie transformiert sich die Superladung Q unter der supersymmetrischen Transformation?

$$\tilde{Q} = i\delta_{kl}(\psi^k - \epsilon\dot{x}^k)(\dot{x}^l + i\epsilon\dot{\psi}^l) \simeq Q - i\epsilon\delta_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l - \delta_{kl}\psi^k\epsilon\dot{\psi}^l$$
$$= Q - i\epsilon\delta_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l + \epsilon\delta_{kl}\psi^k\dot{\psi}^l = Q - 2i\epsilon(\frac{1}{2}\delta_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l + \frac{i}{2}\delta_{kl}\psi^k\dot{\psi}^l)$$

$$= Q - 2i\epsilon\mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \delta_\epsilon Q = 2i\epsilon\mathcal{L} \; . \tag{27.6.7}$$

Tatsächlich ist die Superladung Q der Generator der obigen supersymmetrischen Transformation, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 27.6.2

$$\delta x^k = \tilde{x}^k - x^k = [x^k, \epsilon Q]_-^D \; , \tag{27.6.8}$$

$$\delta\psi^k = \tilde{\psi}^k - \psi^k = [\psi^k, \epsilon Q]_+^D \; . \tag{27.6.9}$$

Beweis. Für x^k und p_k gibt es keine Zwangsbedingung, also ist $[x^k, \epsilon Q]_-^D = [x^k, \epsilon Q]_-$ und damit folgt:

$$\begin{aligned}
[x^k, \epsilon Q]_-^D = [x^k, \epsilon Q]_- &= [x^k, i\epsilon\delta_{lm}\psi^l\dot{x}^m]_- \\
&= i\epsilon\delta_{lm}\psi^l[x^k, \dot{x}^m]_- = i\epsilon\delta_{lm}\psi^l\delta^{km} \\
&= i\epsilon\psi^k = \delta x^k \; .
\end{aligned}$$

Jedoch gibt es bei der obigen Lagrangefunktion für das freie Grassmann-Teilchen zwischen ψ^k und π_k eine Zwangsbedingung und deswegen muß man in diesem Fall die Dirac-Klammer verwenden:

$$\begin{aligned}
[\psi^k, \epsilon Q]_+^D &= [\psi^k, i\epsilon\delta_{lm}\psi^l\dot{x}^m]_+^D \\
&= [\psi^k, i\epsilon\delta_{lm}\psi^l\dot{x}^m]_+ - [\psi^k, \chi_p]_+(C^{-1})^{pq}[\chi_q, i\epsilon\delta_{lm}\psi^l\dot{x}^m]_+ \\
&= -[\psi^k, \pi_p + \frac{i}{2}\delta_{pq}\psi^q]_+(i\delta^{pq})[\pi_q + \frac{i}{2}\delta_{qp}\psi^p, i\epsilon\delta_{lm}\psi^l\dot{x}^m]_+ \\
&= -(-\delta_p^k)(i\delta^{pq})(i\epsilon\delta_{lm}\dot{x}^m\delta_q^l) = -\epsilon\dot{x}^k = \delta\psi^k \; . \qquad \square
\end{aligned}$$

Von Bedeutung ist auch die fermionische Dirac-Klammer der Superladung Q mit sich selbst.

Lemma 27.6.3

$$[Q, Q]_+^D = 2i\, H \; . \tag{27.6.10}$$

Beweis. Wegen des Vorkommens von ψ^k in Q benötigen wir hier wiederum die Dirac-Klammer.

$$\begin{aligned}
[Q, Q]_+^D &= [i\delta_{kl}\psi^k\dot{x}^l, i\delta_{mn}\psi^m\dot{x}^n]_+^D \\
&= [i\delta_{kl}\psi^k\dot{x}^l, i\delta_{mn}\psi^m\dot{x}^n]_+ - [Q, \chi_p]_+(C^{-1})^{pq}[\chi_q, Q]_+ \\
&= -[i\delta_{kl}\psi^k\dot{x}^l, \chi_p]_+(i\delta^{pq})[\chi_q, i\delta_{mn}\psi^m\dot{x}^n]_+
\end{aligned}$$

$$= -[i\delta_{kl}\psi^k\dot{x}^l, \pi_p + \frac{i}{2}\delta_{pq}\psi^q]_+(i\delta^{pq})[\pi_q + \frac{i}{2}\delta_{qr}\psi^r, i\delta_{mn}\psi^m\dot{x}^n]_+$$

$$= -(-i\delta_{kl}\dot{x}^l\delta_p^k)(i\delta^{pq})(-i\delta_{mn}\dot{x}^n\delta_q^m) = i\delta_{kl}\delta_p^k\delta^{pq}\delta_{mn}\delta_q^m\dot{x}^l\dot{x}^n$$

$$= i\delta_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n = 2i\,H\ . \qquad \square$$

Dieses Ergebnis für $[Q,Q]_+^D$ ist ganz besonders dann interessant, wenn man sich die kanonische Quantisierung dieses Ausdrucks anschaut:

$$[Q,Q]_+^D = 2i\,H \quad \to \quad \frac{-i}{\hbar}\{\hat{Q},\hat{Q}\} = \frac{-2i}{\hbar}\hat{Q}^2 = 2i\,\hat{H}\ ,$$

$$\hat{Q}^2 = -\hbar\hat{H}\ . \tag{27.6.11}$$

Wenn also, wie in unserem Fall, $\hat{H}$ der Laplace-Operator ist, dann wird man mit $\hat{Q}$ auf die Wurzel des Laplace-Operators und d.h. auf den Dirac-Operator geführt.

27.7 Supersymmetrische Mechanik in Riemannscher Mannigfaltigkeit

Jetzt möge sich das obige freie Grassmann-Teilchen mit der Masse $m_F = 1$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension $m = 2n$ mit einer Metrik $g_{\mu\nu}$ bewegen. Der Zusammenhang in M sei ein metrisch-affiner, torsionsfreier Zusammenhang mit symmetrischen Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}$, also kurz ein *Levi-Civita Zusammenhang*.

Das innere Produkt zweier Vektoren $X, Y \in TM$ bzgl. dieser Metrik sei:

$$\langle X \mid Y\rangle := g_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu\ . \tag{27.7.1}$$

Die Grassmann-Vektoren $\psi^\mu(t) \in TM_{x(t)}$ transformieren sich wie ganz normale Vektoren, jedoch muß man die Anti-Kommutativität der einzelnen Komponenten von ψ^μ berücksichtigen. Sei also wieder wie in 27.6.4 die folgende supersymmetrische Transformation gegeben:

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + i\epsilon\psi^\mu\ , \quad \tilde{\psi}^\mu = \psi^\mu - \epsilon\dot{x}^\mu \quad \text{bzw.}\ , \tag{27.7.2}$$

$$\delta_\epsilon x^\mu = i\epsilon\psi^\mu\ , \quad \delta_\epsilon\psi^\mu = -\epsilon\dot{x}^\mu\ . \tag{27.7.3}$$

Die supersymmetrische Transformation ist kovariant, d.h. bleibt bei einer Koordinatentransformation der Form $x^\mu \to x'^\mu(x^\nu)$ erhalten, denn

$$\delta_\epsilon x'^\mu = \begin{cases} \tilde{x}'^\mu - x'^\mu \\ = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\delta_\epsilon x^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}i\epsilon\psi^\nu = i\epsilon\psi'^\mu\ . \end{cases} \tag{27.7.4}$$

Die ψ^μ sind Funktionen von den Koordinaten x^ν und deshalb folgt

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon \psi'^\mu(x'^\nu) &= \begin{cases} \tilde{\psi}'^\mu(x'^\nu) - \psi'^\mu(x'^\nu) \\ \delta_\epsilon \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\psi^\nu(x') \end{cases} \\
&= \delta_\epsilon \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}[\psi^\nu(x) + \frac{\partial \psi^\nu(x)}{\partial x^\kappa}(x'^\kappa - x^\kappa)] \\
&= \delta_\epsilon \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}[\psi^\nu(x) + \frac{\partial \psi^\nu(x)}{\partial x^\kappa}(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} x^\lambda)] \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}[\delta_\epsilon\psi^\nu(x) + \frac{\partial \psi^\nu(x)}{\partial x^\kappa}(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \delta_\epsilon x^\lambda)] \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}[-\epsilon\dot{x}^\nu + \frac{\partial \psi^\nu(x)}{\partial x^\kappa}(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} i\epsilon\psi^\lambda)] \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}(-\epsilon\dot{x}^\nu) = -\epsilon\dot{x}'^\mu ,
\end{aligned}$$

denn der zweite Term in der Klammer $[\ldots]$ ist in ν und λ wegen $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda}$ symmetrisch und ist gleichzeitig wegen $\frac{\partial \psi^\nu(x)}{\partial x^\kappa} \cdot \psi^\lambda$ antisymmetrisch, also gleich Null. Man beachte, daß wir für ein freies Grassmann-Teilchen in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit nicht mehr wie in einer flachen Mannigfaltigkeit mit $\frac{\partial \psi^\nu(x)}{\partial x^\kappa} = 0$ argumentieren können, weil zur Langrange-, bzw. Hamiltonfunktion noch ein Krümmungsterm hinzukommt.

Die Lagrangefunktion kann man z.B. über 27.6.7 aus $\delta_\epsilon Q$ bestimmen, wenn man die Superladung Q als die naheliegende Verallgemeinerung von 27.6.5 definiert:

$$Q := i g_{\mu\nu}\psi^\mu \dot{x}^\nu \; . \tag{27.7.5}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon Q &= i(\partial_\lambda g_{\mu\nu})\delta_\epsilon x^\lambda \psi^\mu \dot{x}^\nu + i g_{\mu\nu}\delta_\epsilon\psi^\mu\dot{x}^\nu + i g_{\mu\nu}\psi^\mu\delta_\epsilon\dot{x}^\nu \\
&= i(\partial_\lambda g_{\mu\nu})(i\epsilon\psi^\lambda)\psi^\mu\dot{x}^\nu + i g_{\mu\nu}(-\epsilon\dot{x}^\mu)\dot{x}^\nu + i g_{\mu\nu}\psi^\mu(i\epsilon\dot{\psi}^\nu) \\
&= -\epsilon(\partial_\lambda g_{\mu\nu})\psi^\lambda\psi^\mu\dot{x}^\nu - i\epsilon g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \epsilon g_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu \; .
\end{aligned}$$

Da in diesem Ausdruck $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ vorkommt, wollen wir zur Beschreibung der Krümmung die Zusammenhangskomponenten $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}$ des Levi-Civita Zusammenhangs verwenden - siehe 10.11.4:

$$\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} := \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} := \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \; . \tag{27.7.6}$$

Dabei addieren wir noch den Ausdruck

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu}\psi^\lambda\psi^\mu = 0 \; ,$$

der Null ist, weil $g_{\lambda\mu}$ symmetrisch in λ und μ ist und $\psi^\lambda\psi^\mu$ antisymmetrisch.

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon Q &= -i\epsilon\{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + ig_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu - i\dot{x}^\nu(\partial_\lambda g_{\mu\nu})\psi^\lambda\psi^\mu\} \\
&= -i\epsilon\{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + ig_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu - i\dot{x}^\nu\frac{1}{2}[\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}]\psi^\lambda\psi^\mu\} \\
&= -i\epsilon\{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + ig_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu - i\dot{x}^\nu\frac{1}{2}[\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}]\psi^\lambda\psi^\mu\} \\
&= -i\epsilon\{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + ig_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu - i\dot{x}^\nu[-\Gamma_{\lambda\mu\nu}]\psi^\lambda\psi^\mu\} \\
&= -i\epsilon\{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + ig_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu + i\dot{x}^\nu g_{\lambda\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\psi^\lambda\psi^\mu\} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2i\epsilon}\delta_\epsilon Q \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu + \frac{i}{2}\dot{x}^\lambda g_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\kappa\lambda}\psi^\mu\psi^\kappa \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu + \frac{i}{2}\dot{x}^\lambda g_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}\psi^\mu\psi^\kappa \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}\psi^\mu(\frac{d\psi^\nu}{dt} + \dot{x}^\lambda\Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}\psi^\kappa) \; . \qquad (27.7.7)
\end{aligned}$$

Mit der kovarianten Zeitableitung von ψ

$$\frac{D\psi^\nu}{Dt} := (\frac{d\psi^\nu}{dt} + \dot{x}^\lambda\Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}\psi^\kappa) \qquad (27.7.8)$$

können wir also die Lagrangefunktion des freien Grassmann-Teilchens schreiben als:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}\psi^\mu\frac{D\psi^\nu}{Dt} = \frac{1}{2}\langle\dot{x} \mid \dot{x}\rangle + \frac{i}{2}\langle\psi \mid \frac{D\psi}{Dt}\rangle \; . \qquad (27.7.9)$$

27.8 Index des chiralen Dirac-Operators - Pfadintegral-Darstellung

Der Dirac-Operator in einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit ist ein hyperbolischer Differential-Operator. Der Atiyah-Singer Indexsatz, unser Thema in diesem Kapitel, bezieht sich aber nur auf elliptische Differential- und Pseudodifferential-Operatoren. Also gehen wir mittels der euklidischen Zeitkoordinate $\tau = it$ vom gewöhnlichen Dirac-Operator zum sog. euklidischen Dirac-Operator Q, bzw. dessen chiralem Anteil $\hat{D}$ über, der nun ein elliptischer Differential-Operator auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension $m = 2n$ ist.

Diesem Übergang vom gewöhnlichen Dirac-Operator zum euklidischen Dirac-Operator entspricht der Übergang von der Schrödinger-DGL. zur Wärme-DGL. und insofern sind die Beweise des Atiyah-Singer Indexsatzes mittels des sog. Wärmekerns (d.h. der Greenfunktion der Wärme-DGL., siehe insb. Gilkey (1995)), und der Beweis mittels des euklidischen Pfadintegrals eng miteinander verbunden. Insbesondere teilen beide Beweise die Eigenschaft, daß der topologische Index hierbei nur bis auf endlich viele Konstanten bestimmt ist - und diese Konstanten werden durch Vergleiche mit Beispielen mit bekanntem Index bestimmt (Gilkey (1995), S. 215 ff.). Eine ganz ähnliche Vorgehensweise findet sich ja auch beim Pfadintegral in der Physik, wo man die Normierungskonstante der Maßfunktion des Pfadintegrals üblicherweise durch Vergleich mit dem bekannten Ergebnis des harmonischen Oszillators festlegt. In der Indextheorie bestimmt man die Pfadintegral-Normierungskonstante indem man verlangt, daß die Pfadintegral-Maßfunktion und damit auch die Normierungskonstante von dem Parameter β unabhängig sein soll, da ja auch der Index als topologische Invariante unabhängig von β sein muß.

Für die Pfadintegral-Darstellung des Indexes von $\hat{D}$, des chiralen Anteils des euklidischen Dirac-Operators Q (27.4.16, 27.4.17), gehen wir jetzt also mit $t =: -i\tau$ zum euklidischen Pfadintegral über. Dies bedeutet für die Lagrangefunktion und den Phasenfaktor der Wirkungsfunktion im Pfadintegral (mit $\hbar = 1$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{i}{2} g_{\mu\nu} \psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{Dt} \quad \to \quad \mathcal{L} := -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{D\tau} \ . \tag{27.8.1}$$

In der Physik ist es üblich, als euklidische Langrangefunktion $\mathcal{L}_E$ den negativen Wert von $\mathcal{L}$ bzgl. τ zu definieren:

$$\mathcal{L}_E(x(\tau), \dot{x}(\tau), \psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)) := -\mathcal{L}(x(t(\tau)), \dot{x}(t(\tau)), \psi(t(\tau)), \dot{\psi}(t(\tau))) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_E := -\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{D\tau} \ , \tag{27.8.2}$$

und als euklidische Wirkungsfunktion das Integral über $\mathcal{L}_E$, also

$$\mathcal{S}_E(x, \psi) := \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \, \mathcal{L}_E(\dot{x}(\tau), x(\tau), \dot{\psi}(\tau), \psi(\tau), \tau) \ . \tag{27.8.3}$$

Damit geht also der Phasenfaktor der Wirkungsfunktion im Pfadintegral über in:

$$e^{i\mathcal{S}(x,\psi)} \quad \to \quad e^{-\mathcal{S}_E(x,\psi)} \ . \tag{27.8.4}$$

Aber auch bei der SUSY-Tranformation 27.7.3 muß man den Übergang zur euklidischen Zeitkoordinate vornehmen und erhält:

$$\delta_\epsilon x^\mu = i\epsilon\psi^\mu \ , \quad \delta_\epsilon \psi^\mu = -i\epsilon\dot{x}^\mu \ . \tag{27.8.5}$$

Für den Index des euklidischen chiralen Dirac-Operators hatten wir gefunden (27.4.11, 27.4.20):

$$\mathrm{ind}(\hat{D}) = \mathrm{tr}((-1)^{\hat{F}} e^{-\beta \hat{H}}) \; .$$

Dies läßt sich folgendermaßen als euklidisches Pfadintegral schreiben:

$$\mathrm{ind}(\hat{D}) = N \cdot \int\limits_{\substack{x(\beta)=x(0)\\ \psi(\beta)=-\psi(0)}} D[x(\tau)]\, D[\psi(\tau)]\, (-1)^{\hat{F}} e^{-\mathcal{S}_E(x,\psi)} \; , \tag{27.8.6}$$

d.h. es ist über alle periodischen bosonischen Pfade und alle antiperiodischen fermionischen Pfade zu summieren. Der Phasenfaktor $(-1)^{\hat{F}}$ ändert jedoch das Vorzeichen des fermionischen Randwertes $-\psi(0)$ in $\psi(0)$, siehe C.8.11, so daß sich also das Pfadintegral als Summe über alle periodischen bosonischen und alle periodischen fermionischen Pfade schreiben läßt:

$$\mathrm{ind}(\hat{D}) = N \cdot \int\limits_{\substack{x(\beta)=x(0)\\ \psi(\beta)=\psi(0)}} D[x(\tau)]\, D[\psi(\tau)]\, e^{-\mathcal{S}_E(x,\psi)} \; , \tag{27.8.7}$$

wobei für $\mathcal{S}_E(x,\psi)$ mit den vorliegenden Randbedingungen gilt (mit $\tau = \beta s$):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_E(x,\psi) &= \int_0^\beta d\tau\, \mathcal{L}_E(\dot{x}(\tau), x(\tau), \dot{\psi}(\tau), \psi(\tau)) \\ &= \int_0^\beta d\tau\, [\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{D\tau}] \qquad (27.8.8) \\ &= \int_0^1 ds\, [\frac{1}{\beta}\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{Ds}] \; . \qquad (27.8.9) \end{aligned}$$

$\mathrm{ind}(\hat{D})$ ist als eine topologische Invariante unabhängig von β, also kann man das Pfadintegral im $\lim_{\beta\to 0}$ betrachten. Ein subtiler Punkt bei diesem Vorgehen ist aber, daß man vor dem Grenzübergang auch die Pfadintegral-Maßfunktion von β unabhängig machen muß, indem man die Pfadintegral-Normierungskonstante entsprechend angepaßt (siehe weiter unten)! Im Grenzwert $\lim_{\beta\to 0}$ tragen zu $e^{-\mathcal{S}_E(x,\psi)}$ nur Pfade mit $\dot{x}(s) = 0$, also mit $x(s) = x_0 = \mathrm{const.}$ bei. Bei $\dot{x} = 0$ gilt dann $\frac{D\psi^\nu}{Ds} = \frac{d\psi^\nu}{ds}$, und da $g_{\mu\nu}$ eine euklidische Metrik und $\frac{d}{d\tau}$, bzw. $\frac{d}{ds}$ ein elliptischer Differential-Operator ist (auf einem geeigneten Sobolev-Raum, siehe Kapitel E.2) gilt

$$\langle \psi \mid \frac{d}{ds}\psi \rangle = \int_0^1 ds\, g_{\mu\nu}\psi^\mu \frac{d\psi^\nu}{ds} > 0 \; .$$

Also stellt $\dot{\psi} = 0$, bzw. $\psi(s) = \psi_0 = \text{const.}$, an der Stelle $x(s) = x_0$, eine untere Schranke dar. Insgesamt kann man damit feststellen, daß die Hauptbeiträge zu $e^{-\mathcal{S}_E(x,\psi)}$ von den Pfaden um $(x_0, \psi_0) = \text{const.}$ herrühren. Infolgedessen kann man das Pfadintegral mit der sog. *Sattelpunktmethode* (siehe z.B. Schiekel (2011), S. 298) berechnen, indem man die quadratischen Fluktuationen in x und ψ um das Extremum von $\mathcal{S}_E(x,\psi)$ an einem Punkt (x_0, ψ_0) herum untersucht, wobei das Extremum von $\mathcal{S}_E(x,\psi)$ durch die klassische Lösung der Lagrange-Gleichungen bestimmt ist. Wir entwickeln also $\mathcal{S}_E(x,\psi)$ nach einem 'kleinen' Parameter, in unserem Fall nach $\beta \ll 1$:

$$\mathcal{S}_E(x,\psi) \simeq \mathcal{S}_E^{(0)}(x_0,\psi_0) + \mathcal{S}_E^{(1)}(x,\psi) + \mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi) \;, \tag{27.8.10}$$

wobei wegen der konkreten Form von $\mathcal{S}_E(x,\psi)$ die Wirkung am Punkt (x_0, ψ_0) verschwindet und die Extremal-Bedingung $\mathcal{S}_E^{(1)}(x,\psi) \stackrel{!}{=} 0$ die klassischen Lagrange-Bewegungsgleichungen liefert (siehe z.B. A.1.17):

$$\mathcal{S}_E(x_0,\psi_0) = \mathcal{S}_E^{(0)}(x_0,\psi_0) = 0 \;, \tag{27.8.11}$$

$$\mathcal{S}_E^{(1)}(x,\psi) := \frac{\delta \mathcal{S}_E(x,\psi)}{\delta x}\delta x + \frac{\delta \mathcal{S}_E(x,\psi)}{\delta \psi}\delta \psi \tag{27.8.12}$$

Lemma 27.8.1 *Die Lagrange-Gleichungen des obigen Wirkungsfunktionals sind:*

$$\frac{D\psi^\mu}{D\tau} = \frac{d\psi^\mu}{d\tau} + \frac{dx^\lambda}{d\tau}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\psi^\nu \stackrel{!}{=} 0 \;, \tag{27.8.13}$$

$$-g_{\rho\nu}(x)\frac{D}{D\tau}(\frac{dx^\nu}{d\tau}) + \frac{1}{2}R_{\mu\nu\rho\lambda}\psi^\mu\psi^\nu\frac{dx^\lambda}{d\tau} \stackrel{!}{=} 0 \;. \tag{27.8.14}$$

Seien die Fluktuationen in x und ψ um das Extremum (x_0, ψ_0) herum gegeben durch

$$x^\mu(\tau) := x_0^\mu + \xi^\mu(\tau) \quad \textit{und} \quad \psi^\mu(\tau) := \psi_0^\mu + \eta^\mu(\tau) \;, \tag{27.8.15}$$

dann ist der Term der quadratischen Fluktuationen von $\mathcal{S}_E(x,\psi)$ gerade

$$\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi) = \int_0^\beta d\tau\,[\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{d\xi^\mu}{d\tau}\frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\eta^\mu\frac{d\eta^\nu}{d\tau} + \frac{1}{4}R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\psi_0^\kappa\psi_0^\lambda\xi^\mu\frac{d\xi^\nu}{d\tau}] \;, \tag{27.8.16}$$

bzw. mit

$$\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0) := \frac{1}{2}R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\psi_0^\kappa\psi_0^\lambda \;, \tag{27.8.17}$$

$$\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi) = \int_0^\beta d\tau\,[\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{d\xi^\mu}{d\tau}\frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\eta^\mu\frac{d\eta^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)\xi^\mu\frac{d\xi^\nu}{d\tau}] \tag{27.8.18}$$

$$= \int_0^\beta d\tau \, [-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\xi^\mu \frac{d^2\xi^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\eta^\mu \frac{d\eta^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)\xi^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau}] \tag{27.8.19}$$

$$= \int_0^\beta d\tau \, [\frac{1}{2}\langle \xi \mid (-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2} + \tilde{R}(x_0)\frac{d}{d\tau})\xi\rangle + \frac{1}{2}\langle \eta \mid \mathbb{1}\frac{d}{d\tau}\eta\rangle] \; . \tag{27.8.20}$$

Man kann $\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)$ im Folgenden als eine Matrix aus c-Zahlen betrachten, da die Grassmann-Variablen $\psi_0^\kappa \psi_0^\lambda$ hier ja immer nur als Paar auftreten.

Beweis. Die supersymmetrische euklidische Lagrangefunktion ist:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{D\tau} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\psi^\mu (\frac{d\psi^\nu}{d\tau} + \dot{x}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}\psi^\kappa) \; .$$

Wir beginnen mit der Lagrange-Gleichung für die fermionische Koordinate ψ.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \psi^\rho} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \dot{\psi}^\rho} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}g_{\rho\nu}\frac{D\psi^\nu}{D\tau} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\frac{\partial}{\partial\psi^\rho}\dot{x}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}\psi^\kappa)\psi^\mu + \frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}^\rho}(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{\psi}^\nu \psi^\mu) \\
&= \frac{1}{2}g_{\rho\nu}\frac{D\psi^\nu}{D\tau} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\rho}\psi^\mu + \frac{d}{d\tau}(\frac{1}{2}g_{\mu\rho}\psi^\mu) \\
&= \frac{1}{2}g_{\rho\nu}\frac{D\psi^\nu}{D\tau} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\rho}\psi^\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\psi^\mu + \frac{1}{2}g_{\rho\mu}\frac{d\psi^\mu}{d\tau} \quad \Rightarrow \\
0 &= 2g^{\sigma\rho}\{\frac{1}{2}g_{\rho\nu}\frac{D\psi^\nu}{D\tau} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\rho}\psi^\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\psi^\mu + \frac{1}{2}g_{\rho\mu}\frac{d\psi^\mu}{d\tau}\} \\
&= \frac{D\psi^\sigma}{D\tau} - g^{\sigma\rho}g_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\lambda\rho}\dot{x}^\lambda \psi^\mu + g^{\sigma\rho}\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\lambda \psi^\mu + \frac{d\psi^\sigma}{d\tau} \\
&= \frac{D\psi^\sigma}{D\tau} + \frac{d\psi^\sigma}{d\tau} + \dot{x}^\lambda g^{\sigma\rho}[-\Gamma_{\mu\lambda\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}]\psi^\mu \; .
\end{aligned}$$

Nun gilt für die Zusammenhangs-Koeffizienten des Levi-Civita Zusammenhangs (10.11.4):

$$\begin{aligned}
\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} = \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}) \\
&= g^{\sigma\rho}[\partial_\lambda g_{\rho\mu} - \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\rho g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\rho})] \\
&= g^{\sigma\rho}[\partial_\lambda g_{\rho\mu} - \Gamma_{\mu\lambda\rho}] \; .
\end{aligned}$$

Und damit folgt für die fermionische Lagrange-Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{D\psi^\sigma}{D\tau} + \frac{d\psi^\sigma}{d\tau} + \dot{x}^\lambda \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}\psi^\mu = \frac{D\psi^\sigma}{D\tau} + \frac{d\psi^\sigma}{d\tau} + \dot{x}^\lambda \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}\psi^\mu = 2\frac{D\psi^\sigma}{D\tau} \quad \Rightarrow$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{D\psi^\mu}{D\tau} = \frac{d\psi^\mu}{d\tau} + \dot{x}^\lambda \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\psi^\nu \ .$$

Nun zur Lagrange-Gleichung für die bosonische Koordinate x.

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{D\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\psi^\mu \left(\frac{d\psi^\nu}{d\tau} + \dot{x}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}\psi^\kappa\right) .$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial x^\rho} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \dot{x}^\rho} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} & \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu})\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{D\tau} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\psi^\mu \dot{x}^\lambda (\partial_\rho \Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa})\psi^\kappa \\ & - \frac{d}{d\tau}[g_{\rho\nu}\dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\psi^\mu \Gamma^\nu{}_{\rho\kappa}\psi^\kappa] \ . \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber diskutieren wir die fünf verschiedenen Terme zunächst separat. Der 2. Term verschwindet wegen 27.8.13. Den 1. und den 4. Term fassen wir zusammen zu:

$$\begin{aligned} T(1,4) :=& \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - (\partial_\mu g_{\rho\nu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\rho\nu}\ddot{x}^\nu \\ =& \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\rho\nu}\ddot{x}^\nu \\ =& -[g_{\rho\nu}\ddot{x}^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu] \\ =& -[g_{\rho\sigma}\ddot{x}^\sigma + g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu] = -g_{\rho\nu}\frac{D\dot{x}^\nu}{D\tau} \ . \end{aligned}$$

Auch den 3. und 5. Term fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned} T(3,5) := & [\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial_\rho \Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}) - \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu})\Gamma^\nu{}_{\rho\kappa} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial_\lambda \Gamma^\nu{}_{\rho\kappa})]\psi^\mu \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \\ & - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\frac{d\psi^\mu}{d\tau}\Gamma^\nu{}_{\rho\kappa}\psi^\kappa - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\psi^\mu \Gamma^\nu{}_{\rho\kappa}\frac{d\psi^\kappa}{d\tau} \ . \end{aligned}$$

Mit 27.8.13

$$\frac{d\psi^\mu}{d\tau} = -\dot{x}^\lambda \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\psi^\sigma \ , \quad \frac{d\psi^\kappa}{d\tau} = -\dot{x}^\lambda \Gamma^\kappa{}_{\lambda\sigma}\psi^\sigma \ ,$$

folgt für $T(3,5)$ also:

$$
\begin{aligned}
T(3,5) = \{ & \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial_\rho \Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}) - \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu})\Gamma^\nu{}_{\rho\kappa} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial_\lambda \Gamma^\nu{}_{\rho\kappa})\}\psi^\mu\psi^\kappa\dot{x}^\lambda \\
& + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\lambda \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\nu{}_{\rho\kappa}\psi^\sigma\psi^\kappa + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\rho\kappa}\dot{x}^\lambda\Gamma^\kappa{}_{\lambda\sigma}\psi^\mu\psi^\sigma \\
= & \frac{1}{2}\{g_{\mu\kappa}(\partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}) - (\partial_\lambda g_{\mu\kappa})\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu} - g_{\mu\kappa}(\partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}) \\
& + g_{\sigma\kappa}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu} + g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\}\,\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda \\
= & \frac{1}{2}\{g_{\mu\kappa}(\partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}) - g_{\mu\kappa}(\partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}) + g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \\
& + g_{\sigma\kappa}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu} - (\partial_\lambda g_{\mu\kappa})\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}\}\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda \\
= & \frac{1}{2}\{g_{\mu\kappa}(\partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}) - g_{\mu\kappa}(\partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}) + g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \\
& + [\Gamma_{\kappa\lambda\mu} - (\partial_\lambda g_{\mu\kappa})]\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}\}\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda \\
= & \frac{1}{2}\{g_{\mu\kappa}(\partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}) - g_{\mu\kappa}(\partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}) + g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \\
& + [\frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) - (\partial_\lambda g_{\mu\kappa})]\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}\}\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda \\
= & \frac{1}{2}\{g_{\mu\kappa}(\partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}) - g_{\mu\kappa}(\partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}) + g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \\
& + [\frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda})]\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}\}\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda \\
= & \frac{1}{2}\{g_{\mu\kappa}(\partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}) - g_{\mu\kappa}(\partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}) + g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \\
& - \Gamma_{\mu\kappa\lambda}\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}\}\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda \\
= & \frac{1}{2}\{g_{\mu\kappa}(\partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}) - g_{\mu\kappa}(\partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}) + g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \\
& - g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu}\}\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda \\
= & \frac{1}{2} g_{\mu\kappa}\{(\partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}) - (\partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}) + \Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu}\}\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda \,.
\end{aligned}
$$

In diesem Ausdruck erkennt man nun gerade der Riemannschen Krümmungstensors im Levi-Civita-Zusammenhang (10.11.5):

$$
R^\kappa{}_{\nu\rho\lambda} = \partial_\rho\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} - \partial_\lambda\Gamma^\kappa{}_{\rho\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} \,,
$$

so daß für $T(3,5)$ folgt:

$$T(3,5) = \frac{1}{2} g_{\mu\kappa} R^{\kappa}{}_{\nu\rho\lambda} \psi^\mu \psi^\nu \dot{x}^\lambda = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\lambda} \psi^\mu \psi^\nu \dot{x}^\lambda \ .$$

Nun setzen wir alles in die Lagrange-Gleichung ein und erhalten

$$0 \stackrel{!}{=} T(1,4) + T(3,5) = -g_{\rho\nu} \frac{D\dot{x}^\nu}{D\tau} + \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\lambda} \psi^\mu \psi^\nu \dot{x}^\lambda \ .$$

Die Bestimmung von $\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi)$ kann man sich wesentlich erleichtern, indem man im Extremum (x_0,ψ_0) Riemannsche Normalkoordinaten wählt (siehe Kapitel 10.12). Diese sind definiert durch

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \delta_{\mu\nu} \ , \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}|_{x_0} = 0 \ ,$$

womit in dem vorausgesetzten Levi-Civita Zusammenhang mit 10.11.4 folgt:

$$\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} = 0 \ .$$

Jetzt addiert man in $\mathcal{S}_E(x,\psi)$ alle quadratischen Fluktuationen in $\xi^\mu(\tau)$ und $\eta^\mu(\tau)$ gemäß 27.8.15 und erhält:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi) &= \int_0^\beta d\tau \, [\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x_0) \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x_0) \eta^\mu \frac{d\eta^\nu}{d\tau} \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{\kappa\rho}(x_0) \psi_0^\kappa \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{\partial \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}|_{x_0} \xi^\mu \psi_0^\lambda] \\
&= \int_0^\beta d\tau \, [\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \eta^\mu \frac{d\eta^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} \delta_{\kappa\rho} \frac{\partial \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}|_{x_0} \psi_0^\kappa \psi_0^\lambda \xi^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau}] \\
&= \int_0^\beta d\tau \, [\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \eta^\mu \frac{d\eta^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma_{\kappa\nu\lambda}}{\partial x^\mu}|_{x_0} \psi_0^\kappa \psi_0^\lambda \xi^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau}] \ .
\end{aligned}$$

Nun kann man für $\frac{\partial \Gamma_{\kappa\nu\lambda}}{\partial x^\mu}$ den Riemannschen Krümmungstensor einführen, der in den Riemannschen Normalkoordinaten die folgende Form hat (10.11.5):

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu}(x_0) = \frac{\partial \Gamma_{\kappa\nu\lambda}}{\partial x^\mu}|_{x_0} - \frac{\partial \Gamma_{\kappa\mu\lambda}}{\partial x^\nu}|_{x_0} \ .$$

Bei einem Levi-Civita Zusammenhang gelten für den Riemannschen Krümmungstensor folgende Symmetrien (10.11.7, 10.11.8, 10.11.9):

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu}(x_0) = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}(x_0) \ , \quad R_{\kappa\lambda\mu\nu}(x_0) = R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0) \ ,$$

und damit folgt

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0) = R_{\kappa\lambda\mu\nu}(x_0) = \frac{\partial\Gamma_{\kappa\nu\lambda}}{\partial x^\mu}|_{x_0} - \frac{\partial\Gamma_{\kappa\mu\lambda}}{\partial x^\nu}|_{x_0} = 2\frac{\partial\Gamma_{\kappa\nu\lambda}}{\partial x^\mu}|_{x_0} \ .$$

Also ergibt sich für $\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi)$:

$$\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi) = \int_0^\beta d\tau \, [\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{d\xi^\mu}{d\tau}\frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\eta^\mu\frac{d\eta^\nu}{d\tau} + \frac{1}{4}R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\psi_0^\kappa\psi_0^\lambda\xi^\mu\frac{d\xi^\nu}{d\tau}]$$

$$= \int_0^\beta d\tau \, [\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{d\xi^\mu}{d\tau}\frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\eta^\mu\frac{d\eta^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)\xi^\mu\frac{d\xi^\nu}{d\tau}] \ .$$

Die Form 27.8.19 folgt durch partielle Integration mit den periodischen Randwerten $\xi(\beta) = \xi(0)$. □

Aus den beiden Lagrange-Gleichungen für x und ψ folgt, daß jeder Punkt $(x_0, \psi_0) =$ const. ein Extremum für des Wirkungsfunktionals ist und daß daher im Pfadintegral über die Fluktuationen aller Punkte $(x_0, \psi_0) \in M \otimes \Lambda^{2n}$ zu summieren ist.

Jetzt soll das Pfadintegral ausgewertet werden. Seien wie oben die Fluktuationen um (x_0, ψ_0) wieder gegeben durch $(\xi(\tau), \eta(\tau))$. Wegen der periodischen Randbedingungen für x und ψ im Intervall $[0, \beta]$ kann man dann für $\xi(\tau)$ und $\eta(\tau)$ eine Fourierentwicklung einsetzen.

$$x^\mu(\tau) = x_0^\mu + \xi^\mu(\tau) \ , \quad \xi^\mu(\tau) = \frac{c_1(\beta)}{\sqrt{\beta}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \xi_k^\mu e^{\frac{i2\pi k}{\beta}\tau} \ , \tag{27.8.21}$$

$$\psi^\mu(\tau) = c_2(\beta)\psi_0^\mu + \eta^\mu(\tau) \ , \quad \eta^\mu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \eta_k^\mu e^{\frac{i2\pi k}{\beta}\tau} \ . \tag{27.8.22}$$

Wie oben bereits erwähnt, bestimmt man in der Indextheorie die Pfadintegral-Normierungskonstante indem man verlangt, daß die Pfadintegral-Maßfunktion und damit auch die Normierungskonstante von dem Parameter β unabhängig sein sollen, da ja auch der Index als topologische Invariante unabhängig von β sein muß. Zu diesem Zweck haben wir hier die noch zu ermittelnde Konstanten $c_1(\beta), c_2(\beta) \in \mathbb{R}$ eingeführt. Wir werden im Folgenden $c_1(\beta) = \beta$ und $c_2(\beta) = \sqrt{\beta}$ finden.

Außerdem ist von Bedeutung, daß wegen der Form von $\mathcal{S}_E(x,\psi)$ und $\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi)$, die sog. Nullmoden, d.h. die Fourierkomponenten mit $k = 0$, im Wirkungsfunktional nicht vorkommen. Für das Pfadintegral-Integrationsmaß gilt also

$$D[x(\tau)] \, D[\psi(\tau)] = D[x_0, c_1\xi(\tau)] \, D[c_2\psi_0, \eta(\tau)] \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(\hat{D}) &= N \cdot \int\limits_{\substack{x(\beta)=x(0)\\ \psi(\beta)=\psi(0)}} D[x(\tau)]\, D[\psi(\tau)]\, e^{-\mathcal{S}_E(x,\psi)} \\
&= N \cdot \int\limits_{\substack{\xi(\beta)=\xi(0)\\ \eta(\beta)=\eta(0)}} D[x_0, c_1\xi(\tau)]\, D[c_2\psi_0, \eta(\tau)]\, e^{-\mathcal{S}_E^{(2)}(\xi,\eta)} \\
&= N' \cdot \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\psi_0^\mu}{c_2} \{ \int \prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{d\xi_k^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\eta_k^\mu\, e^{-\mathcal{S}_E^{(2)}(\xi,\eta)} \}
\end{aligned} \tag{27.8.23}$$

$\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi)$, der Term der quadratischen Fluktuationen von $\mathcal{S}_E(x,\psi)$, setzt sich additiv aus den quadratischen Fluktuationen in den bosonischen Variablen ξ_k^μ, und aus den quadratischen Fluktuationen in den fermionischen Variablen $d\eta_k^\mu$ zusammen:

$$\mathcal{S}_E^{(2)}(x,\psi) = \int\limits_0^\beta d\tau\, \frac{1}{2} \langle \xi \mid (-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2} + \tilde{R}(x_0)\frac{d}{d\tau})\xi \rangle + \int\limits_0^\beta d\tau\, \frac{1}{2} \langle \eta \mid \mathbb{1}\frac{d}{d\tau}\eta \rangle \; . \tag{27.8.24}$$

Damit liegen jetzt im Pfadintegral zwei Gaußsche Integrale vor, eines über die bosonischen Variablen ξ_k^μ und eines über die fermionischen Variablen η_k^μ. Mit C.5.2 und C.9.2 folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(\hat{D}) &= N' \cdot \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\psi_0^\mu}{c_2} \{ \det_{k\neq 0}[\mathbb{1}\frac{d}{d\tau}]^{\frac{1}{2}} \det_{k\neq 0}[-c_1^2(\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2} + \tilde{R}(x_0)\frac{d}{d\tau})]^{-\frac{1}{2}} \} \\
&= N' \cdot \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\psi_0^\mu}{c_2} \{ \det_{k\neq 0}[-c_1^2(\mathbb{1}\frac{d}{d\tau} + \tilde{R}(x_0))]^{-\frac{1}{2}} \} \; .
\end{aligned} \tag{27.8.25}$$

Vor der Berechnung der obigen Funktionaldeterminante soll die Normierungskonstante N' der Pfadintegral-Maßfunktion bestimmt werden, und zwar mittels c_1 so, daß N' unabhängig von β ist. Wir setzen $N' = N_b' \cdot N_f'$, also dem Produkt des bosonischen Anteils N_b' mal dem fermionischen Anteil N_f' und beginnen mit dem bosonischen Anteil N_b'.

Für den bosonischen Anteil der Normierungskonstanten N_b' der Pfadintegral-Maßfunktion gilt mit C.7.1 ($m_F = 1$, $\hbar = 1$):

$$N_b' = \{ \det_{k\neq 0}[-c_1^2(\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2})] \}^{\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{c_1} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 := \beta \; ,$$

womit N_b' wie gefordert keine Abhängigkeit von β mehr hat.

Für den fermionischen Anteil der Normierungskonstanten N'_f der Pfadintegral-Maßfunktion gilt mit C.10.33 ($\hbar = 1$):

$$N'_f = (-i)^n \ . \tag{27.8.26}$$

Damit folgt

$$N' = N'_b \cdot N'_f = (-i)^n \ . \tag{27.8.27}$$

Wir fahren fort mit der Auswertung von 27.8.25:

$$\mathrm{ind}(\hat{D}) = N' \cdot \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\psi_0^\mu}{c_2} \{ \det_{k\neq 0} [-\beta^2 (\mathbb{1}\frac{d}{d\tau} + \tilde{R}(x_0))]^{-\frac{1}{2}} \} \ .$$

$\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)$ aus 27.8.17 ist antisymmetrisch in μ und ν, weil der Riemannsche Krümmungstensor $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ antisymmetrisch in μ und ν ist (10.11.8). Also kann $\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)$ unitär auf die folgende Blockdiagonalform transformiert werden (25.9.11), was die Determinante unverändert läßt.

$$[-\beta^2 (\mathbb{1}\frac{d}{d\tau} + \tilde{R}(x_0))]_{k\neq 0} = \beta^2 \begin{pmatrix} -\frac{d}{d\tau} & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & -\frac{d}{d\tau} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\frac{d}{d\tau} & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & -\frac{d}{d\tau} \end{pmatrix} \ .$$

Weil die Nullmode $k \neq 0$ ausgeschlossen wurde sind alle Eigenwerte $\lambda_j \neq 0$. Wir betrachten jetzt die regularisierte Determinante des 2-dimensionalen Blocks mit dem Eigenwert λ_j:

$$\begin{aligned}
\det_{\mathrm{reg},\, k\neq 0} \beta^2 \begin{pmatrix} -\frac{d}{d\tau} & \lambda_j \\ -\lambda_j & -\frac{d}{d\tau} \end{pmatrix} &= \det_{\mathrm{reg},\, k\neq 0} \beta^2 (\frac{d^2}{d\tau^2} + \lambda_j^2) = \prod_{\mathrm{reg},\, k\neq 0} [-\beta^2 (\frac{2\pi k}{\beta})^2 + \beta^2 \lambda_j^2] \\
&= \{ \prod_{\mathrm{reg},\, k>0} [-(2\pi k)^2 + \beta^2 \lambda_j^2] \} \{ \prod_{\mathrm{reg},\, k<0} [-(2\pi k)^2 + \beta^2 \lambda_j^2] \} \\
&= \{ \prod_{\mathrm{reg},\, k>0} [-(2\pi k)^2 + \beta^2 \lambda_j^2] \}^2 \\
&= \{ \prod_{\mathrm{reg},\, k>0} [(2\pi k)^2] \prod_{k>0} [1 - (\frac{\beta\lambda_j}{2\pi k})^2] \}^2 \ .
\end{aligned}$$

Das erste Produkt ist regularisiert mit C.7.2 gerade 1 und für das zweite Produkt ergibt sich mit Abramowitz u. Stegun (1970), 4.3.89:

$$\prod_{k>0} [1 - (\frac{\beta\lambda_j}{2\pi k})^2] = \frac{\sin^2(\frac{\beta\lambda_j}{2})}{(\frac{\beta\lambda_j}{2})^2} \ .$$

Damit folgt für die regularisierte Funktionaldeterminante und für $\mathrm{ind}(\hat{D})$:

$$\{\det_{\mathrm{reg},\,k\neq 0}[-\beta^2(\mathbb{1}\frac{d}{d\tau}+\tilde{R}(x_0))]^{-\frac{1}{2}}\} = \{\prod_{j=1}^{n}\det_{\mathrm{reg},\,k\neq 0}\beta^2\begin{pmatrix} -\frac{d}{d\tau} & \lambda_j \\ -\lambda_j & -\frac{d}{d\tau}\end{pmatrix}\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\frac{(\frac{\beta\lambda_j}{2})}{\sin(\frac{\beta\lambda_j}{2})}\ .$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(\hat{D}) &= N'\cdot\int\prod_{\mu=1}^{2n}\frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}\frac{d\psi_0^\mu}{c_2}\{\det_{\mathrm{reg},\,k\neq 0}[-\beta^2(\mathbb{1}\frac{d}{d\tau}+\tilde{R}(x_0))]^{-\frac{1}{2}}\} \\
&= N'\cdot\int\prod_{\mu=1}^{2n}\frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}\frac{d\psi_0^\mu}{c_2}\prod_{j=1}^{n}\frac{(\frac{\beta\lambda_j}{2})}{\sin(\frac{\beta\lambda_j}{2})} \\
&= N'\cdot\int\prod_{\mu=1}^{2n}\frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}\frac{d\psi_0^\mu}{c_2}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{n}(\frac{\beta\lambda_j}{2})}{\prod_{j=1}^{n}\sin(\frac{\beta\lambda_j}{2})}\right\} \\
&= N'\cdot\int\prod_{\mu=1}^{2n}\frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}\frac{d\psi_0^\mu}{c_2}\frac{\left\{\det(\frac{\beta\tilde{R}(x_0)}{2})\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\det(\sin(\frac{\beta\tilde{R}(x_0)}{2}))\right\}^{\frac{1}{2}}} \\
&= N'\cdot\int\prod_{\mu=1}^{2n}\frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}\frac{d\psi_0^\mu}{c_2}\left\{\det\frac{\frac{\beta\tilde{R}(x_0)}{2}}{\sin(\frac{\beta\tilde{R}(x_0)}{2})}\right\}^{\frac{1}{2}}\ .
\end{aligned}$$

Die β-Abhängigkeit in der Maßfunktion und vor $\tilde{R}(x_0)$ (27.8.17) beseitigt man der Definition von $c_2(\beta) := \sqrt{\beta}$ und der folgenden Substitution der Grassmann-Variablen ψ:

$$\psi_0^\mu := \frac{\chi_0^\mu}{\sqrt{2\pi\beta}}\ ,\quad d\psi_0^\mu = \sqrt{2\pi\beta}\,d\chi_0^\mu\ ,\quad \frac{d\psi_0^\mu}{c_2} = \frac{d\psi_0^\mu}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{2\pi}d\chi_0^\mu\ ,$$

$$\beta\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0) = \frac{1}{2}R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\beta\psi_0^\kappa\psi_0^\lambda = \frac{1}{4\pi}R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\chi_0^\kappa\chi_0^\lambda\ .$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(\hat{D}) &= (-i)^n\cdot\int\prod_{\mu=1}^{2n}\frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}\frac{d\psi_0^\mu}{c_2}\left\{\det\frac{\frac{\beta\tilde{R}(x_0)}{2}}{\sin(\frac{\beta\tilde{R}(x_0)}{2})}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= (-i)^n\cdot\int\prod_{\mu=1}^{2n}dx_0^\mu d\chi_0^\mu\left\{\det\frac{\frac{1}{8\pi}R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\chi_0^\kappa\chi_0^\lambda}{\sin(\frac{1}{8\pi}R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\chi_0^\kappa\chi_0^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{2}}\ .
\end{aligned}\tag{27.8.28}$$

Diese Darstellung des $\mathrm{ind}(\hat{D})$ läßt sich in vier Schritten noch weiter bis hin zu einem Raumintegral über die entsprechende $\hat{A}$-Klasse (siehe 27.3.1) vereinfachen.

1. Zunächst einmal sieht man, daß in der Reihenentwicklung von $\sin(x)/x$ nur gerade Potenzen von x vorkommen:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots) = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots .$$

Mit $(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - \ldots$ folgt, daß auch in der Reihenentwicklung von $x/\sin(x)$ nur gerade Potenzen von x vorkommen:

$$\frac{x}{\sin(x)} = 1 - (-\frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots) + (-\frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots)^2 - \ldots .$$

Daraus folgt, daß auch in der Entwicklung der Matrix

$$\frac{\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)}{\sin(\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0))} = \sum_{j=1}^{n}(\frac{\beta}{2})^j T_j(\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0))$$

nach $\tilde{R}(x_0)$ nur gerade Potenzen von $\tilde{R}(x_0)$ vorkommen. Also muß n gerade sein! Der Entwicklungsterm T_j enthält Produkte mit $2j$ verschiedenen Grassmann-Variablen χ_0^κ, und da wir hier insgesamt gerade $2n$ verschiedene reelle Grassmann-Variable haben bricht die Potenzreihe bei $j = n$ ab.

Wegen des Integrals $\int \prod_{\mu=1}^{2n} d\chi_0^\mu = \prod_{\mu=1}^{2n} \partial/\partial\chi_0^\mu$ bleibt nur der Entwicklungsterm T_n übrig, da nur dann das Produkt der verschiedenen Grassmann-Variablen χ_0^κ in T_n gleich dem Produkt der Grassmann-Integrationsvariablen $d\chi_0^\mu$, bzw. Grassmann-Ableitungen $\partial/\partial\chi_0^\mu$, ist.

2. Das Produkt der räumlichen Integrationsvariablen $\prod_{\mu=1}^{2n} dx_0^\mu$ ist ein gewöhnliches Volumenelement der $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. In T_n kommen nun Faktoren von $\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0) = \frac{1}{8\pi}R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\chi_0^\kappa\chi_0^\lambda$ vor und eine Vertauschung der beiden Grassmann-Variablen liefert wegen $\chi_0^\kappa\chi_0^\lambda = -\chi_0^\lambda\chi_0^\kappa$ einen Faktor (-1). Die Grassmann-Variablen $\chi_0^\kappa\chi_0^\lambda$ fallen bei der Integration über $\int d\chi_0^\kappa\chi_0^\lambda$ weg und das Vorzeichen der Antikommutation bleibt erhalten, wenn man in den räumlichen Integrationsvariablen $dx_0^\kappa \cdot dx_0^\lambda$ zum äußeren Produkt $dx_0^\kappa \wedge dx_0^\lambda$ übergeht (wir schreiben hier der Klarheit halber die Summationen explizit aus, also $\sum_{\kappa\lambda=1}^{2n} R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\chi_0^\kappa\chi_0^\lambda$). Dabei nutzen wir auch die Antisymmetrie des Riemann-Tensors $R_{\mu\nu\kappa\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ aus.

$$\sum_{\kappa\lambda=1}^{2n} \int \chi_0^\lambda d\chi_0^\kappa \frac{1}{2} \sum_{\kappa'\lambda'=1}^{2n} R_{\mu\nu\kappa'\lambda'}(x_0)\chi_0^{\kappa'}\chi_0^{\lambda'}\,(dx_0^1 \cdot \ldots \cdot dx_0^\kappa \cdot \ldots \cdot dx_0^\lambda \cdot \ldots \cdot dx_0^{2n})$$

$$= \sum_{\kappa\lambda=1}^{2n} \frac{1}{2} \sum_{\kappa'\lambda'=1}^{2n} R_{\mu\nu\kappa'\lambda'}(x_0)(\delta_\kappa^{\kappa'}\delta_\lambda^{\lambda'} - \delta_\kappa^{\lambda'}\delta_\lambda^{\kappa'})\,(dx_0^1 \cdot \ldots \cdot dx_0^\kappa \cdot \ldots \cdot dx_0^\lambda \cdot \ldots \cdot dx_0^{2n})$$

$$= \sum_{\kappa\lambda=1}^{2n} \sum_{\kappa'\lambda'=1}^{2n} R_{\mu\nu\kappa'\lambda'}(x_0)(\delta_\kappa^{\kappa'}\delta_\lambda^{\lambda'})\,(dx_0^1 \cdot \ldots \cdot dx_0^\kappa \cdot \ldots \cdot dx_0^\lambda \cdot \ldots \cdot dx_0^{2n})$$

$$= \sum_{\kappa\lambda=1}^{2n} R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\,(dx_0^1 \cdot \ldots \cdot dx_0^\kappa \cdot \ldots \cdot dx_0^\lambda \cdot \ldots \cdot dx_0^{2n})$$

$$= \sum_{\kappa\lambda=1}^{2n} \frac{1}{2} R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)(dx_0^\kappa \wedge dx_0^\lambda)(dx_0^1 \cdot \ldots \cdot \hat{dx_0^\kappa} \cdot \ldots \cdot \hat{dx_0^\lambda} \cdot \ldots \cdot dx_0^{2n}) \;.$$

Wir führen die Riemannsche Krümmungs-2-Form ein, jetzt wieder mit der üblichen Summenkonvention:

$$R_{\mu\nu}(x_0) := \frac{1}{2} R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\, dx_0^\kappa \wedge dx_0^\lambda \;,$$

und können damit nach der Integration über die Grassmann-Variablen $\int \prod_{\mu=1}^{2n} d\chi_0^\mu$ die folgende Ersetzung in der Determinante vornehmen:

$$\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0) = \frac{1}{8\pi} R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\chi_0^\kappa \chi_0^\lambda \quad \to \quad \frac{1}{8\pi} R_{\mu\nu\kappa\lambda}(x_0)\, dx_0^\kappa \wedge dx_0^\lambda = \frac{1}{4\pi} R_{\mu\nu}(x_0) \;.$$

3. Jetzt hat man für $\tilde{R}(x_0)$ die folgende Blockdiagonal-Darstellung

$$\tilde{R}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix} ,$$

und das bedeutet für $\tilde{R}^2(x_0)$

$$\tilde{R}^2(x_0) = \begin{pmatrix} -\lambda_1^2 & 0 & & & \\ 0 & -\lambda_1^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\lambda_n^2 & 0 \\ & & & 0 & -\lambda_n^2 \end{pmatrix} .$$

Damit folgt

$$\frac{1}{(-i)^n} \left\{ \det \frac{\sin(\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0))}{\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \frac{1}{(-i)^{2n}} \det[\mathbb{1} - \frac{1}{3!}(\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0))^2 + \frac{1}{5!}(\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0))^4 - \ldots)] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \frac{1}{(-i)^{2n}} [\prod_{j=1}^{n} (1 + \frac{1}{3!}(\frac{\beta}{2}\lambda_j)^2 + \frac{1}{5!}(\frac{\beta}{2}\lambda_j)^4 + \ldots)^2] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (1 + \frac{1}{3!}(\frac{\beta}{2}\lambda_j)^2 + \frac{1}{5!}(\frac{\beta}{2}\lambda_j)^4 + \ldots)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{\sinh(\frac{\beta}{2}\lambda_j)}{(\frac{\beta}{2}\lambda_j)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\sinh(\frac{\beta}{2}\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(\frac{\beta}{2}\lambda_j)} = \left\{ \frac{\prod_{j=1}^{n}\sinh^2(\frac{\beta}{2}\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(\frac{\beta}{2}\lambda_j)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \det \begin{pmatrix} 0 & \sinh(\frac{\beta}{2}\lambda_1) & & & \\ -\sinh(\frac{\beta}{2}\lambda_1) & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \sinh(\frac{\beta}{2}\lambda_n) \\ & & & -\sinh(\frac{\beta}{2}\lambda_n) & 0 \end{pmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$/ \left\{ \det \begin{pmatrix} 0 & (\frac{\beta}{2}\lambda_1) & & & \\ -(\frac{\beta}{2}\lambda_1) & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & (\frac{\beta}{2}\lambda_n) \\ & & & -(\frac{\beta}{2}\lambda_n) & 0 \end{pmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \det \frac{\sinh(\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0))}{\frac{\beta}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}(x_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Dabei wurde $(-i)^{2n} = 1$ gesetzt, da wir ja gesehen hatten, daß n gerade sein muß.

4. Jetzt setzt man alle obigen Ergebnisse zusammen und erhält

$$\mathrm{ind}(\hat{D}) = \int\limits_M \left\{ \det \frac{\frac{1}{4\pi}R_{\mu\nu}(x_0)}{\sinh(\frac{1}{4\pi}R_{\mu\nu}(x_0))} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Nun ist $R_{\mu\nu}(x_0)$ wieder schiefsymmetrisch und kann wie oben auf die folgende Form blockdiagonaliert werden:

$$\frac{1}{2\pi}R(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & & \\ -x_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & x_n \\ & & & -x_n & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich für $\mathrm{ind}(\hat{D})$ ein Integral der $\hat{A}$-Klasse ($\hat{A}$-Geschlecht, Dirac-Geschlecht, siehe 25.10.7) über die Mannigfaltigkeit M:

$$\mathrm{ind}(\hat{D}) = \int\limits_M \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j/2}{\sinh(x_j/2)} = \int\limits_M \hat{A}(R(x_0) . \qquad (27.8.29)$$

28 Und wie geht's weiter?

Wir haben jetzt eine lange Wanderung durch die eindrückliche Landschaft der Geometrie und Topologie von Euklid und Archimedes, über Harriot, Girard, Euler, Gauß, Bonnet, Riemann, Poincaré, Cartan, Einstein, Dirac, Feynman, bis hin zu Atiyah, Singer und Witten hinter uns.

Der Weg durch die vergangenen Jahrhunderte bis heute erscheint uns einigermaßen klar, doch unser Weg in die Zukunft ist voller Ungewißheiten. Einsteins Gravitationstheorie spiegelt die offensichtliche Zeitasymmetrie im Universum nicht wieder. Lee Smolin, einer der Väter der Schleifenquantengravitation (loop-quantum-gravity, LQG), hat jüngst ein schönes Buch mit dem Titel „Time Reborn" veröffentlicht, in welchem er die Zeitasymmetrie zum Ausgangspunkt neuer physikalisch-philosophischer Gedanken macht (Smolin (2013)) - und nebenbei auf Versuche hinweist, die Nichtlokalität der Quantentheorie aus der Dynamik der Spin-Netzwerke der LQG zu verstehen.

Wie geht es also weiter?

Im vorangegangenen Kapitel haben wir die Supersymmetrie (SUSY) in der Quantenmenchanik, d.h. in einer $1+0$ Quantenfeldtheorie (QFT) kennengelernt. Nun kann man als nächsten Schritt die Supersymmetrie auf das Standardmodell der Elementarteilchen anwenden (siehe Weinberg (1995b)). Dies bringt einerseits viele neue Konstanten in das Standardmodell, würde andererseits aber vielleicht auch schön die sog. *Dunkle Materie* im Universum erklären - so fehlt also nur noch der experimentelle Nachweis :-)

Wenn man sich nun die Super-Poincaré-Algebra genauer anschaut, dann stellt man fest, daß zwei SUSY-Transformationen zu einer Translation führen (siehe z.B. Kalka u. Soff (1997), S. 341) und das legt natürlich die Anwendung von SUSY auf die Gravitation nahe. Mittels lokaler Supersymmetrie als Eichgruppe gelangt man so ganz natürlich zur Supergravitation (SUGRA). Hier ist das schöne Buch von Freedman u. Van Proeyen (2012) zu empfehlen. Die Renormierbarkeit, bzw. Nichtrenormierbarkeit, der diversen SUGRA-Theorien ist immer noch ein Thema der aktuellen Forschung, aber zumindest die *einfacheren* SUGRA-Modelle in beliebigen Dimensionen sind wohl alle nicht renormierbar.

Nachdem die Physiker die Atiyah-Singer Indexsätze und die Bedeutung der Topologie von elliptischen Pseudodifferential-Operatoren für die Physik entdeckt hatten, wurden diese Einsichten sehr rasch von Witten, Alvarez-Gaumé, Ginsparg, Fujikawa, Wess, Zumino und anderen auf das Problem der sog. *Anomalien* der Quantenfeldtheorien angewandt. Von einer Anomalie einer QFT spricht man, wenn eine Symmetrie der Wirkungsfunktion einer klassischen Feldtheorie in der quantisierten Feldtheorie verloren geht. Aus der Sicht der Feynman-Pfadintegral-Quantisierung weist dann die

Pfadintegral-Maßfunktion, welche die eigentlichen quantentheoretischen Informationen trägt, die fragliche Symmetrie nicht auf.

Im Fall von lokalen Eichsymmetrien führen Anomalien dazu, daß sich grundlegende physikalische Forderungen, wie etwa die Unitarität und/oder die Renormierbarkeit der Theorie, nicht mehr aufrechterhalten lassen. So zeigt z.B. die QFT der elektroschwachen Wechselwirkung eine Anomalie bzgl. der $SU(2)$-Eichsymmetrie und wäre für sich alleine nicht renormierbar. Erst die Hinzunahme der starken Wechselwirkung mit ihrer $SU(3)$-Eichsymmetrie und deren Anomalie kompensiert die $SU(2)$-Anomalie, weshalb die Zahl der Generationen im Quark- und Leptonsektor gleich sein muß!

Ein gut lesbarer Einstieg zur Diskussion der Anomalien von QFT findet sich in Nakahara (2003), S. 501 ff., und die ausführliche Standardreferenz ist das Buch von Bertlmann (1996).

Die Untersuchung der Anomalien von SUGRA-Theorien in verschiedenen Dimensionen durch Alvarez-Gaumé & Witten in ihrer berühmten Arbeit (Alvarez-Gaumé u. Witten (1984)) war ein wichtiger Auslöser für die sog. *1. Superstring-Revolution*. Wenn man diese Arbeit von Alvarez-Gaumé & Witten wirklich verstehen möchte und Antworten auf zahlreiche dort offene Fragen sucht, dann ist das Buch von Bastianelli u. van Nieuwenhuizen (2006) ein sehr empfehlenswerter Zugang.

Schreitet man dann in Richtung der 10-dimensionalen Superstring-Theorien oder der von Witten vermuteten 11-dimensionalen M-Theorie fort, so stellt sich das Problem der Kompaktifizierung auf die uns bekannten 4 Dimensionen und insbesondere die extrem große Anzahl der möglichen Kompaktifizierungen als ein besonders gravierendes Problem dar.

So erscheint dem Autor dieser Zeilen der Ansatz einer nicht-störungstheoretischen Quantisierung der Einsteinschen Gravitationstheorie in der Schleifenquantengravitation (loop-quantum-gravity, LQG) deutlich näherliegend als die Stringtheorien. Siehe hierzu Thiemann (2003), und das Standardwerk von Rovelli (2004).

Bei aller Freude und Begeisterung über die tiefen Sätze von Atiyah, Singer et al. sollten wir aber nicht deren Grenzen vergessen: diese Sätze gelten eben nur für elliptische Differential- und Pseudodifferential-Operatoren, und nicht für hyperbolische Differential-Operatoren! Viele theoretische Physiker, darunter auch Hawking, wenden in der QFT die sog. Wick-Rotation an, d.h. sie führen eine imaginäre Zeitkoordinate ein um hyperbolische in elliptische Differential-Operatoren umzuwandeln. Daß dieses Vorgehen auch zu völlig sinnlosen Ergebnissen führen kann haben Ambjørn, Jurkiewicz und Loll sehr eindrücklich mit ihren numerischen Gitter-QFT Rechnungen (Causal Dynamical Triangulations, CDT) zur Einsteinschen Gravitations-Theorie gezeigt. Andererseits liefern diese Computersimulationen sehr eindrucksvolle und plausible Ergebnisse, wenn man Zeit und Kausalität als fundamentale physikalische Begriffe versteht und in das Modell implementiert (Ambjørn u. a. (2009), Loll (2003), Ambjørn u. a. (2013)).

Wie geht es also weiter?

Der Wegweiser auf diesem Foto des Autors steht im 'Haus Tao', einem schönen, kleinen, buddhistischen Meditationszentrum im schweizerischen Appenzell. Dort können interessierte Menschen Meditationen der Vipassana- und Zen-Tradition erlernen und vertiefen.

Abbildung 28.1: „this way", Meditationszentrum Haus Tao.
Foto des Autors.
[Haus Tao siehe: http://www.haustao.ch/cms/de/].

A Funktionalableitung

Wir haben hier zur Erleicherung der Leser und Leserinnen den Abschnitt zur Funktionalableitung aus der Veröffentlichung des Autors Schiekel (2011), S. 359 ff., auch in dieses Manuskript eingefügt.

A.1 Funktionalableitung oder Fréchet-Ableitung

Die Funtionalableitung oder Fréchet-Ableitung eines Operators entspricht seiner Linearisierung. Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zwei Hilbert-Räume mit den jeweiligen Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. (Zur Definition der Fréchet-Ableitunggenügen bereits normierte Räume.) Sei $F : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ eine im allgemeinen nichtlineare Abbbildung von $\Omega \subseteq \mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ und seien die Vektoren $\mid \phi\rangle$, $\mid \psi\rangle$ und $(\mid \phi\rangle + \mid \psi\rangle)$ alle Elemente aus Ω. Wenn es nun eine lineare, stetige Abbildung $DF(\mid \phi\rangle) : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ gibt, so daß diese eine Tangente an die Abbildung F an der Stelle $\mid \phi\rangle$ ist, dann heißt F differentierbar bei $\mid \phi\rangle$ und $DF(\mid \phi\rangle)$ die Ableitung von F an der Stelle $\mid \phi\rangle$.

Definition A.1.1 *Wenn also ein $DF(\mid \phi\rangle) : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ existiert, welches linear ist (bzw. kürzer gesagt $DF : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathscr{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$), welches stetig ist und für welches der folgende Grenzwert existiert*

$$\lim_{\|\mid\psi\rangle\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|F(\mid \phi\rangle + \mid \psi\rangle) - F(\mid \phi\rangle) - DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi\rangle\|_2}{\| \mid \psi\rangle\|_1} = 0 \, , \tag{A.1.1}$$

$$\textit{bzw. mit} \quad \epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0 \quad \textit{für alle} \ \| \mid \psi\rangle\|_1 < \delta \ :$$

$$\|F(\mid \phi\rangle + \mid \psi\rangle) - F(\mid \phi\rangle) - DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi\rangle\|_2 \leq \| \mid \psi\rangle\|_1 \, \epsilon(\| \mid \psi\rangle\|_1) \, . \tag{A.1.2}$$

dann heißt dieses $DF(\mid \phi\rangle)$ die Ableitung von F an der Stelle $\mid \phi\rangle$.

Wenn F differentierbar ist, dann ist F auch stetig, denn aus A.1.2 folgt:

$$\|F(\mid \phi\rangle + \mid \psi\rangle) - F(\mid \phi\rangle)\|_2 \leq \| \mid \psi\rangle\|_1 \, \epsilon(\| \mid \psi\rangle\|_1) + \|DF(\mid \phi\rangle)\| \cdot \| \mid \psi\rangle\|_1 \, ,$$

$$\lim_{\|\mid\psi\rangle\|_1 \rightarrow 0} \|F(\mid \phi\rangle + \mid \psi\rangle) - F(\mid \phi\rangle)\|_2 = 0 \, . \tag{A.1.3}$$

Wenn F differentierbar ist, dann existiert die folgenden Richtungsableitung von F in Richtung $\mid \psi\rangle$ und ist mit der Ableitung aus A.1.1 identisch:

$$DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi\rangle = \frac{d}{dt}(F(\mid \phi\rangle + t \mid \psi\rangle))\bigg|_{t=0} \, . \tag{A.1.4}$$

Beweis. Wir setzen in der obigen Definition von A.1.1 $\mid \psi\rangle \rightarrow t \mid \psi\rangle$:

$$\lim_{t\|\mid\psi\rangle\|_1 \to 0} \frac{\|F(\mid \phi\rangle + t \mid \psi\rangle) - F(\mid \phi\rangle) - t\, DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi\rangle\|_2}{t\| \mid \psi\rangle\|_1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \|\frac{1}{t}\left(F(\mid \phi\rangle + t \mid \psi\rangle) - F(\mid \phi\rangle)\right) - DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi\rangle\|_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\| \frac{d}{dt}\left(F(\mid \phi\rangle + t \mid \psi\rangle)\right)\Big|_{t=0} - DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi\rangle\|_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi\rangle = \frac{d}{dt}(F(\mid \phi\rangle + t \mid \psi\rangle))\Big|_{t=0} . \qquad \square$$

Die Ableitung $DF(\mid \phi\rangle)$ an der Stelle $\mid \phi\rangle$ ist definitionsgemäß linear in Bezug auf das Argument $\mid \psi\rangle$, die Richtung, (und nicht etwa in Bezug auf die Stelle $\mid \phi\rangle$,) also:

$$DF(\mid \phi\rangle)(\alpha_1 \mid \psi_1\rangle + \alpha_2 \mid \psi_2\rangle) = \alpha_1 DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi_1\rangle + \alpha_2 DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi_2\rangle) .$$

Bei fixierter Richtung $\mid \psi_1\rangle \in \Omega \subseteq \mathcal{H}_1$ ist $DF(\cdot) \mid \psi_1\rangle$ wieder eine Abbildung von $\Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ und wir können also die Ableitung von $DF(\cdot) \mid \psi_1\rangle$ bestimmen, welche dann die 2. Ableitung von F ist. Wenn also ein $D^2F(\mid \phi\rangle) : \Omega \times \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ existiert, welches linear und stetig ist und für welches der folgende Grenzwert existiert

$$\lim_{\|\mid\psi_2\rangle\|_1 \to 0} \frac{\|DF(\mid \phi\rangle + \mid \psi_2\rangle) \mid \psi_1\rangle - DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi_1\rangle - D^2F(\mid \phi\rangle) \mid \psi_1\rangle \mid \psi_2\rangle\|_2}{\| \mid \psi_2\rangle\|_1} = 0 , \tag{A.1.5}$$

dann heißt dieses $D^2F(\mid \phi\rangle)$ die 2. Ableitung von F an der Stelle $\mid \phi\rangle$.

Folgerung:

Wenn F linear ist, also $F(\alpha_1 \mid \phi\rangle + \alpha_2 \mid \psi\rangle) = \alpha_1 F(\mid \phi\rangle) + \alpha_2 F(\mid \psi\rangle)$, dann können wir $F(\mid \phi\rangle) = F \mid \phi\rangle$ schreiben. Und weiter folgt aus A.1.1 sofort, daß $F(\mid \psi\rangle) = F \mid \psi\rangle = DF(\mid \phi\rangle) \mid \psi\rangle$ für alle $\mid \phi\rangle \in \Omega \subseteq \mathcal{H}_1$, d.h. $DF(\mid \phi\rangle) = F$ ist unabhängig von der Stelle $\mid \phi\rangle \in \Omega \subseteq \mathcal{H}_1$.

Für die zweite Ableitung eines linearen Operators F folgt wegen $DF(\mid \phi\rangle + \mid \psi_2\rangle) = DF(\mid \phi\rangle)$ mit A.1.5, daß D^2F ein Null-Operator ist.

Besonders häufig kommt der Fall vor, daß $\mathcal{H}_2 = \mathbb{R}$ ist, daß also F ein nichtlineares Funktional auf $\mathcal{H}_1$ ist. Dann ist DF ein lineares Funktional auf $\mathcal{H}_1$ und wird häufig als δF bezeichnet, als Differential von F, also $\delta F : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1^* = \mathscr{L}(\mathcal{H}_1, \mathbb{R})$. Entsprechend wird $\delta F(\mid \phi\rangle)$ mit $\delta F(\mid \phi\rangle) : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathbb{R}$ als das Differential von F an der Stelle $\mid \phi\rangle$ bezeichnet.

Da $\delta F(|\,\phi\rangle)$ nun ein Element aus $\mathcal{H}_1^*$ ist, dem Dualraum von $\mathcal{H}_1$, kann man für $\delta F(|\,\phi\rangle)$ auch die folgende Dirac-Schreibweise einführen:

$$\langle\frac{\delta F}{\delta\phi}\,| := \delta F(|\,\phi\rangle)\ , \tag{A.1.6}$$

und damit schreibt sich die Ableitung von F an der Stelle $|\,\phi\rangle$ in Richtung $|\,\psi\rangle$ als

$$\delta F(|\,\phi\rangle)\,|\,\psi\rangle = \frac{d}{dt}\,F(|\,\phi\rangle + t\,|\,\psi\rangle) = \langle\frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,\psi\rangle\ , \tag{A.1.7}$$

oder wenn wir von $\mathcal{H}_1$ auf $L^2(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$, den Raum der quadratintegrablen Funktionen, übergehen

$$\langle\frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,\psi\rangle = \int dx\,\langle\frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,x\rangle\langle x\,|\,\psi\rangle = \int dx\,\frac{\delta F}{\delta\phi}(x)\,\psi(x)\ . \tag{A.1.8}$$

Beispiel (1): sei $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R}^n$ und $|\,x\rangle :=|\,x_1,\ldots,x_n\rangle$, dann folgt

$$\begin{aligned}\delta F(|\,x_1,\ldots,x_n\rangle)\,|\,y_1,\ldots,y_n\rangle &= \frac{d}{dt}\,F(|\,x_1+ty_1,\ldots,x_n+ty_n\rangle)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial F(|\,\ldots,x_i+ty_i,\ldots\rangle)}{\partial(x_i+ty_i)}\right|_{t=0} y_i\\ &= \langle\vec{\nabla}F(|\,x_1,\ldots,x_n\rangle)\,|\,y_1,\ldots,y_n\rangle\ ,\end{aligned}$$

$$\delta F(|\,x_1,\ldots,x_n\rangle) = \vec{\nabla}F(|\,x_1,\ldots,x_n\rangle)\ . \tag{A.1.9}$$

□

Also ist im Falle des $\mathbb{R}^n$ das Differential von F an der Stelle $|\,x\rangle$ gerade der Gradient von F nach $|\,x\rangle$.

Beispiel (2):

$$F_y(|\,\phi\rangle) := \langle y\,|\,\phi\rangle = \phi(y) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\delta F_y(|\,\phi\rangle)\,|\,\psi\rangle = \langle\frac{\delta F_y}{\delta\phi}\,|\,\psi\rangle &= \int dx\,\frac{\delta F_y}{\delta\phi}(x)\,\psi(x) = \left.\frac{d}{dt}\,F_y(|\,\phi\rangle + t\,|\,\psi\rangle)\right|_{t=0}\\ &= \left.\frac{d}{dt}\,(\phi(y)+t\psi(y))\right|_{t=0} = \psi(y) = \int dx\,\delta(x-y)\,\psi(x) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi}(x) = \delta(x-y)\ . \tag{A.1.10}$$

□

Beispiel (3):

$$F_y(|\,\phi\rangle) := g(\phi(y)) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\delta F_y(|\,\phi\rangle)\,|\,\psi\rangle = \langle\frac{\delta F_y}{\delta\phi}\,|\,\psi\rangle = \int dx\,\frac{\delta F_y}{\delta\phi}(x)\,\psi(x) = \frac{d}{dt}\,F_y(|\,\phi\rangle + t\,|\,\psi\rangle)\Big|_{t=0} \\
= \frac{d}{dt}\,g(\phi(y)+t\psi(y))\Big|_{t=0} = g'(\phi(y))\,\psi(y) \\
= \int dx\,\delta(x-y)\,g'(\phi(y))\,\psi(y) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta g(\phi(y))}{\delta\phi}(x) = g'(\phi(x))\,\delta(x-y)\;. \tag{A.1.11}$$

□

Beispiel (4):

$$F_y(|\,\phi\rangle) := \langle y\,|\,\phi'\rangle = \phi'(y) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\int dx\,\frac{\delta F_y}{\delta\phi}(x)\,\psi(x) = \frac{d}{dt}\,F_y(|\,\phi\rangle + t\,|\,\psi\rangle)\Big|_{t=0} \\
= \frac{d}{dt}\,(\phi'(y)+t\psi'(y))\Big|_{t=0} = \psi'(y) = \int dx\,\delta(x-y)\,\psi'(x) \\
= -\int dx\,\delta'(x-y)\,\psi(x)\;, \\
(\text{sofern } \delta(x-y)\,\psi(x) = 0 \text{ für } x \in \text{Rand}) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta\phi'(y)}{\delta\phi}(x) = -\delta'(x-y)\;. \tag{A.1.12}$$

□

Beispiel (5):

$$F_y(|\,\phi\rangle) := \langle y\,|\,\phi''\rangle = \phi''(y) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\int dx\,\frac{\delta F_y}{\delta\phi}(x)\,\psi(x) = \frac{d}{dt}\,F_y(|\,\phi\rangle + t\,|\,\psi\rangle)\Big|_{t=0} \\
= \frac{d}{dt}\,(\phi''(y)+t\psi''(y))\Big|_{t=0} = \psi''(y) = \int dx\,\delta(x-y)\,\psi''(x)
\end{aligned}$$

$$= \int dx\, \delta''(x-y)\, \psi(x) \ ,$$

(sofern $\delta(x-y)\, \psi'(x) = \delta'(x-y)\, \psi(x) = 0$

für $x \in$ Rand) $\Rightarrow$

$$\frac{\delta \phi''(y)}{\delta \phi}(x) = \delta''(x-y) \ . \tag{A.1.13}$$

$\square$

Beispiel (6):

$$F(|\ \phi\rangle) := \int dx\, \phi^m(x) \quad \Rightarrow$$

$$\int dx\, \frac{\delta F}{\delta \phi}(x)\, \psi(x) = \frac{d}{dt}\, F(|\ \phi\rangle + t\ |\ \psi\rangle)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int dx\, (\phi(x) + t\psi(x))^m\Big|_{t=0}$$

$$= \int dx\ n\, (\phi(x) + t\psi(x))^{m-1}\big|_{t=0}\, \psi(x)$$

$$= \int dx\ n\phi^{m-1}(x)\psi(x) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int dx\, \phi^m(x) = m\phi^{m-1}(x) \ . \tag{A.1.14}$$

$\square$

Beispiel (7):

$$F(|\ \phi\rangle) := \int dx\, (\frac{d\phi(x)}{dx})^m = \int dx\, (\phi'(x))^m \quad \Rightarrow$$

$$\int dx\, \frac{\delta F}{\delta \phi}(x)\, \psi(x) = \frac{d}{dt}\, F(|\ \phi\rangle + t\ |\ \psi\rangle)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int dx\, ((\phi(x) + t\psi(x))')^m\Big|_{t=0}$$

$$= \int dx\, n((\phi'(x) + t\psi'(x)))^{m-1}\, \frac{d}{dx}\psi(x)\Big|_{t=0}$$

$$= \int dx\, n(\phi'(x))^{m-1}\, \frac{d}{dx}\psi(x) = -\int dx\, n\, \frac{d}{dx}(\phi'(x))^{m-1}\, \psi(x) \ ,$$

(sofern $(\phi'(x))^{m-1}\, \psi(x)$ für $x \in$ Rand verschwindet) $\quad \Rightarrow$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int dx\, (\phi'(x))^m = -m\, \frac{d}{dx}\, (\phi'(x))^{m-1} \ . \tag{A.1.15}$$

$\square$

Beispiel (8):

$$F(|\,\phi\rangle) := \int dx\, g(\phi(x)) \quad \Rightarrow$$

$$\int dx\, \frac{\delta F}{\delta\phi}(x)\, \psi(x) = \frac{d}{dt}\, F(|\,\phi\rangle + t\,|\,\psi\rangle)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int dx\, g(\phi(x) + t\psi(x))\Big|_{t=0}$$

$$= \int dx\, g'(\phi(x) + t\psi(x)))\, \psi(x)\Big|_{t=0}$$

$$= \int dx\, g'(\phi(x))\, \psi(x) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \int dx\, g(\phi(x)) = g'(\phi(x))\ . \tag{A.1.16}$$

□

Beispiel (9): Wirkungsfunktional:

$$\mathcal{S}(r) := \int dt\, \mathcal{L}(r(t), \dot{r}(t)) := \int dt\, [\frac{m}{2}(\frac{d\, r(t)}{dt})^2 - V(r(t))] \quad \Rightarrow$$

mit A.1.15 und A.1.16 folgt:

$$\frac{\delta\mathcal{S}(r)}{\delta r}(t) = -m\frac{d}{dt}(\frac{d\, r(t)}{dt}) - \frac{d\, V(r(t))}{dr} = -m\frac{d^2\, r(t)}{dt^2} - \frac{dV(r(t))}{dr}\ . \tag{A.1.17}$$

Eine Nullstelle der Funktionalableitung des Wirkungsfunktionals $\mathcal{S}(r)$, also $\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta r}(t) = 0$, führt also gerade auf die Bewegungsgleichung $m\,\dot{r}^2(t) = -dV/dr$. Für die zweite Funktionalableitung von $\mathcal{S}$ ergibt sich mit A.1.13 und A.1.11:

$$\frac{\delta^2\mathcal{S}(r)}{\delta r(t_1)\, \delta r(t_2)} = \frac{\delta}{\delta r(t_1)}\, [-m\frac{d^2\, r(t_2)}{dt_2^2} - \frac{dV(r(t_2))}{dr}]$$

$$= -m\, \delta''(t_1 - t_2) - \frac{d^2V(r(t_2))}{dr^2}\, \delta(t_1 - t_2)$$

$$= (-m\, \frac{d^2}{dt_1^2} - \frac{d^2V(r(t_1))}{dr^2})\, \delta(t_1 - t_2) \tag{A.1.18}$$

$$:= \mathcal{S}^{(2)}_{loc}(r(t_1))\, \delta(t_1 - t_2)\ . \tag{A.1.19}$$

Damit ergibt sich für die quadratischen Fluktuationen der Wirkung (wiederum unter der Voraussetzung, daß $r(t) = 0$ auf dem Rand):

$$\int dt_1\, dt_2\, \frac{\delta^2\mathcal{S}(r)}{\delta r(t_1)\, \delta r(t_2)}\, r(t_1)\, r(t_2) = \int dt_1\, dt_2\, r(t_2)\, \mathcal{S}^{(2)}_{loc}(r(t_1))\, \delta(t_1 - t_2)\, r(t_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int dt\, r(t)\, \mathcal{S}^{(2)}_{loc}(r(t))\, r(t) \\
&= \int dt\, [-m\, r(t)\, \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - \frac{d^2 V(r(t))}{dr^2}\, r(t)^2] \\
&= \int dt\, [m\, (\frac{dr(t)}{dt})^2 - \frac{d^2 V(r(t))}{dr^2}\, r(t)^2]\ . \qquad \text{(A.1.20)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Beispiel (10): Integralkern:

$$
F_y(\mid \phi\rangle) := \int dx\, K(y,x)\phi(x) \quad \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\int dx\, \frac{\delta F_y}{\delta \phi}(x)\, \psi(x) &= \frac{d}{dt}\, F_y(\mid \phi\rangle + t \mid \psi\rangle)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \int dx\, K(y,x)(\phi(x) + t\psi(x))\Big|_{t=0} \\
&= \int dx\, K(y,x)\psi(x) \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \int dx\, K(y,x)\phi(x) = K(y,x)\ . \qquad \text{(A.1.21)}
$$

$\square$

Für Funktionalableitungen gilt auch eine Produktregel. Seien F und G Abbildungen mit $F : \Omega_1 \subseteq \mathcal{H}_1 \to \Omega_2 \subseteq \mathcal{H}_2$ und $G : \Omega_2 \subseteq \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$ und seien $\mid \phi\rangle$, $\mid \psi_1\rangle \in \Omega_1$ und $F \mid \phi\rangle$, $\mid \psi_2\rangle \in \Omega_2$. Sei weiter $G \circ F : \Omega_1 \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_3$ die Produktabbildung von F und G, dann gilt:

$$
\frac{\delta(G\circ F)}{\delta\phi} \mid \psi_1\rangle = \frac{\delta G}{\delta(F \mid \phi\rangle)}\, \frac{\delta F}{\delta \phi} \mid \psi_1\rangle \quad \text{oder} \quad \frac{\delta(G\circ F)}{\delta\phi} = \frac{\delta G}{\delta(F(\phi))}\, \frac{\delta F}{\delta\phi}\ . \qquad \text{(A.1.22)}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta(G\circ F)}{\delta\phi} \mid \psi_1\rangle &= \frac{d}{dt}\, G(F(\mid \phi\rangle + t \mid \psi_1\rangle))\Big|_{t=0} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, G(F(\mid \phi\rangle + t \mid \psi_1\rangle))\Big|_{t=0}\ .
\end{aligned}
$$

Weil G und F stetig sind folgt

$$
\frac{\delta(G\circ F)}{\delta\phi} \mid \psi_1\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, G(F(\mid \phi\rangle) + t\, \frac{\delta F}{\delta\phi} \mid \psi_1\rangle))\Big|_{t=0}
$$

und mit

$$|\,\psi_2\rangle := \frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,\psi_1\rangle$$

folgt

$$\frac{\delta(G\circ F)}{\delta\phi}\,|\,\psi_1\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,G(F(|\,\phi\rangle)+t\,\,|\,\psi_2\rangle))\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{\delta(G)}{\delta F(|\,\phi\rangle)}\,|\,\psi_2\rangle = \frac{\delta(G)}{\delta F(|\,\phi\rangle)}\,\frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,\psi_1\rangle\;. \qquad \square$$

A.2 Funktional-Differentialgleichungen

Seien F, $\frac{\delta(F)}{\delta\phi}$ und f Abbildungen von $\Omega_1\subseteq L^2\to\mathbb{R}$. Die Funktionalableitung schreibt sich dann:

$$\frac{\delta F}{\delta\phi}(\psi) = \delta F(|\,\phi\rangle)\,|\,\psi\rangle = \langle\frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,\psi\rangle\;.$$

Eine Möglichkeit, eine Funktional-Differentialgleichung 1. Ordnung zu definieren, ist die folgende:

$$\langle\frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,\psi\rangle = \langle f\,|\,\psi\rangle\;. \tag{A.2.1}$$

Wenn wir jetzt als Urbildraum den Raum $\mathbb{R}^n$ anstelle von L^2 nehmen, wird unsere Funktional-Differentialgleichung zu einem n-dimensionalen System gekoppelter partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\phi,\,\psi\in\mathbb{R}^n,\quad F,\,\frac{\delta F}{\delta\phi},\,f_1,\dots,f_n:\,\Omega_1\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\;.$$

Mit $\{e_i\}_{i\in<1,n>}$ bezeichnen wir eine Basis in $\mathbb{R}^n$, mit $\{e^j\}_{j\in<1,n>}$ eine Basis im Dualraum, der ja ebenfalls $\mathbb{R}^n$ ist. Seien also:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi^i e_i\,,\quad f = \sum_{j=1}^n f_j e^j\,,\quad \frac{\delta F}{\delta\phi} = \sum_{j=1}^n (\frac{\delta F}{\delta\phi})_j e^j \Rightarrow$$

$$\frac{\delta F}{\delta\phi}(e_i) = \langle\frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,e_i\rangle = \frac{d}{dt}\,F(\phi^1,\dots,\phi^i+t,\dots,\phi^n) = \frac{\partial F(\phi^1,\dots,\phi^n)}{\partial\phi^i}\;.$$

Damit wird aus der Funktional-Differentialgleichung A.2.1

$$\langle\frac{\delta F}{\delta\phi}\,|\,e_i\rangle = \langle f\,|\,e_i\rangle \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial F(\phi^1,\dots,\phi^n)}{\partial\phi^i} = f_i(\phi^1,\dots,\phi^n),\quad i=1,\dots,n \tag{A.2.2}$$

ein n-dimensionalen System gekoppelter partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Ganz entsprechend können wir eine Funktional-Differentialgleichung A.2.1 mit Funktionalen von $L^2 \to \mathbb{R}$ als ein ∞-dimensionales System gekoppelter partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung ansehen.

Beispiel: Sei $f_i(\phi^1, \ldots, \phi^n) = \mu F(\phi^1, \ldots, \phi^n)$, dann folgt:

$$\frac{\partial F(\phi^1, \ldots, \phi^n)}{\partial \phi^i} = \mu F(\phi^1, \ldots, \phi^n) \; . \tag{A.2.3}$$

Zur Lösung machen wir den Ansatz der Trennung der Variablen. Dadurch faktorisieren wir das Funktional F:

$$F(\phi^1, \ldots, \phi^n) = F_1(\phi^1) \cdots F_n(\phi^n) \; ,$$

und wir erhalten das entkoppelte System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F_i(\phi^i)}{\partial \phi^i} = \mu F_i(\phi^i)$$

mit der Lösung

$$F_i(\phi^i) = e^{\mu \phi^i} \quad \Rightarrow$$

$$F(\phi^1, \ldots, \phi^n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(\phi^i) = \prod_{i=1}^{n} e^{\mu \phi^i} = e^{\mu \sum_{i=1}^{n} \phi^i} \; , \tag{A.2.4}$$

bzw. in L^2 anstelle von $\mathbb{R}^n$:

$$F(\phi) = e^{\mu \int dx \, \phi(x)} \; . \tag{A.2.5}$$

□

B Grassmann-Algebren

Wir folgen Kalka u. Soff (1997), S. 116 ff., und Nakahara (2003), S. 40 ff.

Definition B.0.1 *Eine Grassmann-Algebra Λ^n ist eine assoziative Algebra über $\mathbb{C}$ mit Einselement, die von n Generatoren $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ erzeugt wird, welche antikommutieren, d.h.*

$$\{\zeta_i, \zeta_j\} := \zeta_i\zeta_j - \zeta_j\zeta_i = 0 \ , \quad \textit{für}\ 1 \leq i, j \leq n \ . \tag{B.0.1}$$

Λ^n ist als Algebra ja zugleich ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und die Elemente

$$\{\mathbb{1}, \zeta_i, \zeta_i\zeta_j, \ldots, \zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n\}$$

alle Indizes in einem Produkt verschieden und nach Größe geordnet, also $i < j$.

bilden eine Basis. Die Dimension $\dim \Lambda^n = 2^n$, denn in einem beliebigen Basiselement kann jedes θ_i genau 0 oder 1 mal vorkommen. Ein beliebiges Element von $f \in \Lambda^n$ heißt *Grassmann-Zahl*, oder *Superzahl*, und wird in dieser Basis dargestellt als

$$f(\vec{\zeta}) = f_0\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{n} f_i\zeta_i + \sum_{i_1<i_2}^{n} f_{i_1i_2}\zeta_{i_1}\zeta_{i_2} + \ldots + f_{12\ldots n}\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n \tag{B.0.2}$$

$$= f_0\mathbb{1} + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} f_i\zeta_i + \frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2j}^{n} f_{i_1i_2}\zeta_{i_1}\zeta_{i_2} + \ldots + \frac{1}{n!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{n} f_{i_1i_2\ldots i_n}\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\cdots\zeta_{i_n} \tag{B.0.3}$$

mit antisymmetrischen Koeffizienten $f_0, f_i, f_{i_1i_2}, \ldots, f_{i_1i_2\ldots i_n} \in \mathbb{C}$, und kann also als eine Funktion der ζ_i, bzw. als Taylorentwicklung einer Funktion von ζ_i interpretiert werden. Sei etwa $n = 1$, dann ist

$$e^{\zeta} = \mathbb{1} + \zeta \ , \quad \text{wegen}\ \zeta \cdot \zeta = 0 \ . \tag{B.0.4}$$

In Λ^n kann man eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung einführen, indem man Λ^n in die Unterräume mit einer geraden Anzahl von ζ_i und einer ungeraden Anzahl von ζ_i zerlegt:

$$\Lambda^n = \Lambda^n_+ \oplus \Lambda^n_- \ . \tag{B.0.5}$$

Allerdings ist nur Λ^n_+ eine Unteralgebra von Λ^n. Die Elemente von Λ^n_+ kommutieren mit allen Grassmann-Zahlen und heißen deshalb zusammen mit den kommutierenden Zahlen aus $\mathbb{C}$ *c-Zahlen*, wogegen die antikommutierenden Zahlen aus Λ^n_- *a-Zahlen* heißen.

Man definiert nun eine komplexe Konjugation auf Λ^n durch

$$\overline{\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\cdots\zeta_{i_k}} := \zeta_{i_k}\cdots\zeta_{i_2}\zeta_{i_1} \ . \tag{B.0.6}$$

Insbesondere folgt daraus, daß die Generatoren ζ_i bzgl. dieser komplexen Konjugation 'reell' sind und Paare von Generatoren $\overline{\zeta_i\zeta_j} = \zeta_j\zeta_i = -\zeta_i\zeta_j$ stets 'imaginär', bzw. in der Form $\overline{i\zeta_i\zeta_j} = -i\zeta_j\zeta_i = i\zeta_i\zeta_j$ stets 'reell'.

In der Physik wählt man aber gerne bei geradzahligem n einen alternativen Satz von Generatoren für Λ^n aus, die konjugiert komplex zueinander sind:

$$\theta_i := \zeta_{2i-1} + i\zeta_{2i} \ , \quad \overline{\theta_i} := \zeta_{2i-1} - i\zeta_{2i} \ , \quad 1 \le i \le \frac{n}{2} \ . \tag{B.0.7}$$

Damit gilt dann

$$\overline{\theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_k}} = \overline{\theta_{i_k}}\cdots\overline{\theta_{i_2}}\cdot\overline{\theta_{i_1}} \ . \tag{B.0.8}$$

Auch kann man eine Differentiation und eine Integration von Grassmann-Zahlen definieren. Da wegen der Antikommutativität die Reihenfolge der Operationen eine Rolle spielt, definieren wir hier die Differentiation und die Integration *von links*.

Definition B.0.2 *Es gelte:*

$$\frac{\partial}{\theta_i}\theta_j := \delta_{ij} \ , \quad \frac{\partial}{\theta_i}\mathbb{1} := 0 \ . \tag{B.0.9}$$

Der Differentialoperator $\frac{\partial}{\theta_i}$ *möge außerdem mit* θ_j *antikommutieren, d.h. es gelte die folgende Leibniz-Regel:*

$$\frac{\partial}{\theta_i}(\theta_j\theta_k) := (\frac{\partial}{\theta_i}\theta_j)\theta_k - \theta_j(\frac{\partial}{\theta_i}\theta_k) = \delta_{ij}\theta_k - \delta_{ik}\theta_j \ . \tag{B.0.10}$$

Analog wird das bestimmte Integral über Grassmannfunktionen als die Umkehrung der Differentiation definiert. Man verlangt, daß die Integration der Ableitung einer Grassmannfunktion nur einen Oberflächenterm ergibt, der Null gesetzt wird, daß die Ableitung eines bestimmten Integrals auch Null ergibt und daß Konstante aus dem Integral herausgezogen werden können, also:

$$\int d\theta \, \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) := 0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\int d\theta \, f(\theta) := 0 \ , \tag{B.0.11}$$

$$\int d\theta \, f(\theta)g(\theta) := f(\theta)\int d\theta \, g(\theta) \ , \quad \textit{falls } f(\theta) \textit{ konstant ist, d.h. } \frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta) = 0 \ . \tag{B.0.12}$$

Diese Forderungen werden gerade erfüllt, wenn man die Integration als identisch zur Differentiation definiert!

$$\int d\theta \, f(\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta) \ . \tag{B.0.13}$$

Der Hintegrund hierfür ist die Idempotenz der Grassmann-Generatoren und daraus folgend die Idempotenz der Differentiation

$$\theta_i^2 = 0 \;, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} = 0 \;. \tag{B.0.14}$$

Aus der Definition der Integration folgt also sofort

$$\int d\theta = \int d\theta \, \mathbb{1} = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{1} = 0 \;, \quad \int d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 1 \;. \tag{B.0.15}$$

Etwas gewöhnungsbedürftig ist die Regel für die Änderung der Integrationsvariablen. Für gewöhnliche c-Zahlen $x, x', a \in \mathbb{C}$ gilt ja mit $x = ax'$:

$$\int dx \, f(x) = a \int dx' \, f(x') \;.$$

Dagegen folgt für Grassman-Zahlen θ, θ' und $a \in \mathbb{C}$ mit $\theta = a\theta'$:

$$\int d\theta \, f(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta'} f(a\theta') = \frac{1}{a} \int d\theta' \, f(a\theta') \;. \tag{B.0.16}$$

Für Mehrfachintegrale ergibt sich entsprechend mit $\vec{\theta} = a\vec{\theta'}$, d.h. mit $\theta_i = \sum_j a_{ij} \theta'_j$:

$$\begin{aligned}
\int d\theta_1 \cdots d\theta_n \, f(\vec{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial \theta_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta_n} f(\vec{\theta}) \\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{n} \frac{\partial \theta'_{k_1}}{\partial \theta_1} \cdots \frac{\partial \theta'_{k_n}}{\partial \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta'_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta'_{k_n}} f(a\vec{\theta'}) \\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{n} (a^{-1})_{k_1 1} \cdots (a^{-1})_{k_n n} \frac{\partial}{\partial \theta'_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta'_{k_n}} f(a\vec{\theta'}) \\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{n} (a^{-1})_{k_1 1} \cdots (a^{-1})_{k_n n} \, \epsilon_{k_1 \ldots k_n} \frac{\partial}{\partial \theta'_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta'_n} f(a\vec{\theta'}) \\
&= \det(a^{-1}) \frac{\partial}{\partial \theta'_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta'_n} f(a\vec{\theta'}) \\
&= \frac{1}{\det(a)} \int d\theta'_1 \cdots d\theta'_n \, f(a\vec{\theta'}) \;.
\end{aligned} \tag{B.0.17}$$

C Feynmannsche Pfadintegrale in der Quantenmechanik

Um den Leserinnen und Lesern das Studium etwas zu erleichtern und eine gewisse Abgeschlossenheit dieses Manuskriptes zu erreichen, übernehmen wir hier große Teile aus der Darstellung des Autors in Schiekel (2011), S. 43 ff., zum gewöhnlichen, bosonischen Pfadintegral in der Quantenmechanik in diesen Anhang. Im Anschluß daran wird noch das fermionische Pfadintegral der Zustandssumme vorgestellt, weil dieses im Pfadintergral-Beweis eines Atiyah-Singer-Indexsatzes zur Anwendung gelangt.

C.1 Pfadintegral in Hamiltonscher Form

Das gewöhnliche Feynmansche Pfadintegral der Quantenmechanik soll hier für den 1-dimensionalen Fall abgeleitet werden. Wir folgen dabei Kleinert (2006), Kapitel 1.6, 1.7, 2.1. Dabei ist die hier gezeigte Ableitung auf den Spuren Feynmans rein formal zu verstehen.

Es zeigt sich nämlich, daß für das ursprüngliche Feynmansche Pfadintegral im Kontinuum-Grenzwert kein gültiges Integrationsmaß existiert. Zu diesem Problemkreis und verschiedenen mathematischen Lösungen siehe Klauder (2010) und Cartier u. DeWitt-Morette (2006). Physiker pflegen sich nun üblicherweise damit zu behelfen, daß sie entweder das Pfadintegral als diskrete (endliche) Gittersumme verstehen und berechnen, oder indem sie durch den Übergang zu imaginären Zeiten zum Euklidischen Pfadintegral überwechseln, für welches ein Integrationsmaß im Kontinuum-Limes existiert. Noch problematischer ist die Frage der Konvergenz der Pfadintegrale. Wenn der Hamilton-Operator in der Form $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{q}, t)$ gegeben ist und das Potential $V(\hat{q}, t)$ nicht hinreichend regulär ist, z.B. das singuläre Coulomb-Potential $V(\vec{q}) = \frac{c}{|\vec{q}|}$, dann divergiert das Pfadintegral als diskrete Gittersumme. Die Lösung dieses Problems ist nichttrivial und aufwendig und wurde in den Jahren 1982-89 von Duru & Kleinert und Kleinert gefunden und ausgearbeitet. Dabei wird der Hamilton-Operator mit dem Coulomb-Potential im euklidischen Raum nichtlinear in einen anderen Raum transformiert, in dem das Coulom-Potential nach unten beschränkt ist und somit das Pfadintegral konvergiert. Allerdings muß dieses Kleinertsche Pfadintegral dann Raumkrümmung und Torsion korrekt berücksichtigen - siehe Kleinert (2006), Kapitel 10 bis 14.

Bei der Anwendung der Pfadintegrale in der Quantenfeldtheorie zeigen sich die üblichen quantenfeldtheoretischen Probleme. So ist zunächst einmal nicht klar, auf welche Weise die dort auftretenden divergenten Pfadintegrale zu verstehen und zu regularisieren sind. In Schiekel (2011), S. 105 ff., wird die von Stephen Hawking eingeführte Methode der spektralen Zetafunktion als eine schöne Methode der Regularisierung ausführlich diskutiert.

Nun also zur Herleitung des gewöhnlichen Feynmanschen Pfadintegrals in der Quantenmechanik.

Die Dynamik eines quantenmechanischen Systems, das der Schrödinger-Gleichung mit einem Hamilton-Operator $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t)$ gehorcht, kann durch einen unitären Zeitentwicklungs-Operator $\hat{U}(t_f, t_i)$ beschrieben werden. Hierbei bezeichne t_i den Anfangszeitpunkt und t_f den Endzeitpunkt der dynamischen Entwicklung, also

$$| \psi(t_f)\rangle =: \hat{U}(t_f, t_i) \mid \psi(t_i)\rangle \; . \tag{C.1.1}$$

Dabei erfüllt $\hat{U}(t_f, t_i)$ die Operatorgleichung (Schrödinger-Gleichung)

$$[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t_f)]\, \hat{U}(t_f, t_i) = 0 \; , \tag{C.1.2}$$

denn für alle $| \psi(t_i)\rangle$ gilt:

$$0 = [i\hbar \frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t_f)] \mid \psi(t_f)\rangle = [i\hbar \frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t_f)]\, \hat{U}(t_f, t_i) \mid \psi(t_i)\rangle \; .$$

$\hat{U}(t_f, t_i)$ ist unitär, denn

$$\begin{aligned} 1 &= |\langle \psi(t_f) \mid \psi(t_f)\rangle| = |\langle \hat{U}(t_f, t_i)\psi(t_i) \mid \hat{U}(t_f, t_i)\psi(t_i)\rangle| \\ &= |\langle \psi(t_i) \mid \hat{U}^\dagger(t_f, t_i)\hat{U}(t_f, t_i)\psi(t_i)\rangle| \; . \end{aligned}$$

Weiter bilden die Operatoren $\hat{U}(t_f, t_i)$ eine Gruppe mit $\hat{U}(t_i, t_i) = \hat{1}$ als dem neutralen Element, denn

$$| \psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f, t_i) \mid \psi(t_i)\rangle \text{ , und mit } t_f > t_k > t_i \text{ gilt}$$

$$| \psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f, t_k) \mid \psi(t_k)\rangle = \hat{U}(t_f, t_k)\hat{U}(t_k, t_i) \mid \psi(t_i)\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\hat{U}(t_f, t_i) = \hat{U}(t_f, t_k)\hat{U}(t_k, t_i) \quad \text{für } t_f > t_k > t_i \; . \tag{C.1.3}$$

Wenn der Hamilton-Operator $\hat{H}$ nicht explizit zeitabhängig ist, dann kann der Zeitentwicklungs-Operator $\hat{U}(t_f, t_i)$ sofort angegeben werden, nämlich

$$\hat{U}(t_f, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\,(t_f - t_i)} \; , \tag{C.1.4}$$

denn

$$[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})]\, \hat{U}(t_f, t_i) = [i\hbar \frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})]\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\,(t_f - t_i)}$$

$$= [\hat{H}(\hat{p},\hat{q}) - \hat{H}(\hat{p},\hat{q})]\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\,(t_f-t_i)} = 0\ .$$

Wenn der Hamilton-Operator $\hat{H}$ explizit zeitabhängig ist, dann kann der Zeitentwicklungs-Operator $\hat{U}(t_f,t_i)$ als zeitgeordnete Dyson-Reihe angegeben werden. Man unterteilt einfach das Zeitintervall $t_f - t_i$ in M kleine Teilintervalle der Länge $\epsilon := \frac{t_f-t_i}{M}$, mit $t_f = t_M > t_{k+1} > t_k > t_0 = t_i$. Innerhalb des k-ten Teilintervalls kann dann $\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t)$ bezüglich der expliziten Zeitabhängigkeit als konstant $\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t_k)$ betrachtet werden. Mit dem Zeitordnungsoperator $\hat{T}$, der ein zeitabhängiges Operator-Produkt von links nach rechts zu abfallenden Zeiten hin anordnet, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{U}(t_f,t_i) &= \hat{T}\prod_{k=1}^{M}\hat{U}(t_k,t_{k-1}) = \hat{T}\prod_{k=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t_k)\,\epsilon} \\ &= \hat{T}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{M}\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t_k)\,\epsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{T}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t)\,dt}\ . \end{aligned} \tag{C.1.5}$$

Wenn die Operator-Exponentialfunktion als Reihe entwickelt und die einzelnen Terme zeitgeordnet werden, spricht man von der Dyson-Reihe für den Zeitentwicklungs-Operator $\hat{U}(t_f,t_i)$.

Diesen Gedanken der zeitgeordneten Dyson-Reihe hat Feynman auf die folgende Übergangsamplitude angewandt, die nach ihm als Feynman-Propagator (oder Feynman-Kern) benannt wurde. q_i und q_f bezeichne die Ortskoordinaten des Systems zu den Anfangs- und Endzeitpunkten t_i und t_f.

$$\begin{aligned}U(q_f,t_f,q_i,t_i) &:= \langle q_f,t_f \mid q_i,t_i\rangle \\ &:= \langle q_f \mid \hat{U}_R(t_f,t_i) \mid q_i\rangle := \langle q_f \mid \Theta(t_f-t_i)\hat{U}(t_f,t_i) \mid q_i\rangle\ . \end{aligned} \tag{C.1.6}$$

Hierbei wollen wir unter $U(q_f,t_f,q_i,t_i)$ im Folgenden stets den retardierten Feynman-Propagator verstehen, was in dem Faktor $\Theta(t_f-t_i)$ der Definitionsgleichung zum Ausdruck kommt. Damit folgt für den retardierten Zeitentwicklungs-Operator $\hat{U}_R(t_f,t_i)$:

$$\begin{aligned}[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p},\hat{q},t_f)]\,\hat{U}_R(t_f,t_i) &= [i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p},\hat{q},t_f)]\,\Theta(t_f-t_i)\hat{U}(t_f,t_i) \\ &= i\hbar\delta(t_f-t_i)\hat{U}(t_f,t_i) + \Theta(t_f-t_i)[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p},\hat{q},t_f)]\,\hat{U}(t_f,t_i) \\ &= i\hbar\delta(t_f-t_i)\hat{1}\ , \end{aligned} \tag{C.1.7}$$

Diese retardierten Zeitentwicklungs-Operatoren $\hat{U}_R(t_f,t_i)$ bilden nun keine Gruppe mehr wie die Zeitentwicklungs-Operatoren $\hat{U}(t_f,t_i)$, sondern nur noch eine Halbgruppe. Für den retardierten Feynman-Propagator $U(q_f,t_f,q_i,t_i)$ folgt:

$$[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p},\hat{q},t_f)]\,U(q_f,t_f,q_i,t_i) = \langle q_f \mid [i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} - \hat{H}(\hat{p},\hat{q},t_f)]\,\hat{U}_R(t_f,t_i) \mid q_i\rangle$$

$$= i\hbar\delta(t_f - t_i)\langle q_f \mid \hat{1} \mid q_i\rangle = i\hbar\delta(t_f - t_i)\delta(q_f - q_i) \ . \tag{C.1.8}$$

Also ist der retardierte Feynman-Propagator $U(q_f, t_f, q_i, t_i)$ gerade die Orts- und Zeit-abhängige Greenfunktion der Schrödingergleichung.

Wie bei der Dyson-Reihe unterteilt man einfach das Zeitintervall $t_f - t_i$ in M kleine Teilintervalle der Länge $\epsilon := \frac{t_f - t_i}{M}$, mit

$$t_M := t_f > t_{k+1} > t_k > t_0 := t_i \ ,$$

$$q_0 := q_i, \quad q_M := q_f, \quad q_k := q(t_k) := q(t_i + k\epsilon) \ ,$$

und schreibt

$$U(q_f, t_f, q_i, t_i) = \langle q_f \mid \hat{U}_R(t_f, t_i) \mid q_i\rangle = \langle q_f \mid \prod_{k=M}^{1} \hat{U}_R(t_k, t_{k-1}) \mid q_i\rangle$$

$$= \langle q_f \mid \prod_{k=M}^{1} \hat{U}(t_k, t_{k-1}) \mid q_i\rangle \ .$$

Hier haben wir die richtige Zeitordnung (von links nach rechts zu abfallenden Zeiten) bereits im Produkt berücksichtigt, so daß $\hat{U}_R(t_k, t_{k-1}) = \hat{U}(t_k, t_{k-1})$ ist. Im nächsten Schritt führt man zwischen den einzelnen Operatoren $\hat{U}(t_k, t_{k-1})$ jeweils einen vollständigen Satz von Eigenvektoren (Eigenfunktionen) des Ortsoperators ein:

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_k \ \mid q_k\rangle\langle q_k \mid \ .$$

Damit schreibt sich der Feynman-Propagator als

$$U(q_f, t_f, q_i, t_i) = \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=M}^{1} \langle q_k \mid \hat{U}(t_k, t_{k-1}) \mid q_{k-1}\rangle$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} \langle q_k \mid \hat{U}(t_k, t_{k-1}) \mid q_{k-1}\rangle \ .$$

Innerhalb des k-ten Teilintervalls kann $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t)$ bezüglich der expliziten Zeitabhängigkeit als konstant $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t_k)$ betrachtet werden. Dadurch kann man den Zeitentwicklungs-Operator wieder in der Form $\hat{U}(t_k, t_{k-1}) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t_k)\,\epsilon)$ darstellen.
Wir beschränken uns im Folgenden auf Hamilton-Operatoren der Form $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{q}, t)$ und erhalten also

$$U(q_f, t_f, q_i, t_i) = \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} \langle q_k \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t_k)} \mid q_{k-1}\rangle$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} \langle q_k \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon(\frac{1}{2m}\hat{p}^2+V(\hat{q},t_k))} \mid q_{k-1}\rangle$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} \langle q_k \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon(V(\hat{q},t_k)+\frac{1}{2m}\hat{p}^2)} \mid q_{k-1}\rangle \; .$$

Mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff Formel (siehe etwa Greiner u. Reinhardt (1993), S. 32 ff.):

$$e^{\epsilon\hat{A}+\epsilon\hat{B}} = e^{\epsilon\hat{A}}\, e^{\epsilon\hat{B}}\, e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2[\hat{A},\hat{B}]+O(\epsilon^3)}$$

und unter Vernachlässigung der $O(\epsilon^2)$-Terme folgt

$$U(q_f,t_f,q_i,t_i) = \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} \langle q_k \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(\hat{q},t_k)}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{1}{2m}\hat{p}^2} \mid q_{k-1}\rangle$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \langle q_k \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(\hat{q},t_k)} \mid q\rangle\langle q \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{1}{2m}\hat{p}^2} \mid q_{k-1}\rangle$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(q_k,t_k)}\langle q_k \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{1}{2m}\hat{p}^2} \mid q_{k-1}\rangle$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \int (\prod_{k=1}^{M} dp_k) \prod_{k=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(q_k,t_k)}\langle q_k \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{1}{2m}\hat{p}^2} \mid p_k\rangle\langle p_k \mid q_{k-1}\rangle$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \int (\prod_{k=1}^{M} dp_k) \prod_{k=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(q_k,t_k)} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{1}{2m}p_k^2}\langle q_k \mid p_k\rangle\langle p_k \mid q_{k-1}\rangle$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \int (\prod_{k=1}^{M} dp_k) \prod_{k=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(q_k,t_k)} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{1}{2m}p_k^2}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p_k q_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p_k q_{k-1}}$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \int (\prod_{k=1}^{M} \frac{dp_k}{2\pi\hbar}) \prod_{k=1}^{M} e^{\frac{i}{\hbar}[p_k(q_k-q_{k-1})-\epsilon H(p_k,q_k,t_k)]}$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \int (\prod_{k=1}^{M} \frac{dp_k}{2\pi\hbar}) \prod_{k=1}^{M} e^{\epsilon\frac{i}{\hbar}[p_k\frac{q_k-q_{k-1}}{\epsilon}-H(p_k,q_k,t_k)]}$$

$$= \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \int (\prod_{k=1}^{M} \frac{dp_k}{2\pi\hbar})\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{M}\epsilon[p_k\frac{q_k-q_{k-1}}{\epsilon}-H(p_k,q_k,t_k)]} \; .$$

Wenn der Grenzwert dieses Ausdrucks für $M \to \infty$ existiert, dann schreibt man diesen üblicherweise in der Form

$$U(q_f, t_f, q_i, t_i) = \lim_{M\to\infty} \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \int (\prod_{k=1}^{M} \frac{dp_k}{2\pi\hbar})\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{M} \epsilon[p_k \frac{q_k - q_{k-1}}{\epsilon} - H(p_k, q_k, t_k)]} \tag{C.1.9}$$

$$=: \int_{(q_i,t_i)}^{(q_f,t_f)} D[q(t)]\, D[p(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt[p(t)\dot{q}(t) - H(p(t),q(t),t)]}\,. \tag{C.1.10}$$

Dies ist das Feynmanschen Pfadintegrals in der Hamiltonschen Form. Hierbei ist zu erwähnen, daß die Formulierung C.1.10 mit der Summierung über alle Pfade von (q_i, t_i) nach (q_f, t_f) mangels eines Integrationsmaßes zunächst einmal nur eine suggestive Abkürzung für den Grenzwert der Gitterpfadsumme C.1.9 darstellt.

C.2 Pfadintegral in Lagrangescher Form

Wenn man nun Hamilton-Operatoren der Form $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{q}, t)$ betrachtet, bei denen $\hat{p}$-Abhängigkeit einfach quadratisch ist, dann kann man mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung des Exponenten und der Ausführung des Gaußschen Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, (e^{-ap^2}) = (\frac{\pi}{a})^{\frac{1}{2}} \tag{C.2.1}$$

die p-Integrationen durchführen:

$$\begin{aligned}
U(q_f, t_f, q_i, t_i) &= \lim_{M\to\infty} \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} \int \frac{dp_k}{2\pi\hbar}\, e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon[p_k\dot{q}_k - \frac{1}{2m}p_k^2 - V(q_k,t_k)]} \\
&= \lim_{M\to\infty} \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} \int \frac{dp_k}{2\pi\hbar}\, e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon[\frac{-1}{2m}(p_k - m\dot{q}_k)^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_k^2 - V(q_k,t_k)]} \\
&= \lim_{M\to\infty} (\prod_{k=1}^{M} \int \frac{dp'_k}{2\pi\hbar}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}{p'_k}^2}) \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon[\frac{m}{2}\dot{q}_k^2 - V(q_k,t_k)]} \\
&= \lim_{M\to\infty} (\frac{1}{2\pi\hbar}(\frac{\pi}{\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}})^{1/2})^M \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k)\, e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon\sum_{k=1}^{M}[\frac{m}{2}\dot{q}_k^2 - V(q_k,t_k)]} \\
&= \lim_{M\to\infty} (\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar})^{M/2} \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k)\, e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon\sum_{k=1}^{M}[\frac{m}{2}\dot{q}_k^2 - V(q_k,t_k)]}
\end{aligned} \tag{C.2.2}$$

$$= \lim_{M\to\infty} (\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar})^{M/2} \int\limits_{(q_i,t_i)}^{(q_f,t_f)} D^{M-1}[q(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_i}^{t_f} dt[\frac{m}{2}\dot{q}(t)^2 - V(q(t),t)]} ,$$

$$U(q_f,t_f,q_i,t_i) = N \cdot \int\limits_{(q_i,t_i)}^{(q_f,t_f)} D[q(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_i}^{t_f} dt\, L(\dot{q}(t),q(t),t)} = N \cdot \int\limits_{(q_i,t_i)}^{(q_f,t_f)} D[q(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}S(q)} . \quad \text{(C.2.3)}$$

Dies ist das Feynmanschen Pfadintegrals in der Lagrangeschen Form. Wiederum gilt, daß die Formulierung C.2.3 mit der Summierung über alle Pfade von (q_i, t_i) nach (q_f, t_f) und der 'Normierung' N nur eine (suggestive) Abkürzung für den Grenzwert der Gitterpfadsumme C.2.2 darstellt. Da $\lim_{M\to\infty}(\frac{m\,M}{2\pi i\,(t_f-t_i)\,\hbar})^{M/2}$ allein für sich natürlich nicht existiert, ist dieser Faktor Teil einer geeigneten Maßfunktion und N in C.2.3 ist lediglich ein Proportionalitätsfaktor zu dieser Maßfunktion, der die Unitarität des Pfadintegrals, d.h. des Feyman-Kerns $U(q_f, t_f, q_i, t_i)$, sicherstellen soll.

Dort wo diese Gitterpfadsumme nicht konvergiert, behelfen sich die Physiker üblicherweise damit, in die komplexe Ebene auszuweichen. Dies kann entweder durch eine Drehung der komplexen Ebene um einen kleinen Winkel δ in mathematisch negativer Richtung erreicht werden, wobei sich die neue Zeitkoordinate τ aus der alten Zeitkoordinate t ergibt als: $\tau = e^{i\delta}\, t$. Dies führt zu einer exponentiellen Dämpfung der Beiträge im Pfadintegral für große τ. Oder man dreht die komplexe Ebene gleich um $\delta = \frac{\pi}{2}$, d.h. man geht zu imaginären Zeiten $\tau = it$ über. Dies ist die euklidische Form des Pfadintegrals, die im folgenden Abschnitt betrachtet werden soll. In diesem Fall werden aus den Phasen im normalen Pfadintegral abfallende Exponentialfunktionen und die Konvergenz ist gesichert. Für die mögliche Rücktransformation zu reellen Zeiten nach Duchführung der Rechnung im Euklidischen muß allerdings sichergestellt sein, daß die Lösung im Bereich der analytischen Fortsetzung keine Pole hat.

C.3 Pfadintegral in Euklidischer Form

Durch den Übergang zu imaginären Zeiten gelangen wir zum Euklidischen Pfadintegral. Sei $\tau := it$, $\epsilon_\tau := i\epsilon_t$, $\tau \in \mathbb{R}$:

$$U_E(q_f,\tau_f,q_i,\tau_i) = \langle q_f \mid e^{-\frac{1}{\hbar}\hat{H}(\tau_f-\tau_i)} \mid q_i\rangle = \ldots$$

$$= \lim_{M\to\infty} (\prod_{k=1}^{M} \int \frac{dp'_k}{2\pi\hbar}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\frac{\epsilon_\tau}{2m}{p'_k}^2}) \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} e^{-\frac{1}{\hbar}\epsilon_\tau[\frac{m}{2}\dot{q}_k^2 + V(q_k,\frac{1}{i}\tau_k)]}$$

$$= \lim_{M\to\infty} (\frac{m}{2\pi\epsilon\hbar})^{M/2} \int\limits_{(q_i,\tau_i)}^{(q_f,\tau_f)} D^{M-1}[q(\tau)]\, e^{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau[\frac{m}{2}\dot{q}(\tau)^2 + V(q(\tau),\frac{1}{i}\tau)]} \qquad \Rightarrow$$

$$U_E(q_f,\tau_f,q_i,\tau_i) = N \cdot \int\limits_{(q_i,\tau_i)}^{(q_f,\tau_f)} D[q(\tau)]\, e^{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau H(\dot{q}(\tau),q(\tau),\frac{1}{i}\tau)}$$

$$= N \cdot \int\limits_{(q_i,t_i)}^{(q_f,t_f)} D[q(\tau)]\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(q)}\ . \qquad \text{(C.3.1)}$$

C.4 Pfadintegral der Zustandssumme

Die kanonische Zustandssumme ist als Spur über $e^{-\beta\hat{H}}$ definiert und dies können wir als euklidisches Pfadintegral schreiben:

$$Z := Sp(e^{-\beta\hat{H}}) = \int dq\, \langle q \mid e^{-\frac{1}{\hbar}(\hbar\beta-0)\hat{H}} \mid q\rangle \qquad \text{(C.4.1)}$$

$$= \int dq\, U_E(q,\hbar\beta,q,0) = N \cdot \int\limits_{(q,0)}^{(q,\beta)} D[q(\tau)]\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(q)}\ . \qquad \text{(C.4.2)}$$

Hier sind nun $q_0 = q(0)$ und $q_M = q(\hbar\beta)$ identisch, d.h. wir müssen zur Spurbildung das Integral über q mit dieser periodischen Randbedingung durchführen.

$$Z = \lim_{M\to\infty} (\frac{m}{2\pi\epsilon\hbar})^{M/2} \int\limits_{q(\hbar\beta)=q(0)} dq_0 \int (\prod_{k=1}^{M-1} dq_k) \prod_{k=1}^{M} e^{-\frac{1}{\hbar}\epsilon[\frac{m}{2}\dot{q}_k^2+V(q_k,\frac{1}{i}\tau_k)]}\ , \qquad \text{(C.4.3)}$$

$$Z = N \cdot \int\limits_{q(\hbar\beta)=q(0)} D[q(\tau)] e^{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_0^{\hbar\beta} d\tau H(\dot{q}(\tau),q(\tau),\frac{1}{i}\tau)}\ . \qquad \text{(C.4.4)}$$

Hier erfolgt wegen der periodischen Randbedingung $q(0) = q(\hbar\beta)$ die Summation über alle entsprechenden zyklischen Pfade.

C.5 Gaußsche Integrale

Immer wieder stoßen wir bei der Pfadintegral-Methode auf Gaußsche Integrale (siehe C.4.3). Tatsächlich sind diese Gaußschen Integrale auch die bedeutsamsten unter den wenigen Pfadintegralen, die wir analytisch exakt lösen können. Für die Anwendung in den folgenden Abschnitten sollen hier einige Ausdrücke für Gaußsche Integrale in M Dimensionen abgeleitet werden.

C.5.1 Das einfache Gaußsche Integral

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, dann gilt:

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}ax^2} = a^{-1/2} \,. \tag{C.5.1}$$

Beweis. Man berechnet das quadrierte Integral mittels Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-x^2-y^2} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\, ds\, e^{-s} \\
&= \pi[-e^{-s}]_0^{\infty} = \pi \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{2}}}\, dy\, e^{-y^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \,. \qquad \square$$

C.5.2 Gaußsches Integral für M-dimensionale symmetrische Matrizen

Sei A eine reelle, symmetrische, positiv definite Matrix der Dimension $M * M$, A habe also keine Null-Eigenwerte, dann gilt:

$$\frac{1}{(2\pi)^{M/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_M\, e^{-\frac{1}{2}\langle x|A|x\rangle} = (\det A)^{-1/2} \,. \tag{C.5.2}$$

Beweis. Sei $| x\rangle :=| x_1 x_2 \dots x_M\rangle$ ein reeller M-dimensionaler Vektor, dann gibt es eine orthogonale Matrix U, die A auf Diagonalform $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_M)$ transformiert, mit:

$$\bar{A} = UAU^{-1}, \qquad | \bar{x}\rangle = U \mid x\rangle, \qquad d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \dots d\bar{x}_M = dx_1 dx_2 \dots dx_M \,,$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{M/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_M\, e^{-\frac{1}{2}\langle x|A|x\rangle} &= \frac{1}{(2\pi)^{M/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \dots d\bar{x}_M\, e^{-\frac{1}{2}\langle \bar{x}|UAU^{-1}|\bar{x}\rangle} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{M/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \dots d\bar{x}_M\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} a_i \bar{x}_i^2}
\end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{M} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_i \, e^{-\frac{1}{2}a_i \bar{x}_i^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{M} \frac{1}{(a_i)^{1/2}} = \frac{1}{(\det A)^{1/2}} \; . \qquad \square$$

Häufig findet man auch die folgende Schreibweise mit Sp(ln(A)):

$$\ln(\det A) = \ln \prod_{i=1}^{M} a_i = \sum_{i=1}^{M} \ln a_i = \mathrm{Sp}(\ln\, A) \quad \Rightarrow \tag{C.5.3}$$

$$\det A = e^{\mathrm{Sp}(\ln\, A)} \; . \tag{C.5.4}$$

Damit läßt sich C.5.2 jetzt schreiben als:

$$\frac{1}{(2\pi)^{M/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \ldots dx_M \, e^{-\frac{1}{2}\langle x|A|x\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\ln\, A)} \; . \tag{C.5.5}$$

C.6 Spektrale Zetafunktion

Wir haben gesehen, daß wir bei der Berechnung M-dimensionaler Gaußscher Integrale auf die Berechnung von M-dimensionalen Determinanten geführt werden. Im Grenzwert $\lim_{M\to\infty}$ werden aus unseren M-dimensionalen Matrizen $\hat{A}_M$ jetzt unendlichdimensionale Matrizen, d.h. Operatoren $\hat{A}$ in einem unendlichdimensionalen HilbertRaum. Wenn der Grenzwert der Determinanten $\lim_{M\to\infty}(\det \hat{A}_M)$ existiert, so werden wir diesen Grenzwert als die Funktionaldeterminante $\det(\hat{A})$ bezeichnen.

Wenn der Grenzwert $\lim_{M\to\infty}(\det \hat{A}_M)$ aber nicht existiert, wie etwa bei physikalischen Fragestellungen mit einer UV-Divergenz in Modellen der Quantenfeldtheorie, dann kann man versuchen, eine 'regularisierte' Funktionaldeterminante $\det(\hat{A})$ zu definieren, bei welcher auf definierte Weise ein Pol aus der divergenten Determinante herausgenommen wird. Einen mathematisch besonders klaren Weg zur Definition einer regularisierten Funktionaldeterminante stellt die Methode der spektralen Zetafunktion dar.

Sei jetzt $\hat{A}$ ein elliptischer Differential-Operator mit den Eigenwerten λ_n, so kann man analog zur Riemannschen Zetafunktion eine 'spektrale Zetafunktion' $\zeta_{\hat{A}}(s)$ definieren:

$$\zeta_{\hat{A}}(s) := \sum_{n=1} \frac{1}{\lambda_n^s} \; . \tag{C.6.1}$$

Wenn der eliptische Differential-Operator $\hat{A}$ von der Ordnung ω auf einer m-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit ist, dann kann man zeigen, daß die obige Potenzsumme von $\zeta_{\hat{A}}(s)$ für $\Re(s) > \frac{m}{\omega}$ konvergiert (siehe Schiekel (2011), S. 121, oder Schwarz (1993), S.132 ff.). Anschließend kann man diese spektrale Zetafunktion analytisch in der komplexen Ebene fortsetzen und dann an den uns interessierenden Punkten s, hier speziell $s = 0$, berechnen.

$$\zeta_{\hat{A}}(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{\lambda_n^s} = \sum_{n=1} e^{-s \ln \lambda_n} = \mathrm{tr}(e^{-s \ln \hat{A}}) \ . \tag{C.6.2}$$

$$\frac{d}{ds}\zeta_{\hat{A}}(s)\Big|_{s=0} = -\sum_{n=1} \ln \lambda_n \, e^{-s \ln \lambda_n}\Big|_{s=0} = -\sum_{n=1} \ln \lambda_n = -\ln \prod_{n=1} \lambda_n = -\ln \det(\hat{A}) \ .$$

Damit können wir jetzt eine regularisierte Funktionaldeterminante $\det(\hat{A})$ definieren als:

$$\det(\hat{A}) := \prod_{n=1} \lambda_n = e^{-\zeta'_{\hat{A}}(0)} \ . \tag{C.6.3}$$

C.7 Die Normierungskonstante N der Zustandsdichte

Jetzt soll noch die Normierungskonstante N der bosonischen Pfadintegral-Maßfunktion für die Zustandsdichte Z bestimmt werden. Hier geht man in der Physik so vor, daß man ein Pfadintegral berechnet, dessen Ergebnis man bereits von einem anderen Weg her kennt. Dabei setzen wir der Einfachheit halber die Masse des Teilchens $m = 1$.

Lemma C.7.1 *Für die Normierungskonstanten N_b der bosonischen Pfadintegral-Maßfunktion gilt:*

$$N_b = \hbar\beta \ . \tag{C.7.1}$$

Beweis. Sei $\mathcal{L}$ die Lagrangefunktion eines freien bosonischen Teilchens der Masse $m = 1$ in einer $2n$-dimensionalen flachen Mannigfaltigkeit:

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2}\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu \ , \quad p_\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \dot{x}_\mu = \delta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \ ,$$

$$H := p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2}p_\mu p^\mu = \delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu \ , \quad i\mathcal{S}(x) = i\int dt\, \mathcal{L}(x, \dot{x}) \ .$$

Die quantenmechanische Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $\mid x_i, t_i\rangle$ zum Zustand $\mid x_f, t_f\rangle$ ist:

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle = \langle x_f \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f - t_i)} \mid x_i\rangle = \int dp\, \langle x_f \mid e^{-\frac{i}{2\hbar}\hat{p}^2(t_f - t_i)} p\rangle\langle p \mid x_i\rangle$$

$$= \int dp\, e^{-\frac{i}{2\hbar}p^2(t_f-t_i)} \langle x_f \mid p\rangle\langle p \mid x_i\rangle = \int dp\, e^{-\frac{i}{2\hbar}p^2(t_f-t_i)} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} e^{\frac{i}{\hbar}p(x_f-x_i)} \; .$$

Den Exponenten formt man mittels quadratischer Ergänzung um und erhält:

$$-\frac{i}{2\hbar}p^2(t_f-t_i) + \frac{i}{\hbar}p(x_f-x_i) = -\frac{i}{2\hbar}(p - \frac{x_f-x_i}{t_f-t_i})^2(t_f-t_i) + \frac{i}{2\hbar}\frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i} \; .$$

Das $2n$-dimensionale Gaußsche Integral in $\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle$ kann man ausführen und es folgt:

$$\begin{aligned}
\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} e^{\frac{i}{2\hbar}\frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i}} \int dp\, e^{-\frac{i}{2\hbar}(p-\frac{x_f-x_i}{t_f-t_i})^2(t_f-t_i)} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} e^{\frac{i}{2\hbar}\frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i}} \int dp\, e^{-\frac{i}{2\hbar}p^2(t_f-t_i)} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} e^{\frac{i}{2\hbar}\frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i}} (\frac{2\pi\hbar}{i(t_f-t_i)})^n = e^{\frac{i}{2\hbar}\frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i}} (\frac{1}{2\pi\hbar i(t_f-t_i)})^n \; .
\end{aligned}$$

Hieraus wird beim Übergang zur euklidischen Zeitkoordinate $\tau = it$:

$$\mathcal{L}_E := \frac{1}{2}\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu \; , \quad p_\mu := \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \dot{x}^\mu} = \dot{x}_\mu \; ,$$

$$H := p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = \frac{1}{2}p_\mu p^\mu \; ,$$

$$-\mathcal{S}_E(x) = -\int d\tau\, \mathcal{L}_E(x, \dot{x}) = -\frac{1}{2}\int d\tau\, \frac{1}{2}p_\mu p^\mu \; .$$

$$\langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle = e^{-\frac{1}{2\hbar}\frac{(x_f-x_i)^2}{\tau_f-\tau_i}} (\frac{1}{2\pi\hbar(\tau_f-\tau_i)})^n \; .$$

Dann folgt mit $\beta := \tau_f - \tau_i$ nach C.4.1 für die Zustandssumme Z:

$$\begin{aligned}
Z := \mathrm{tr}(e^{-\frac{\beta}{\hbar}\hat{H}}) &= \int dx\, \langle x \mid e^{-\frac{\beta}{\hbar}\hat{H}} \mid x\rangle \\
&= \int dx\, (\frac{1}{2\pi\hbar\beta})^n = (\frac{1}{2\pi\hbar\beta})^n \int dx \; .
\end{aligned}$$

Die Divergenz bei der Integration von $\int dx$ aufgrund unbegrenzter x-Koordinaten ist ein einfacher Fall einer sogenannten Infrarot-Divergenz. Um diese Divergenz zu vermeiden begrenzt man die euklidische $2n$-dimensionale flache Mannigfaltigkeit auf einen Kasten mit den Kantenlängen a und erhält für die Zustandssumme des freien Teilchens:

$$Z = (\frac{1}{2\pi\hbar\beta})^n a^{2n} .$$

Aufgrund der periodischen Randbedingungen $x(0) = x(\hbar\beta)$ im Pfadintegral für Z können wir $x^\mu(\tau)$ als Fourierreihe darstellen:

$$x^\mu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\hbar\beta}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^\mu e^{\frac{i2\pi k}{\hbar\beta}\tau} .$$

Die entsprechende Pfadintegral-Darstellung ist mit C.4.4 und $d\xi^\mu = dx^\mu/\sqrt{\hbar\beta}$:

$$\begin{aligned}
Z &= \int\limits_{x(\hbar\beta)=x(0)} D[x(\tau)]\, e^{-S_E(x)} \\
&= N_b \cdot \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} \{\int \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{d\xi_k^\mu}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\langle\xi|(-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}\xi\rangle}\} \\
&= N_b \cdot \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} \{\det_{k\neq 0}[-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}]^{-\frac{1}{2}}\} \\
&= N_b \cdot \{\det_{k\neq 0}[-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}]^{-\frac{1}{2}}\} \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} \\
&= N_b \cdot \{\det_{k\neq 0}[-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}]^{-\frac{1}{2}}\} \frac{a^{2n}}{(2\pi\hbar\beta)^n} .
\end{aligned}$$

Der Vergleich dieser beiden Darstellungen für Z ergibt also:

$$N_b = \{\det_{k\neq 0}[-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}]\}^{\frac{1}{2}} .$$

Für die Bestimmung von N_b bleibt also nur noch die Funktionaldeterminante zu berechnen. Die Eigenfunktionen des Operators $\hat{A} := [-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}]_{k\neq 0}$ mit den periodischen Randbedingungen $x(0) = x(\hbar\beta)$ sind die Funktionen $e^{\frac{i2\pi k}{\hbar\beta}\tau}|_{k\neq 0}$ und die entsprechenden Eigenwerte sind $\lambda_k = (\frac{2\pi k}{\hbar\beta})^2_{k\neq 0}$. Damit ergibt sich für die Funktionaldeterminante

$$\det_{k\neq 0}(\hat{A}) = \{\det_{k\neq 0}[-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}]\} = \prod_{k\neq 0}(\frac{2\pi k}{\hbar\beta})^2 .$$

Hier taucht allerdings das nächste Problem in Gestalt einer UV-Divergenz auf. Dieses Problem kann man entweder dadurch lösen, daß man von Beginn an ein fouriertransformiertes Pfadintegral definiert (siehe z.B. Schiekel (2011), S. 75 ff.), oder aber man regularisiert die Pfadintegral-Funktionaldeterminante, d.h. entfernt auf klar definierte Weise den Pol der UV-Divergenz. Ein insbesonders in der Quantenfeldtheorie von Physikern vielgenutztes Regularisierungsverfahren stellt die Methode der *Spektralen Zetafunktion* dar (siehe hierzu Kapitel C.6 und Schiekel (2011)). Wir wollen die Methode der Spektralen Zetafunktion an diesem einfachen Beispiel vorführen.

Weil die Nullmode mit $k = 0$ aus $\hat{A}$ herausgenommen wurde ist $\hat{A}$ tatsächlich ein elliptischer Differential-Operator und die Methode der Spektralen Zetafunktion ist anwendbar.

$$\begin{aligned}\zeta_{\hat{A}}(s) &= \sum_{k\neq 0} \frac{1}{\lambda_k^s} = \sum_{k>0} (\frac{\hbar\beta}{2\pi k})^{2s} + \sum_{k<0} (\frac{\hbar\beta}{2\pi k})^{2s} \\ &= 2(\frac{\hbar\beta}{2\pi})^{2s} \sum_{k>0} (\frac{1}{k})^{2s} = 2(\frac{\hbar\beta}{2\pi})^{2s} \zeta(2s) \ .\end{aligned}$$

Hierbei ist ζ die Riemannsche Zetafunktion (siehe z.B. Schiekel (2011), S. 239). Da für die regularisierte Funktionaldeterminante $\det_{\text{reg}}(\hat{A})$ gilt (C.6.3)

$$\det_{\text{reg},\, k\neq 0}(\hat{A}) = \prod_{k=1} \lambda_k = e^{-\zeta'_{\hat{A}}(0)} \ ,$$

müssen wir jetzt also $\zeta'_{\hat{A}}(0)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\zeta_{\hat{A}}(s)\Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds}[2(\frac{\hbar\beta}{2\pi})^{2s}\zeta(2s)]_{s=0} = 2\frac{d}{ds}[e^{2s\cdot\log(\frac{\hbar\beta}{2\pi})}\zeta(2s)]_{s=0} \\ &= 2\{\ [2\log(\frac{\hbar\beta}{2\pi})e^{2s\cdot\log(\frac{\hbar\beta}{2\pi})}\zeta(2s)]_{s=0} + [e^{2s\cdot\log(\frac{\hbar\beta}{2\pi})}2\zeta'(2s)]_{s=0}\} \\ &= 4\log(\frac{\hbar\beta}{2\pi})\zeta(0) + 4\zeta'(0) \ .\end{aligned}$$

Mit $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, (Abramowitz u. Stegun (1970), 23.2.11) und $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$ (Abramowitz u. Stegun (1970), 23.2.13) folgt:

$$\frac{d}{ds}\zeta_{\hat{A}}(s)\Big|_{s=0} = 4\log(\frac{\hbar\beta}{2\pi})(-\frac{1}{2}) + 4(-\frac{1}{2}\log(2\pi)) = -2\log(\hbar\beta) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\det_{\text{reg},\, k\neq 0}(\hat{A}) &= \{\det_{\text{reg},\, k\neq 0}[-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}]\} = \prod_{\text{reg},\, k\neq 0} (\frac{2\pi k}{\hbar\beta})^2 \\ &= e^{-\zeta'_{\hat{A}}(0)} = e^{2\log(\hbar\beta)} = (\hbar\beta)^2 \ . \end{aligned} \tag{C.7.2}$$

Damit ist nun die Normierungskonstante N_b bestimmt zu

$$N_b = \{\det_{k\neq 0}[-\mathbb{1}\frac{d^2}{d\tau^2}]\}^{\frac{1}{2}} = \hbar\beta \ . \qquad \square$$

C.8 Das fermionische Pfadintegral der Zustandssumme

Das euklidische Pfadintegral summiert über alle klassischen Pfade, die jeweils mit dem Gewichtsfaktor $e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(q)}$ der klassischen euklidischen Wirkung $S_E(q)$ zur Pfadintegralsumme beitragen.

Für das entsprechende fermionische Pfadintegral benötigt man also eine Beschreibung von 'klassischen Fermionen'. Diesen Formalismus auf der Grundlage von Grassmann-Algebren haben wir in Anhang Kapitel B dargestellt.

Bei den gewöhnlichen Feynmanschen Pfadintegralen macht man stets von der Vollständigkeitsrelation im Hilbert-Raum Gebrauch, also z.B. in Bezug auf den Orts-Operator von dieser Darstellung:

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_k \ \mid q_k\rangle\langle q_k \mid \ . \tag{C.8.1}$$

Jetzt suchen wir eine ähnliche Vollständigkeitsrelation für Fermionen unter Verwendung von Grassmann-Zahlen.

Der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ eines Fermions wird von den beiden Vektoren $\mid 0\rangle$ und $\mid 1\rangle$ aufgespannt, so daß für einen beliebige Vektor aus $\mathcal{H}$ gilt:

$$\mid f\rangle = \mid 0\rangle f_0 + \mid 1\rangle f_1 \quad \text{mit } f_0, f_1 \in \mathbb{C} \ . \tag{C.8.2}$$

Jetzt kann man auch sog. *kohärente Zustandsvektoren* unter Verwendung der Grassmann-Generatoren $\theta, \overline{\theta} \in Gr$ einer Grassmann-Algebra Λ^2 in einem erweiterten Hilbert-Raum $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda$ einführen:

$$\mid \theta\rangle := (\mid 0\rangle + \mid 1\rangle\theta) \ , \quad \langle\theta \mid := (\langle 0 \mid + \overline{\theta}\langle 1 \mid) \ , \tag{C.8.3}$$

$$\mid -\theta\rangle := (\mid 0\rangle - \mid 1\rangle\theta) \ , \quad \langle -\theta \mid := (\langle 0 \mid - \overline{\theta}\langle 1 \mid) \ . \tag{C.8.4}$$

Die Definition für $\mid -\theta\rangle$ sieht zunächst etwas ungewohnt aus, erklärt sich aber durch die Forderung, daß $\mid \theta\rangle$ und $\langle\theta \mid$ Eigenvektoren der Fermion-Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren $\hat{c}$ und $\hat{c}^\dagger$ in $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda$ sein sollen:

$$\hat{c} \mid \theta\rangle = \hat{c}(\mid 0\rangle + \mid 1\rangle\theta) = \mid 0\rangle\theta = \mid \theta\rangle\theta \ , \tag{C.8.5}$$

$$\hat{c} \mid -\theta\rangle = \hat{c}(\mid 0\rangle - \mid 1\rangle\theta) = - \mid 0\rangle\theta = \mid -\theta\rangle(-\theta) \ , \tag{C.8.6}$$

$$\langle\theta \mid \hat{c}^\dagger = (\hat{c} \mid \theta\rangle)^\dagger = (\mid \theta\rangle\theta)^\dagger = \overline{\theta}\langle\theta \mid \ , \tag{C.8.7}$$

$$\langle -\theta \mid \hat{c}^\dagger = (\hat{c} \mid -\theta\rangle)^\dagger = (\mid -\theta\rangle(-\theta))^\dagger = -\overline{\theta}\langle -\theta \mid \ , \tag{C.8.8}$$

Damit kann man jetzt eine Vollständigkeitsrelation im erweiterten Hilbert-Raum $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda$ beweisen.

Lemma C.8.1

$$\int d\overline{\theta}d\theta \ \mid \theta\rangle\langle\theta \mid e^{-\overline{\theta}\theta} = \mathbb{1} \ . \tag{C.8.9}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\int d\overline{\theta}d\theta \ \mid \theta\rangle\langle\theta \mid e^{-\overline{\theta}\theta} &= \int d\overline{\theta}d\theta \ \mid \theta\rangle\langle\theta \mid (1-\overline{\theta}\theta) \\
&= \int d\overline{\theta}d\theta \, (\mid 0\rangle + \mid 1\rangle\theta)(\langle 0 \mid + \overline{\theta}\langle 1 \mid)(1-\overline{\theta}\theta) \\
&= \int d\overline{\theta}d\theta \, (\mid 0\rangle\langle 0 \mid + \mid 0\rangle\overline{\theta}\langle 1 \mid + \mid 1\rangle\theta\langle 0 \mid + \mid 1\rangle\theta\overline{\theta}\langle 1 \mid)(1-\overline{\theta}\theta) \\
&= \int d\overline{\theta}d\theta \, \{(\mid 0\rangle\langle 0 \mid + \mid 0\rangle\overline{\theta}\langle 1 \mid + \mid 1\rangle\theta\langle 0 \mid + \mid 1\rangle\theta\overline{\theta}\langle 1 \mid) \\
&\quad - (\mid 0\rangle\langle 0 \mid \overline{\theta}\theta + \mid 0\rangle\overline{\theta}\overline{\theta}\theta\langle 1 \mid + \mid 1\rangle\theta\overline{\theta}\theta\langle 0 \mid + \mid 1\rangle\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\theta\langle 1 \mid)\} \\
&= \int d\overline{\theta}d\theta \, \{(\mid 0\rangle\langle 0 \mid + \mid 0\rangle\overline{\theta}\langle 1 \mid + \mid 1\rangle\theta\langle 0 \mid + \mid 1\rangle\theta\overline{\theta}\langle 1 \mid) + (\mid 0\rangle\langle 0 \mid \theta\overline{\theta}\} \\
&= \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} \{(\mid 0\rangle\langle 0 \mid + \mid 0\rangle\overline{\theta}\langle 1 \mid + \mid 1\rangle\theta\langle 0 \mid + \mid 1\rangle\theta\overline{\theta}\langle 1 \mid) + (\mid 0\rangle\langle 0 \mid \theta\overline{\theta}\} \\
&= \mid 1\rangle\langle 1 \mid + (\mid 0\rangle\langle 0 \mid = \mathbb{1} \ .
\end{aligned}$$

□

Im Unterschied zum Pfadintegral der bosonischen kanonischen Zustandssumme C.4.1, bei welcher über alle zyklischen Pfade zu summieren ist, muß bei der fermionischen kanonischen Zustandssumme über alle *antizyklischen* Pfade summiert werden, wie das folgende Lemma zeigt. Antizyklisch bedeutet in diesem Zusammenhang ein Pfad mit der Grassmann-Variablen $\theta_0 = \theta$ bei $\tau = 0$ und $\theta_\beta = -\theta$ bei $\tau = \beta$ bei der Spurbildung von $\exp(-\beta\hat{H})$.

Lemma C.8.2

$$Z := \mathrm{tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum_{n=0}^{1}\langle n \mid e^{-\beta\hat{H}}n\rangle = \int d\overline{\theta}d\theta \, \langle -\theta \mid e^{-\frac{1}{\hbar}(\hbar\beta-0)\hat{H}} \mid \theta\rangle e^{-\overline{\theta}\theta} \ . \tag{C.8.10}$$

Beweis. Der Beweis macht von der obigen Vollständigkeitsrelation Gebrauch.

$$\begin{aligned}
Z &= \mathrm{tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum_{n=0}^{1}\langle n \mid e^{-\beta\hat{H}}n\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{1}\int d\overline{\theta}d\theta \, e^{-\overline{\theta}\theta}\langle n \mid \theta\rangle\langle\theta \mid e^{-\beta\hat{H}}n\rangle
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{1} \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, (\langle n \mid 0 \rangle + \langle n \mid 1 \rangle \theta) \, (\langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle + \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle)$$

$$= \sum_{n=0}^{1} \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, \{ \langle n \mid 0 \rangle \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle + \langle n \mid 0 \rangle \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle$$

$$+ \langle n \mid 1 \rangle \theta \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle + \langle n \mid 1 \rangle \theta \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle \}$$

$$= \sum_{n=0}^{1} \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, \{ \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle \langle n \mid 0 \rangle + \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle \langle n \mid 0 \rangle$$

$$+ \theta \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle \langle n \mid 1 \rangle + \theta \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} n \rangle \langle n \mid 1 \rangle \}$$

$$= \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, \{ \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} 0 \rangle + \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} 0 \rangle$$

$$+ \theta \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} 1 \rangle - \overline{\theta} \theta \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} 1 \rangle \}$$

$$= \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, \{ \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} 0 \rangle + \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} 0 \rangle$$

$$+ \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} 1 \rangle \theta - \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} 1 \rangle \theta \} \, .$$

Der 2. und der 3. Summand in der Klammer $\{\cdot\}$ fallen bei der Integration fort, also können wir im 2. Summanden $\overline{\theta}$ durch $-\overline{\theta}$ ersetzen, und erhalten:

$$Z = \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, \{ \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} 0 \rangle - \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} 0 \rangle$$

$$+ \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} 1 \rangle \theta - \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} 1 \rangle \theta \}$$

$$= \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, \{ \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} 0 \rangle + \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} 1 \rangle \theta$$

$$- \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} 1 \rangle \theta - \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} 0 \rangle \}$$

$$= \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, \{ \langle 0 \mid e^{-\beta \hat{H}} \theta \rangle - \overline{\theta} \langle 1 \mid e^{-\beta \hat{H}} \theta \rangle \}$$

$$= \int d\overline{\theta} d\theta \, (1 - \overline{\theta}\theta) \, \langle -\theta \mid e^{-\beta \hat{H}} \theta \rangle \, . \qquad \square$$

Im einfachsten supersymmetrischen Beweis des Atiyah-Singer Indexsatzes für den euklidischen Dirac-Operator, hier als Q bezeichnet, ist es erforderlich den Index von Q zu berechnen und dieser läßt sich als eine modifizierte, fermionische kanonische Zustandssumme $\tilde{Z}$ schreiben. Diese Modifikation führt nun gerade dazu, daß über alle *zyklischen*

Pfade summiert wird. Zyklisch bedeutet in diesem Zusammenhang ein Pfad mit der Grassmann-Variablen $\theta_0 = \theta$ bei $\tau = 0$ und $\theta_\beta = \theta$ bei $\tau = \beta$ bei der Spurbildung für $\tilde{Z}$.

Korollar C.8.3 *Sei $\hat{F} := \hat{c}^\dagger \hat{c}$ der fermionische Teilchenzahl-Operator, dann gilt:*

$$(-1)^{\hat{F}} \mid -\theta\rangle = (-1)^{\hat{c}^\dagger \hat{c}}(\mid 0\rangle - \mid 1\rangle\theta) = (\mid 0\rangle + \mid 1\rangle\theta) = \mid \theta\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &:= \mathrm{tr}(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta\hat{H}})) = \sum_{n=0}^{1} \langle n \mid (-1)^{\hat{F}} e^{-\beta\hat{H}} n\rangle = \\ &= \int d\overline{\theta} d\theta \, \langle -\theta \mid (-1)^{\hat{F}} e^{\beta\hat{H}} \mid \theta\rangle e^{-\overline{\theta}\theta} = \int d\overline{\theta} d\theta \, \langle \theta \mid e^{\beta\hat{H}} \mid \theta\rangle e^{-\overline{\theta}\theta} \,. \end{aligned} \tag{C.8.11}$$

C.9 Grassmannnsche Gaußsche Integrale

Bei der Berechnung von fermionischen Pfadintegralen stößt man auf 'Gaußsche Integrale' mit Grassmann Variablen. Seien $\{\theta_i\}$ und $\{\overline{\theta_i}\}$ mit $i = 1, \ldots, n$ zwei Sätze von unabhängigen Grassmann-Variablen, und sei A eine antisymmetrische $n * n$ Matrix, dann gilt mit $\theta' := A\theta$, d.h. $\theta'_i := \sum_{ij} A_{ij}\theta_j$:

$$\int d\overline{\theta_1} d\theta_1 d\overline{\theta_2} d\theta_2 \ldots d\overline{\theta_n} d\theta_n \, e^{-\langle\overline{\theta}|A\theta\rangle} = \det(A) \,, \tag{C.9.1}$$

denn mit B.0.17 folgt mit der Substitution der Variablen:

$$\begin{aligned} I &:= \int d\overline{\theta_1} d\theta_1 d\overline{\theta_2} d\theta_2 \ldots d\overline{\theta_n} d\theta_n \, e^{-\langle\overline{\theta}|A\theta\rangle} \\ &= \int d\overline{\theta_1} d\theta_1 d\overline{\theta_2} d\theta_2 \ldots d\overline{\theta_n} d\theta_n \, e^{-\sum_{ij} \overline{\theta_i} A_{ij} \theta_j} \\ &= \det(A) \cdot \int d\overline{\theta_1} d\theta'_1 d\overline{\theta_2} d\theta'_2 \ldots d\overline{\theta_n} d\theta'_n \, e^{-\sum_{i=1}^{n} \overline{\theta_i}\theta'_i} \\ &= \det(A) \cdot \int d\overline{\theta_1} d\theta'_1 d\overline{\theta_2} d\theta'_2 \ldots d\overline{\theta_n} d\theta'_n \, e^{-\sum_{i=n}^{1} \overline{\theta_i}\theta'_i} \\ &= \det(A) \cdot \int d\overline{\theta_1} d\theta'_1 d\overline{\theta_2} d\theta'_2 \ldots d\overline{\theta_n} d\theta'_n \, \prod_{i=n}^{1} (1 - \overline{\theta_i}\theta'_i) \\ &= \det(A) \cdot \int d\overline{\theta_1} d\theta'_1 d\overline{\theta_2} d\theta'_2 \ldots d\overline{\theta_n} d\theta'_n \, \prod_{i=n}^{1} (1 + \theta'_i\overline{\theta_i}) \\ &= \det(A) \,. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich ergibt sich für reelle $n * n$ Matrizen A mit geradzahliger Dimension n:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \, e^{-\frac{1}{2}\langle\theta|A\theta\rangle} = (\det(A))^{\frac{1}{2}} \; . \tag{C.9.2}$$

Beweis. Da A eine reelle antisymmetrische $n * n$ Matrix mit geradzahliger Dimension n ist, kann A unitär auf folgende Blockdiagonal-Form transformiert werden (siehe 25.9.11):

$$A = U^\dagger \tilde{A} U \; , \quad \text{mit} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_j \in \mathbb{R} \; .$$

Bei einer solchen unitären Transformation ändert sich das Gauß-Integral nicht, denn mit $\theta' := U\theta$ folgt:

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \, e^{-\frac{1}{2}\langle\theta|A\theta\rangle} &= \int d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \, e^{-\frac{1}{2}\langle\theta|U^\dagger\tilde{A}U\theta\rangle} \\ &= \int d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \, e^{-\frac{1}{2}\langle U\theta|\tilde{A}U\theta\rangle} \\ &= \det(U) \int d\theta'_1 d\theta'_2 \dots d\theta'_n \, e^{-\frac{1}{2}\langle\theta'|\tilde{A}\theta'\rangle} \\ &= \int d\theta'_1 d\theta'_2 \dots d\theta'_n \, e^{-\frac{1}{2}\langle\theta'|\tilde{A}\theta'\rangle} \; . \end{aligned}$$

Für den Exponenten gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\langle\theta' \mid \tilde{A}\theta'\rangle &= -\frac{1}{2}\{\lambda_1(-\theta'_2\theta'_1 + \theta'_1\theta'_2) + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}}(-\theta'_n\theta'_{n-1} + \theta'_{n-1}\theta'_n)\} \\ &= -\{\lambda_1\theta'_1\theta'_2 + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}}\theta'_{n-1}\theta'_n\} \; . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int d\theta'_1 d\theta'_2 \dots d\theta'_n \, e^{-\frac{1}{2}\langle\theta'|\tilde{A}\theta'\rangle} \\ &= \int d\theta'_1 d\theta'_2 \dots d\theta'_n \\ &\quad \{1 - [\lambda_1\theta'_1\theta'_2 + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}}\theta'_{n-1}\theta'_n] \\ &\quad + \frac{1}{2!}[\lambda_1\lambda_2(\theta'_1\theta'_2\theta'_3\theta'_4 + \theta'_3\theta'_4\theta'_1\theta'_2) + \ldots] \end{aligned}$$

$$\mp \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(\frac{n}{2})!} [\sum_{\pi} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i \theta'_{\pi(2i-1)} \theta'_{\pi(2i)}]\} ,$$

wobei die Summe in den Klammern $[\ldots]$ über alle Permutationen π von Paaren von $\theta'_{2i-1}\theta'_{2i}$ in dem Produkt $\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i \theta'_{2i-1}\theta'_{2i}$ geht. Da diese Paare kommutieren ergibt also jede der $(\frac{n}{2})!$ Permutationen den selben Beitrag und man erhält:

$$I = \int d\theta'_1 d\theta'_2 \ldots d\theta'_n$$

$$\{1 - [\lambda_1 \theta'_1 \theta'_2 + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}} \theta'_{n-1} \theta'_n]$$

$$+ [\lambda_1 \lambda_2 (\theta'_1 \theta'_2 \theta'_3 \theta'_4 + \ldots]$$

$$\mp \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} [\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i \theta'_{2i-1} \theta'_{2i}]\} .$$

Nun fallen bei der Grassmann-Integration (= Grassmann-Differentiation) aber alle bis auf den letzten Term fort und man erhält

$$\begin{aligned} I &= \int d\theta'_1 d\theta'_2 \ldots d\theta'_n \, \{(-1)^{\frac{n}{2}} [\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i \theta'_{2i-1} \theta'_{2i}]\} \\ &= \int d\theta'_1 d\theta'_2 \ldots d\theta'_n \, \{[\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i \theta'_{2i} \theta'_{2i-1}]\} \\ &= \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i = (\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} = (\det(\tilde{A}))^{\frac{1}{2}} = (\det(A))^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \tag{C.9.3}$$

□

Diese Quadratwurzel $(\det(A))^{\frac{1}{2}}$ ist bis auf einen frei wählbaren Phasenfaktor gerade die sog. Pfaffsche-Determinate $Pf(A)$ (siehe 25.11.4).

C.10 Fermionische harmonische Oszillatoren

Der Hamilton-Operator eines fermionischen, harmonischen Oszillators im 2-dimensionalen Hilbert-Raum $\{|\,0\rangle, |\,1\rangle\}$ läßt sich mit dem Teilchenzahl-Operator $\hat{F} = \hat{c}^\dagger \hat{c}$, wobei

$\hat{c}^\dagger$ und $\hat{c}$ die Erzeuger- und Vernichtungs-Operatoren sind, und mit der Frequenz ω schreiben als:

$$\hat{H} := (\hat{F} - \frac{1}{2})\omega = (\hat{c}^\dagger \hat{c} - \frac{1}{2})\omega \ , \tag{C.10.1}$$

$$\hat{H} \mid \psi\rangle = E_i \mid \psi\rangle \quad \text{mit} \quad E_0 = -\frac{\omega}{2} \ , \ E_1 = +\frac{\omega}{2} \ . \tag{C.10.2}$$

Damit folgt für die Zustandssumme des fermionischen Oszillators:

$$\begin{aligned} Z(\beta) = \mathrm{tr}(e^{-\beta\hat{H}}) &= \sum_{n=0}^{1} \langle n \mid e^{-\beta\hat{H}} n\rangle = \sum_{n=0}^{1} \langle n \mid e^{-\beta(\hat{c}^\dagger\hat{c} - \frac{1}{2})\omega} n\rangle \\ &= e^{-\beta(-\frac{1}{2})\omega} + e^{-\beta(\frac{1}{2})\omega} = 2\cosh(\frac{\beta\omega}{2}) \ . \end{aligned} \tag{C.10.3}$$

Für die modifizierte Zustandssumme $\tilde{Z}$, die im einfachsten supersymmetrischen Beweis des Atiyah-Singer Indexsatzes für den euklidischen Dirac-Operator vorkommt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} := \mathrm{tr}(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta\hat{H}})) &= \sum_{n=0}^{1} \langle n \mid (-1)^{\hat{F}} e^{-\beta\hat{H}} n\rangle = \sum_{n=0}^{1} \langle n \mid (-1)^{\hat{F}} e^{-\beta(\hat{c}^\dagger\hat{c} - \frac{1}{2})\omega} n\rangle \\ &= (-1)^0 e^{-\beta(-\frac{1}{2})\omega} + (-1)^1 e^{-\beta(\frac{1}{2})\omega} = e^{\frac{\beta\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\omega}{2}} = 2\sinh(\frac{\beta\omega}{2}) \ . \end{aligned} \tag{C.10.4}$$

Für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\hat{c}^\dagger$ und $\hat{c}$ gelten die Antikommutator-Relationen (wieder mit $\hbar$=1):

$$\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} = 1 \ , \quad \{\hat{c}, \hat{c}\} = 0 \ , \quad \{\hat{c}^\dagger, \hat{c}^\dagger\} = 0 \ . \tag{C.10.5}$$

Damit kann man den Hamilton-Operator $\hat{H}$ schreiben als:

$$\hat{H} = (\hat{c}^\dagger \hat{c} - \frac{1}{2})\omega = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{c}\hat{c}^\dagger)\omega \ . \tag{C.10.6}$$

Die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\hat{c}^\dagger$ und $\hat{c}$ hängen mit den hermiteschen Generatoren $\widehat{\gamma^1}$ und $\widehat{\gamma^2}$ der Clifford-Algebra $\{\mathbb{1}, \widehat{\gamma^1}, \widehat{\gamma^2}, \widehat{\gamma^1}\widehat{\gamma^2}\}$ mit den Antikommutator-Relationen $\{\widehat{\gamma^i}, \widehat{\gamma^j}\} = 2\delta^{ij}\mathbb{1}$ auf die folgende Weise zusammen:

$$\hat{c} = \frac{1}{2}(\widehat{\gamma^1} + i\widehat{\gamma^2}) \ , \quad \hat{c}^\dagger = \frac{1}{2}(\widehat{\gamma^1} - i\widehat{\gamma^2}) \ .$$

Mit

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

folgt für den Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{8}[(\widehat{\gamma^1} - i\widehat{\gamma^2})(\widehat{\gamma^1} + i\widehat{\gamma^2}) - (\widehat{\gamma^1} + i\widehat{\gamma^2})(\widehat{\gamma^1} - i\widehat{\gamma^2})] \tag{C.10.7}$$

$$= \frac{\omega}{8}[(\mathbb{1} + i\widehat{\gamma^1}\widehat{\gamma^2} - i\widehat{\gamma^2}\widehat{\gamma^1} + \mathbb{1}) \tag{C.10.8}$$

$$- (\mathbb{1} - i\widehat{\gamma^1}\widehat{\gamma^2} + i\widehat{\gamma^2}\widehat{\gamma^1} + \mathbb{1})] \tag{C.10.9}$$

$$= \frac{i\omega}{4}(\widehat{\gamma^1}\widehat{\gamma^2} - \widehat{\gamma^2}\widehat{\gamma^1}) = -\frac{i}{4}\widehat{\gamma^i}M_{ij}\widehat{\gamma^j} \ .$$

Der Übergang zur Hamiltonfunktion des klassischen Fermi-Oszillators geschieht als Übergang von der Clifford-Algebra mit den Generatoren $\widehat{\gamma^1}$ und $\widehat{\gamma^2}$ zur Grassmann-Algebra mit den reellen Grassmann-Generatoren ψ^1 und ψ^2 (siehe 27.5.48):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\gamma^1} \to \psi^1 \ , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\gamma^2} \to \psi^2 \ ,$$

oder mit den komplexen Grassmann-Generatoren θ und $\bar{\theta}$:

$$\theta := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 + i\psi^2) \ , \quad \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 - i\psi^2) \ , \tag{C.10.10}$$

welche die folgenden Antikommutator-Relationen erfüllen:

$$\{\theta, \bar{\theta}\} = 0 \ , \quad \{\theta, \theta\} = 0 \ , \quad \{\bar{\theta}, \bar{\theta}\} = 0 \ . \tag{C.10.11}$$

Damit wird aus dem Hamilton-Operator $\hat{H}$ die klassische Hamiltonfunktion H:

$$H = \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta - \theta\bar{\theta})\omega = \omega\bar{\theta}\theta \ . \tag{C.10.12}$$

Jetzt soll die Pfadintegraldarstellung für $\tilde{Z}$ betrachtet werden. Zunächst gilt es, die euklidische Lagrangefunktion aufzustellen. Wir machen mit der *komplexen* Grassman-Variable θ den folgenden Ansatz:

$$\mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) := [i\bar{\theta}(t)\dot{\theta}(t) - \omega\bar{\theta}(t)\theta(t)] \ . \tag{C.10.13}$$

Anmerkung C.10.1 *Kalka u. Soff (1997), S. 214, wählen für den zweiten Term der Lagrangefunktion ein umgekehrtes Vorzeichen, also $+\omega\bar{\theta}(t)\theta(t)$. Wenn man dies möchte, dann müßte man die Abbildung von der Clifford-Algebra in die Grassmann-Algebra so wählen, daß die komplexen Grassmann-Generatoren θ und $\bar{\theta}$ gerade vertauscht definiert werden.*

Damit ergibt sich die Lagrange-Gleichung für θ zu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\theta}}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\theta}} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\theta}} = -(i\dot{\theta} - \omega\theta) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = -i\omega\theta \quad \Rightarrow \theta(t) = e^{-i\omega t}\theta(0)\ . \tag{C.10.14}$$

Für den kanonischen Impuls und die Hamiltonfunktion ergeben sich dann:

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}[i\bar{\theta}(t)\dot{\theta}(t) - \omega\bar{\theta}(t)\theta(t)] = \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}[-i\dot{\theta}(t)\bar{\theta}(t)] = -i\bar{\theta}(t)\ . \tag{C.10.15}$$

$$H(\theta,\pi) = \dot{\theta}\pi - \mathcal{L} = \dot{\theta}(-i\bar{\theta}) - [i\bar{\theta}\dot{\theta} - \omega\bar{\theta}\theta] = \omega\bar{\theta}\theta = -\omega\theta\bar{\theta} = -i\omega\theta\pi\ . \tag{C.10.16}$$

Wir gehen in $\mathcal{L}$ zu ψ^1, ψ^2 über und verwenden der Einfachheit halber die Bezeichnung $\mathcal{L}$ unverändert weiter. Damit ergibt sich also $\mathcal{L}(\psi^1, \psi^2, \dot{\psi}^1, \dot{\psi}^2)$ zu:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\psi^1,\psi^2,\dot{\psi}^1,\dot{\psi}^2) &= \frac{1}{2}[i(\psi^1 - i\psi^2)(\dot{\psi}^1 + i\dot{\psi}^2) - \omega(\psi^1 - i\psi^2)(\psi^1 + i\psi^2)] \\
&= \frac{1}{2}[i(\psi^1\dot{\psi}^1 + i\psi^1\dot{\psi}^2 - i\psi^2\dot{\psi}^1 + \psi^2\dot{\psi}^2) \\
&\qquad - i\omega(\psi^1\psi^2 - \psi^2\psi^1)] \\
&= \frac{1}{2}[i(\psi^1\dot{\psi}^1 + \psi^2\dot{\psi}^2) - i\omega(\psi^1\psi^2 - \psi^2\psi^1)] - \frac{1}{2}(\psi^1\dot{\psi}^2 - \psi^2\dot{\psi}^1)\ .
\end{aligned}$$

Die obige Lagrange-Gleichung für θ schreibt sich in ψ^1, ψ^2 als:

$$\dot{\theta} = -i\omega\theta \quad \Rightarrow \quad (\dot{\psi}^1 + i\dot{\psi}^2) = -i\omega(\psi^1 + i\psi^2) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\psi}^1 = \omega\psi^2\ , \quad \dot{\psi}^2 = -\omega\psi^1\ . \tag{C.10.17}$$

Wegen der Antisymmetrie der ψ^i fällt der letzte Term in $\mathcal{L}$ fort und man erhält:

$$\mathcal{L}(\psi^1,\psi^2,\dot{\psi}^1,\dot{\psi}^2) = \frac{i}{2}(\psi^1\dot{\psi}^1 + \psi^2\dot{\psi}^2) - \frac{i}{2}\omega(\psi^1\psi^2 - \psi^2\psi^1)]\ ,$$

$$\mathcal{L}(\vec{\psi},\dot{\vec{\psi}}) = \frac{1}{2}[i\vec{\psi}^T\dot{\vec{\psi}} + i\vec{\psi}^T M\vec{\psi}] \quad \text{mit } \vec{\psi}^T := (\psi^1,\psi^2) \text{ und } M := \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ +\omega & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{C.10.18}$$

Für den kanonischen Impuls und die Hamiltonfunktion ergeben sich dann:

$$\pi_k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^k} = \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}^k}[\frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^i\dot{\psi}^j] = \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}^k}[-\frac{i}{2}\delta_{ij}\dot{\psi}^j\psi^i] = -\frac{i}{2}\delta_{ki}\psi^i\ . \tag{C.10.19}$$

$$H(\vec{\psi},\vec{\pi}) = \dot{\psi}^k \pi_k - \mathcal{L} = \dot{\psi}^k(-\frac{i}{2}\delta_{ki}\psi^i) - \frac{1}{2}[i\vec{\psi}^T\dot{\vec{\psi}} + i\vec{\psi}^T M\vec{\psi}] = -\frac{i}{2}\vec{\psi}^T M\vec{\psi}\ . \quad \text{(C.10.20)}$$

Mit $t := -i\tau$ und $\mathcal{L}_E(\theta(\tau), \frac{d\theta(\tau)}{d\tau}) := -\mathcal{L}(\theta(t(\tau)), \frac{d\theta(t(\tau))}{d(t(\tau))})$ folgt die euklidische Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}_E(\vec{\psi},\dot{\vec{\psi}}) = \frac{1}{2}[\vec{\psi}^T\dot{\vec{\psi}} - i\vec{\psi}^T M\vec{\psi}] \quad \text{mit } \vec{\psi}^T := (\psi^1,\psi^2) \text{ und } M := \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ +\omega & 0 \end{pmatrix}\ . \quad \text{(C.10.21)}$$

Die euklidische Wirkungsfunktion $\mathcal{S}_E(\vec{\psi})$ ergibt sich damit zu:

$$\mathcal{S}_E(\psi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\tau\,[\vec{\psi}^T(\tau)\frac{d}{d\tau}\vec{\psi}(\tau) - i\vec{\psi}^T(\tau)M\vec{\psi}(\tau)] = \frac{1}{2}\langle\vec{\psi}\mid(\frac{d}{d\tau} - iM)\vec{\psi}\rangle \quad \text{(C.10.22)}$$

$$\tilde{Z} = \mathrm{tr}((-1)^{\hat{F}}e^{-\beta\hat{H}}) = N_f \int\limits_{\psi(\beta)=-\psi(0)} D[\psi(\tau)]\,(-1)^{\hat{F}}e^{-\mathcal{S}_E(x,\psi)}\ . \quad \text{(C.10.23)}$$

Die Pfadintegral-Normierung N_f wird durch Vergleich mit C.10.4 festgelegt. In diesem Pfadintegral ist über alle antiperiodischen, fermionischen Pfade zu summieren. Der Phasenfaktor $(-1)^{\hat{F}}$ ändert jedoch das Vorzeichen des fermionischen Randwertes $-\vec{\psi}(0)$ in $\vec{\psi}(0)$, siehe C.8.11, so daß sich also das Pfadintegral als Summe über alle periodischen, fermionischen Pfade schreiben läßt:

$$\tilde{Z} = N_f \int\limits_{\vec{\psi}(\beta)=\vec{\psi}(0)} D[\vec{\psi}(\tau)]\,e^{-\mathcal{S}_E(x,\vec{\psi})} = N_f \int\limits_{\vec{\psi}(\beta)=\vec{\psi}(0)} D[\vec{\psi}(\tau)]\,e^{-\frac{1}{2}\langle\vec{\psi}|(\frac{d}{d\tau}-iM)\vec{\psi}\rangle}$$

$$= N_f(\det(\frac{d}{d\tau} - iM))^{\frac{1}{2}} = N_f(\det[(\frac{d}{d\tau})^2 - \omega^2])^{\frac{1}{2}}\ . \quad \text{(C.10.24)}$$

Wegen der Periodizität von $\psi(\tau)$ in β kann man für $\psi(\tau)$ eine Fourierreihe wählen:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k e^{\frac{i2\pi k}{\beta}\tau}\ . \quad \text{(C.10.25)}$$

Mit den periodischen Randbedingungen erhält man für die Eigenwerte von $(\frac{d}{d\tau})^2 - \omega^2$:

$$\lambda_k = (-1)((\frac{2\pi k}{\beta})^2 + \omega^2)\ , \quad \text{(C.10.26)}$$

und für $\tilde{Z}$ (mit Abramowitz u. Stegun (1970), 4.5.68):

$$\tilde{Z} = N_f(\det((\frac{d}{d\tau})^2 - \omega^2))^{\frac{1}{2}} = N_f(\prod_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k)^{\frac{1}{2}} = N_f(\prod_{k=-\infty}^{\infty}[(-1)((\frac{2\pi k}{\beta})^2 + \omega^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= N_f i\omega \cdot \prod_{k>0}^{\infty}((\frac{2\pi k}{\beta})^2 + \omega^2) = N_f i\omega \cdot \prod_{k>0}^{\infty}(\frac{2\pi k}{\beta})^2 \prod_{k>0}^{\infty}(1 + (\frac{\beta\omega}{2\pi k})^2)$$

$$= N_f i\omega \cdot (\prod_{k>0}^{\infty}(\frac{2\pi k}{\beta})^2) \cdot \frac{\sinh(\frac{\beta\omega}{2})}{\frac{\beta\omega}{2}} \ .$$

Der Faktor $(\det_{k>0}(\frac{d}{d\tau})^2)^{\frac{1}{2}} = \prod_{k>0}^{\infty}(\frac{2\pi k}{\beta})^2$ ist divergent und soll mittels der Zetafunktions-Methode regularisiert werden. Weil die Nullmode mit $k = 0$ aus $(\frac{d}{d\tau})^2$ herausgenommen wurde ist $(\frac{d}{d\tau})^2$ tatsächlich ein elliptischer Differential-Operator und die Methode der Spektralen Zetafunktion ist anwendbar.

Im Folgenden bezeichne ζ die Riemannsche Zetafunktion (siehe z.B. Schiekel (2011), S. 239). Da für die regularisierte Funktionaldeterminante $\det_{\text{reg},\, k\neq 0}((\frac{d}{d\tau})^2)$ gilt (C.6.3)

$$\det_{\text{reg},\, k\neq 0}((\frac{d}{d\tau})^2) = \prod_{\text{reg},\, k=1}^{\infty} \lambda_k = e^{-\zeta'_{(\frac{d}{d\tau})^2}(0)} \ ,$$

müssen wir jetzt also $\zeta'_{(\frac{d}{d\tau})^2}(0)$ bestimmen:

$$\zeta_{(\frac{d}{d\tau})^2}(s) = \sum_{k>0}^{\infty}[(\frac{2\pi k}{\beta})^2]^{-s} = (\frac{\beta}{2\pi})^{2s}\zeta(2s) = e^{2s\log(\frac{\beta}{2\pi})}\zeta(2s) \ ,$$

$$\zeta'_{(\frac{d}{d\tau})^2}(s) = 2\log(\frac{\beta}{2\pi})e^{2s\log(\frac{\beta}{2\pi})}\zeta(2s) + e^{2s\log(\frac{\beta}{2\pi})}2\zeta'(2s) \ ,$$

$$\zeta'_{(\frac{d}{d\tau})^2}(0) = 2\log(\frac{\beta}{2\pi})\zeta(0) + 2\zeta'(0) \ .$$

Mit $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, (Abramowitz u. Stegun (1970), 23.2.11) und $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$ (Abramowitz u. Stegun (1970), 23.2.13) folgt:

$$\zeta'_{(\frac{d}{d\tau})^2}(0) = 2\log(\frac{\beta}{2\pi})(-\frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2}\log(2\pi)) = -\log(\frac{\beta}{2\pi}) - \log(2\pi) = -\log(\beta) \ . \tag{C.10.27}$$

Damit ergibt sich

$$(\det_{\text{reg},\, k\neq 0}((\frac{d}{d\tau})^2))^{\frac{1}{2}} = \prod_{\text{reg},\, k\neq 0}(\frac{2\pi k}{\beta})^2 = e^{-\zeta'_{(\frac{d}{d\tau})^2}(0)} = e^{\log(\beta)} = \beta \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{Z} = N_f i\beta\omega \frac{\sinh(\frac{\beta\omega}{2})}{\frac{\beta\omega}{2}} = N_f i 2\sinh(\frac{\beta\omega}{2}) \ . \tag{C.10.28}$$

Durch Vergleich mit C.10.4 legen man N_F fest:

$$N_f = -i \; , \tag{C.10.29}$$

und erhalten für $\tilde{Z}$

$$\tilde{Z} = 2\sinh(\frac{\beta\omega}{2}) \; . \tag{C.10.30}$$

Die Verallgemeinerung von einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit $\vec{\psi}^T := (\psi^1, \psi^2)$ in eine $m = 2n$ dimensionale Mannigfaltigkeit mit den Grassmann-Variablen ψ^μ mit $\mu = 1, \ldots, 2n$ ist klar:

$$\mathcal{S}_E(\psi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\tau \, [\psi^\mu(\tau)\delta_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau}\psi^\nu(\tau) - i\psi^\mu(\tau)M_{\mu\nu}\psi^\nu(\tau)] = \frac{1}{2}\langle\psi^\mu \mid (\delta_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau} - iM_{\mu\nu})\psi^\nu\rangle \; , \tag{C.10.31}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\omega_1 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & 0 & \omega_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_n & 0 \end{pmatrix} .$$

Diese Wirkung liefert für die modifizierte Zustandssumme $\tilde{Z}$ analog zum obigen Ergebnis:

$$\tilde{Z} = N_f i^n \prod_{j=1}^n 2\sinh(\frac{\beta\omega_j}{2}) \; , \tag{C.10.32}$$

und mit der entsprechenden Normierung N_f folgt:

$$N_f = (-i)^n \quad \Rightarrow \quad \tilde{Z} = \prod_{j=1}^n 2\sinh(\frac{\beta\omega_j}{2}) \; . \tag{C.10.33}$$

Gelegentlich findet man in der Literatur auch eine Darstellung, welche die Nullmoden der Fourierreihe im Pfadintegral separat darstellt. Im soeben diskutierten Fall liefern die Nullmoden ja gerade den Faktor $\Pi_{j=1}^n(i\omega_j)$ und damit kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= N_f \int\limits_{\vec{\psi}(\beta)=\vec{\psi}(0)} D[\vec{\psi}(\tau)] \, e^{-\frac{1}{2}\langle\vec{\psi}|(\frac{d}{d\tau}-iM)\vec{\psi}\rangle} \\ &= \prod_{j=1}^n(\beta\frac{\sinh(\frac{\beta\omega_j}{2})}{\frac{\beta\omega_j}{2}}) \cdot N_f \cdot \int\limits_{\substack{k=0\\ \vec{\psi}(\beta)=\vec{\psi}(0)}} D[\vec{\psi}(\tau)] \, e^{-\frac{1}{2}\langle\vec{\psi}|(\frac{d}{d\tau}-iM)\vec{\psi}\rangle} \; . \end{aligned} \tag{C.10.34}$$

D Funktionalanalysis von Fredholm-Operatoren

Wir haben hier zur Erleicherung der Leser und Leserinnen den Abschnitt über die *Funktionalanalysis von Fredholm-Operatoren* aus der Veröffentlichung des Autors (Schiekel, 2011, S. 303 ff.) auch in dieses Manuskript eingefügt.

> *The beginner ... should not be discouraged if ... he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites.* *P. Halmos*
>
> Zitiert nach *Functional Analysis*, Reed u. Simon (1980), S. 1.

D.1 Einführung

In der Quantentheorie lernen wir gleich zu Beginn, daß der Impuls-Operator in der Form $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ auf $L^2(a,b)$ ein linear unbeschränkter Operator ist, mit allen Komplikationen, die unbeschränkte Operatoren an sich haben. Und vielleicht lernen wir auch, daß die für die Quantentheorie typischen kanonischen Vertauschungsrelationen der Form $[A,B] = i \cdot \hat{1}$ sich nicht mit zwei linear beschränkten Operatoren A und B erfüllen lassen, sondern daß in diesem Fall zumindest einer der beiden Operatoren unbeschränkt sein muß (Beweis siehe unten).

Wenn wir uns aber mit mathematischer Literatur zu elliptischen Differential-Operatoren und den Indexsätzen beschäftigen, so erfahren wir, daß elliptische Differential-Operatoren Fredholm-Operatoren sind. Wenn nun $\frac{d}{dx}$ als ein elliptischer Differential-Operator ein Fredholm-Operator ist, dann muß $\frac{d}{dx}$ ein beschränkter Operator sein, da Fredholm-Operatoren ja beschränkt sind.

Der Widerspruch löst sich dadurch auf, daß in der modernen Analysis elliptische Differential-Operatoren nicht auf L^2, sondern in einem erweiterten Rahmen als Pseudodifferential-Operatoren in Sobolevräumen betrachtet werden und nur in diesem Rahmen als Fredholm-Operatoren behandelt werden können. Die Vorteile dieser Behandlungsweise von partiellen Differential-Operatoren sind so umfassend, daß der Kalkül der Pseudodifferential-Operatoren in der Mathematik schon seit Jahrzehnten zum Standardrepertoire der Theorie der partiellen Differentialgleichungen gehört.

Bevor wir im nächsten Kapitel auf den Kalkül der Pseudodifferential-Operatoren und speziell die elliptischen Differential-Operatoren eingehen, sollen in diesem Kapitel kurz einige benötigte Grundlagen der Funktionalanalysis zusammengestellt werden. Jedes

Lehrbuch der Funktionalanalysis behandelt die hier angeführten Themen ausführlich. Für diese Darstellung wurden herangezogen: Großmann (1972), Werner (2005), Lax (2002), Voigt u. Wloka (1975), Gilkey (1995), Booß (1977), Fischer u. Kaul (2001), Fischer u. Kaul (1998). Dabei ist Großmann (1972) als Einstieg in die Funktionalanalysis für Physiker gut geeignet und leicht lesbar. Die hervorragende *Funktionanalysis* von Werner (2005) ist eine moderne deutschsprachige Standardreferenz. Das Lehrbuch des berühmten Altmeisters der Analysis Peter D. Lax, Lax (2002), ragt durch besonders schöne Beweise und die didaktisch gelungene Präsentation auch ungewohnter Zusammenhänge hervor. Booß (1977) ist eine mit Gewinn zu lesende Einführung in die Theorie der Fredholm-Operatoren und die Indextheorie.

D.2 Beschränkte Operatoren

Definition D.2.1 *Alle linearen Räume die im folgenden betrachtet werden, seien Vektorräume über einem Körper* $\mathbb{K}$ *- wobei hier stets* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ist.*

Definition D.2.2 *Sei* $\mathcal{H}$ *ein separabler Hilbert-Raum. Ein beliebiger Operator* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *heißt beschränkt, wenn es eine Konstante* $C \in \mathbb{R}$ *gibt mit*

$$\|Af\| \le C\|f\| \quad \textit{für alle } f \in \mathcal{H} \, .$$

Die kleinste Schranke C *heißt Norm des Operators:*

$$\|A\| := \sup_{f \in \mathcal{H}, \|f\| \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} \, .$$

Definition D.2.3 *Wir bezeichnen die Menge der linearen und beschränkten Operatoren in* $\mathscr{H}$ *mit* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$*.*

Wenn A ein linear-beschränkter Operator ist, läßt sich wegen der Linearität die Operatornorm auch schreiben als:

$$\|A\| := \sup_{f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1} \|Af\|$$

Definition D.2.4 *Ein beliebiger Operator* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *heißt (folgen-)stetig an der Stelle* $f \in \mathcal{H}$*, wenn für jede Cachy-Folge* $f_n \in \mathcal{H}$ *mit*

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} Af_n = Af \, .$$

Ein beliebiger Operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *heißt stetig, wenn er an allen Stellen* $f \in \mathcal{H}$ *stetig ist.*

Satz D.2.5 *a. Ein linear-beschränkter Operator $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ ist an jeder Stelle $f \in \mathscr{H}$ stetig, oder an keiner.*

b. Die hier definierte Folgenstetigkeit ist in metrischen Räumen äquivalent zum allgemeineren topologischen Begriff der Stetigkeit, d.h. eine Abbildung $A : M \to M$ ist genau dann folgenstetig, wenn das Urbild $A^{-1}(D)$ jeder offenen oder abgeschlossenen Menge $D \subset M$ offen oder abgeschlossen ist.

Beweis. a. Sei A stetig bei $f \in \mathscr{H}$ und sei $\{g_i\} \in \mathscr{H}$ eine Cachyfolge mit $\lim_{i\to\infty} g_i = g$, dann ist $\{f_i := g_i - g + f\}$ eine Cachyfolge mit $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ und wegen der Linearität und Stetigkeit von A bei f gilt:

$$\lim_{i\to\infty} Af_i = \lim_{i\to\infty} A(g_i - g + f) = \lim_{i\to\infty} Ag_i - Ag + Af \quad \Rightarrow \quad \lim_{i\to\infty} Ag_i = Ag \ .$$

b. Sei das Urbild $A^{-1}(D)$ jeder offenen Menge $D \subset M$ offen, dann ist äquivalent dazu auch das Urbild $A^{-1}(E)$ jeder abgeschlossenen Menge $E \subset M$ abgeschlossen, denn zu jedem E ist ja die Komplementmenge $E^c := M \setminus E$ eine offene Menge und also $A^{-1}(E^c)$ auch offen:

$$A^{-1}(E^c) = \{f \,|\, Af \in E^c\} = \{f \,|\, Af \in E\}^c = (A^{-1}(E))^c \quad \Leftrightarrow$$

$$A^{-1}(E) \text{ abgeschlossen} \ .$$

Sei jetzt $A : M \to M$ folgenstetig, $E \subset M$ abgeschlossen und $\{f_i\}$ eine Cauchyfolge in $A^{-1}(E)$ mit $f := \lim_{i\to\infty} f_i$. Es ist zu zeigen, daß $A^{-1}(E)$ abgeschlossen ist, d.h. daß $f \in A^{-1}(E)$ liegt. Wegen der Folgenstetigkeit von A ist $\{g_i := Af_i\}$ eine Cauchyfolge in E und wegen der Abgeschlossenheit von E gibt es ein $g \in E$ mit $g = \lim_{i\to\infty} g_i$ und $g = Af$. Also liegt f in $A^{-1}(E)$. Die Folgenstetigkeit implziert also die topologische Stetigkeit.

Für die umgekehrte Richtung sei jetzt $A : M \to M$ stetig (im topologischen Sinne) und $\{f_i\}$ eine Cauchyfolge in M mit $f := \lim_{i\to\infty} f_i$. Es ist zu zeigen, daß $\{f_i\}$ folgenstetig ist, d.h. daß $Af := \lim_{i\to\infty} Af_i$. Sei also $D := K_\epsilon(A(f))$ eine offene ϵ-Umgebung von Af, dann ist $f \in A^{-1}(D)$ und $A^{-1}(D)$ ist wegen der Stetigkeit auch offen. Also gibt es in $A^{-1}(D)$ eine offene δ-Umgebung $K_\delta(f)$ in der fast alle f_i liegen, und daraus folgt, daß fast alle Af_i in $D = K_\epsilon(A(f))$ liegen und das heißt, daß $Af := \lim_{i\to\infty} Af_i$. Die topologische Stetigkeit impliziert also die Folgenstetigkeit. □

Satz D.2.6 *Ein linearer Operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.*

Beweis. a) A sei linear und beschränkt $\Rightarrow$ $A0 = 0$ $\Rightarrow \| Af_i - A0 \| = \| Af_i \| \leq C \| f_i \| \to 0$ wenn $\| f_i \| \to 0$. Also ist A an der Stelle 0 stetig und wegen der Linearität überall auf $\mathscr{H}$ stetig.
b) A sei linear und auf $\mathscr{H}$ stetig. Wenn A nicht beschränkt ist, dann gibt es eine Folge $\{f_i\} \in \mathscr{H}$ mit $\| f_i \| \neq 0$ und $c_i := \| Af_i \| \,/\, \| f_i \| \to \infty$.
Dann ist $\{g_i := (1/c_i)(f_i/ \| f_i \|)\}$ eine Nullfolge in $\mathscr{H}$ und wegen der Stetigkeit von A gilt $Ag_i \to 0$. Andererseits gilt aber auch $\| Ag_i \| = (1/c_i)(Af_i/ \| f_i \|) = 1 \neq 0$. Widerspruch, also ist A beschränkt. □

Als Beispiel eines nicht beschränkten Operators in einem Hilbert-Raum betrachten wir den eindimensionalen Impuls-Operator in der Ortsdarstellung auf $L^2(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b:\ A := -i\hbar\frac{d}{dx}\ :\ L^2(a,b) \to L^2(a,b)$.
Die Funktionen $f_k(x) := (1/\sqrt{b-a})\exp(i2\pi kx/(b-a))$ sind Elemente von $L^2(a,b)$ mit $\parallel f_k \parallel= 1$, aber $\parallel \frac{d}{dx}f_k \parallel= \frac{2\pi}{b-a}k \to \infty$. Also ist der Impuls-Operator $A := -i\hbar\frac{d}{dx}$ nicht auf allen Elementen von $L^2(a,b)$ stetig und damit auf $L^2(a,b)$ unbeschränkt. Gleichzeitig ist dieser eindimensionale Impuls-Operator aber ein elliptischer Differential-Operator. Wir werden im Abschnitt über Pseudodifferential-Operatoren sehen, daß wir elliptische Pseudodifferential-Operatoren in geeigneten Sobolevräumen als beschränkte Operatoren definieren können. Dies bietet uns dann deutlich erweiterte Möglichkeiten zur Untersuchung partieller Differentialgleichungen.

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob wir nicht vielleicht sogar alle quantenmechanischen Operatoren statt in $L^2(a,b)$ in einem geeigneten Sobolev-Raum betrachten können, um sie solcherart zu beschränkten Operatoren zu machen? Diese Idee funktioniert leider nicht, wie der folgende Satz zeigt:

Satz D.2.7 (Wielandt) *Die Vertauschungsrelation* $[A,B] := AB - BA = i\hat{1}$ *ist im Raum der linear beschränkten Operatoren nicht möglich.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, welche die Vertauschungsrelation $[A,B] = i\hat{1}$ erfüllen. Zunächst beweisen wir per Induktion die Relation $i\,nB^{n-1} = AB^n - B^nA$. Für $n = 1$ ist dies nach Voraussetzung richtig. Jetzt sei die Relation für n richtig, dann folgt für $n+1$:

$$\begin{aligned} AB^{n+1} - B^{n+1}A &= AB^nB - B^nBA = AB^nB - B^n(AB - i\hat{1}) \\ &= [A,B^n]B + iB^n = i\,nB^{n-1}B + iB = i(n+1)B^n)\ . \end{aligned}$$

Nun bilden wir von beiden Seiten dieser Relation die Norm und erhalten:

$$n \parallel B^{n-1} \parallel \leq\parallel AB^n \parallel + \parallel B^nA \parallel\leq 2 \parallel B^{n-1} \parallel\parallel B \parallel\parallel A \parallel\ .$$

Wenn $n > 2 \parallel B \parallel\parallel A \parallel$ ist, dann gibt es nur die Lösung $\parallel B^{n-1} \parallel= 0$ und damit $B^{n-1} = \hat{0}$. Setzen wir dies auf der rechten Seite von $i\,(n-1)B^{n-2} = AB^{n-1} - B^{n-1}A$ ein, so folgt $B^{n-2} = \hat{0}$ und induktiv dann $B = \hat{0}$. Widerspruch, also muß zumindest einer der beiden Operatoren A und B ein unbeschränkter Operator sein. □

Satz D.2.8 *Die Menge der linear-beschränkten Operatoren* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *bildet einen Banach-Raum.*

Beweis. Mit $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $a \in \mathbb{C}$ folgt sofort, daß $A+B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ und $aA \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, daß also $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ ein linearer, normierter Raum ist. Zu zeigen bleibt also noch, daß $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ auch abgeschlossen ist. Sei $\{A_n \in \mathscr{L}(\mathscr{H})\}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ und $f \in \mathcal{H}$, dann gilt: $\parallel (A_m - A_n)f \parallel\leq\parallel A_m - A_n \parallel\parallel f \parallel\to 0$ mit $m,n \to \infty$. Da $\mathcal{H}$ abgeschlossen ist, gilt also, daß $g := \lim_{n\to\infty} A_nf$ existiert und gerade $Af := g = \lim_{n\to\infty} A_nf$ definiert. Offensichtlich ist A auch linear und auch beschränkt, denn aus $\parallel A_nf \parallel / \parallel f \parallel\leq\parallel A_n \parallel\leq C$ folgt wegen der Stetigkeit der Norm:
$\lim_{n\to\infty} \parallel A_nf \parallel / \parallel f \parallel=\parallel \lim_{n\to\infty} A_nf \parallel / \parallel f \parallel=\parallel Af \parallel / \parallel f \parallel\leq\parallel A \parallel\leq C$.

Für viele Beweise im Zusammenhang mit linear-beschränkten Operatoren ist der folgende Satz über die gleichmäßige Beschränktheit grundlegend:

Satz D.2.9 (Banach-Steinhaus) *Eine beliebige Menge linear-beschränkter Operatoren* $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\mathscr{H})$ *ist in* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *beschränkt, wenn für jedes* $f \in \mathcal{H}$ *die Menge* $\{A_n f\}$ *beschränkt ist. Also:* $\| A_n f \| \leq C_f$ *für alle* $n \in$ *Indexmenge,* $f \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad \| A_n \| \leq C$.

Beweis. siehe Werner (2005), S.141, Satz IV.2.1. □

Lemma D.2.10 *Das Produkt zweier linear-beschränkter Operatoren in* $\mathscr{H}$ *ist linear-beschränkt.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, dann folgt:

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sup_{f\in\mathscr{H},\|f\|\neq 0} \frac{\|ABf\|}{\|f\|} = \sup_{f\in\mathscr{H},\|f\|\neq 0,\|\mathbf{Bf}\|\neq\mathbf{0}} \frac{\|ABf\|}{\|Bf\|}\frac{\|Bf\|}{\|f\|} \\ &\leq (\sup_{f\in\mathscr{H},\|f\|\neq 0,\|\mathbf{Bf}\|\neq\mathbf{0}} \frac{\|A(Bf)\|}{\|Bf\|})(\sup_{f\in\mathscr{H},\|f\|\neq 0} \frac{\|Bf\|}{\|f\|}) \\ &\leq (\sup_{Bf\in\mathscr{H},\|\mathbf{Bf}\|\neq\mathbf{0}} \frac{\|A(Bf)\|}{\|Bf\|})(\sup_{f\in\mathscr{H},\|f\|\neq 0} \frac{\|Bf\|}{\|f\|}) = \|A\|\|B\| \,.\end{aligned}$$

□

Zu einem linear-beschränkten Operator in einem Hilbert-Raum gibt es einen linear-beschränkten adjungierten Operator. Dies beweist man mit dem Rieszschen Darstellungssatz linear-beschränkter Funktionale in einem Hilbert-Raum.

Satz D.2.11 (Riesz-Fréchet) *Jedes linear-beschränkte Funktional* $l : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ *über einem Hilbert-Raum* $\mathscr{H}$ *ist darstellbar in der Form* $l(f) = \langle g \mid f\rangle$ *für alle* $f \in \mathscr{H}$. *Dabei ist* $g \in \mathscr{H}$ *eindeutig durch das Funktional* l *bestimmt und es gilt* $\|l\| = \|g\|$.

Beweis. Zunächst betrachten wir den Kern von l, hier als $N_l \subseteq \mathscr{H}$ bezeichnet. Wenn $N_l = \mathscr{H}$, dann können wir $g = 0$ wählen. Sei jetzt also der Kern von l kleiner als $\mathscr{H}$, d.h. $\dim N_l^\perp > 0$, dann gibt es ein $p \in N_l^\perp$ mit $p \neq 0$. Dann ist das folgende $q := l(p)f - l(f)p \in K_l$, denn $l(q) = 0$, und $\langle p \mid q\rangle = 0$.

$$0 = \langle p \mid q\rangle = l(p)\langle p \mid f\rangle - l(f)\|p\|^2 \quad \Rightarrow \quad l(f) = \langle g \mid f\rangle \text{ mit } g := \langle \frac{l(p)}{\|p\|^2} p \mid f\rangle.$$

Das hier konstruierte $g \in \mathscr{H}$ ist eindeutig, denn: $\langle g_1 \mid f\rangle = \langle g_2 \mid f\rangle$ für alle $f \in \mathscr{H} \Rightarrow g_1 = g_2$. Also ist der zum Kern von l senkrechte Unterraum $N_l^\perp$ eindimensional. □

Satz D.2.12 *Zu jedem linear-beschränkten Operator* $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ *in einem Hilbert-Raum gibt es einen adjungierten Operator* $A^\dagger$*, der ebenfalls linear-beschränkt ist:*

$$\langle A^\dagger g \mid f\rangle := \langle g \mid Af\rangle \text{ für alle } f, g \in \mathscr{H} \quad \text{und} \quad \|A^\dagger\| = \|A\| \,.$$

Beweis. $\langle g \mid Af \rangle$ ist bei festem $g \in \mathscr{H}$ linear-beschränktes Funktional: $l_{g,A}(f) := \langle g \mid Af \rangle$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es ein $g' \in \mathscr{H}$ mit $l_{g,A}(f) = \langle g' \mid f \rangle$. Die Abbildung von $g \to g'$ nennen wir den adjungierten Operator $A^\dagger$. $A^\dagger$ ist linear, denn:

$$\langle A^\dagger(a_1 g_1 + a_2 g_2) \mid f \rangle = \langle (a_1 g_1 + a_2 g_2) \mid Af \rangle = a_1^* \langle g_1 \mid Af \rangle + a_2^* \langle g_2 \mid Af \rangle$$
$$= a_1^* \langle A^\dagger g_1 \mid f \rangle + a_2^* \langle A^\dagger g_2 \mid f \rangle = \langle a_1 A^\dagger g_1 + a_2 A^\dagger g_2 \mid f \rangle \ .$$

Die Beschränktheit von $A^\dagger$ sieht man so:

$$\|A^\dagger g\|^2 = \langle A^\dagger g \mid A^\dagger g \rangle = \langle g \mid AA^\dagger g \rangle \leq \|g\| \|A\| \|A^\dagger g\| \ ,$$

also ist entweder $A^\dagger g = 0$ und damit $\|A^\dagger\| = 0$, oder $\|A^\dagger g\| \leq \|g\| \|A\|$. Umgekehrt gilt ebenso:

$$\|Af\|^2 = \langle Af \mid Af \rangle = \langle f \mid A^\dagger A f \rangle \leq \|f\| \|A^\dagger\| \|Af\| \ ,$$

also ist entweder $Af = 0$ und damit $\|A\| = 0$, oder $\|Af\| \leq \|f\| \|A^\dagger\|$. Damit folgt: $\|A^\dagger\| = \|A\|$. □

Somit ist die Menge $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ der linear-beschränkten Operatoren in einem Hilbert-Raum nicht nur ein Banach-Raum, sondern wegen der Abgeschlossenheit der Multiplikation und der Adjungation in $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ auch eine *-Algebra, zusammenfasend also eine Banach*-Algebra genannt (die Mathematiker verwenden für die Adjungation üblicherweise einen *, die Physiker zumeist ein †).

Die Operatoren in $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ erfüllen darüber hinaus noch die sogenannte C*-Eigenschaft, d.h. $\|A^\dagger A\| = \|A\|^2$, denn

$$\|A^\dagger A\| \leq \|A^\dagger\| \|A\| = \|A\|^2 \ ,$$
$$\|Af\|^2 = \langle Af \mid Af \rangle = \langle f \mid A^\dagger A f \rangle \leq \|f\| \|A^\dagger A f\| \leq \|A^\dagger A\| \|f\|^2 \ .$$

Eine Banach*-Algebra, welche wie hier $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ zusätzlich die C*-Eigenschaft besitzt, nennt man eine C*-Algebra. Solche C*-Algebren bilden die grundlegende Struktur zur algebraischen Untersuchung der Quantentheorie.

Die folgenden Aussagen über das orthogonale Komplement $D^\perp$ eines Teilraums $D \subset \mathscr{H}$, die Bildbereiche R_A, $R_{A^\dagger}$, die Kerne N_A, $N_{A^\dagger}$, eines Operators $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ und seines adjungierten Operators $A^\dagger$ werden öfter benötigt, z.B. im Zusammenhang mit der Bestimmung des Index von Fredholm-Operatoren, und sollen deshalb hier zusammengestellt werden.

Lemma D.2.13

$$a.\ D \subset \mathscr{H} \ \Rightarrow\ D^\perp \text{ abgeschlossen} \ , \tag{D.2.1}$$

$$b.\ D \text{ abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{H} = D \oplus D^\perp \ , \tag{D.2.2}$$

$$c.\ D \subseteq (D^\perp)^\perp,\ \textit{und } D \textit{ abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad D = (D^\perp)^\perp\ , \tag{D.2.3}$$

$$d.\ N_A \textit{ ist abgeschlossen}\ , \tag{D.2.4}$$

$$e.\ N_{A^\dagger} = {R_A}^\perp \quad \textit{und} \quad N_A = {R_{A^\dagger}}^\perp\ . \tag{D.2.5}$$

$$f.\ \overline{R_A} = {N_{A^\dagger}}^\perp\ . \tag{D.2.6}$$

Beweis. a. D sei ein beliebiger Teilraum von $\mathscr{H}$ und $D^\perp$ sein orthogonales Komplement, $\{f_i\} \in D^\perp$ sei eine Cauchy-Folge, dann gilt $\langle f_i \mid g\rangle = 0$ für alle $g \in D$. $D^\perp$ ist offensichtlich ein linearer Raum und enthält als solcher natürlich auch $\{0\}$. Wir nehmen an, daß $f_i \to f \in D$, $\|f\| > 0$, dann gilt einerseits $\|f - f_i\| < \epsilon$ und andererseits $\|f - f_i\|^2 = \langle f - f_i \mid f - f_i\rangle = \|f\|^2 - \langle f \mid f_i\rangle - \langle f_i \mid f\rangle + \|f_i\|^2 = \|f\|^2 + \|f_i\|^2 > 0$, Widerspruch, also kann f nicht in D, sondern muß in $D^\perp$ liegen, also ist $D^\perp$ abgeschlossen.

b. D sei jetzt ein abgeschlossener Teilraum von $\mathscr{H}$, also selbst ein Hilbert-Raum, also gibt es eine vollständige Orthonormalbasis von D: $\{e_i\}$. Die Projektion eines beliebigen Vektors $f \in \mathscr{H}$ hinein in D ist dann $f_1 := \sum_i \langle e_i \mid f\rangle e_i \in D$ und $f_2 := f - f_1 \in D^\perp$. Also ist $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in D$ und $f_2 \in D^\perp$. Diese Zerlegung ist eindeutig, denn sei etwa $f = g_1 + g_2$ mit $g_1 \in D$ und $g_2 \in D^\perp$, dann gilt

$$0 = f - f = (f_1 - g_1) + (f_2 - g_2)\ ,$$

$$0 = \langle (f_1 - g_1) + (f_2 - g_2) \mid (f_1 - g_1) + (f_2 - g_2)\rangle = \|(f_1 - g_1)\|^2 + \|(f_2 - g_2)\|^2\ ,$$

und daraus folgt $f_1 = g_1$ und $f_2 = g_2$. Die Zerlegung von $f \in \mathscr{H}$ ist also eindeutig.

c. Wenn D abgeschlossen ist, d.h. $D = \overline{D}$, dann ist wegen b. $\mathscr{H} = D \oplus D^\perp$. Da $D^\perp$ immer abgeschlossen ist, gilt aber auch $\mathscr{H} = D^\perp \oplus (D^\perp)^\perp = (D^\perp)^\perp \oplus D^\perp$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung ist also $D = \overline{D} = (D^\perp)^\perp$ und falls D nicht abgeschlossen ist $D \subset \overline{D} = (D^\perp)^\perp$.

d. $\{0\}$ ist abgeschlossen, also ist $\{0\}^C = R_A \setminus \{0\}$ offen, also ist wegen der Stetigkeit von A die Urbildmenge $A^{-1}(R_A \setminus \{0\}) = D_A \setminus N_A$ offen, also ist $(D_A \setminus N_A)^C = N_A$ abgeschlossen.

e. $f \in N_{A^\dagger} \subseteq \mathscr{H} \;\Leftrightarrow\; \langle g \mid A^\dagger f\rangle = 0$ für alle $g \in \mathscr{H} \;\Leftrightarrow\; \langle Ag \mid f\rangle = 0$. Die zweite Aussage folgt, indem einfach A durch $A^\dagger$ ersetzt wird.

f. Aus c. und e. folgt sofort: ${N_{A^\dagger}}^\perp = ({R_A}^\perp)^\perp = \overline{R_A}$. □

Die beiden wichtigsten Fragen im Zusammenhang mit Operatoren sind die Frage nach dem Spektrum und die Frage einer möglichen Inversen. Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit der dem Problemkreis der inversen Operatoren, also der Frage der Auflösbarkeit der Operatorgleichung $Af = g$ mit $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $f, g \in \mathscr{H}$. Wenn der Bildbereich von A gleich $\mathscr{H}$ ist, also $R_A = \overline{R_A} = \mathscr{H}$, dann können wir A auf $\mathscr{H}$ invertieren. Wegen f. ist äquivalent dazu und leichter zu beweisen die Bedingung $(N_{A^\dagger}) = \{0\}$.

Zentral für Untersuchungen zur Invertierbarkeit von Operatoren ist der *Satz der offenen Abbildung,* einer der wichtigsten Sätze der Funktionalanalysis. Dieser Satz wird üblicherweise für linear-beschränkte Abbildungen zwischen Banach-Räumen formuliert und bewiesen - wir beschränken uns hier auf eine Formulierung in $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

Satz D.2.14 *Wenn $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ surjektiv auf $\mathscr{H}$ (oder einen abgeschlossenen Teilraum) abbildet, dann ist A offen, d.h. bildet offene Mengen in offene Mengen ab. Wenn A zusätzlich injektiv auf $\mathscr{H}$ (oder einen abgeschlossenen Teilraum) abbildet, d.h. wenn also der inverse Operator A^{-1} auf $\mathscr{H}$ (oder einen abgeschlossenen Teilraum) existiert, dann ist dieser beschränkt.*

Beweis. Zum ersten Teil des Satzes, dessen Beweis von Banach stammt und der nicht trivial ist, sei auf Werner (2005), S.152, Satz IV.3.3 verwiesen. Wesentlich ist hierbei die Voraussetzung der *Abgeschlossenheit* des Bildbereichs. Der zweite Teil des Satzes ist eine einfache Folgerung, denn wenn A ein-eindeutig offene Mengen in offene Mengen abbildet, dann hat also eine offene Bildmenge von A^{-1} eine offene Urbildmenge, und A^{-1} ist damit stetig und damit beschränkt. □

Definition D.2.15 *Die Teilmenge der invertierbaren und beschränkten Operatoren aus $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ bilden eine Gruppe, die wir $Gl(\mathscr{H})$ nennen.*

Satz D.2.16 *Wenn $\|A\| < 1$, dann hat der Operator $(\hat{1} - A)$ die Inverse $(\hat{1} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, und $Gl(\mathscr{H})$ enthält die offene Einheitskugel (d.h. Kugel mit Radius $= 1$) um den $\hat{1}$-Operator.*

Beweis. Zunächst einmal ist die existiert Neumann-Reihe $S := \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ für $\|A\| < 1$ und ist beschränkt:

$$\|S\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|} < \infty \ .$$

Weiter folgt:

$$AS = A(\sum_{k=0}^{\infty} A^k) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k = S - \hat{1} \quad \Rightarrow \quad (\hat{1} - A)S = \hat{1} \ ,$$

$$SA = (\sum_{k=0}^{\infty} A^k)A = \sum_{k=1}^{\infty} A^k = S - \hat{1} \quad \Rightarrow \quad S(\hat{1} - A) = \hat{1} \ .$$

Also ist $S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ der inverse und linear-beschränkte Operator zu $\hat{1} - A$.

Sei $B_1(\hat{1})$ die offene Einheitskugel in $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ um den $\hat{1}$-Operator, also

$$B_1(\hat{1}) := \{(\hat{1} + A) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \,|\, \|(\hat{1} + A) - \hat{1}\| = \|A\| < 1 \ .\}$$

Weiter ist $(\hat{1} - A) \in B_1(\hat{1})$ und hat einen linear-beschränkten inversen Operator, also ist $B_1(\hat{1}) \subseteq Gl(\mathscr{H})$. □

Satz D.2.17 *Wenn $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ invertierbar ist, dann sind auch alle Elemente aus $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ invertierbar, die nahe genug bei B liegen, d.h. $\|A\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|} \;\Rightarrow\; (B - A)$ ist invertierbar.*

Beweis. $(B - A) = B(\hat{1} - B^{-1}A)$ und $\|B^{-1}A\| \leq \|B^{-1}\|\|A\| < 1 \quad \Rightarrow$

$$(B - A)^{-1} = (\hat{1} - B^{-1}A)^{-1}B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(B^{-1}A)^k\, B^{-1} \, .$$

Damit ist $(B - A)^{-1}$ invertierbar. □

Dieses Ergebnis ist Grundlage für die Untersuchung der Spektren beschränkter Operatoren, denn sei $\|A\| < |\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dann existiert nach dem obigen Satz $R(\lambda) := (A - \lambda\hat{1})^{-1}$ die Resolvente von A. Die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ für welche die Resolvente existiert heißt Resolventenmenge, das Komplement in $\mathbb{C}$ heißt Spektrum.

D.3 Kompakte Operatoren

Ein zentrales Konzept der Funktionalanalysis ist der Begriff der Kompaktheit, denn er ermöglicht uns in unendlichdimensionalen Räumen Konvergenzaussagen zu klären. Kompaktheitsbeweise können gelegentlich sehr aufwendig und subtil sein. Ohne zu sehr in die Tiefe gehen zu wollen, seien hier nur einige einführende Definitionen und Sätze zu kompakten Mengen und den Grundlagen kompakter Operatoren aufgeführt.

Definition D.3.1 *a. Eine Teilmenge $\Omega \subseteq T$ eines topologischen Raums T heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von Ω eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. wenn $\{O_i\}$ mit $i \in I$ (I eine Indexmenge) eine Familie offener Mengen mit $\Omega = \cup_{i\in I} O_i$ ist, dann existieren in dieser Familie endlich viele offene Mengen $O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}$ mit $\Omega = \cup_{i_k=1}^{n} O_i$.*

b. Eine Teilmenge $\Omega \subseteq T$ eines topologischen Raums T heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in Ω eine Teilfolge besitzt, die gegen ein $x \in \Omega$ konvergiert.

c. Eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ eines metrischen Raums M heißt präkompakt oder ϵ-kompakt, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilüberdeckung mit offenen ϵ-Kugeln gibt.

Da wir es im folgenden immer nur mit Banach- oder Hilbert-Räumen zu tun haben und beide ja metrische Räume sind, können wir uns aufgrund des folgenden Satzes bei Kompaktheitsbeweisen stets auf den Nachweis der Folgenkompaktheit beschränken.

Satz D.3.2 *In einem metrischen Raum M fallen eine Reihe der verschiedenen Kompaktheitsbegriffe zusammen:*
a. die Begriffe der Kompaktheit und der Folgenkompaktheit sind äquivalent,
b. wenn Ω präkompakt ist, dann ist die Abschließung $\overline{\Omega}$ kompakt.

Beweis. siehe Werner (2005), S.499, Satz B.1.7. □

Wir erinnern zuerst an die aus der Analysis bekannte Situation in $\mathbb{R}$.

Satz D.3.3 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Wir orientieren uns an dem Beweis in Fischer u. Kaul (2001), S. 49. $|x_n| \le C$. Man konstruiert sich jetzt durch Intervallhalbierung eine Folge ineinander geschachtelter Intervalle:

$$I_1 := [a_1, b_1] := \begin{cases} [-C, 0] & \text{falls unendl. viele } x_n \text{ in } [-C, 0] \text{ liegen,} \\ [0, C] & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in I_1\} \quad \Rightarrow \quad x_{n_1} \in I_1 \ .$$

$$I_2 := [a_2, b_2] := \begin{cases} [a_1, (a_1 + b_1)/2] & \text{falls unendl. viele } x_n \text{ in } [a_1, (a_1 + b_1)/2] \text{ liegen,} \\ [(a_1 + b_1)/2, b_1] & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$n_2 := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n_2 > n, \ x_n \in I_2\} \quad \Rightarrow \quad x_{n_2} \in I_2 \ .$$

Also ist $x_{n_k} \in I_k \subset I_{k-1} \subset \ldots \subset I_1 \subset [-C, C]$ und unendlich viele x_n liegen in I_k und die Länge des Intervalls I_k ist $b_k - a_k = C/2^k$. Nun existiert $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k =: a$ und wegen $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ folgt $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.
Also ist eine beschränkte und abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$ kompakt. □

Dieser Beweis läßt sich nun mühelos für Folgen in $\mathbb{R}^n$ für jedes endliche $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern. Also sind auch in $\mathbb{R}^n$ beschränkte und abgeschlossene Mengen kompakt.

Eine wichtige Kompaktheitsaussage im Funktionenraum $C(\bar{\Omega})$ der stetigen Funktionen über $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ liefert der Satz von Arzelà-Ascoli, der auch Grundlage für einen zentralen Einbettungssatz in Sobolev-Räumen von Rellich (s.u.) ist, und der gerade die Verbindung von elliptischen Pseudodifferential-Operatoren und Fredholm-Operatoren ermöglicht.

Satz D.3.4 (Arzelà-Ascoli) *Sei Ω eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}^n$ und $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ihre Abschließung, sei weiter $C(\bar{\Omega})$ der Funktionenraum der stetigen, beschränkten Funktionen $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und sei $C(\bar{\Omega})$ wie üblich mit der Supremumsnorm ausgestattet, also $\|f\| := \|f\|_\infty := \sup_{x\in\bar{\Omega}} |f(x)|$. Sei die Teilmenge $M \subset C(\bar{\Omega})$ abgeschlossen und gleichgradig stetig, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ existiere ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x')| < \epsilon$, wenn $|x - x'| < \delta$ ist, und zwar für alle $f \in M$,*
dann ist die Funktionenmenge $M \subset C(\bar{\Omega})$ kompakt.

Beweis. Der Beweis basiert auf dem Diagonalfolge-Argument. Zunächst einmal ist $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ separabel, denn die abzählbare Menge der rationalen Punkte $\{x_k \in \Omega\}$ liegt dicht in $\bar{\Omega}$, d.h. $\bar{\Omega} = \overline{\cup_{k\in\mathbb{N}}\{x_k\}}$. Wir müssen jetzt zeigen, daß jede Folge $\{f_i \in M\}$ eine Cachyfolge besitzt. Sei nun $\{f_i \in M, \ \|f_i\| \le C\}$ ein beschränkte Folge, d.h. $\{f_i(x) \in \mathbb{K}, \ |f_i(x)| \le C$

für alle $x \in \bar{\Omega}\}$, dann ist also $\{f_i(x_1), |f_i(x_1)| \leq C\}$ eine beschränkte Zahlenfolge und diese enthält wegen der Kompaktheit beschränkter und abgeschlossener Mengen in $\mathbb{K}$ eine konvergente Teilfolge $f_i^{(1)}(x_1)$. Nun ist $f_i^{(1)}(x_2)$ ebenfalls eine beschränkte Zahlenfolge, die wiederum eine konvergente Teilfolge $f_i^{(2)}(x_2)$ enthält, die nun für x_1 und x_2 konvergiert. Dieses Verfahren wird sukzessive fortgesetzt. Nun schreiben wir all diese Folgen der $f_i^{(k)}$ untereinander:

$$\begin{array}{rcccccc}
\{f_i^{(1)}\}: & f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \ldots & f_i^{(1)} & \ldots \\
\{f_i^{(2)}\}: & f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & \ldots & f_i^{(2)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\{f_i^{(k)}\}: & f_1^{(k)} & f_2^{(k)} & \ldots & f_i^{(k)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Die Diagonalfolge $\{f_i^{(i)}\}$ konvergiert für alle x_i, denn $\{f_i^{(i)}\}_{i\geq k}$ ist ja eine Teilfolge von $\{f_i^{(k)}\}$, welches für $x_1, \ldots, x_k$ konvergiert. Wir bezeichnen die Diagonalfolge jetzt kurz mit $\{f_i\}$ und wollen zeigen, daß sie eine Cauchy-Folge in $C(\bar{\Omega})$ ist. $\bar{M}$ ist ebenso wie M gleichgradig stetig, also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_i(x) - f_i(x')| < \epsilon \; .$$

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung mit δ-Kugeln: $\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^{p} K_\delta(x_k)$ und für die Diagonalfolge an diesen Stellen x_k gilt:

$$i, j \geq m(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |f_i(x_k) - f_j(x_k)| < \epsilon \; .$$

Da jedes $x \in \bar{\Omega}$ in mindestens einer der $K_\delta(x_k)$ Kugeln liegt, folgt also:

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq |f_i(x) - f_i(x_k)| + |f_i(x_k) - f_j(x_k)| + |f_j(x_k) - f_j(x)| < 3\epsilon \; ,$$

also ist $\{f_i\}$ eine Cauchy-Folge in $C(\bar{\Omega})$. □

Linear-beschränkte Operatoren bilden beschränkte Mengen in beschränkte Bildmengen ab. Im $\mathbb{R}^n$ sind diese beschränkten Bildmengen dann also immer kompakt, in unendlichdimensionalen Räumen sind sie es aber im allgemeinen nicht mehr.

Als Standardbeispiel diene hier die Einheitskugel $K_1(0) := \{x \,|\, \|x\| \leq 1\}$. Sie im $\mathbb{R}^n$ kompakt, nicht aber in einem separablen unendlichdimensionalen Hilbert-Raum, denn dort können wir eine Folge von Einheits-Basisvektoren $\{e_n\}$ bilden, die keine konvergente Teilfolge enthalten.

Wenn man also von linear-beschränkten Operatoren zusätzlich verlangt, daß sie beschränkte Mengen in kompakte Bildmengen abbilden sollen, dann lassen sich für diese Klasse von Operatoren sehr viel weitergehende Aussagen gewinnen, insbesondere läßt sich das Spektralproblem übersichtlich lösen. In physikalischen Anwendungen finden wir häufig solche kompakten Operatoren.

Definition D.3.5 *Ein Operator $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ heißt kompakt (ursprünglich von Hilbert vollstetig genannt), wenn er beschränkte Mengen in präkompakte Mengen abbildet, d.h. wenn $\|f_n\| \leq C$ eine beschränkte Folge in $\mathscr{H}$ ist, dann gibt es eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}$, so daß $\{Af_{n_k}\}$ eine Cauchy-Folge ist, deren Grenzwert in $\overline{\{Af_n\}}$, d.h. in der Abschließung von $\{Af_n\}$ liegt.*
Die Menge der kompakten Operatoren in $\mathscr{H}$ nennen wir $\mathscr{K}(\mathscr{H})$.

Kompakte Operatoren sind linear-beschränkte Operatoren, d.h. $\mathscr{K}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{L}(\mathscr{H})$, denn da jede präkompakte Menge beschränkt ist, bildet also ein kompakter Operator eine beschränkte Menge in eine beschränkte Menge ab. Und wegen der Stetigkeit bildet ein linear-beschränkter Operator natürlich kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab.

Lemma D.3.6 *Weiter ist $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ abgeschlossen, d.h. sei $\{A_n \in \mathscr{K}(\mathscr{H})\}$ eine Folge kompakter Operatoren, die gegen einen Operator $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ konvergiert, also $\|A - A_n\| \to 0$, dann ist der Operator A auch kompakt.*

Beweis. Auch dieser Beweis basiert auf dem Diagonalfolge-Argument. Sei $\{f_n \in \mathscr{H}\}$ eine beschränkte Folge, dann enthält $\{A_1 f_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{A_1 f_n^{(1)}\}$. Jetzt ist natürlich die Folge $\{f_n^{(1)}\}$ wieder ein beschränkte Folge und so enthält auch $\{A_2 f_n^{(1)}\}$ eine konvergente Teilfolge $\{A_2 f_n^{(2)}\}$, usw. Also konvergieren alle Folgen $\{A_l f_n^{(k)}\}$ für festes $l \leq k$. Wir schreiben diese Folgen der $f_n^{(k)}$ einmal untereinander:

$$\begin{array}{cccccc}
\{f_n^{(1)}\}: & f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \dots & f_n^{(1)} & \dots \\
\{f_n^{(2)}\}: & f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & \dots & f_n^{(2)} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\{f_n^{(k)}\}: & f_1^{(k)} & f_2^{(k)} & \dots & f_n^{(k)} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Dann sehen wir, daß für die Diagonalfolge $\{g_n\} := \{f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots, f_n^{(n)}, \dots\}$ die Folge $\{A_l g_n\}$ für jeden Operator A_l konvergiert. Jetzt wollen wir zeigen, daß für diese Diagonalfolge $\{g_n\}$ auch die Folge $\{Ag_n\}$ konvergiert, denn dann ist ja der Grenz-Operator A auch kompakt:

$$Ag_m - Ag_n = Ag_m - A_l g_m + A_l g_m - A_l g_n + A_l g_n - Ag_n \ ,$$

$$\|Ag_m - Ag_n\| \leq \|Ag_m - A_l g_m\| + \|A_l g_m - A_l g_n\| + \|A_l g_n - Ag_n\| < \epsilon \ ,$$

wenn wir m, n, l groß genug wählen, denn der erste und dritte Term gehen gegen Null, weil $A_l \to A$ geht, und der zweite Term geht gegen Null, weil $\{g_n\}$ für jeden Operator A_l eine Cauchy-Folge ist. □

Lemma D.3.7 *Wenn A kompakt ist, dann ist auch der adjungierte Operator $A^\dagger$ kompakt, d.h. $A \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) \ \Leftrightarrow \ A^\dagger \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$.*

Beweis. Sei $A^\dagger$ nicht kompakt, dann gibt es eine Folge $\{f_n \,|\, \|f_n\| \leq 1\}$ mit $\|A^\dagger f_m - A^\dagger f_n\| \geq \delta > 0$ für $m \neq n$. Dann ist $\{g_n := A^\dagger f_n\}$ eine beschränkte Folge. Jetzt wollen wir zeigen, daß $\{Ag_n\}$ keine konvergente Teilfolge in $\mathscr{H}$ hat. Dazu nutzen wir folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
|\langle Ag_m - Ag_n \mid f_m - f_n\rangle| &\leq \|Ag_m - Ag_n\|\|f_m - f_n\| \leq \|Ag_m - Ag_n\|(\|f_m\| + \|f_n\|) \\
&\leq 2\|Ag_m - Ag_n\| \,, \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\|Ag_m - Ag_n\| &\geq |\langle Ag_m - Ag_n \mid f_m - f_n\rangle| = |\langle A^\dagger f_m - A^\dagger f_n \mid A^\dagger f_m - A^\dagger f_n\rangle| \\
&= \|A^\dagger f_m - A^\dagger f_n\|^2 \geq \delta^2 > 0 \,.
\end{aligned}
$$

Da dies für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ gilt, enthält also $\{Ag_n\}$ keine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist. Dies ist ein Widerspruch zur Kompaktheit von A. Also ist mit A auch $A^\dagger$ kompakt. □

Lemma D.3.8 *Wenn A kompakt und B beschränkt ist, dann ist auch die Produkte AB und BA kompakt, d.h. $A \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$, $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \;\Leftrightarrow\; AB,\, BA \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$.*

Beweis. Sei $\{f_n \in \mathscr{H}\}$ eine beschränkte Folge, dann ist auch $\{g_n := Bf_n\}$ eine beschränkte Folge. Da A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\{g_{n_k}\}$, so daß $\{Ag_{n_k} = ABf_{n_k}\}$ konvergiert. Das gleiche gilt für das Produkt BA. □

Eine unmittelbare Folgerung ist, daß der zu $A \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ inverse Operator A^{-1}, wenn er existiert, nicht beschränkt sein kann. Denn sei A^{-1} beschränkt, dann muß $AA^{-1} = \hat{1}$ kompakt sein, und der beschränkte Operator $\hat{1}$ in einem unendlichdimensionalen linearen Raum ist nicht kompakt, also Widerspruch.

Beispiel (1): Sei $l : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ein linear-beschränktes Funktional und $g \in \mathscr{H}$ fest, dann ist der linear-beschränkte Operator $A_g f := l(f)g$ kompakt, denn die Menge $\{l(f)g\}$ ist isomorph zu $\{l(f)\} \leq C$ und dies ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Da die Summen kompakter Operatoren kompakt sind, ist also auch $Af := \sum_{i=1}^{n} l_i(f)g_i$ ein kompakter Operator.

Speziell sind also Operatoren der Form $A := \sum_{i=1}^{n} \mid g_i\rangle\langle h_i \mid$ kompakt. In $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2$ ist A dann ein Integralkern der Form $A(x,y) := \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i^*(y)$. Solche Operatoren heißen *von endlichen Rang* oder *ausgeartet.*

Da eine Folge kompakter Operatoren wiederum kompakt ist, ist der Norm-Grenzwert einer Folge von Operatoren von endlichem Rang auch kompakt. □

Beispiel (2): Wenn der Bildbereich R_A eines linear-beschränkten Operators endlichdimensional ist, so ist A kompakt. Denn: sei $\{g_1, \ldots, g_n\}$ eine orthonormale Basis von R_A, dann kann A dargestellt werden als $Af := \sum_{i=1}^{n} a_i(f)g_i$, und ist also wie oben ein Operator von endlichem Rang und somit kompakt.

Speziell sind also Projektoren auf endliche Unterräume von $\mathscr{H}$ kompakt. □

Beispiel (3): Eine in der Physik häufig vorkommende Klasse von Integral-Operatoren sind die sogenannten Hilbert-Schmidt-Operatoren. Dies sind linear-beschränkte Operatoren, die zusätzlich noch die Bedingung erfüllen:

$$\|A\|^2_{HS} := \sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 < \infty\,,\ \text{mit einer ON-Basis}\,\{e_i\}\ .$$

Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt, denn mit $Af = \sum_{i=1}^{\infty} A(f_i e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i A e_i$ folgt:

$$\|Af - \sum_{i=1}^{n} f_i Ae_i\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i Ae_i\|^2 \le \|f\|^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2\ .$$

Wegen der Hilbert-Schmidt Eigenschaft können wir n so groß wählen, daß $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 < \epsilon$ gilt. Also approximieren die Operatoren $A_n f := \sum_{i=1}^{n} f_i Ae_i$ den Operator A beliebig gut. Diese Operatoren A_n bilden aber auf einen endlichdimensionalen Bildraum ab, sind also kompakt. Oben hatten wir gezeigt, daß der Grenz-Operator einer Folge kompakter Operatoren auch kompakt ist, also ist der Hilbert-Schmidt-Operator A kompakt. □

D.4 Quotienten-Räume

Quotienten-Räume sind ein einfaches und doch sehr anschauliches Hilfsmittel, das man mit Gewinn bei der Untersuchung der Fredholm-Operatoren anwenden kann. Daher sollen hier zunächst einige elementare Aussagen zu Quotienten-Räumen in der Funktionalanalysis zusammengestellt werden.

Hilfreich bei Konvergenzuntersuchungen in normierten Räumen sind die beiden folgenden einfache Lemmata.

Lemma D.4.1 *Sei D ein abgeschlossener, echter Unterraum eines normierten, linearen Raumes X, d.h. $D \subset X$, dann gibt es einen Vektor $z \in X$ mit $\|z\| = 1$, der einen endlichen Wert von D entfernt ist, d.h. $\|z - d\| > \frac{1}{2}$ für alle $d \in D$, oder allgemeiner $\|x - d\| > \epsilon$ mit $0 < \epsilon < 1$, bzw. $\|x - d\| \ge 1 - \epsilon$.*

Beweis. Da D ein echter Unterraum von X ist, gibt es also einen Vektor $x \in X$ der nicht zu D gehört. Da D abgeschlossen ist, ist also $X \setminus D$ offen, und der Vektor x hat einen positiven Abstand r zu $D : r := \inf_{d\in D} \|x - d\| > 0$. Nun gibt in D auch Elemente, die von x etwas weiter als r entfernt sind, sei also $d_0 \in D$ solch ein Element mit $\|x - d_0\| < 2r$. Dann ist $z_0 := (x - d_0) \in X$ mit $\|z_0\| < 2r$. Andererseits folgt aus der Definition von r als dem Minimalabstand: $\|z_0 - d\| = \|x - d_0 - d\| \ge r$ für alle $d \in D$.

$$\frac{\|z_0 - d\|}{\|z_0\|} \ge \frac{r}{\|z_0\|} > \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \quad \text{für alle}\ d \in D\ ,$$

und da $\{\frac{d}{\|z_0\|}, d \in D\} = \{d \in D\}$ ist, haben wir also mit $z := \frac{z_0}{\|z_0\|}$ einen normierten Vektor mit $\|z\| = 1$ und

$$\|z - d\| > \frac{1}{2} \quad \text{für alle } d \in D\ .$$

Natürlich hätten wir im obigen Beweis statt $\|x - d_0\| < 2r$ auch $\|x - d_0\| < \frac{1}{\epsilon} r$ mit $0 < \epsilon < 1$ nehmen können und hätten dann als Abschätzung erhalten:

$$\|z - d\| > \epsilon > 0 \quad \text{oder} \quad \|z - d\| \geq (1 - \epsilon) > 0 \quad \text{für alle } d \in D\ . \qquad \square$$

Lemma D.4.2 *Ein normierter linearer Raum X ist genau dann vollständig, d.h. ein Banach-Raum, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergiert, d.h. wenn aus $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ folgt, daß ein $x \in X$ mit $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$ existiert.*

Beweis. a. Sei X vollständig und $\{x_k\} \in X$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Da die Folge $\{\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\}$ konvergiert, ist sie eine Cauchy-Folge. Und wegen $\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ ist also auch $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

b. Sei $\{x_i\}$ eine Cauchy-Folge in X. Wir wollen jetzt die Existenz eines Grenzwertes $x \in X$ zeigen. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $m, n \geq N_\epsilon$ mit $\|x_m - x_n\| < \epsilon$, d.h. mit $\epsilon_k := 2^{-k}$ gilt $\|x_m - x_n\| < 2^{-k}$. Jetzt betrachten wir eine Teilfolge $\{x_{i_k}\}$ der ursprünglichen Folge $\{x_i\}$ mit der Eigenschaft $\|x_{i_{k+1}} - x_{i_k}\| < 2^{-k}$. Für $y_k := (x_{i_{k+1}} - x_{i_k})$ gilt also $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty$. Nach Voraussetzung existiert jetzt ein $y \in X$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|y - \sum_{k=1}^{n} y_k)\| = \begin{cases} 0\ , \\ \lim_{n\to\infty}(y - (x_{i_{n+1}} - x_{i_1}))\ . \end{cases}$$

Also konvergiert die Teilfolge $\{x_{i_k}\}$ gegen einen Grenzwert $x = y + x_{i_1}$. Wenn nun eine Teilfolge einer Cauchy-Folge einen Grenzwert hat, dann hat die auch die ursrüngliche Cauchy-Folge den gleichen Grenzwert, denn:

$$\|x - x_i\| = \|x - x_{i_k} + x_{i_k} - x_i\| \leq \|x - x_{i_k}\| + \|x_{i_k} - x_i\| < \epsilon_1 + \epsilon_2\ .$$

Also existiert für die Cauchy-Folge $\{x_i\}$ ein $x \in X$ und damit ist X abgeschlossen. $\square$

Sei $D \subset X$ ein abgeschlossener, echter, linearer Teilraum eines linearen Raumes X über einem Körper $\mathbb{K}$. Dann heißen zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$ äquivalent, wenn $(x_1 - x_2) \in D$. Dies ist eine Äquivalenzrelation und induziert eine Äquivalenzklassen Einteilung in X. Die Klasse von $x \in X$ wollen wir mit $[x]$ bezeichnen: $[x] := \{x + d \,|\, d \in D\}$. Diese Klassen bilden ebenfalls einen linearen Raum, den Quotientenraum X/D, wenn man die Addition und Skalarmultiplikation wie folgt definiert: $[x] + [y] := [x + y]$ und $\lambda[x] := [\lambda x]$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Abbildung von $x \to [x]$ heißt kanonische Abbildung.

Definition D.4.3 *Wenn X ein normierter Raum ist, dann kann man auf X/D mit*

$$\|[x]\| := \inf_{x\in[x]} \|x\| = \inf_{d\in D} \|x+d\|$$

auch eine Norm definieren. Geometrisch betrachtet ist also $\|[x]\|$ gerade der minimale Abstand des Vektors x zum Teilraum D.

Die Normaxiome werden tatsächlich erfüllt, denn:

$$[0] = D \Rightarrow \|[0]\| = 0 \quad \text{und} \quad [x] \neq [0] \Rightarrow x \notin D \Rightarrow \|[x]\| = \inf_{d\in D} \|x+d\| > 0\ ,$$

$$\begin{aligned}\|[x+y]\| &= \inf_{x\in[x],y\in[y]} \|x+y\| \leq \inf_{x\in[x],y\in[y]} (\|x\| + \|y\|) \\ &= \inf_{x\in[x]} \|x\| + \inf_{y\in[y]} \|y\|) = \|[x]\| + \|[y]\|\ .\end{aligned}$$

Satz D.4.4 *Der Quotientenraum X/D ist mit der soeben eingeführten Norm sogar abgeschlossen, also ein Banach-Raum.*

Beweis. Wir beginnen wie in Lemma D.4.1. Da D ein echter Unterraum von X und abgeschlossen ist, so ist also $X \setminus D$ offen und es gibt Vektoren $x, y \in X \setminus D$. Es sei $x \neq y$ und daraus folgt wegen $x, y, (x-y) \notin D$ auch $[x] \neq [y]$. Der Vektor $(x-y)$ hat einen positiven Abstand r zu $D : r := \inf_{d\in D} \|(x-y)-d\| > 0$. Nun gibt in D auch Elemente, die von $(x-y)$ etwas weiter als r entfernt sind, sei also $d_0 \in D$ solch ein Element mit

$$\|(x-y)-d_0\| < 2r = 2 \cdot \inf_{d\in D} \|(x-y)-d\| = 2 \cdot \|[x-y]\| = 2 \cdot \|[x]-[y]\|\ .$$

Nun gilt $x \in [x]$ und $y' := (y+d_0) \in X$ und $y' \in [y'] = [y]$, womit folgt:

$$\|x-y'\| < 2 \cdot \|[x]-[y]\| = 2 \cdot \|[x]-[y']\|\ ,$$

d.h. zu jedem $x \in [x]$ gibt es ein $y \in [y]$ mit $\|x-y\| < 2 \cdot \|[x]-[y]\|$.

Jetzt wollen wir die Vollständigkeit von X/D mit Hilfe von Lemma D.4.2 nachweisen. Sei also $\{[x_k]\} \in X/D$ eine spezielle Cauchyfolge mit absolut konvergenter Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|[x_k]-[x_{k+1}]\| < \infty$. Zu jedem $x_k \in [x_k]$ gibt es also ein $x_{k+1} \in [x_{k+1}]$ mit $\|x_k - x_{k+1}\| < 2 \cdot \|[x_k]-[x_{k+1}]\|$ und wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_{k+1}\| < 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|[x_k]-[x_{k+1}]\| < \infty$$

ist also auch die Cauchy-Folge $\{x_k\} \in X$ absolut konvergent. Die Cauchy-Folge $\{x_k\}$ hat wegen Lemma D.4.2 einen Grenzwert $x \in X$. Mit

$$\|[x]-[x_k]\| = \|[x-x_k]\| \leq \|x-x_k\|$$

hat nun also auch die Cauchy-Folge $\{[x_k]\} \in X \setminus D$ einen Grenzwert $\{[x]\} \in X \setminus D$. Damit ist $X \setminus D$ abgeschlossen. □

D.5 Fredholm-Operatoren

In diesem Unterkapitel soll eine Einführung in lineare Fredholm-Operatoren in unendlichdimensionalen, separablen Hilbert-Räumen gegeben werden. Aus didaktischen Gründen werden wir der Transparenz wegen Operatoren zwischen zwei verschiedenen Hilbert-Räumen betrachten, also $A : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$, auch wenn diese beiden Hilbert-Räume natürlich isomorph sind.

Definition D.5.1 *Sei $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ ein linear-beschränkter Operator, $ker_A := N_A := \{f \,|\, Af = 0\} \subseteq \mathscr{H}_1$ der Kern (auch Nulldefekt) von A, $coker_A := \mathscr{H}_2/R_A$ der Kokern (auch Bilddefekt) von A, dann heißt A ein Fredholm-Operator, wenn*

$$\dim(N_A) < \infty \quad \textit{und} \quad \textit{codim}(A) := \dim(\textit{coker}_A) < \infty \; .$$

Die Menge der Fredholm-Operatoren werde mit $\mathscr{F}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ bezeichnet. Der Index eines Fredholm-Operators A wird definiert als

$$\textit{index}(A) := \dim(N_A) - \dim(\textit{coker}_A) \; .$$

Für die Isomorphismen $I \in \mathscr{I}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ ist natürlich $\ker_I = \operatorname{coker}_I = \{0\}$, also $I \in \mathscr{I}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2) \subset \mathscr{F}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$.

Lemma D.5.2 (Fredholm Alternative) *Es ist sofort ersichtlich, was die Fredholm-Eigenschaft für die Lösung der Operatorgleichung $Af = g$ bedeutet: wenn n_1 die Dimension des Kerns von A ist, so besitzt die homogene Gleichung $Af = 0$ gerade n_1 linear unabhängige Lösungen, und wenn n_2 die Dimension des Kokerns ist, so muß g gerade n_2 lineare Bedingungen erfüllen, damit es in R_A liegt.*

Zunächst waren nur Fredholm-Operatoren mit Index 0 bekannt. Fredholm-Operatoren mit einem Index $\neq 0$ hatte erstmalig Fritz Noether (ein Bruder von Emmy Noether) 1921 bei seinen Untersuchungen von singulären Integral-Operatoren entdeckt, weshalb Lax (Lax, 2002) auch vorschlägt, vom Noether-Index zu sprechen.

Satz D.5.3 (Kato) *Wenn $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_{2,})$ mit $\dim(coker_A) < \infty$, dann ist R_A abgeschlossen.*

Beweis. Satz D.2.14 kann hier nicht angewandt werden, weil dessen Voraussetzung die Abgeschlossenheit von R_A ist, die ja gerade erst nachgewiesen werden soll. Sei P die kanonische Abbildung $P : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_1/N_A$ in den Quotientenraum $\mathscr{H}_1/N_A$ und $S : \mathscr{H}_1/N_A \to R_A$. Dann ist S durch $S[f] := Af$ eine eindeutig definierte lineare und bijektive Abbildung.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_1 \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "P"'] & & R_A \subset \mathscr{H}_2 \\
& \mathscr{H}_1/N_A \arrow[ur, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

S ist auch beschränkt mit $\|S\| = \|A\|$, denn mit $f \in \mathscr{H}_1$, $d \in N_A$ gilt:

$$\|S[f]\| = \|Af\| = \|A(f-d)\| \leq \|A\|\|f-d\| \quad \Rightarrow$$

$$\|S\| := \sup_{f\in[f]} \frac{\|S[f]\|}{\|[f]\|} = \frac{\|S[f]\|}{\inf_{d\in N_A}\|f-d\|} \leq \|A\| \,,$$

und damit ist S beschränkt; umgekehrt ist $\|Af\| = \|S[f]\| \leq \|S\|\|[f]\| \leq \|S\|\|f\|$, also $\|A\| \leq \|S\|$, und damit $\|S\| = \|A\|$.

Jetzt zerlegen wir den Hilbert-Raum $\mathscr{H}_2$ in die direkte Summe von R_A und Komplementraum D, also $\mathscr{H}_2 = R_A \oplus D$, mit $D = \mathscr{H}_2 \setminus R_A$. Zunächst wird man vielleicht auf den Gedanken kommen, als Komplementraum ${R_A}^\perp$ zu nehmen, aber wenn R_A etwa offen ist, dann ist $\mathscr{H}_2 \neq R_A \oplus {R_A}^\perp$, denn es fehlt ∂R_A, der Rand von R_A. Das hier verwendete Komplement $D = \mathscr{H}_2 \setminus R_A$ ist isomorph mit dem Quotientenraum $\mathscr{H}_2/R_A$, denn die Abbildung $B : D \to \mathscr{H}_2/R_A$ mit $Bd := [d] = \{d+R_A\}$ für $d \in D = \mathscr{H}_2 \setminus R_A$ ist surjektiv und injektiv, also ein Isomorphismus. Da $n := \dim(\mathrm{coker}_A)$ endlich ist, ist der Quotientenraum $\mathscr{H}_2/R_A$ abgeschlossen und hat eine endliche Basis $\{[e_1], [e_2], \dots, [e_n]\}$. Damit ist auch D abgeschlossen und hat die endliche Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Jetzt kommt die eigentliche Beweisidee: auf der abgeschlossenen(!) Menge $\mathscr{H}_1/N_A \times D$ definieren wir eine Abbildung $\tilde{S} : \mathscr{H}_1/N_A \times D \to \mathscr{H}_2$ mit $\tilde{S}([f], d) := S[f] + d$. Diese Abbildung $\tilde{S}$ ist linear, bijektiv und beschränkt, da ja S beschränkt ist. Nach Satz D.2.14 ist auch $\tilde{S}^{-1}$ beschränkt und damit haben abgeschlossene Bilder von $\tilde{S}^{-1}$ abgeschlossene Urbilder. Die Menge $\mathscr{H}_1/N_A \times \{0\}$ ist eine abgeschlossene Menge in $\mathscr{H}_1/N_A \times D$, d.h. im Bildbereich von $\tilde{S}^{-1}$. Also ist auch das entsprechende Urbild $\tilde{S}(\mathscr{H}_1/N_A \times \{0\}) = R_A$ abgeschlossen in $\mathscr{H}_2$.

Man sieht also, daß die Bedingung $\dim(\mathrm{coker}_A) < \infty$ eine hinreichende Bedingung ist, um die Abgeschlossenheit des Quotientenraums $\mathscr{H}_2/R_A \sim D$ und damit die Abgeschlossenheit von R_A zu erreichen. □

Daß R_A keineswegs für jedes $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ abgeschlossen sein muß, sieht man etwa an dem folgenden Gegenbeispiel:
sei $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 := L^2([0,1])$ und A der Projektor $A := \{\hat{1}$ auf $C([0,1])$, und $\hat{0}$ auf dem übrigen $L^2([0,1])\}$, dann ist $R_A = C([0,1])$ in $L^2([0,1])$ und damit nicht abgeschlossen.

In D.2.5 wurde gezeigt:

$$N_{A^\dagger} = {R_A}^\perp \quad \text{und} \quad N_A = {R_{A^\dagger}}^\perp \,.$$

Da für einen Fredholm-Operator R_A abgeschlossen ist, können wir den Hilbert-Raum $\mathscr{H}_2$ jetzt eindeutig zerlegen in

$$\mathscr{H}_2 = R_A \oplus {R_A}^\perp = R_A \oplus N_{A^\dagger} \,, \text{ also: } \mathrm{coker}_A = N_{A^\dagger} \,, \tag{D.5.1}$$

und damit

$$\operatorname{index}(A) := \dim(N_A) - \dim(\operatorname{coker}_A) = \dim(N_A) - \dim(N_{A^\dagger}) \ . \tag{D.5.2}$$

Weiter folgt:

$$N_{A^\dagger}{}^\perp = R_A \quad \text{und} \quad N_A{}^\perp = R_{A^\dagger} \ . \tag{D.5.3}$$

Für Fredholm-Operatoren existiert eine *Pseudoinversion*, d.h. eine Inversion modulo eines kompakten Operators. Dies ist von zentraler Bedeutung bei der Untersuchung von elliptischen Differentialoperatoren.

Definition D.5.4 *Sei A ein linear-beschränkter Operator, d.h. $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$. Zwei linear-beschränkte Operatoren $S_1, S_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ heißen Links-Parametrix und Rechts-Parametrix (oder Links-/Rechts-Pseudoinverse), wenn gilt: $S_1 A = \hat{1}_{\mathscr{H}_1} + K_1$ und $AS_2 = \hat{1}_{\mathscr{H}_2} + K_2$, mit kompakten Operatoren $K_1 \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_1)$, $K_2 \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_2)$.*

Wenn es eine Links- und eine Rechts-Parametrix gibt, so unterscheiden sie sich nur um einen kompakten Operator und können also beide gleich gewählt werden, denn

$$S_1 A S_2 - S_2 = K_1 S_2 \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_1) \text{ und}$$

$$S_1 A S_2 - S_1 = S_1 K_2 \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_1) \ \Rightarrow$$

$$S_1 - S_2 = K_1 S_2 - S_1 K_2 =: K \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1) \ .$$

Man spricht daher einfach von einer Parametrix $S \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$.

Satz D.5.5 (Atkinson) *$A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ ist genau dann ein Fredholm-Operator, wenn zu A eine Parametrix $S \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ existiert.*

Beweis. Sei $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ ein Fredholm-Operator, dann sind $N_A \subseteq \mathscr{H}_1$ und $N_{A^\dagger} \subseteq \mathscr{H}_2$ endlichdimensional. Wir zerlegen $\mathscr{H}_1$ und $\mathscr{H}_2$ in:

$$\mathscr{H}_1 = N_A \oplus N_A{}^\perp \quad \text{und} \quad \mathscr{H}_2 = N_{A^\dagger} \oplus R_A \ .$$

$A : N_A{}^\perp \to R_A$ ist eine Bijektion, also existiert nach Satz D.2.14 ein linear-beschränkter inverser Operator $S : R_A \to N_A{}^\perp$, so daß $SA = \hat{1}_{N_A^\perp}$ und $AS = \hat{1}_{R_A}$ ist. Jetzt kann man S auf ganz $\mathscr{H}_2$ erweitern, indem man $S(N_{A^\dagger}) := \hat{0}$ setzt. Die beiden Projektoren P_{N_A} und $P_{N_{A^\dagger}}$ sind Projektoren auf endlichdimensionale Unterräume und damit kompakte Operatoren. Damit erhalten wir:

$$SA - \hat{1}_{\mathscr{H}_1} = P_{N_A} \quad \text{und} \quad AS - \hat{1}_{\mathscr{H}_2} = P_{N_{A^\dagger}} \ .$$

Also existiert eine Parametrix.

Sei jetzt umgekehrt $S_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ eine Links-Parametrix zu $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$. Sei $\{f_n\} \in N_A$ eine beschränkte Folge mit $\|f_n\| \leq 1$, dann folgt:

$$f_n = \hat{1}_{\mathscr{H}_1} f_n = (\hat{1}_{\mathscr{H}_1} - S_1 A) f_n = K_1 f_n \ .$$

Da $K_1 \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_1)$ kompakt ist existiert also eine konvergente Teilfolge von $K_1 f_n$ für jede Folge $\{f_n\}$ aus der abgeschlossenen Einheitskugel in N_A, also muß N_A endlichdimensional sein. Das gleiche gilt mittels der Rechts-Parametrix für $N_{A^\dagger}$. Also ist A ein Fredholm-Operator. □

Als Anwendung dieses Satzes sieht man sofort, daß die Paramatrix $S \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ eines Fredholm-Operators $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ ebenfalls ein Fredholm-Operator ist, denn die Bedingungsgleichungen $SA = \hat{1}_{\mathscr{H}_1} + K_1$ und $AS = \hat{1}_{\mathscr{H}_2} + K_2$, mit kompakten Operatoren $K_1 \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_1)$, $K_2 \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_2)$, sind in A und S symmetrisch. Weiter unten werden wir zeigen, daß $\text{index}_S = -\text{index}_A$.

Lemma D.5.6 *a) Mit A ist auch $A^\dagger$ ein Fredholm-Operator und es gilt index$(A^\dagger) = -$index(A).*

b) Sind A und B Fredholm-Operatoren, dann ist auch BA ein Fredholm-Operator und es gilt index$(BA) =$ index$(B) +$ index(A).

Beweis. a) seien $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, $A^\dagger \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ und $S_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ eine Links-Parametrix von A, d.h. $S_1 A = \hat{1}_{\mathscr{H}_1} + K_1$, mit $K_1 \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_1)$, dann ist $S_1^\dagger \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ eine Rechts-Parametrix von $A^\dagger$, denn

$$S_1 A = \hat{1}_{\mathscr{H}_1} + K_1 \quad \Rightarrow$$

$$(S_1 A)^\dagger = (\hat{1}_{\mathscr{H}_1} + K_1)^\dagger \quad \Rightarrow \quad A^\dagger S_1^\dagger = (\hat{1}_{\mathscr{H}_2} + K_1^\dagger) \ ,$$

und $K_1^\dagger \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_2)$ ist wieder ein kompakter Operator. Wegen D.5.3 ist der Kern von A gerade der Kokern von $A^\dagger$ und der Kern von $A^\dagger$ der Kokern von A und damit folgt $\text{index}(A^\dagger) = -\text{index}(A)$.

b) seien $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ und $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3)$ Fredholm-Operatoren mit den Links-Parametrizes $S_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ und $S_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_3, \mathscr{H}_2)$, dann ist $S_1 S_2 : \mathscr{H}_3 \to \mathscr{H}_1$ eine Linksparametrix für BA:

$$S_1 S_2 BA - \hat{1}_{\mathscr{H}_1} = S_1(S_2 B - \hat{1}_{\mathscr{H}_2})A + (S_1 A - \hat{1}_{\mathscr{H}_1}) = K \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_1) \ ,$$

und gleicherweise für die Rechts-Parametrix.

Jetzt soll der Index von BA berechnet werden. $A^{-1}(\Omega)$ bezeichne der Urbildmenge von Ω. Dann setzt sich der Kern von BA aus den beiden Kern-Anteilen von A und B wie folgt zusammen:

$$N_{BA} = N_A \cup A^{-1}(N_B \cap R_A)$$

und ebenso

$$N_{A^\dagger B^\dagger} = N_{B^\dagger} \cup (B^\dagger)^{-1}(N_{A^\dagger} \cap R_{B^\dagger}) = N_{B^\dagger} \cup (B^\dagger)^{-1}({R_A}^\perp \cap {N_B}^\perp) \ .$$

Die beiden Kern-Anteile sind offensichtlich disjunkte Mengen (also ist hier $\cup = \oplus$) und daher kann man bei der Bestimmung von $\dim(N_{BA})$ und $\dim(N_{A^\dagger B^\dagger})$ die Dimensionen der Teilmengen addieren. Da $A : {N_A}^\perp \to R_A$ eine Bijektion ist, gilt $\dim A^{-1}(\Omega) = \dim \Omega$. Daher folgt für den Index:

$$\begin{aligned}
\mathrm{index}(BA) &= N_{BA} - N_{A^\dagger B^\dagger} \\
&= \dim(N_A) + \dim(N_B \cap R_A) - \dim(N_{B^\dagger}) - \dim({R_A}^\perp \cap {N_B}^\perp) \\
&= \dim(N_A) + \dim(N_B \cap R_A) + \dim(N_B \cap {R_A}^\perp) \\
&\quad - \dim(N_{B^\dagger}) - \dim({R_A}^\perp \cap {N_B}^\perp) - \dim(N_B \cap {R_A}^\perp) \\
&= \dim(N_A) + \dim(N_B) - \dim(N_{B^\dagger}) - \dim({R_A}^\perp) \\
&= \dim(N_A) + \dim(N_B) - \dim(N_{B^\dagger}) - \dim(N_{A^\dagger}) \\
&= \mathrm{index}(A) + \mathrm{index}(B) \ .
\end{aligned}$$

□

Satz D.5.7 (Riesz) *Jeder Operator $C : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ der Form $C := \hat{1} + K$ mit einem kompakten Operator $K \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ ist ein Fredholm-Operator mit Index 0.*

Beweis. $\hat{1}$ ist eine Parametrix zu C, also ist C ein Fredholm-Operator.

Zunächst sollen Operatoren der Form $C := \hat{1} + K$ mit Operatoren K von endlichem Rang betrachtet werden, d.h. $\dim(R_K) < \infty$. Wenn K von endlichem Rang ist, dann ist K kompakt. Für solche C ist nun $\mathrm{index}(C) = 0$, denn: die Abbildung von $\mathscr{H}/N_K \to R_K$ ist eine Bijektion, also ist $\dim(\mathscr{H}/N_K) = \dim(R_K)$, also ist $\mathscr{H}/N_K$ abgeschlossen. Da N_K als Kern eines beschränkten Operators ja auch abgeschlossen ist, haben wir also eine Zerlegung von $\mathscr{H} = N_K \oplus {N_K}^\perp$, mit der Isomorphie ${N_K}^\perp \sim \mathscr{H}/N_K$.

Sei jetzt $C_0 : N_K \to \mathscr{H}$ die Einschränkung von C auf N_K, dann ist auch C_0 ein Fredholm-Operator. Sei $\hat{1}_0 : N_K \to \mathscr{H}$ die Einschränkung von $\hat{1}$ auf N_K, dann ist $\hat{1}_0$ ein Fredholm-Operator und es ist $N_{\hat{1}_0} = \{0\}$, $R_{\hat{1}_0} = N_K$ und damit $\mathrm{index}(\hat{1}_0) = -\dim({N_K}^\perp)$. Nun ist $C_0 = C\hat{1}_0$ und daraus folgt

$$\mathrm{index}(C_0) = \mathrm{index}(C) + \mathrm{index}(\hat{1}_0) = \mathrm{index}(C) - \dim({N_K}^\perp) \ .$$

Andererseits ist $C = \hat{1} + K$ auf N_K gleich $\hat{1}_0$, also

$$\mathrm{index}(C_0) = \mathrm{index}(\hat{1}_0) = -\dim({N_K}^\perp) \ .$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt also $\mathrm{index}(C) = 0$.

Jetzt soll dieses Ergebnis auf unendlichdimensionale kompakte Operatoren K verallgemeinert werden. Im Fall von Banach-Räumen muß sorgfältig die Abgeschlossenheit von $R_C = R_{\hat{1}+K}$ nachgewiesen werden, im Fall von Hilbert-Räumen kann man den Beweis vereinfachen (Booß (1977), S. 26). Wir approximieren den kompakten Operator K durch eine Folge von kompakten Operatoren K_n von endlichem Rang (eine konvergente Folge kompakter Operatoren konvergiert gegen einen kompakten Operator). Sei n so gewählt, daß $\|K - K_n\| < 1$ ist, dann existiert nach Satz D.2.16 die Inverse von $\hat{1} + K - K_n$.

$$\hat{1} + K = \hat{1} + K - K_n + K_n = (\hat{1} + K - K_n)(\hat{1} + (\hat{1} + K - K_n)^{-1} K_n) .$$

Der linke Faktor $(\hat{1} + K - K_n)$ ist invertierbar, ist also eine Bijektion und hat damit den Index 0. Der rechte Faktor ist von der Form $(\hat{1} + K_m)$ mit einem kompakten Operator K_m von endlichem Rang und hat damit auch den Index 0. Der Index von $\hat{1} + K$ ist die Summe der Indizes des Produktes auf der rechten Seite und damit 0. □

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist, daß, wie bereits oben erwähnt, ein Fredholm-Operator und seine Parametrix einen entgegengesetzten Index haben, d.h. $\mathrm{index}_S = -\mathrm{index}_A$.

Bei dem gerade geführten Beweis fällt auf, daß K nicht bis auf ein ϵ durch die Folge der K_n approximiert werden muß, sondern nur bis auf $\|K - K_n\| < 1$. Dies deutet auf eine Stabilität des Index gegenüber Störungen hin.

Satz D.5.8 (Yood) *Sei A ein Fredholm-Operator und K_2 ein kompakter Operator, dann ist $\mathrm{index}_{A+K_2} = \mathrm{index}_A$.*

Beweis. Sei S eine Parametrix zu A, dann ist wegen

$$S(A + K_2) = SA + SK_2 = \hat{1} + K + SK_2$$

S auch eine Parametrix zu $(A + K_2)$, da ja SK_2 kompakt ist. Also ist

$$\mathrm{index}_{A+K_2} = -\mathrm{index}_S = \mathrm{index}_A .$$ □

Satz D.5.9 (Dieudonné) *Sei A ein Fredholm-Operator, $A \in \mathscr{F}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß für alle linear-beschränkten Operatoren $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ mit $\|B\| < \epsilon$ gilt: $\mathrm{index}_{A+B} = \mathrm{index}_A$.*

Beweis. Sei S eine Parametrix von A, dann folgt:

$$S(A + B) = SA + SB = \hat{1} + K + SB .$$

Wir wählen $\epsilon := \|S\|^{-1}$ und damit folgt $\|SB\| \leq \|S\|\|B\| < 1$. Also ist mit Satz D.2.16 der Operator $\hat{1} + SB$ invertierbar.

$$(\hat{1} + SB)^{-1} S(A + B) = (\hat{1} + SB)^{-1}(\hat{1} + K + SB) = \hat{1} + (\hat{1} + SB)^{-1} K .$$

Also ist $(\hat{1} + SB)^{-1} S$ eine Parametrix von $(A + B)$ und da $(\hat{1} + SB)^{-1}$ eine Bijektion ist folgt:

$$\mathrm{index}_{A+B} = -\mathrm{index}_{(\hat{1}+SB)^{-1}S} = -\mathrm{index}_S = \mathrm{index}_A .$$ □

Satz D.5.10 (Homotopie-Invarianz) *Sei $A(t)$ eine in t stetige Einparameter-Familie von Fredholm-Operatoren mit $0 \le t \le 1$, dann ist der Index von A unabhängig von t und speziell gilt $\mathrm{index}_{A(0)} = \mathrm{index}_{A(1)}$.*

Beweis. Sei $\|A(t_\epsilon) - A(0)\| < \epsilon$, dann folgt mit dem vorhergehenden Satz:

$$\mathrm{index}_{A(t_\epsilon)} = \mathrm{index}_{A(0)+(A(t_\epsilon)-A(0))} = \mathrm{index}_{A(0)} \ ,$$

usw. □

Es ist gerade diese Homotopie-Invarianz der Fredholm-Operatoren, die die Verbindung zur Topologie und zu den *Atiyah-Singer-Indexsätzen* herstellt.

D.6 Literatur zu Funktionalanalysis und Fredholm-Operatoren

- Großmann (1972), Funktionalanlysis I u. II,
- Werner (2005), Funktionalanalysis,
- Lax (2002), Functional Analysis,
- Fischer u. Kaul (2001), Mathematik für Physiker, Band 1,
- Fischer u. Kaul (1998), Mathematik für Physiker, Band 2,
- Voigt u. Wloka (1975), Hilberträume und elliptische Differentialoperatoren,
- Gilkey (1995), Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem,
- Booß (1977), Topologie und Analysis.

E Pseudodifferential-Operatoren

Wir haben hier zur Erleicherung der Leser und Leserinnen den Abschnitt über Pseudodifferential-Operatoren aus der Veröffentlichung des Autors Schiekel (2011), S. 327 ff., auch in dieses Manuskript eingefügt.

Im Anschluß daran haben wir noch einen Abschnitt über elliptische Komplexe und die Hodge-Zerlegung von elliptischen Komplexen aufgenommen.

In diesem Kapitel soll eine einfache Einführung in einige Grundgedanken der Sobolev-Räume und der Pseudodifferential-Operatoren gegeben werden. Das Ziel ist die Identifizierung der elliptischen Pseudodifferential-Operatoren auf Sobolev-Räumen als Fredholm-Operatoren. Über den Index der Fredholm-Operatoren ist dann die Verbindung zwischen der Analysis der elliptischen Pseudodifferential-Operatoren und der Topologie hergestellt, die letztlich zu den berühmten Indexsätzen von Atiyah-Singer et al. führt.

Dieses Kapitel stützt sich hauptsächlich auf Gilkey (1995). Daneben wurden wurden herangezogen: Alinhac u. Gérard (2007), Wong (1999), Voigt u. Wloka (1975), Booß (1977), Werner (2005), Dobrowolski (2006), Fischer u. Kaul (1998), Großmann (1972).

Alinhac u. Gérard (2007) und Wong (1999) sind für die Theorie der Pseudodifferential-Operatoren eine gute Ergänzung zu der sehr knappen und dichten Darstellung von Gilkey (1995).

E.1 Schwartz-Raum und Fouriertransformation

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M entspricht lokal einem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$. Um die folgenden Betrachtungen möglichst einfach zu halten, werden wir hier nur Operatoren im $\mathbb{R}^n$ betrachten. Die Erweiterung auf allgemeine n-dimensionale Mannigfaltigkeiten ist unproblematisch und findet sich etwa in Gilkey (1995), Alinhac u. Gérard (2007).

Für partielle Differential-Operatoren (PDO) der Ordnung d auf dem $\mathbb{R}^n$ führt man die übliche Multiindex-Schreibweise ein:

$$x := (x^1, \dots, x^n) \ ,$$

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n! \ ,$$

$$\beta \leq \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \beta_j \leq \alpha_j \ , \quad \text{für } j = 1, \dots, n \ ,$$

$$D_{x^j} := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j}\,, \quad \text{für } j = 1, \ldots, n\,,$$

$$D_x^\alpha := \prod_{j=1}^{n} D_{x^j}^{\alpha_j}\,,$$

$$P(x, D) := \sum_{|\alpha|=0}^{d} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha\,. \tag{E.1.1}$$

Für einen linearen PDO 2. Ordnung sieht das ausführlich aufgeschrieben so aus:

$$P(x, D) = a_0(x) + \sum_{j=1}^{n} a_1^j(x)\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^{n} a_2^{jk}(x)\,(-1)\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}\,. \tag{E.1.2}$$

Hierbei wurde die Multiindex-Schreibweise vereinfacht zu:

$$a_0 := a_{|\alpha|=0} := a_{(0,\ldots,0)}\,,$$

$$a_1^j := a_{|\alpha|=1}^j := a_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}\,,$$

$$a_2^{jk} := a_{|\alpha|=2}^{jk} := \begin{cases} a_{(0,\ldots,0,2,0,\ldots,0)} & \text{für } j = k\,, \\ a_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)} & \text{für } j \neq k\,. \end{cases}$$

Von diesem Typ ist z.B. der in der Physik häufig auftauchende Laplace-Operator

$$L_x = -\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} - \sum_{j=1}^{n} p^j(x)\,\frac{\partial}{\partial x^j} - q(x)\,. \tag{E.1.3}$$

Für das Differenzieren von Produkten von Funktionen in $\mathbb{R}^n$ gilt eine verallgemeinerte Leibniz-Formel, die wie im gewöhnlichen Fall mittels vollständiger Induktion bewiesen wird. Seien α, β Multiindizes, dann ist:

$$D_x^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\,(D_x^\beta f(x))\,(D_x^{\alpha-\beta} g(x))\,. \tag{E.1.4}$$

Eine Standard-Methode der Behandlung von Differentialgleichungen ist die Fouriertransformation, da sich hierdurch Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umwandeln lassen. Die üblichste Fouriertransformation ist eine Abbildung $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist L^1 der Raum der Lebesgue-meßbaren komplex-wertigen Funktionen mit der 1-Norm, d.h. $\|f\|_1 = \int dt\,|f(t)|$, und C der Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen. Aus funktionalanalytischer Sicht ist es jedoch günstiger die Fouriertransformation als eine symmetrische Abbildung zwischen zwei gleichen Räumen zu definieren. Optimal ist dabei eine Einschränkung auf eine Teilmenge aus L^1, den sog. Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nämlich den Teilraum der komplex-wertigen glatten Funktionen, d.h. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ Funktionen, die für $|x| \to \infty$ schneller als jedes Polynom in x abfallen:

Definition E.1.1 *Der Raum der schnellfallenden Funktionen (für $|x| \to \infty$) heißt Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\, D_x^\alpha f(x) \leq C_{m,\alpha}(1+|x|)^{-m}\,, \textit{für alle}\, m, \alpha\}\;.$$

Definition E.1.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt der Raum der C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger $C_0^\infty(\Omega)$, bzw. Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\Omega)$:*

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \,|\, supp(f) := \overline{\{x \,|\, f(x) \neq 0\}}\ \textit{ist kompakt}\}\;.$$

Offensichtlich ist $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Häufig wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß $\mathcal{S}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist. Dies zeigt man üblicherweise dadurch, daß man nachweist, daß $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist .

Satz E.1.3 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$.*

Beweis. Hier folgen wir dem Beweis in Großmann (1972) (S. 73 ff.), mit $n = 1$ und $\Omega = \mathbb{R}^1$. Für einen alternativen Beweis siehe etwa Werner (2005) (S. 81 ff., 203 ff).

1. Die Menge der meßbaren, beschränkten Funktionen mit endlichem Träger ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$, denn:
sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig, dann definieren wir eine Folge beschränkter, meßbarer Funktionen mit beschränktem Träger $g_n(x) := f(x)$ für $x \in [-n, n]$ und $|f(x)| \leq n$, bzw. $g_n(x) := 0$ ansonsten. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - g_n(x)|^2 = 0 \quad \text{fast überall .}$$

Außerdem ist $|f(x)|^2$ für $|f(x) - g_n(x)|^2 \leq |f(x)|^2$ eine Lebesgue-integrierbare Majorante. Also können wir mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue die Integration und Grenzwertbildung miteinander vertauschen und erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = \lim_{n\to\infty} \int |f(x) - g_n(x)|^2\, dx = \int \lim_{n\to\infty} |f(x) - g_n(x)|^2\, dx = 0\;.$$

2. Die Menge der Stufenfunktionen $h(x) := \sum_{i=1}^n a_i \chi(\Omega_i)$ mit den charakteristischen Funktionen $\chi(\Omega_i)$ auf Ω_i (d.h. $\chi(\Omega_i) = 1$ für $x \in \Omega_i$, bzw. $\chi(\Omega_i) = 0$ für $x \notin \Omega_i$) ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$, denn:
sei $g(x)$ eine beliebige meßbare, beschränkte Funktion mit endlichem Träger, so soll diese Funktion durch eine Stufenfunktionen approximiert werden. Wenn $-C \leq g(x) \leq +C$ ist, dann sei $\{a_i \,|\, i = 1, \ldots, n+1\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[-C, +C]$ mit $\epsilon := \max_{i=1,\ldots,n} |a_{i+1} - a_i|$. Die Mengen Ω_i seien definiert als $\Omega_i := \{x \,|\, x \in \text{supp}\, g,\, a_i \leq g(x) < a_{i+1},\, i = 1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$|g(x) - h(x)| = |g(x) - a_i| < |a_{i+1} - a_i| = \epsilon \quad \text{für } x \in \Omega_i \quad \Rightarrow$$

$$\|g - h\|^2 = \int |g(x) - h(x)|^2 dx < \epsilon \cdot \text{supp}\, g\;.$$

Sei nun $f \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig, dann gilt mit 1.:

$$\|f - h\| \leq \|f - g\| + \|g - h\| \leq C \cdot \epsilon \ ,$$

also ist die Menge der Stufenfunktionen dicht in $L^2(\mathbb{R})$.

3. Jetzt soll eine Stufenfunktion durch eine $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktion approximiert werden. Dabei reicht es, eine beliebige charkteristische Funktion $\chi([a,b])$ durch eine $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktion zu approximieren. Zunächst soll die linke Seite der Rechteckfunktion $\chi([a,b])$ durch eine $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktion angenähert werden. Als Grundfunktion der folgenden Konstruktion wählt man die unendlich differenzierbare Funktion $\exp(-\frac{1}{x})$:

$$u_n(x) := \frac{1}{N} \int\limits_a^x \exp(-\frac{1}{\xi - a} + \frac{1}{\xi - (a + \frac{1}{n})})\, d\xi \quad \text{für } x \in [a, a + \frac{1}{n}] \ .$$

N ist ein Normierungsfaktor, so daß $\frac{1}{N} \int_a^{a+\frac{1}{n}} u_n(x)\, dx = 1$ ist. Zunächst einmal sieht man, daß $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_n(a) = 0$ und $u_n(a + \frac{1}{n}) = 1$. An den Stellen $x = a$ und $x = a + \frac{1}{n}$ sind alle Ableitungen von $u_n(x)$ gleich 0, denn:

$$\lim_{\substack{x-a \to 0 \\ x-a>0}} \exp(-\frac{1}{x-a}) = 0 \ , \qquad \lim_{\substack{x-(a+\frac{1}{n}) \to 0 \\ x-(a+\frac{1}{n})<0}} \exp(\frac{1}{x - (a + \frac{1}{n})}) = 0 \ .$$

Außerdem gilt im Intervall $[a, a + \frac{1}{n}]$:

$$\lim_{n\to\infty} \|\chi - u_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} |\chi(x) - u_n(x)|^2 dx \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} |\chi(x)|^2 dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

In gleicher Weise kann die Rechteckfunktion $\chi(x)$ auf der rechten Seite des Intervalls $[a,b]$ durch eine Funktion $v_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ approximiert werden. Also ist $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in der Menge der Rechteckfunktionen und damit dicht in der Menge der Stufenfunktionen und damit dicht in der Menge der meßbaren, beschränkten Funktionen mit endlichem Träger und damit dicht in $L^2(\mathbb{R})$. □

Im folgenden betrachten wir die Fouriertransformation als eine Abbildung zwischen zwei Schwartzräumen: $\mathcal{F}:\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \ , \quad \xi(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, e^{ix\xi} \ , \tag{E.1.5}$$

$$\tilde{f}(\xi) := \mathcal{F}(u)(\xi) := \int \xi^*(x) f(x)\, d^n x = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi}\, f(x)\, d^n x\ , \tag{E.1.6}$$

$$g(x) := \mathcal{F}^{-1}(\tilde{g})(x) := \int \xi(x)\tilde{g}(\xi)\, d^n\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \tilde{g}(\xi)\, d^n\xi\ . \tag{E.1.7}$$

Weiter bezeichne $* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Faltung zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$(f * g)(x) := \int f(x-y)g(y)\, d^n y = \int f(y)g(x-y)\, d^n y\ .$$

Satz E.1.4 *a)* $f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi = (2\pi)^{-n} \int d^n y\, e^{i(x-y)\xi}\, f(y)\, d^n\xi$.

b) $D^\alpha_\xi \tilde{f}(\xi) = (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi}\, x^\alpha f(x)\, d^n x$,

$\xi^\alpha \tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi}\, D^\alpha_x f(x)\, d^n x$,

$D^\alpha_x f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \xi^\alpha \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi$,

$x^\alpha f(x) = (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, D^\alpha_\xi \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi$.

c) $\tilde{f} \cdot \tilde{g} = \mathcal{F}(f * g)$, *und* $\tilde{f} * \tilde{g} = \mathcal{F}(f \cdot g)$.

d) $\mathcal{F}\mathcal{F}\, f(x) = f(-x)$.

e) Plancherel-Formel: $\langle f \mid g\rangle_{L_2} = \langle \tilde{f} \mid \tilde{g}\rangle_{L_2}$.

Beweis. a)-d) siehe etwa Gilkey (1995), S. 4 ff., Werner (2005), S. 206 ff.

e) Da $\mathcal{S}$ dicht in L_2 liegt, kann man die auf $\mathcal{S}$ definierte Fouriertransformation auf L_2 ausdehnen und es gilt:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{f} \mid g\rangle_{L_2} &= \int [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int (e^{-ix\xi} f(x))^*\, d^m x]\, g(\xi)\, d^n\xi \\ &= \int f^*(x)\, [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{+ix\xi} g(\xi)\, d^n\xi]\, d^n x \\ &= \int f^*(x)\, [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi} g(-\xi)\, d^n\xi]\, d^n x \\ &= \langle f \mid \tilde{g}(-x)\rangle_{L_2} = \langle f \mid \mathcal{F} g(-x)\rangle_{L_2} \quad \Rightarrow \\ \langle \tilde{f} \mid \tilde{g}\rangle_{L_2} &= \langle f \mid \mathcal{F}\tilde{g}(-x)\rangle_{L_2} = \langle f \mid \mathcal{F}\mathcal{F} g(-x)\rangle_{L_2} = \langle f \mid g\rangle_{L_2}\ .\end{aligned}$$

□

E.2 Sobolev-Räume

Um bei Problemen der Variationsrechnung und der partiellen Differentialgleichungen zu umfassenderen Aussagen zu gelangen bedarf es sehr feiner Abschätzungen über das

Wachstumsverhalten der beteiligten Funktionen. Die Sobolev-Räume haben sich in dieser Hinsicht zu einem unerläßlichen Hilfsmittel der Analysis entwickelt. Wir verwenden hier nur die einfachste Form von Sobolev-Räumen $H_s(\mathbb{R}^n)$, die isomorph zu $L_2(\mathbb{R}^n)$ sind. Zu erweiterten Sobolev-Räumen der Form $H_{s,p}(\mathbb{R}^n)$, die isomorph zu $L_p(\mathbb{R}^n)$ sind, siehe etwaDobrowolski (2006), S. 89 ff.

Definition E.2.1 *Sei $s \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{S}$ und $\|f\|_s^2 := \int (1+|\xi|^2)^s |\tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi$, dann ist $H_s(\mathbb{R}^n)$ der Abschluß von $\mathcal{S}$ in der $\|\cdot\|_s$-Norm.*

Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, kann man $H_s(\mathbb{R}^n)$ auch als Abschluß von C_0^∞ in der $\|\cdot\|_s$-Norm betrachten. $H_0(\mathbb{R}^n)$ ist offensichtlich identisch mit $L_2(\mathbb{R}^n)$ Wegen der Plancherel-Formel der Fourier-Transformation ist $H_s(\mathbb{R}^n)$ isomorph zu $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit dem Integrationsmaß $(1+|\xi|^2)^s$.

Lemma E.2.2 *Sei $t < s$, dann ist $H_s \subset H_t$.*

Beweis. $t < s \;\Rightarrow\; (1+|\xi|^2)^t < (1+|\xi|^2)^s \;\Rightarrow\; \|f\|_t < \|f\|_s \;\Rightarrow\; H_s \subset H_t$. □

Lemma E.2.3 *Sei $s \in \mathbb{R}$, dann sind $\int (1+|\xi|^2)^s |\tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi$ und $\int (1+|\xi|)^{2s} |\tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi$ auf $H_s(\mathbb{R}^n)$ äquivalente $\|\cdot\|_s$-Normen.*

Beweis. 1. $(1+|\xi|^2)^s \leq (1+2|\xi|+|\xi|^2)^s = (1+|\xi|)^{2s}$,

2. sei $|\xi| < 1$: $(1+|\xi|)^{2s} = (1+2|\xi|+|\xi|^2)^s \leq (3+|\xi|^2)^s \leq 3^s(1+|\xi|^2)^s$,

sei $|\xi| \geq 1$: $(1+|\xi|)^{2s} = (1+2|\xi|+|\xi|^2)^s \leq (1+3|\xi|^2)^s \leq 3^s(1+|\xi|^2)^s$,

3. also ist $(1+|\xi|^2)^s \leq (1+|\xi|)^{2s} \leq 3^s(1+|\xi|^2)^s$, also führen beide Faktoren zu äquivalenten Normen. □

Lemma E.2.4 *Sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\|f\|_{D,k}$ mit $\|f\|_{D,k}^2 := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D_x^\alpha f\|^2$ eine zu $\|f\|_k$ äquivalente Norm auf $H_k(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. 1. $\frac{1}{k!}(1+|\xi|^2)^k = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!}(\frac{k!}{i!(k-i)!})|\xi|^{2i} \leq \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq (1+|\xi|^2)^k \quad \Rightarrow$

$\frac{1}{k!}\int (1+|\xi|^2)^k |\tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \int \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha \tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \int (1+|\xi|^2)^k |\tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi \quad \Rightarrow$

$\frac{1}{k!}\|f\|_k^2 \leq \int \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha \tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \|f\|_k^2$.

2. $\int |\xi^\alpha \tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \langle \xi^\alpha \tilde{f}(\xi) \mid \xi^\alpha \tilde{f}(\xi) \rangle = \langle \mathcal{F}(D_x^\alpha f(x)) \mid \mathcal{F}(D_x^\alpha f(x)) \rangle$

$= \langle D_x^\alpha f(x) \mid D_x^\alpha f(x) \rangle = \int |D_x^\alpha f(x)|^2 \, dx = \|D_x^\alpha f\|^2$.

3. $\frac{1}{k!}\|f\|_k^2 \leq \int \sum_{|\alpha|\leq k} |D_x^\alpha f(x)|^2 \, d\xi = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D_x^\alpha f\|^2 = \|f\|_{D,k}^2 \leq \|f\|_k^2$. □

Lemma E.2.5 *D_x^α ist eine stetige Abbildung von H_s in $H_{s-|\alpha|}$. ($H_s \subset H_{s-|\alpha|}$ wurde bereits oben gezeigt.)*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}$. Aus $|\xi^\alpha|^2 \leq |\xi|^{2|\alpha|} \leq (1+|\xi|^2)^{|\alpha|}$ folgt $|\xi^\alpha|^2(1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|} \leq (1+|\xi|^2)^s$.
$\|D_x^\alpha f\|_{s-|\alpha|}^2 = \int |\xi^\alpha \tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|} \, d\xi \leq \int |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi = \|f\|_s^2$.

Da H_s sie Abschließung von $\mathcal{S}$ in der $\|\cdot\|_s$ -Norm ist, folgt also $D_x^\alpha : H_s \to H_{s-|\alpha|}$. □

Eine weitere wichtige Norm in Sobolev-Räumen ist $\|f\|_{\infty,k}$. Mit Hilfe dieser Norm kann man sehr schön den Satz von Sobolev beweisen, der den Zusammenhang von $H_s(\mathbb{R}^n)$-Funktionen (z.B. als schwachen Lösungen von Differentialgleichungen) und $C^k(\mathbb{R}^n)$-Funktionen herstellt.

Definition E.2.6 *Sei* $\|f\|_{\infty,k} := \sup_{x\in(\mathbb{R}^m)} \sum_{|\alpha|\le k} |D_x^\alpha f(x)|$ *, für* $k \in \mathbb{N}$ *und* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*.*

Die Vervollständigung von $\mathcal{S}$ mit der $\|f\|_{\infty,k}$-Norm ist eine Teilmenge von $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Satz E.2.7 (Sobolev) *Sei* $k \in \mathbb{N}$*,* $f \in H_s(\mathbb{R}^n)$ *und* $s - k > \frac{n}{2}$*, dann ist* $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *und* $\|f\|_{\infty,k} \le c\|f\|_s$ *, d.h.* $H_s(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ *.*

Beweis. 1. sei zunächst $k = 0$ und $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt für $f(x)$:

$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} \tilde{f}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} \tilde{f}(\xi)(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\, d\xi$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$|f(x)|^2 \le \|f\|_s^2 \cdot \int (1 + |\xi|^2)^{-s}\, d\xi$. Wenn $2s > n$, dann ist $(1 + |\xi|^2)^{-s}$ integrabel und $c := \int (1 + |\xi|^2)^{-s}\, d\xi$. Also folgt:

$\|f\|_\infty^2 := \|f\|_{\infty,0}^2 := \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |f(x)|^2 \le c\|f\|_s^2$. Beide Normen sind stetig und $f \in \mathcal{S}$ ist gleichmäßig stetig in x, also kann die Ungleichung von $\mathcal{S}$ auf H_s ausgedehnt werden.

2. sei jetzt $k > 0$, $k \ge |\alpha|$ und $2(s - k) > n$, dann folgt wie oben:

$|D_x^\alpha f(x)|^2 \le \|D_x^\alpha f\|_{s-|\alpha|}^2 \cdot \int (1 + |\xi|^2)^{-(s-|\alpha|)}\, d\xi$. Wenn $2(s - k) > n$, dann ist $(1 + |\xi|^2)^{-2(s-|\alpha|)} \le (1 + |\xi|^2)^{-2(s-k)}$ integrabel und $c := \int (1 + |\xi|^2)^{-(s-k)}\, d\xi$.

$\|f\|_{\infty,|\alpha|}^2 = \|D_x^\alpha f\|_{\infty,0}^2 \le c_1 \|D_x^\alpha f\|_{s-|\alpha|}^2 \le c_1 c_2 \|f\|_s^2$.

Damit folgt, daß $[H_s(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_s] \subset [C^k(\mathbb{R}^n), \|f\|_{\infty,k}]$, wenn $s - k > \frac{n}{2}$ ist. □

Zentral für den Nachweis, daß elliptische Pseudodifferential-Operatoren auf Sobolev-Räumen Fredholm-Operatoren sind, ist der folgende Einbettungssatz von Rellich. Dieser Satz argumentiert mit C_0^∞-Funktionen, da diese ja dicht in $\mathcal{S}$ und damit dicht in H_s liegen.

Satz E.2.8 (Rellich) *Sei* $t < s$ *und* $K \subset \mathbb{R}^n$ *eine kompakte Menge, dann ist die Einbettung von* $H_s(K)$ *in* $H_t(K)$ *kompakt. Genauer gesagt: sei* $\{f_n\}$ *eine in* $H_s(K)$ *beschränkte Folge von* C_0^∞*-Funktionen, d.h.* $\|f_n\|_s < c$ *und* $f_n \in C_0^\infty(K)$*, dann gibt es eine Teilfolge von* $\{f_n\}$*, die in* $H_t(K)$ *konvergiert.*

Beweis. 1. Zunächst soll gezeigt werden, daß es in $H_s(K)$ eine Teilfolge von $\{f_n\}$ gibt, hier $\{f_{n_i}\}$ genannt, für welche die fouriertransformierte Folge $\tilde{f}_{n_i}$ gleichmäßig in $H_s(K)$ konvergiert. Sei $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ eine Funktion, die auf einer Umgebung von K identisch 1 ist, dann folgt aus $f_n = g \cdot f_n$ auf K: $\tilde{f}_n = \tilde{g} * \tilde{f}_n$ und damit

$$|\partial_{\xi_j} \tilde{f}_n(\xi)| = |\int \partial_{\xi_j} \tilde{g}(\xi - \eta) \tilde{f}_n(\eta)\, d\eta| \le \int |\partial_{\xi_j} \tilde{g}(\xi - \eta)| \cdot |\tilde{f}_n(\eta)|\, d\eta\ .$$

Diesen Ausdruck kann man mittels der folgenden Funktion $h_j(\xi)$ weiter abschätzen:

$$h_j(\xi) := [\int |\partial_{\xi_j}\tilde{g}(\xi-\eta)|^2 \cdot (1+|\eta|^2)^{-s}]^{\frac{1}{2}} \;, \quad h_j := \max_{\xi\in K} h_j(\xi) \;.$$

$$\begin{aligned}
|\partial_{\xi_j}\tilde{f}_n(\xi)| &\leq \int |\partial_{\xi_j}\tilde{g}(\xi-\eta)|(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}} \cdot (1+|\eta|^2)^{+\frac{s}{2}}|\tilde{f}_n(\eta)|\,d\eta \\
&\leq [\int |\partial_{\xi_j}\tilde{g}(\xi-\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{-s}\,d\eta]^{\frac{1}{2}} \cdot [\int (1+|\eta|^2)^{+s}|\tilde{f}_n(\eta)|^2\,d\eta]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq h_j(\xi)\cdot \|f_n\|_s \leq h\cdot c \;.
\end{aligned}$$

Ebenso kann $|\tilde{f}_n(\xi)|$ abgeschätzt werden.

Das bedeutet nun, daß $\tilde{f}_n$ ebenso wie f_n eine $C_0^\infty(K)$-Funktion ist und weiter, daß $\{\tilde{f}_n\}$ eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Funktionenmenge darstellt. Mit dem Satz von Arzelà-Ascoli (Satz D.3.4) folgt, daß es eine konvergente Teilfolge $\{\tilde{f}_{n_i}\}$, bzw. $\{f_{n_i}\}$ auf $H_s(K)$ gibt.

2. Nachdem geklärt ist, daß eine beschränkte Folge $\{f_n\}$ auf $H_s(K)$ eine konvergente Teilfolge $\{f_{n_i}\}$ enthält, soll jetzt gezeigt werden, daß diese konvergente Teilfolge nicht nur in $H_s(K)$, sondern auch in $H_t(K)$ mit $t < s$ konvergiert. Wir bezeichnen der Einfachheit halber $\{f_{n_i}\}$ wieder als $\{f_n\}$ und wollen nachweisen, daß diese Folge $\{f_n\}$ auch in $H_t(K)$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu zerlegt man das Integral $\|f_i - f_k\|_t^2$ in zwei Anteile, die dann einzeln abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
\|f_i - f_k\|_t^2 &= \int |\tilde{f}_i(\xi)-\tilde{f}_k(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^t\,d\xi \\
&= \int\limits_{|\xi|\leq r} |\tilde{f}_i(\xi)-\tilde{f}_k(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^t\,d\xi + \int\limits_{|\xi|\geq r} |\tilde{f}_i(\xi)-\tilde{f}_k(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^t\,d\xi \;.
\end{aligned}$$

Für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ wählt man $i > n_0$, $k > n_0$ so, daß $|\tilde{f}_i(\xi) - \tilde{f}_k(\xi)|^2 < \epsilon$ ist, und man wählt den Radius r so, daß $(1+r^2)^{t-s} \leq \epsilon$ gilt. Dann folgt für das erste Integral:

$$\int\limits_{|\xi|\leq r} |\tilde{f}_i(\xi)-\tilde{f}_k(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^t\,d\xi \leq (1+r^2)^t\cdot\epsilon\cdot \int\limits_{|\xi|\leq r} d\xi \;,$$

und für das zweite Integral:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\xi|\geq r} |\tilde{f}_i(\xi)-\tilde{f}_k(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^t\,d\xi &\leq (1+|r|^2)^{t-s} \int\limits_{|\xi|\geq r} |\tilde{f}_i(\xi)-\tilde{f}_k(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi \\
&\leq (1+|r|^2)^{t-s}\cdot \|f_i - f_k\|_s^2 \leq \epsilon\cdot\|2f_i\|_s^2 \leq \epsilon\cdot 4c^2 \;.
\end{aligned}$$

Also wird $\|f_i - f_k\|_t^2$ beliebig klein und damit ist $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge in $H_t(K)$. □

Lemma E.2.9 *a. Seien $f, g \in \mathcal{S}$, dann dann man H_{-s} im folgenden Sinn als einen Dualraum von H_s ansehen: $|\langle f \mid g\rangle_{L_2}| \leq \|f\|_s \|g\|_{-s}$.*

b. Zu jedem $f \in \mathcal{S}$ gibt es ein $g \in \mathcal{S}$, so daß $\langle f \mid g\rangle_{L_2} = \|f\|_s \|g\|_{-s}$.

c. $\|f\|_s = \sup_{g \in H_{-s}, g \neq 0} \frac{|\langle f | g\rangle_{L_2}|}{\|g\|_{-s}}$.

Beweis. a.

$$
\begin{aligned}
|\langle f \mid g\rangle_{L_2}|^2 = |\langle \tilde{f} \mid \tilde{g}\rangle_{L_2}|^2 = |\int d\xi\, \tilde{f}^*(\xi)\tilde{g}(\xi)|^2 &\leq \int d\xi\, |\tilde{f}(\xi)|^2 |\tilde{g}(\xi)|^2 \\
&= \int d\xi\, |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s |\tilde{g}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} \\
&\leq \int d\xi\, |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \cdot \int d\xi\, |\tilde{g}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} \\
&= \|f\|_s^2 \cdot \|g\|_{-s}^2 \,.
\end{aligned}
$$

b. Sei $\tilde{g}(\xi) := \tilde{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^s$, dann ist

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{-s}^2 &= \int d\xi\, |\tilde{g}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} = \int d\xi\, |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{2s} (1+|\xi|^2)^{-s} \\
&= \int d\xi\, |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s = \|f\|_s^2 \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\langle f \mid g\rangle_{L_2}| = |\langle \tilde{f} \mid \tilde{g}\rangle_{L_2}| &= |\int d\xi\, \tilde{f}^*(\xi)\tilde{g}(\xi)| \\
&= |\int d\xi\, \tilde{f}^*(\xi)\tilde{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^s| = \|f\|_s^2 \,.
\end{aligned}
$$

Also ist $|\langle f \mid g\rangle_{L_2}| = \|f\|_s^2 = \|f\|_s \cdot \|g\|_{-s}$.

c. Folgt unmittelbar aus a. und b. □

Eine häufig im Zusammenhang mit Sobolev-Räumen verwendete Ungleichung stammt von Peetre:

Lemma E.2.10 (Peetre) *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $s \in \mathbb{R}$, dann gilt:*
$(1+|x+y|)^s \leq (1+|x|)^s (1+|y|)^{|s|}$.

Beweis. 1. sei $s \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
&(1+|x+y|) \leq (1+|x|+|y|) \leq (1+|x|)(1+|y|) \quad \Rightarrow \\
&(1+|x+y|)^s \leq (1+|x|)^s (1+|y|)^s \,,
\end{aligned}
$$

2. sei $s < 0$, dann verwenden wir die obige Ungleichung mit $x + y =: u$ und $y =: -v$ und erhalten:

$$(1 + |u|)^{-s} \leq (1 + |u + v|)^{-s}(1 + |v|)^{-s} ,$$

$$(1 + |u + v|)^{s} \leq (1 + |u|)^{s}(1 + |v|)^{-s} = (1 + |u|)^{s}(1 + |v|)^{|s|} . \qquad \square$$

E.3 Pseudodifferential-Operatoren

Die Geschichte der Pseudodifferential-Operatoren (ΨDO) ist historisch gesehen zunächst eine Geschichte langer und mühsamer Untersuchungen von singuären Integral-Operatoren (SIO). Da die üblichen Greenfunktionen der Physik gerade SIO sind, ist dieses Thema auch für Physiker hoch bedeutsam. Die Arbeiten an SIO begannen im Jahr 1909 durch Lebesgue. Die nächsten wichtigen Schritte waren die Einführung des *Index* von Integral-Fredholm-Operatoren durch Fritz Noether (1921) und des *Symbols* von SIO durch Solomon Mikhlin (1936). Anfang der 1950'er Jahre arbeitete Antoni Zygmund mit seinem Studenten Alberto Calderón an einer Verallgemeinerung der bislang untersuchten SIO, den später so benannten Calderón-Zygmund-Operatoren. Und erst 1965 wurden die tieferen Zusammenhänge zwischen den PDO und den SIO durch Kohn und Nirenberg erkannt, die dann zusammen mit Hörmander u.a. die heutige Theorie der ΨDO begründet und ausgebaut haben. Seither stellen die ΨDO die Grundlage zur Behandlung linearer, partieller Differential- und Integral-Operatoren dar.

Eine weitere Verallgemeinerung der ΨDO sind die Fourierintegral-Operatoren (FIO), die insbesondere bei der Behandlung von hyperbolischen PDO zur Anwendung kommen.

Sei $P(x, D) := \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha$ ein linearer PDO der Ordnung d auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann kann man mittels der Fouriertransformation zur folgenden Darstellung von $P(x, D)$ gelangen:

$$\begin{aligned}
(P(x,D)f)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha f(x) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x)\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \xi^\alpha \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \Big(\sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha\Big)\, \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \sigma(x,\xi) \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi \ , \qquad \text{(E.3.1)}
\end{aligned}$$

$$\sigma(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \ . \qquad \text{(E.3.2)}$$

Man nennt $\sigma(x,\xi)$ das *Symbol* des Operators $P(x,D)$. Dieses Symbol eines linearen PDO ist ein Polynom des Grades d in ξ. Der in ξ^d homogene Teil des Symbols, also $\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$, heißt *Hauptteil* des Symbols.

Die Verallgemeinerung zu Pseudodifferential-Operatoren (ΨDO) wird dadurch vorgenommen, daß man in E.3.2 jetzt auch gewisse Klassen nichtpolynomialer Symbole $\sigma(x,\xi)$ zuläßt. Es gibt eine ganze Reihe verschiedener solcher Symbolklassen - siehe etwa Taylor (1996b), S. 1 ff. Allen diesen Symbolklassen ist gemeinsam, daß $\sigma(x,\xi)$ in ξ für $|\xi|\to\infty$ polynomial anwächst oder abfällt und daß die Variation in x schwach genug ist, um eine Trennung der Fouriertransformierten in 'Amplitude' $\sigma(x,\xi)$ und 'Phase' $e^{ix\xi}$ zu rechtfertigen. Für unsere Zwecke genügt die einfache Symbolklasse S^d:

Definition E.3.1 *$S^d \equiv S^d(K)$ ist die Menge aller Symbole $\sigma(x,\xi)$, so daß σ glatt ist in (x,ξ), σ in x einen kompakten Träger $K\subset\mathbb{R}^n$ hat, also $\sigma: K\times\mathbb{R}^n\to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\times C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und σ in ξ folgende Wachstums- oder Abfall-Bedingung erfüllt:*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{d-|\beta|} \,. \tag{E.3.3}$$

$S^{-\infty}$ bezeichne die Menge aller Symbole $\sigma(x,\xi)$, die in ξ schneller als jedes Polynom abfallen, d.h. die bzgl. ξ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind.

Ψ^d bezeichne dann der Raum der ΨDO P_σ mit $\sigma\in S^d$:

$$P_\sigma f(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\,\sigma(x,\xi)\tilde f(\xi)\,d^n\xi \,. \tag{E.3.4}$$

Wesentlich für die hier verwendete Symbolklasse ist die Beschränkung auf einen kompakten Träger in der ersten Variablen des Symbols. Man kann auch Symbolklassen auf dem kompletten $\mathbb{R}^n$ definieren, benötigt dann aber Zusatzbedingungen für den Abfall des Symbols in der ersten Variablen im Unendlichen - siehe Shubin (2001).

Da $\tilde f(\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\sigma(x,\xi)\in S^d$ höchstens polynomial wächst existiert das Integral E.3.4 und $P_\sigma:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiter unten werden wir die Definition von P_σ auf H_s ausdehnen.

Weiter folgt unmittelbar $d_1<d_2 \;\Rightarrow\; S^{d_1}\subset S^{d_2}$.

Ein Beispiel für ein Symbol aus $S^{-\infty}$ ist $\sigma(x,\xi) := e^{-|\xi|^2}$.

Das Symbol eines linearen PDO der Ordnung d, also $\sigma(x,\xi)=\sum_{\alpha,|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$ gehört zu S^d.

Lemma E.3.2 *a. $\sigma(x,\xi)\in S^d$, dann ist $D_x^\gamma D_\xi^\delta\sigma(x,\xi)\in S^{d-|\delta|}$.*

b. $\sigma_1(x,\xi)\in S^{d_1}$ und $\sigma_2(x,\xi)\in S^{d_2}$, dann ist $\sigma_1(x,\xi)\cdot\sigma_2(x,\xi)\in S^{d_1+d_2}$.

Beweis. a.

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha D_\xi^\beta(D_x^\gamma D_\xi^\delta\sigma(x,\xi))| &= |D_x^{\alpha+\gamma}D_\xi^{\beta+\delta}\sigma(x,\xi)|\\ &\le C_{\alpha+\gamma,\beta+\delta}(1+|\xi|)^{d-|\beta+\delta|} \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{(d-|\delta|)-|\beta|} \,.\end{aligned}$$

b.

$$
\begin{aligned}
|D_x^\alpha D_\xi^\beta(\sigma_1(x,\xi)\sigma_2(x,\xi))| &= |D_x^\alpha \sum_{\delta\le\beta} \binom{\beta}{\delta} (D_\xi^\delta \sigma_1(x,\xi))\,(D_\xi^{\beta-\delta}\sigma_2(x,\xi))| \\
&= |\sum_{\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \sum_{\delta\le\beta} \binom{\beta}{\delta} (D_x^\gamma D_\xi^\delta \sigma_1(x,\xi))\,(D_x^{\alpha-\gamma} D_\xi^{\beta-\delta}\sigma_2(x,\xi))| \\
&\le \sum_{\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \sum_{\delta\le\beta} \binom{\beta}{\delta} |D_x^\gamma D_\xi^\delta \sigma_1(x,\xi)|\,|D_x^{\alpha-\gamma} D_\xi^{\beta-\delta}\sigma_2(x,\xi)| \\
&\le \sum_{\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \sum_{\delta\le\beta} \binom{\beta}{\delta} C_{\gamma,\delta}(1+|\xi|)^{d_1-|\delta|}\, C_{\alpha-\gamma,\beta-\delta}(1+|\xi|)^{d_2-|\beta-\delta|} \\
&\le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{d_1+d_2-|\beta|}\ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Daß D_x^α eine stetige Abbildung von H_s in $H_{s-|\alpha|}$ ist, wurde ja schon oben (Lemma E.2.5) gezeigt. Diese Aussage soll jetzt für beliebige ΨDO verallgemeinert werden.

Satz E.3.3 *Sei $\sigma \in S^d$, $P_\sigma \in \Psi^d$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\|P_\sigma f\|_{s-d} \le C\|f\|_s$ und P_σ läßt sich erweitern zu einer stetigen Abbildung $P_\sigma : H_s \to H_{s-d}$.*

Beweis. Wie alle relevanten Beweise im Zusammenhang mit Sobolev-Räumen und ΨDO besteht auch dieser Beweis aus einer Reihe sorgfältiger Abschätzungen.

1. Sei $q(\zeta,\xi)$ die Fouriertransformierte des Symbols $\sigma(x,\xi) \in S^d$ bzgl. des ersten Arguments, also $q(\zeta,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K e^{-ix\zeta}\sigma(x,\xi)\,dx$. Dann folgt für die Fouriertransformierte von P_σ:

$$
\mathcal{F}(P_\sigma f)(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_K e^{-ix\zeta} \int e^{ix\xi}\sigma(x,\xi)\tilde{f}(\xi)\,d\xi\,dx\ .
$$

Da $\sigma(x,\xi)$ in x einen kompakten Träger K hat und $\tilde{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ schnellfallend ist, ist das Integral absolut konvergent, und man kann die Reihenfolge der Integrationen vertauschen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(P_\sigma f)(\zeta) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi}\tilde{f}(\xi) \int\limits_K e^{-ix\zeta}\sigma(x,\xi)\,dx\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{f}(\xi) \int\limits_K e^{-ix(\zeta-\xi)}\sigma(x,\xi)\,dx\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int q(\zeta-\xi,\xi)\tilde{f}(\xi)\,d\xi\ . \qquad \text{(E.3.5)}
\end{aligned}
$$

2. Weiter kann man jetzt $D_\zeta^\alpha D_\xi^\beta q(\zeta,\xi)$ abschätzen. Zunächst folgt unmittelbar aus der Definition von $\sigma(x,\xi) \in S^d$:

$$|D_x^\gamma x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{d-|\beta|} \ .$$

Mit dem Satz E.1.4 zur Fouriertransformation folgt:

$$\begin{aligned}|\zeta^\gamma D_\zeta^\alpha D_\xi^\beta q(\zeta,\xi)| &= |\zeta^\gamma D_\zeta^\alpha D_\xi^\beta \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_K e^{-ix\zeta}\sigma(x,\xi)\,dx| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} | \int\limits_K e^{-ix\zeta} D_x^\gamma (-1)^{|\alpha|} x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x,\xi)\,dx| \\ &\leq C_{\alpha,\beta,\gamma} \cdot \int\limits_K dx \cdot (1+|\xi|)^{d-|\beta|} \ .\end{aligned}$$

Nun ist $(1+|\zeta|)^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ ein Polynom in k und daher folgt:

$$\begin{aligned}(1+|\zeta|)^k |D_\zeta^\alpha D_\xi^\beta q(\zeta,\xi)| &= |(1+|\zeta|)^k D_\zeta^\alpha D_\xi^\beta q(\zeta,\xi)| \\ &\leq C_{\alpha,\beta,k} \cdot (1+|\xi|)^{d-|\beta|} \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$|D_\zeta^\alpha D_\xi^\beta q(\zeta,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,k} \cdot (1+|\zeta|)^{-k} (1+|\xi|)^{d-|\beta|} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ . \tag{E.3.6}$$

3. Sei $L(\zeta,\xi) := q(\zeta-\xi,\xi)(1+|\xi|)^{-s}(1+|\zeta|)^{s-d}$. Dann kann man $L(\zeta,\xi)$ mit E.3.6 ($\alpha=\beta=0$) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}|L(\zeta,\xi)| &\leq C_k(1+|\zeta-\xi|)^{-k}(1+|\xi|)^d(1+|\xi|^{-s})(1+|\zeta|)^{s-d} \\ &= C_k(1+|\zeta-\xi|)^{-k}(1+|\xi|)^{d-s}(1+|\zeta|)^{s-d} \ .\end{aligned}$$

Peetres Ungleichung E.2.10 für $x := \zeta$, $y := \xi - \zeta$ lautet

$$(1+|\xi|)^{d-s} \leq (1+|\zeta|)^{d-s}(1+|\xi-\zeta|)^{|d-s|}$$

und damit ergibt sich für $L(\zeta,\xi)$:

$$\begin{aligned}|L(\zeta,\xi)| &\leq C_k(1+|\zeta-\xi|)^{-k}(1+|\zeta|)^{d-s}(1+|\xi-\zeta|)^{|d-s|}(1+|\zeta|)^{s-d} \\ &= C_k(1+|\xi-\zeta|)^{|d-s|-k} \ .\end{aligned}$$

Weil nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig groß sein kann, ist $|L(\zeta,\xi)|$ integrabel für alle $k \geq k_0$, d.h. $\int |L(\zeta,\xi)|\,d\zeta < C_1$ und $\int |L(\zeta,\xi)|\,d\xi < C_2$.

4. Im nächsten Schritt soll $|\langle P_\sigma f \mid g\rangle|$ abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
|\langle P_\sigma f \mid g\rangle|^2 = |\langle \mathcal{F} P_\sigma f \mid \mathcal{F} g\rangle|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \Big| \int q^*(\zeta-\xi,\xi) \tilde{f}^*(\xi) \tilde{g}(\zeta)\, d\xi\, d\zeta \Big|^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \Big| \int L^*(\zeta,\xi) \tilde{f}^*(\xi)(1+|\xi|)^s (1+|\zeta|)^{d-s} \tilde{g}(\zeta)\, d\xi\, d\zeta \Big|^2 \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int |L(\zeta,\xi)|^2 \cdot |\tilde{f}^*(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s} \cdot |\tilde{g}(\zeta)|^2 (1+|\zeta|)^{2(d-s)}\, d\xi\, d\zeta \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int |L(\zeta,\xi)| \cdot |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s}\, d\xi\, d\zeta \\
&\qquad \cdot \int |L(\zeta,\xi)| \cdot |\tilde{g}(\zeta)|^2 (1+|\zeta|)^{2(d-s)}\, d\xi\, d\zeta \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{2n}} C_1 \int |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s}\, d\xi \cdot C_2 \int |\tilde{g}(\zeta)|^2 (1+|\zeta|)^{2(d-s)}\, d\zeta \\
&= C_1 C_2 \|f\|_s^2 \cdot \|g\|_{d-s}^2 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$|\langle P_\sigma f \mid g\rangle| \le C \|f\|_s \cdot \|g\|_{d-s}\ .$$

Aus Lemma E.2.9 c. folgt:

$$\|P_\sigma f\|_{s-d} = \sup_{g\in H_{-s}, g\neq 0} \frac{|\langle P_\sigma f \mid g\rangle|}{\|g\|_{d-s}} \le \sup_{g\in H_{-s}, g\neq 0} \frac{C\|f\|_s \cdot \|g\|_{d-s}}{\|g\|_{d-s}} = C\|f\|_s\ . \qquad \square$$

Dieser Satz klärt jetzt auch die Eigenschaften von ΨDO der Klasse $\Psi^{-\infty}$, d.h. P_σ mit in ξ schnellfallendem $\sigma(x,\xi) \in S^{-\infty}$. Sei also $d = -\infty$, dann ist $P_\sigma : H_s \to H_{s-d} = H_\infty$ und aus dem Sobolev-Satz (Satz E.2.7) folgt wegen $\infty > k + \frac{n}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$: $P_\sigma(H_s) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Operatoren aus $\Psi^{-\infty}$ sind also *glättend*. Darüber hinaus vermitteln $\Psi^{-\infty}$-Operatoren stetige Abbildungen von H_s nach H_t mit beliebigem $s,t \in \mathbb{R}$, denn es gilt ja $P_\sigma : H_s \to H_\infty \subset H_t$ und $P_\sigma : H_t \to H_\infty \subset H_s$.

Lemma E.3.4 *Der wichtige Zusammenhang mit der Funktionalanalysis ergibt sich jetzt sofort mit Hilfe des Satzes von Rellich (Satz E.2.8): $\Psi^{-\infty}$-Operatoren sind kompakte Operatoren in H_s.*

Beweis. sei $P_\sigma \in \Psi^{-\infty}$, dann können wir für $P_\sigma : H_s \to H_s$ auch schreiben

$$H_s \xrightarrow{P_\sigma} H_{s-1} \xrightarrow{\hat{1}} H_s$$

Da $P_\sigma : H_s \to H_{s-1}$ stetig ist und die Einbettung $\hat{1} : H_{s-1} \to H_s$ kompakt ist, ist also auch $P_\sigma \circ \hat{1} : H_s \to H_s$ kompakt, das heißt $\Psi^{-\infty}$-Operatoren sind kompakte Operatoren in H_s. $\square$

Definition E.3.5 *a. Zwei Symbole σ, τ heißen äquivalent über Ω, kurz $\sigma \sim \tau$, wenn $(\sigma - \tau) \in S^{-\infty}(\Omega)$ ist.*

b. sei σ_j mit $j \in \mathbb{N}$ eine Folge von Symbolen $\sigma_j \in S^{d_j}$ mit einer absteigenden Folge $d_j \in \mathbb{R} \to -\infty$ gegeben (häufig wird $d_j = d - j$ gewählt). Dann heißt ein Symbol σ äquivalent zu $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j$, kurz $\sigma \sim \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j$, wenn für alle $k \geq 1$ gilt: $(\sigma - \sum_{j=1}^{k} \sigma_j) \in S^{d_{k+1}}$. Weil hierdurch das Verhalten der Symbole nur für $|\xi| \to \infty$ festgelegt wird, handelt es sich bei $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j$ i.a. um keine konvergente Reihe, sondern nur um eine asymptotische Reihe!

Mit dieser Definition ist festgelegt, wann ein Symbol äquivalent zu einer Symbolreihe ist. Aber gibt es denn überhaupt zu jeder Symbolreihe ein äquivalentes Symbol? Oder anders gefragt, ist die Algebra der Symbole abgeschlossen gegenüber der Reihenbildung? Das folgende Lemma bejaht die Frage mittels eines konstruktiven Beweises.

Lemma E.3.6 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $O \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $K \subset O$. Sei σ_j mit $j \in \mathbb{N}$ eine Folge von Symbolen $\sigma_j \in S^{d_j}(K)$ mit einer absteigenden Folge $d_j \in \mathbb{R} \to -\infty$, dann gibt es ein Symbol $\sigma \in S^{d_1}(O)$, so daß $\sigma \sim \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j$ ist.*

Beweis. sei $\psi(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ eine Abschneidefunktion um $\xi = 0$, d.h. $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\psi(\xi) = 0$ für $|\xi| \leq 1$, $\psi(\xi) = 1$ für $|\xi| \geq 2$. Diese Funktion ψ wird benutzt, um den $\sup_\xi \sigma_j(x, \xi)$ um $\xi = 0$ herauszuschneiden, und zwar für jedes σ_j mit wachsendem j einem größeren Bereich. Dazu wählen wir eine Folge $t_j \in \mathbb{R}$ mit $t_j \to 0$ und die Abschneidenfunktion $\psi(t_j \xi)$. Nun konstruieren wir ein Symbol $\sigma(x, \xi) := \sum_{j=1}^{\infty} \psi(t_j \xi) \sigma_j(x, \xi)$. Zunächst sieht man, daß der $\sup_x \sigma(x, \xi) \subset O$ ist. Weiter sieht man, daß wegen der mit j anwachsenden Abschneidefunktion für einen festen Wert von ξ nur endlich viele Summanden zur Reihe von σ beitragen - damit existiert die Summe und ist glatt in (x, ξ). Jetzt gilt für $j > 1$:

$$|\sigma_j(x, \xi)| \leq C_j (1 + |\xi|)^{d_j} = C_j (1 + |\xi|)^{d_1} (1 + |\xi|)^{d_j - d_1} .$$

Sei nun der feste Wert von ξ so groß gewählt, daß $(1 + |\xi|)^{d_j - d_1} \leq 2^{-j}$ ist, dann gilt:

$$|\sigma_j(x, \xi)| \leq 2^{-j} (1 + |\xi|)^{d_1} .$$

Nun kann man zu einer Teilfolge von t_j übergehen (wiederum einfach mit t_j bezeichnet), so daß auch

$$|\psi(t_j \xi) \sigma_j(x, \xi)| \leq 2^{-j} (1 + |\xi|)^{d_1} .$$

Summieren wir über j, so erhalten wir

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi(t_j \xi) \sigma_j(x, \xi) \leq C_1' (1 + |\xi|)^{d_1} ,$$

also ist $\sigma \in S^{d_1}$.
Das gleiche Argument können wir nun auch sukzessiv auf $\sum_{j=k}^{\infty} \psi(t_j \xi) \sigma_j(x, \xi)$ für alle

$k \geq 2$ anwenden, ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge der bisherigen Folge der t_j, und erhalten $\sum_{j=k}^{\infty} \psi(t_j\xi)\sigma_j(x,\xi) \in S^{d_k}$, etc.

Nun ist $(\psi(t_j\xi)\sigma_j(x,\xi) - \sigma_j(x,\xi)) \in S^{-\infty}$ und damit folgt:

$$\sigma(x,\xi) - \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(x,\xi) = \{\sum_{j=1}^{k}(\psi(t_j\xi)\sigma_j(x,\xi) - \sigma_j(x,\xi)) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \psi(t_j\xi)\sigma_j(x,\xi)\}$$

$$\in S^{-\infty} \cup S^{d_{k+1}} = S^{d_{k+1}} \; .$$

Damit ist $\sigma \in S^{d_1}$ äquivalent zu $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j$. □

Oben wurden die Sobolev-Räume $H_s(\mathbb{R}^n)$ über $\mathbb{R}^n$ als Abschluß von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, bzw. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, in der $\|\cdot\|_s$-Norm definiert. Im folgenden soll der betrachtete Definitionsbereich der Funktionenräume auf eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, bzw. eine offene Obermenge O mit $K \subset O \subset \bar{O} \subset \mathbb{R}^n$, eingeschränkt werden. Der Hintergrund für diese Konstruktion ist, daß man auf $\bar{O}$ eine Plateaufunktion definieren möchte, die auf K identisch 1 ist und dann bis zum Rand von $\bar{O}$ als C^∞-Funktion auf 0 abfällt.

Wenn man stattdessen die Theorie der ΨDO auf dem kompletten $\mathbb{R}^n$ definieren möchte benötigt man Zusatzbedingungen für den Abfall der Funktionen im Unendlichen, um die Konvergenz aller auftretenden Integrale zu gewährleisten - siehe Shubin (2001).

Definition E.3.7 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und O eine offene Menge mit $K \subset O \subset \bar{O} \subset \mathbb{R}^n$.*

a. $H_s(K)$ ist der Abschluß von $C_0^\infty(K)$, in der $\|\cdot\|_s$-Norm.

b. $f \in H_s(K)$ heißt glatt auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset K$, wenn für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ auch $\phi f \in C_0^\infty(\Omega)$ ist.

c. Ein Operator P heißt lokal, wenn $f = 0 \;\Rightarrow\; Pf = 0$, d.h. wenn P den Träger $\operatorname{supp} f$ nicht vergrößert.

c. Ein Operator P heißt pseudolokal, wenn $f \in C^\infty \;\Rightarrow\; Pf \in C^\infty$, d.h. wenn P den singulären Träger sing-supp f, d.h. jenen Bereich, in dem f nicht C^∞ ist, nicht vergrößert.

Zu diesen Definitionen einige Bemerkungen. Für die Funktion ϕ werden wir im folgenden häufig mit $\phi(x) \in C_0^\infty(\bar{O})$ eine sogenannte Plateaufunktion auf $\bar{O}$ wählen, d.h. $\phi(x) = 1$ auf K, die gerade die gewünschte Einschränkung vermittelt. Sei nun $\tau(x,\xi) := \phi(x)$ ein Symbol, dann ist $\tau \in S^0$ und $P_\tau \in \Psi^0$. Daraus folgt

$$P_\tau f(x) = P_\phi f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \tau(x,\xi) \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\, \phi(x) \tilde{f}(\xi)\, d^n\xi = \phi(x) \cdot f(x) \; .$$

Also ist der Operator P_ϕ, die Multiplikation mit $\phi(x)$, ein ΨDO der Ordnung 0 mit $P_\phi : H_s \to H_s$. Daher eignet sich die Multiplikation mit $\phi(x) \in C_0^\infty(\bar{O})$ zur Einschränkung von Funktionen auf $H_s(K)$.

Bevor wir uns der Frage der Pseudolokalität von ΨDO zuwenden können, benötigen wir eine Aussage über die Multiplikation von ΨDO.

Die Menge der PDO ist gegenüber wichtigen algebraischen Operationen wie etwa der Bildung von Inversen oder von Wurzeln nicht abgeschlossen. Der Kalkül der ΨDO wird gerade dadurch so bedeutsam, daß man in der Menge der ΨDO diese algebraischen Operationen vornehmen kann - allerdings nur mod $\Psi^{-\infty}$-Operatoren. Der folgende zentrale Satz zeigt, daß die Operationen der Multiplikation und Adjungation nicht aus der Menge der ΨDO herausführt.

Satz E.3.8 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und O eine offene Menge mit mit $K \subset O \subset \bar{O} \subset \mathbb{R}^n$. Seien $P_{\sigma_1} \in \Psi^{d_1}(K)$, $P_{\sigma_2} \in \Psi^{d_2}(K)$ und $f, g \in C_0^\infty(K)$, dann folgt:*

a. es gibt einen ΨDO $R_{\sigma_3} \in \Psi^{d_1+d_2}$ mit $R_{\sigma_3} f = P_{\sigma_1} P_{\sigma_2} f$ und

$$\sigma_3(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \sigma_1(x,\xi)) \, (D_x^\alpha \sigma_2(x,\xi)) \; . \tag{E.3.7}$$

b. es gibt einen ΨDO $P_{\sigma_3}^\dagger \in \Psi^{d_1}(O)$ mit $\langle P_{\sigma_1} f \mid g \rangle_{L_2} = \langle f \mid P_{\sigma_3}^\dagger g \rangle_{L_2}$ und

$$\sigma_3(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \sigma_1^*(x,\xi) \; . \tag{E.3.8}$$

Beweis. Die Beweise sind nicht schwierig, aber etwas technisch, deshalb sei hier auf die Literatur verwiesen: etwa Gilkey (1995), S. 17 ff., Alinhac u. Gérard (2007), S. 43 ff. □

Partielle Differentialoperatoren sind offensichtlich lokale Operatoren, ΨDO sind i.A. nicht lokal, da sie ja über die Fouriertransformation definiert sind und diese den Träger vergrößert. Man kann für ΨDO aber eine schwächere Eigenschaft als die Lokalität beweisen, nämlich die Pseudolokalität.

Lemma E.3.9 *ΨDO sind pseudolokal.*

Beweis. Sei $P_\sigma \in \Psi^d(K)$ und sei $f \in H_s(K)$ glatt auf jeder offenen Teilmenge $\Omega \subset K$, sei $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann gilt es zu zeigen, daß auch $P_\sigma f$ glatt auf Ω ist, d.h. daß $\psi P_\sigma f \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir wählen eine Plateaufunktion $\phi \in C_0^\infty(\bar{O})$, die auf supp ψ identisch 1 ist.

$$\psi P_\sigma f = \psi P_\sigma \phi f + \psi P_\sigma (1-\phi) f \; .$$

Man betrachte zunächst den ersten Term auf der rechten Seite: f glatt auf Ω bedeutet $\phi f \in C_0^\infty(\Omega)$, daraus folgt mit der Definition von P_σ, daß $P_\sigma \phi f \in C_0^\infty(\Omega)$ und daraus folgt, daß $\psi P_\sigma \phi f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Für den zweiten Term untersucht man das Symbol von $\psi P_\sigma(1-\phi)$. Sei $Q_q := P_\sigma(1-\phi(x))$, dann ist Q_q das Produkt zweier ΨDO, nämlich $P_\sigma \in \Psi^d(K)$ und $(1-\phi(x)) \in \Psi^d(K)$. Für das Symbol $q(x,\xi)$ folgt also:

$$q(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\leq d} d_\xi^\alpha \sigma(x,\xi) D_x^\alpha (1-\phi(x)) = 0 \ , \ x \in \operatorname{supp} \psi \ ,$$

da ja $\phi(x) = 1$ auf supp ψ. Für das Symbol des Operators $R_r := \psi(x) Q_q = \psi P_\sigma(1-\phi)$ gilt dann

$$r(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\leq d} d_\xi^\alpha \psi(x) D_x^\alpha q(x,\xi) \sim 0 \ , x \in \Omega \ .$$

Also ist $R_r \Psi^{-\infty}(\Omega)$ und damit $R_r f \in C_0^\infty(\Omega)$ und damit $\psi P_\sigma f \in C_0^\infty(\Omega)$. □

E.4 Elliptische Pseudodifferential-Operatoren

Definition E.4.1 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und O eine offene Menge mit $K \subset O \subset \bar{O} \subset \mathbb{R}^n$.*

Das Symbol $\sigma \in S^d(K)$ heißt elliptisch, wenn $|\sigma(x,\xi)|^{-1} \leq C_1(1+|\xi|)^{-d}$ für alle $x \in O$ und $|\xi| \geq C_0$.

Der ΨDO $P_\sigma \in \Psi^d(K)$ heißt elliptisch, wenn sein Symbol $\sigma(x,\xi) \in S^d(K)$ elliptisch ist.

Lemma E.4.2 *Sei $\phi(x) \in C_0^\infty(\bar{O})$ eine sogenannte Plateaufunktion auf $\bar{O}$, d.h. $\phi(x) = 1$ auf K. Das Symbol $\sigma \in S^d(K)$ ist genau dann ein elliptisches Symbol, wenn es ein Symbol $\tau(x,\xi) \in S^{-d}(K)$ gibt mit*

$$\begin{aligned} &a. \quad \phi(\sigma\tau - 1) \in S^{-\infty}(K) \quad \textit{und} \quad \phi(\tau\sigma - 1) \in S^{-\infty}(K)\,, \ \textit{oder} \\ &b. \quad \phi(\sigma\tau - 1) \in S^{-1}(K) \quad \textit{und} \quad \phi(\tau\sigma - 1) \in S^{-1}(K)\ . \end{aligned}$$

c. Seien $\sigma_d \in S^d(K)$ und $\sigma_{d-1} \in S^{d-1}(K)$ zwei Symbole, dann ist $\sigma_d + \sigma_{d-1}$ genau dann ein elliptisches Symbol, wenn σ_d ein elliptisches Symbol ist und die Addition weiterer Terme niedrigerer Ordnung, d.h. σ_{d-i} mit $i > 1$ ändert nichts an der Elliptizität.

Beweis. 1. sei das Symbol $\sigma \in S^d(K)$ elliptisch und sei $\psi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Regularisierungsfunktion um $\xi = 0$, d.h. $\psi(\xi) = 0$ für $|\xi| < C < C_0$ und $\psi(\xi) = 1$ für $|\xi| \geq C_0$. Da $\sigma \in S^d(K)$ elliptisch ist, gilt $\sigma(x,\xi)^{-1} \in S^{-d}(K)$ für alle $x \in O$ und $|\xi| \geq C_0$. Damit ist auch $\tau(x,\xi) := \psi(\xi)\phi(x)\sigma^{-1}(x,\xi) \in S^{-d}(K)$ und es gilt

$$\phi(x)(\sigma(x,\xi)\tau(x,\xi) - 1) \in S^{-\infty}(K) \quad \text{und} \quad \phi(x)(\sigma(x,\xi)\tau(x,\xi) - 1) \in S^{-\infty}(K)\ .$$

Also gilt a.

2. da $S^{-\infty}(K) \subset S^{-1}(K)$ folgt aus a. sofort b.

3. jetzt gelte b., d.h. $\phi(x)(\sigma(x,\xi)\tau(x,\xi)-1) \in S^{-1}(K)$, dann folgt $|\sigma(x,\xi)\tau(x,\xi)-1| \leq C_2(1+|\xi|)^{-1}$ für $x \in O$.

Wir wählen ξ so groß, daß $C_3 := C_2(1+|\xi|)^{-1} < 1$ ist, dann konvergiert die Neumann-Reihe gleichmäßig:

$$|\sum_{i=0}^{\infty}(1-\sigma\tau)^i| = |\frac{1}{1-(1-\sigma\tau)}| = |\frac{1}{\sigma\tau}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} C_3^i = \frac{1}{1-C_3} \ ,$$

und es folgt

$$|\sigma^{-1}| \leq |\tau| \cdot |(\sigma\tau)^{-1}| \leq C_3(1+|\xi|)^{-d} \cdot \frac{1}{1-C_3} =: C_4(1+|\xi|)^{-d} \ .$$

Also ist das Symbol $\sigma \in S^d(K)$ elliptisch.

4. mit b. folgt c., denn

$$\phi((\sigma_d + \sigma_{d-1})\tau - 1) = \phi(\sigma_d\tau - 1) + \phi(\sigma_{d-1}\tau) \in S^{-1}(K) \ ,$$

da $\phi(\sigma_d\tau - 1) \in S^{-1}(K)$ und $\phi(\sigma_{d-1}\tau) \sim \sigma_{-1} \in S^{-1}(K)$.

Die Addition von Termen niedrigerer Ordnung ($i > 1$) führt zu $\phi(\sigma_{d-i}\tau) \sim \sigma_{-i} \in S^{-i}(K) \subset S^{-1}(K)$. □

Der folgende Satz weist jetzt konstruktiv die Existenz einer Parametrix, d.h. einer Pseudoinversen, eines elliptischen ΨDO nach. Weil diese Inversion nur mod $\Psi^{-\infty}$ bestimmt ist und weil $\Psi^{-\infty}$-ΨDO kompakte Operatoren sind (Lemma E.3.4), daher sind die Parametrix ebenso wie der elliptischen ΨDO Fredholm-Operatoren.

Damit ist der Zusammenhang zwischen elliptischen ΨDO auf kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und der Funktionalanalysis der Fredholm-Operatoren hergestellt!

Satz E.4.3 *Sei $\phi(x) \in C_0^\infty(\bar{O})$ eine sogenannte Plateaufunktion auf $\bar{O}$, d.h. $\phi(x) = 1$ auf K. Sei $P_\sigma \in \Psi^d(K)$ ein elliptischer ΨDO auf K, dann folgt:*

es gibt einen ΨDO $P_\tau \in \Psi^{-d}(K)$ mit $\phi(x)(P_\sigma P_\tau - 1) \in \Psi^{-\infty}(K)$ und $\phi(x)(P_\tau P_\sigma - 1) \in \Psi^{-\infty}(K)$.

Beweis. Wir führen den Existenzbeweis für eine Rechts-Parametrix (eine rechtsmuliplikative Pseudoinverse) P_τ konstruktiv. Dazu nehmen wir an, daß es eine Symbolreihe $\sum_{j=1}^{\infty} \tau_j$ gebe mit $\tau_j \in S^{-d-j+1}$. Mit Lemma E.3.6 folgt dann die Existenz eines Symbols $\tau \in S^{-d}$ mit $\tau \sim \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j$. Sei jetzt $P_\omega := P_\sigma \cdot P_\tau$, dann folgt für das Symbol $\omega \in S^0$ mit E.3.7:

$$\omega \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi))\,(D_x^\alpha \tau(x,\xi)) \sim \sum_{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi))\,(D_x^\alpha \tau_j(x,\xi)) \ .$$

Jetzt sollen die τ_j rekursiv so bestimmt werden, daß $P_\omega = P_\sigma \cdot P_\tau \sim 1$ auf K ist. Die $1 \in S^0$, der Faktor $(\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)) \in S^{d-|\alpha|}$, der Faktor $(D_x^\alpha \tau_j(x,\xi)) \in S^{-d-j+1}$ und das Produkt ist $\in S^{-|\alpha|-j+1}$. Daher schreiben wir die obige Summe für ω um in:

$$\omega \sim \sum_\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)) \, (D_x^\alpha \tau_j(x,\xi)) = \sum_{\substack{k=1 \\ |\alpha|+j=k}}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)) \, (D_x^\alpha \tau_j(x,\xi))$$

$$\sim \begin{cases} 1 & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{für } k>1 \end{cases} .$$

Für $k=1$ ist nur $j=1$ und $|\alpha|=0$ möglich und daraus folgt: $\sigma(x,\xi)\tau_1(x,\xi)=1$, also $\tau_1(x,\xi) = \sigma^{-1}(x,\xi)$.

Für $k>1$ folgt

$$0 = \sum_{\substack{|\alpha|,j \le k \\ |\alpha|+,j=k}}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)) \, (D_x^\alpha \tau_j(x,\xi))$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|,j < k \\ |\alpha|+,j=k}}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)) \, (D_x^\alpha \tau_j(x,\xi)) + \sigma(x,\xi)\tau_k(x,\xi) \quad \Rightarrow$$

$$\tau_k(x,\xi) = -\sigma^{-1}(x,\xi) \cdot \sum_{\substack{|\alpha|,j < k \\ |\alpha|+,j=k}}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)) \, (D_x^\alpha \tau_j(x,\xi)) \; .$$

Nach Konstruktion ist $\tau \in S^{-d}$, also $P_\tau \in \Psi^{-d}(K)$ eine Rechtsparametrix.

Sei nun Q_τ eine Linksparametrix, also $Q_\tau P_\sigma \sim \hat{1}$, dann folgt

$$\begin{aligned} P_\tau - Q_\tau &= P_\tau - Q_\tau P_\sigma P_\tau + Q_\tau P_\sigma P_\tau - Q_\tau \\ &= (\hat{1} - Q_\tau P_\sigma) P_\tau - Q_\tau (\hat{1} - P_\sigma P_\tau) \sim \hat{0} \; , \end{aligned}$$

also können wir $\mod \Psi^{-\infty}(K)$ die Rechtsparametrix auch als Linksparametrix verwenden. □

Wir hatten oben bewiesen, daß ΨDO pseudolokal sind, d.h. f glatt auf Ω impliziert $P_\sigma f$ glatt auf Ω. Im Fall von elliptischen ΨDO kann man auch die Umkehrung beweisen. Diese Eigenschaft heißt Hypoelliptizität.

Lemma E.4.4 *Elliptische ΨDO sind hypoelliptisch, d.h. $P_\sigma f$ glatt auf jeder offenen Teilmenge $\Omega \subset K$ impliziert f glatt auf Ω.*

Beweis. Sei $f \in H_s(K)$, $P_\sigma \in \Psi^d(K)$, $P_\tau \in \Psi^{-d}(K)$ eine Parametrix zu P_σ, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\phi P_\sigma f \in C_0^\infty(\Omega)$, dann ist

$$\phi f = \phi(1 - P_\tau P_\sigma)f + \phi P_\tau P_\sigma f \ .$$

$\phi(1 - P_\tau P_\sigma) \sim 0$ und daher $\phi(1 - P_\tau P_\sigma)f \in C_0^\infty(\Omega)$. Weiter ist nach Voraussetzung $\phi P_\sigma f \in C_0^\infty(\Omega)$, und da P_τ als ΨDO pseudolokal ist, folgt also: $\phi P_\tau P_\sigma f \in C_0^\infty(\Omega)$, und damit $\phi f \in C_0^\infty(\Omega)$. □

Nachdem wir die Existenz einer Parametrix für elliptische ΨDO nachgewiesen haben und jetzt wissen, daß elliptische ΨDO $P_\sigma \in \Psi^d$ mit $P_\sigma : H_s \to H_{s-d}$ Fredholm-Operatoren sind, stellt sich noch die Frage, ob der Index von P_σ eventuell von der Ordnung s des Sobolev-Raums H_s abhängt?

Lemma E.4.5 *Sei $P_\sigma \in \Psi^d$ mit $P_\sigma : H_s \to H_{s-d}$ und N_{P_σ} der Kern von P_σ,*

a. dann ist $N_{P_\sigma} \subset C^\infty$ und damit unabhängig von s und damit ist auch $\mathrm{index}_{P_\sigma}$ unabhängig von s.

b. dann ist der $\mathrm{index}_{P_\sigma}$ nur vom Hauptwert von P_σ, d.h. dem Term der Ordnung d, abhängig.

Beweis. a. Sei $f \in N_{P_\sigma}$, d.h. $P_\sigma f = 0$, dann ist $P_\sigma f$ glatt und wegen der Hypoelliptizität ist auch f glatt, also hängt N_{P_σ} nicht von s ab. Das gleich gilt auch für den zu P_σ adjungierten Operator $P_\sigma^\dagger$, und folglich ist $\mathrm{index}_{P_\sigma}$ unabhängig von s.

b. Oben hatten wir gesehen, daß die Elliptizität eines elliptischen ΨDO $P_\sigma \in \Psi^d$ nur vom Hauptwert des Symbols σ, d.h. dem Term der Ordnung d abhängt. Bei der Untersuchung von Fredholm-Operatoren hatten wir eine Homotopie-Invarianz des Index von Fredholm-Operatoren gefunden (Satz D.5.10), d.h. daß der $\mathrm{index}_{P_\sigma}$ bei einer stetigen Änderung eines Parameters unverändert bleibt. Wenn wir nun $P_\sigma(t) \in \Psi^d$, $0 \leq t \leq 1$, in der Form $P_\sigma(t) := P_{\sigma_H} + tP_{\sigma_R}$ mit $P_{\sigma_H} \in \Psi^d$ und $P_{\sigma_R} \in \Psi^{d-i}$, $i \geq 1$, schreiben, dann folgt aus der Homotopie-Invarianz von $P_\sigma(t)$, daß der Index von $P_\sigma(t)$ nur vom Hauptwert P_{σ_H} abhängt. □

Den Abschluß dieser Betrachtungen möge der Beweis einer Ungleichung von Gårding bilden, die im Zusammenhang mit der Lösung des Dirichlet-Problems bei elliptischen ΨDO von zentraler Bedeutung ist.

Lemma E.4.6 (Gårdingsche Ungleichung) *Seien $f \in C_0^\infty(K)$ und $P_\sigma \in \Psi^d(K)$ ein elliptischer ΨDO auf K dann gilt:*

a. $\|f\|_d \leq C(\|f\|_0 + \|P_\sigma f\|_0)$,

b. für $d \geq 0$ ist $\|f\|_0 + \|P_\sigma f\|_0$ eine zu $\|f\|_d$ äquivalente Norm in $H_d(K)$.

Beweis. a. sei $\phi(x) \in C_0^\infty(\bar{O})$ wieder eine Plateaufunktion auf $\bar{O}$, d.h. $\phi(x) = 1$ auf $K \subset O$, und sei $P_\sigma \in \Psi^d(K)$ ein elliptischer ΨDO auf K, dann gilt

$$\|f\|_d = \|\phi f\|_d = \|\phi(1 - P_\tau P_\sigma)f + \phi P_\tau P_\sigma f\|_d$$
$$\leq \|\phi(1 - P_\tau P_\sigma)f\|_d + \|\phi P_\tau P_\sigma f\|_d \,.$$

Für den ersten Summanden auf der rechten Seite gilt zunächst einmal $\|\cdot\|_d \leq \|\cdot\|_\infty$. Da nun $\phi(x)(P_\tau P_\sigma - 1) \in \Psi^{-\infty}(K)$ ist, folgt mit Satz E.3.3 mit $s = 0$, $d = \infty$:

$$\|\phi(x)(P_\tau P_\sigma - 1)f\|_d \leq \|\phi(x)(P_\tau P_\sigma - 1)f\|_\infty \leq C_1\|f\|_0 \,.$$

Da $\phi P_\tau \in \Psi^{-d}(K)$ ist, folgt für den zweiten Summanden $\|\phi P_\tau P_\sigma f\|_d \leq C_2\|P_\sigma f\|_0$ und damit

$$\|f\|_d \leq C_1\|f\|_0 + C_2\|P_\sigma f\|_0 \leq C(\|f\|_0 + \|P_\sigma f\|_0) \,.$$

b. wenn $P_\sigma \in \Psi^d(K)$ ein elliptischer ΨDO auf K mit $d \geq 0$ ist, dann gilt $\|f\|_0 \leq \|f\|_d$ und $\|P_\sigma f\|_0 \leq C_3\|f\|_d$, und mit a. folgt

$$\|f\|_d \leq C(\|f\|_0 + \|P_\sigma f\|_0) \leq C_4\|f\|_d \,,$$

also sind $\|f\|_d$ und $\|f\|_0 + \|P_\sigma f\|_0$ äquivalente Normen. □

E.5 Elliptische Komplexe und deren Hodge-Zerlegung

Dieses Unterkapitel stützt sich insb. auf Gilkey (1995), S. 43 ff. Als leichtere Einführung bietet sich Nakahara (2003), S. 457 ff. an.

Anstelle der kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^m$, wie in den obigen Unterkapiteln, gehen wir jetzt von einer *kompakten, orientierbaren, differenzierbaren, m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M ohne Rand* aus, die wir im Folgenden einfach nur als *kompakte Mannigfaltigkeit M ohne Rand* bezeichnen. Um die Bezeichnungsweise zu vereinfachen beschränken wir unsere Darstellung der Mannigfaltigkeit M auf eine Teilmenge $U \subseteq M$, die mit einer einzigen Karte, also einem einzigen Satz lokaler Koordinaten $x^1, \ldots, x^m$, beschrieben werden kann.

Über M gebe es ein Vektorbündel $\mathcal{V}$, bestehend aus n komplexen k-dimensionalen Vektorräumen.

Auf diesem Vektorbündel definieren wir lineare, partielle Differentialoperatoren (LPDO) der Ordnung d:

Definition E.5.1

$$\mathcal{V} := \{V_i = V_i(M) \,|\, 0 \leq i \leq n\}$$

$$\mathcal{P} := \{P_i \,|\, P_i : C^\infty(V_i) \to C^\infty(V_{i+1}),\, 0 \le i \le n, \quad P_i = 0 \quad \textit{für}\, i < 0 \,\textit{und}\, i \ge n\} \,. \tag{E.5.1}$$

Dabei verwenden wir für die vektorwertigen Matrix-LPDOs P_i die folgende Schreibweise:

$$J(i) := (\mu_1, \ldots, \mu_m) \,, |J(i)| := \sum_{l=1}^{m} \mu_l \,, \quad \mu_l \in \mathbb{N}_0 \,, \quad \textit{mit}\, \mu_l = \mu_l(i) \,,$$

$$v_i(x) \in C^\infty(V_i) \,, \quad D_{J(i)} := (-1)^{-|J(i)|/2} \frac{\partial^{|J(i)|}}{\partial x^{J(i)}} := (-1)^{-|J(i)|/2} \frac{\partial^{\mu_1+\ldots+\mu_m}}{\partial(x^1)^{\mu_1} \cdots \partial(x^m)^{\mu_m}} \,,$$

$$[P_i(x)\, v_i(x)]^\beta := \sum_{\substack{|J(i)| \le d \\ 1 \le \alpha \le k}} a_i{}^{J(i)\beta}{}_\alpha(x)\, D_{J(i)}[v_i(x)]^\alpha, \quad 1 \le \alpha, \beta \le k \,. \tag{E.5.2}$$

Damit der übliche Faktor $\frac{1}{i}$ pro Ableitung (siehe E.1.1) hier nicht mit dem Index von P_i verwechselt werden kann, haben wir für $\frac{1}{i} = (-1)^{-1/2}$ geschrieben.

Die dazu adjungierten Operatoren seien

$$\mathcal{P}^\dagger := \{P_i^\dagger \,|\, P_i^\dagger : C^\infty(V_{i+1}) \to C^\infty(V_i),\, 0 \le i \le n, \quad P_i = 0 \quad \textit{für}\, i < 0 \,\textit{und}\, i \ge n\} \,. \tag{E.5.3}$$

$(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ heißt ein Komplex, wenn gilt $P_i \circ P_{i-1} = 0$ für alle i.

Sei $p_i(\xi) := \sigma_H(P_i, \xi)$ mit $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ der Hauptteil des Symbols von P_i. Wenn die P_i zu einem Komplex gehören, dann gilt auch für die Hauptteile der Symbole $p_i \circ p_{i-1} = 0$ für alle i.

Seien $N(p_i) := \ker(p_i)$ der Kern und $R(p_i) := \operatorname{im}(p_i)$ der Bildbereich von p_i. Der Komplex $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ heißt elliptischer Komplex, wenn die Sequenz der Hauptsymbole für $\xi \ne 0$ eine exakte Sequenz ist, d.h.

$$R(p_{i-1}(\xi)) = N(p_i(\xi)) \,, \;\textit{bzw.}\; \operatorname{im}(p_{i-1}(\xi)) = \ker(p_i(\xi)) \quad \textit{für}\, \xi \ne 0 \,. \tag{E.5.4}$$

Den Hauptteil des Symbols eines LPDO kann man wie bei den ΨDOs mittels Fourier-Transformation bestimmen, oder einfach durch den Übergang von

$$D_{J(i)} = (-1)^{|J(i)|/2} \frac{\partial^{\mu_1+\ldots+\mu_m}}{\partial(x^1)^{\mu_1} \cdots \partial(x^m)^{\mu_m}} \quad \to \quad \xi_{J(i)} = \xi_1^{\mu_1} \cdots \xi_m^{\mu_m} \,, \quad \text{mit}\; \xi_l^{\mu_l} = \xi_l^{\mu_l(i)} \,, \tag{E.5.5}$$

in E.5.2, oder etwas formaler ausgedrückt:

$$f \in \mathcal{F}(M) = \Omega^0(M) \,,\; f(x) = 0 \,,\; df(x) = \xi_i dx^i \in T_x^*(M) \quad \Rightarrow$$

$$p_i(\xi) v_i^\beta(x) = \sigma_H(P_i, \xi) v_i^\beta(x) = \frac{1}{d!} P_i{}^\beta{}_\alpha (f^d(x) v_i^\alpha(x)) \qquad \text{(E.5.6)}$$
$$= \sum_{\substack{|J(i)|=d \\ 1\le\alpha\le k}} a_i{}^{J(i)\beta}{}_\alpha(x)\, \xi_{J(i)} [v_i(x)]^\alpha \; .$$

Der Faktor $f^d(x)$ projiziert wegen $f(x) = 0$ gerade alle $|J| = d$ Terme aus der Summe des LPDO heraus.

Die elliptischen Komplexe stellen eine Verallgemeinerung der de Rham Komplexe dar:

$$0 \xrightarrow{P_0} C^\infty(V_1) \xrightarrow{P_1} C^\infty(V_2) \xrightarrow{P_2} \cdots \xrightarrow{P_{n-2}} C^\infty(V_{n-1}) \xrightarrow{P_{n-1}} C^\infty(V_n) \xrightarrow{P_n} 0 \; , \qquad \text{(E.5.7)}$$

$$0 \xleftarrow{P_0^\dagger} C^\infty(V_1) \xleftarrow{P_1^\dagger} C^\infty(V_2) \xleftarrow{P_2^\dagger} \cdots \xleftarrow{P_{n-2}^\dagger} C^\infty(V_{n-1}) \xleftarrow{P_{n-1}^\dagger} C^\infty(V_n) \xleftarrow{P_n^\dagger} 0 \; . \qquad \text{(E.5.8)}$$

Wie bei den de Rham Komplexen definiert man einen verallgemeinerten Laplace-Operator der Ordnung $2d$:

$$\Delta_i : C^\infty(V_i) \to C^\infty(V_i) \; , \quad \Delta_i := P_{i-1} P_{i-1}^\dagger + P_i^\dagger P_i \; . \qquad \text{(E.5.9)}$$

Daß dieser Laplace-Operator Δ_i in einem elliptischen Komplex tatsächlich auch ein elliptischer LPDO ist zeigt der folgenden Satz.

Satz E.5.2 *Der Komplex $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ist genau dann ein elliptischer Komplex, wenn die Laplace-Operatoren Δ_i für $0 \le i \le n$ elliptische LPDOs sind.*

Beweis. Sei $\delta_i(\xi)$ der Hauptteil des Symbols von Δ_i und sei $\xi \neq 0$. Dann gilt:

$$\delta_i = p_{i-1} p_{i-1}^\dagger + p_i^\dagger p_i \quad \Rightarrow \quad N(\delta_i) \supseteq N(p_{i-1}^\dagger) \cap N(p_i) \; .$$

Andererseits gilt auch

$$v_i \in N(\delta_i) \subseteq C^\infty(V_i) \quad \Rightarrow \quad \delta_i v_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$0 = \langle v_i \mid \delta_i v_i \rangle = \langle p_{i-1}^\dagger v_i \mid p_{i-1}^\dagger v_i \rangle + \langle p_i v_i \mid p_i v_i \rangle \quad \Rightarrow$$

$$v_i \in N(p_{i-1}^\dagger) \cap N(p_i) \quad \Rightarrow \quad N(\delta_i) \subseteq N(p_{i-1}^\dagger) \cap N(p_i) \; ,$$

und damit

$$N(\delta_i) = N(p_{i-1}^\dagger) \cap N(p_i) \; . \qquad \text{(E.5.10)}$$

Mit diesem Ergebnis kann nun der Beweis der Ellitizität angegangen werden. Sei also $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein elliptischer Komplex und sei $\delta_i v_i = 0$, dann folgt

$$v_i \in N(\delta_i) \Rightarrow v_i \in N(p_i) \quad \Rightarrow \quad p_i v_i = 0 \; .$$

Weil $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein elliptischer Komplex ist gilt

$$N(p_i) = R(p_{i-1}) \quad \Rightarrow \quad v_i = p_{i-1} v_{i-1} \ .$$

Weiter folgt

$$v_i \in N(\delta_i) \Rightarrow v_i \in N(p_{i-1}^\dagger) \quad \Rightarrow \quad p_{i-1}^\dagger v_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_{i-1}^\dagger v_i \mid v_{i-1} \rangle = \langle p_{i-1}^\dagger p_{i-1} v_{i-1} \mid v_{i-1} \rangle = \langle p_{i-1} v_{i-1} \mid p_{i-1} v_{i-1} \rangle \\ &= ||p_{i-1} v_{i-1}|| = ||v_i|| \ . \end{aligned}$$

Also impliziert $\delta_i v_i = 0$ also $v_i = 0$ und damit ist Δ_i ein elliptischer LPDO.

Für die Umkehrung nehmen wir an, daß Δ_i ein elliptischer LPDO ist und daß $v_i \in N(p_i)$, d.h. $p_i v_i = 0$ gelte. Weil Δ_i elliptisch ist existiert für $\xi \neq 0$ das inverse Symbol δ_i^{-1}. Damit existiert ein $w_i \in C^\infty(V_i)$ mit

$$w_i := \delta_i^{-1} v_i \quad \Leftrightarrow \quad v_i = \delta_i w_i \ .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_i v_i \mid p_i w_i \rangle = \langle p_i \delta_i w_i \mid p_i w_i \rangle = \langle p_i (p_{i-1} p_{i-1}^\dagger + p_i^\dagger p_i) w_i \mid p_i w_i \rangle \\ &= \langle p_i p_i^\dagger p_i w_i \mid p_i w_i \rangle = \langle p_i^\dagger p_i w_i \mid p_i^\dagger p_i w_i \rangle = ||p_i^\dagger p_i w_i|| \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$v_i = \delta_i w_i = (p_{i-1} p_{i-1}^\dagger + p_i^\dagger p_i) w_i = p_{i-1} p_{i-1}^\dagger w_i \in R(p_{i-1}) \ ,$$

also $N(p_i) \subseteq R(p_{i-1})$.

Wenn nun gilt $v_i \in R(p_{i-1})$, also

$$v_i = \delta_i w_i = (p_{i-1} p_{i-1}^\dagger + p_i^\dagger p_i) w_i \in R(p_{i-1}) \ ,$$

dann folgt $p_i^\dagger p_i w_i = 0$ und damit

$$\begin{aligned} ||p_i v_i|| &= \langle p_i v_i \mid p_i v_i \rangle = \langle p_i \delta_i w_i \mid p_i \delta_i w_i \rangle = \langle p_i \delta_i w_i \mid p_i \delta_i w_i \rangle \\ &= \langle p_i (p_{i-1} p_{i-1}^\dagger + p_i^\dagger p_i) w_i \mid p_i (p_{i-1} p_{i-1}^\dagger + p_i^\dagger p_i) w_i \rangle \\ &= \langle p_i p_{i-1} p_{i-1}^\dagger w_i \mid p_i p_{i-1} p_{i-1}^\dagger w_i \rangle = 0 \ , \end{aligned}$$

wegen $p_i p_{i-1} = 0$, weil $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein Komplex ist. Also folgt $v_i \in N(p_i)$, d.h. $R(p_{i-1}) \subseteq N(p_i)$ und zusammen mit dem obigen Ergebnis $R(p_{i-1}) = N(p_i)$. Also ist $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein elliptischer Komplex. $\square$

Als nächstes soll die Hodge-Zerlegung elliptischer Komplexe formuliert und bewiesen werden, welche über die Kohomologiegruppen der elliptischen Komplexe die Verbindung zwischen der Theorie der elliptischen LPDOs und der Topologie der zugrundeliegenden kompakten Mannigfaltigkeit *ohne Rand* herstellt!

Satz E.5.3 (Hodge-Zerlegung) *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein elliptischer Komplex über einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ohne Rand. Dann ist $N(\Delta_i)$ ein endlichdimensionaler Unterraum von $C^\infty(V_i)$ und es gilt die folgende orthogonale Zerlegung bzgl. des inneren Produkts von L^2:*

$$L^2(V_i) = N(\Delta_i) \oplus P_{i-1}(H_d(V_{i-1})) \oplus P_i^\dagger(H_d(V_{i+1})) \; , \tag{E.5.11}$$

$$C^\infty(V_i) = N(\Delta_i) \oplus P_{i-1}(C^\infty(V_{i-1})) \oplus P_i^\dagger(C^\infty(V_{i+1})) \; . \tag{E.5.12}$$

Beweis. Wir hatten soeben gesehen, daß der Laplace-Operator Δ_i aus dem elliptischer Komplex $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein elliptischer LPDO über einer kompakten m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M *ohne Rand* ist. In Satz E.4.3 wurde gezeigt, daß elliptische ΨDOs, und damit auch elliptische LPDOs, über solchen Mannigfaltigkeiten *ohne Rand* Fredholm-Operatoren sind, und aus dem Kapitel über Fredholm-Operatoren (Kapitel D.5) folgt, daß für diese Operatoren der Kern endlichdimensional ist, d.h. $\dim(N(\Delta_i)) < \infty$.

Jetzt betrachten wir Δ_i als einen Fredholm-Operator auf dem Sobolev-Raum H_{2d}:

$$\Delta_i : H_{2d}(V_i) \to H_0(V_i) = L^2(V_I) \; . \tag{E.5.13}$$

Für Fredholm-Operatoren gilt die folgende Zerlegung des Bild-Hilbert-Raums, hier also $L^2(V_I)$, siehe Satz D.5.1:

$$L^2(V_i) = N(\Delta_i^\dagger) \oplus R(\Delta_i) = N(\Delta_i) \oplus R(\Delta_i) \; ,$$

wobei die letzte Gleichung gilt, weil Δ_i selbstadjungiert ist. Also können wir eine Funktion $f \in L^2(V_i)$ zerlegen in

$$f = f_0 + (P_{i-1}P_{i-1}^\dagger + P_i^\dagger P_i)\omega \quad \text{mit } f_0 \in N(\Delta_i) \text{ und } \omega \in H_{2d}(V_i) \; .$$

Nun ist $C^\infty(V_i)$ dicht in $H_s(V_i)$, also dürfen wir von $f_0 \in N(\Delta_i) \subseteq H_{2d}(V_i)$ annehmen, daß $f_0 \in C^\infty(V_i)$. Sei jetzt

$$\omega_1 := P_{i-1}^\dagger \omega \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \in H_d(V_{i-1}) \; ,$$

$$\omega_2 := P_i \omega \quad \Rightarrow \quad \omega_2 \in H_d(V_{i+1}) \; ,$$

dann folgt

$$f = f_0 + P_{i-1}\omega_1 + P_i^\dagger \omega_2 \; .$$

Damit haben wir die Zerlegung E.5.11 erhalten. Es bleibt zu zeigen, daß diese Zerlegung tatsächlich bzgl. des inneren Produkts in $L^2(V_i)$ orthogonal ist.

$$P_i P_{i-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle P_{i-1}\omega_1 \mid P_i^\dagger \omega_2 \rangle = \langle P_i P_{i-1}\omega_1 \mid \omega_2 \rangle = 0 \ .$$

Aus E.5.10 für die Symbole der Operatoren folgt sofort

$$N(\Delta_i) = N(P_i) \cap N(P_{i-1}^\dagger) \ ,$$

und damit ergibt sich für $f_0 \in N(\Delta_i)$

$$\langle f_0 \mid P_{i-1}\omega_1 \rangle = \langle P_{i-1}^\dagger f_0 \mid \omega_1 \rangle = 0 \ ,$$

$$\langle f_0 \mid P_i^\dagger \omega_2 \rangle = \langle P_i f_0 \mid \omega_2 \rangle = 0 \ .$$

Damit ist E.5.11 bewiesen.

Nun zu E.5.12: wenn $f \in C^\infty(V_i)$, dann ist auch $\Delta_i \omega = (f - f_0) \in C^\infty(V_i)$. Nun sind wegen Lemma E.4.4 elliptische LPDOs auch *hypoelliptisch*, d.h. aus $\Delta_i \omega \in C^\infty(V_i)$ folgt $\omega \in C^\infty(V_i)$, womit auch E.5.12 bewiesen ist. □

Jetzt kann man als Verallgemeinerung der de Rhamschen Kohomologiegruppen (19.0.3) auch für einen elliptischen Komplex eine Kohomologiegruppe definieren. Weil man als abelsche Gruppe zumeist $G = \mathbb{R}$ verwendet, sind diese Kohomologiegruppen dann tatsächlich Vektorräume.

Definition E.5.4 *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein elliptischer Komplex, dann ist $H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ dessen Kohomologie-Vektorraum:*

$$H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V}) := N(P_{i+1})/R(P_i) = \ker(P_{i+1})/\operatorname{im}(P_i) \ .$$

Jetzt kann man zeigen, daß der Kohomologie-Vektorraum $H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ isomorph zum Vektorraum der harmonischen Formen $Harm^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ist.

Satz E.5.5 (Hodge-Verallgemeinerung) *Seien $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein elliptischer Komplex und $H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ dessen Kohomologie-Vektorraum und $Harm^i(\mathcal{P}, \mathcal{V}) := N(\Delta_i)$ der Vektorraum der Harmonischen Formen, dann gilt:*

$$H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V}) = Harm^i(\mathcal{P}, \mathcal{V}) := N(\Delta_i) = \ker(\Delta_i) \ .$$

Beweis. Aus der obigen Hodge-Zerlegung folgt, daß $N(\Delta_i) \subseteq N(P_i)$ orthogonal zu $R(P_{i-1})$ ist, also ist die Abbildung $\phi \mapsto [\phi]$ mit $\phi \in N(\Delta_i)$ und der Klasse $[\phi] \in H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ injektiv. Um die Surjektivität dieser Abbildung zu zeigen wählen wir ein $\psi \in N(P_i) \subseteq L^2(V_i)$. Dieses ψ ist ein Repräsentant der Klasse $[\psi] \in H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ und wir schreiben dieses ψ in Form einer Hodge-Zerlegung

$$\psi = \psi_0 + P_{i-1}\psi_1 + P_i^\dagger \psi_2 \quad \Rightarrow$$

$$P_i\psi = P_i\psi_0 + P_iP_{i-1}\psi_1 + P_iP_i^\dagger\psi_2 = P_iP_i^\dagger\psi_2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = \langle P_i\psi \mid \psi_2\rangle = \langle P_iP_i^\dagger\psi_2 \mid \psi_2\rangle = \langle P_i^\dagger\psi_2 \mid P_i^\dagger\psi_2\rangle = ||P_i^\dagger\psi_2|| \quad \Rightarrow$$

$$\psi = \psi_0 + P_{i-1}\psi_1 \ .$$

Also gibt es für jede Klasse $[\psi] \in H^i(\mathcal{P},\mathcal{V})$ ein $\psi_0 \in N(\Delta_i)$, das auf $[\psi]$ abgebildet wird. □

Dieser Satz wurde zuerst von Hodge im Rahmen der de Rham Kohomologiegruppen bewiesen, d.h. mit den Operatoren der Cartanschen äußeren Ableitung d_i anstelle der hier verwendeten allgemeineren Operatoren P_i. Tatsächlich ist diese Verallgemeinerung des Satzes von Hodge sehr bemerkenswert, denn sie stellt eine Verbindung zwischen den topologischen Kohomologie-Vektorräumen und den Vektorräumen der Lösungen elliptischer LPDOs her! Dies wollen wir jetzt noch etwas genauer aufzeigen.

Aufgrund des Satzes von de Rham (19.0.21) sind die Vektorräume der glatten Homologiegruppen $H_r(M;\mathbb{R})$ einer Mannigfaltigkeit M isomorph zu den Vektorräumen der de Rham Kohomologiegruppen $H^r(M)$. Daraus folgte dann in 19.0.22 sofort für die topologische Euler Charakteristik $\chi(M)$:

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim(H_i(M,\mathbb{R})) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim(H^i(M)) \ .$$

Jetzt kann man diesen Ausdruck für die Kohomologie-Vektorräume $H^i(\mathcal{P},\mathcal{V})$ des obigen elliptischen Komplexes verallgemeinern:

$$\hat{\chi}(\mathcal{P},\mathcal{V}) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(H^i(\mathcal{P},\mathcal{V})) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(N(\Delta_i)) \ .$$

Jeder einzelne Laplace-Operator Δ_i unseres elliptischen Komplexes $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ ist ein Fredholm-Oprerator, und daher existiert für jeden Operator Δ_i ein Index, der bei stetigen Änderungen eines Parameters von Δ_i eine Homotopie-Invariante ist (siehe Kapitel D.5, D.5.10, D.5.1):

$$\begin{aligned}\operatorname{index}(\Delta_i) &:= \dim(N(\Delta_i)) - \dim(\operatorname{coker}(\Delta_i)) = \dim(N(\Delta_i)) - \dim(N(\Delta_i^\dagger)) \\ &= 0 \ , \quad \text{da hier } \Delta_i = \Delta_i^\dagger \ .\end{aligned}$$

Was kann man nun über die topologischen Eigenschaften von $\hat{\chi}(\mathcal{P},\mathcal{V})$ sagen? Um dies zu sehen, 'rollt' man den elliptischen Komplex $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ in seine geraden und seine ungeraden Elemente zusammen.

Definition E.5.6 *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ ein elliptischer Komplex, dann fassen wir alle geraden und alle ungeraden Elemente aus $\mathcal{V}$ und $\mathcal{P}$ zusammen. Wir machen in den folgenden Definitionen Gebrauch von $P_i = P_i^\dagger = 0 \quad \text{für}\, i < 0 \,\text{und}\, i \geq n$. Sei $[n/2]$ der ganzzahlige Anteil von $n/2$.*

$$V_+ := \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} V_{2i} \; , \quad V_- := \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} V_{2i-1} \; ,$$

$$Q_+ := \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} (P_{2i} + P_{2i-1}^\dagger) \; : \; C^\infty(V_+) \to C^\infty(V_-) \; ,$$

$$Q_- := \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} (P_{2i-1} + P_{2i}^\dagger) \; : \; C^\infty(V_-) \to C^\infty(V_+) \; .$$

Wegen $Q_- = Q_+^\dagger$ setzen wir

$$Q := Q_+ \quad \text{und} \quad Q^\dagger := Q_- \; .$$

Mit Q und $Q^\dagger$ kann man die beiden Laplace-Operatoren Δ_+ und Δ_- konstruieren. Dabei verwenden wir wieder $P_i = P_i^\dagger = 0$ für $i < 0$ und $i \geq n$, sowie $P_i P_{i-1} = 0$.

$$\Delta_+ : C^\infty(V_+) \to C^\infty(V_+) \; , \quad \Delta_- : C^\infty(V_-) \to C^\infty(V_-) \; ,$$

$$\Delta_+ := Q^\dagger \circ Q \; , \quad \Delta_- := Q \circ Q^\dagger \; , \quad \Rightarrow \quad \Delta_- = \Delta_+^\dagger \; .$$

$$\begin{aligned}
\Delta_+ = Q^\dagger \circ Q &= \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} (P_{2i-1} + P_{2i}^\dagger)(P_{2i} + P_{2i-1}^\dagger) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{[(n-1)/2]} (P_{2i+1} + P_{2i}^\dagger)(P_{2i} + P_{2i+1}^\dagger) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{[(n-1)/2]} (P_{2i+1} P_{2i+1}^\dagger + P_{2i}^\dagger P_{2i}) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} (P_{2i-1} P_{2i-1}^\dagger + P_{2i}^\dagger P_{2i}) = \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} \Delta_{2i} \; .
\end{aligned}$$

$$\Delta_- = Q \circ Q^\dagger = \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} (P_{2i} + P_{2i-1}^\dagger)(P_{2i-1} + P_{2i}^\dagger)$$

$$= \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} (P_{2i}P_{2i}^\dagger + P_{2i-1}^\dagger P_{2i-1}) = \bigoplus_{i=0}^{[(n+1)/2]} \Delta_{2i-1} \ .$$

Damit ist Δ_+ ein elliptischer LPDO, also gilt für sein Hauptsymbol $\delta_+ \neq 0$. Da nun gleichzeitig δ_+ das Produkt der Symbole von $Q^\dagger$ und Q ist, also $\delta_+ = q_+ \cdot q_+$, ist auch $q_+ \neq 0$. Damit ist auch Q ein elliptischer Operator über einer kompakten, m-dimensionalen Mannigfaltigkeit *M ohne Rand* und damit ein Fredholm-Operator. Für den Index von Q erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{index}(Q) &= \dim(N(Q)) - \dim(N(Q^\dagger)) = \dim(N(Q^\dagger Q)) - \dim(N(QQ^\dagger)) \\
&= \dim(N(\Delta_+)) - \dim(N(\Delta_-)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(N(\Delta_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H^i(\mathcal{P},\mathcal{V})) = \hat{\chi}(\mathcal{P},\mathcal{V}) \ .
\end{aligned}$$

Der Euler Charakteristik $\chi(M)$ bei den de Rham Kohomologie-Vektorräumen entspricht also bei der Verallgemeinerung auf elliptische Komplexe $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ der Fredholm-Index des elliptischen Operators $Q = Q_+$:

$$\hat{\chi}(\mathcal{P},\mathcal{V}) = \operatorname{index}(Q) \ .$$

Der Fredholm-Index ist invariant unter Homotopie, also ist auch die alternierende Summe über die Vektorräume der harmonischen Formen $Harm^i(\mathcal{P},\mathcal{V})$ eine Homotopie-Invariante:

$$\hat{\chi}(\mathcal{P},\mathcal{V}) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H^i(\mathcal{P},\mathcal{V})) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i Harm^i(\mathcal{P},\mathcal{V}) \ .$$

Diese tiefe Verbindung von Topologie und der Theorie elliptischer LPDOs ist wie der Satz von de Rham ein wirklich bemerkenswertes Ergebnis - und letztlich ein Spezialfall des Atiyah-Singer-Indexsatzes!

E.6 Literatur zu Pseudodifferential-Operatoren

- Gilkey (1995), Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem,
- Alinhac u. Gérard (2007), Pseudo-differential Operators and the Nash-Moser Theorem,
- Wong (1999), Pseudo-Differential Operators,

- Shubin (2001), Pseudodifferential Operators and Spectral Theory,
- Voigt u. Wloka (1975), Hilberträume und elliptische Differentialoperatoren,
- Dobrowolski (2006), Angewandte Funktionalanalysis,
- Großmann (1972), Funktionalanlysis I u. II,
- Werner (2005), Funktionalanalysis,
- Fischer u. Kaul (1998), Mathematik für Physiker, Band 2.

F LyX- und LaTeX-Formatierungen

Der Latex-Begleiter von Goosens u. a. (2000) ist immer eine unschätzbare Hilfe. Vielen Dank!

F.1 LyX Document settings

```
Document class:
  book (KOMA-Script)
  version=,fontsize=12pt,BCOR15mm,headinclude,
  footinclude=false,headings=normal,titlepage=false,
  captions=nooneline,numbers=noendperiod,
Fonts:
  Base Size: 12,
Text Layout:
  Vertical space: MedSkip,
Page Layout:
  Format: A4,
  Orientation: Portrait,
  Heading style: headings,
  Two-sided document,
Language:
  German (old spelling),
  Quote style: „text",
  Encoding: other: Western European (ISO 8859-1),
Numbering & TOC:
  Part/Chapter/Section/Subsection/Subsubsection: Yes, Yes,
Bibliography: Natbib, Natbib style: Author-year,
  Default style: plainnat, Processor: bibtex8,
PDF properties:
  General-Title:
    Krümmungen und Indexsätze - auf den Spuren von Gauß-Bonnet,
    Cartan, Atiyah-Singer und Witten
  General-Author: Bernhard Schiekel
  General-Subject: Eine Einführung in Geometrie und Topologie
    für Physiker
  General-Keywords: Krümmungen, Indexsätze, Gauss-Bonnet,
    Atiyah-Singer
  General-Automatically fill header,
  General-Additional Options:
    backref=page,pdftex,plainpages=false,pdfpagelabels,bookmarks,
```

```
    pdfpagemode=None,pdfstartview=FitH
  Hyperlinks: Backreferences: page
  Bookmarks: Generate bookmarks (toc)
Math Options: Use AMS math package,
Float Placement:
  Bottom of page/Here if possible/Ignore LATEX rules.
```

F.2 LaTeX preamble

```
\pdfoutput=1
\usepackage{eurosym}
\usepackage{array}
\usepackage{lmodern}
% cbfonts muss installiert sein
% greek-fontenc muss installiert sein
% babel-greek muss installiert sein
\usepackage{amssymb}  %zusaetzl. Formelumgebungen
\usepackage{amsmath}  %zusaetzl. math. Symb.
\usepackage{mathrsfs} %zusaetzl. math. Symb.
\usepackage{bbm}      %math. Einheitsoperator
\usepackage{slashed}  %slash notation for Dirac-Operators
\usepackage{exscale}  %groessere mathematische Zeichen
\usepackage{relsize}  %groessere mathematische Zeichen
%
% eigene TEX defeqq-, eqqdef-, eqdef-, und eqexcl-Kommandos
\newcommand*{\defeqq}{%
\mathrel{\vcenter{\offinterlineskip %
\hbox{.}\vskip-.80ex\hbox{.}}}\joinrel \hskip 3pt =}
%
\newcommand*{\eqqdef}{%
=\hskip 3pt \joinrel\mathrel{\vcenter{\offinterlineskip %
\hbox{.}\vskip-.80ex\hbox{.}}} }
%
\newcommand{\eqdef}{\ensuremath{\stackrel{\mathrm{def}}{=}}}
\newcommand{\eqexcl}{\ensuremath{\stackrel{\mathrm{!}}{=}}}
%
% eigene Operatornamen
\newcommand{\diag}{\operatorname{diag}}
\newcommand{\id}{\operatorname{id}}
\newcommand{\ind}{\operatorname{ind}}
\newcommand{\sgn}{\operatorname{sgn}}
\newcommand{\card}{\operatorname{card}}
\newcommand{\supp}{\operatorname{supp}}
\newcommand{\vol}{\operatorname{vol}}
\newcommand{\im}{\operatorname{im}}
\newcommand{\tr}{\operatorname{tr}}
```

```
\newcommand{\coker}{\operatorname{coker}}
%
% Variable fuer eigene Einrueckungen mit \settowidth
\newlength{\meineEinrueck}
%
% Hier ntheorem u.a. wegen des Schlusspunktes (DIN)
\usepackage[amsmath,thmmarks,standard,hyperref]{ntheorem}
\theoremseparator{}
\theoremsymbol{}
\qedsymbol{\ensuremath{\Box}}
\theoremstyle{plain}
\renewtheorem{Satz}{Satz}[section]
\renewtheorem{Lemma}[Satz]{Lemma}
\renewtheorem{Definition}[Satz]{Definition}
\renewtheorem{Korollar}[Satz]{Korollar}
\renewtheorem{Anmerkung}[Satz]{Anmerkung}
\theoremstyle{nonumberplain}
\theoremheaderfont{\textsc}
\theorembodyfont{\normalfont}
\theoremsymbol{\ensuremath{\Box}}
\theoremseparator{:}
\renewtheorem{Beispiel}{Beispiel}
\theoremseparator{}
\renewtheorem{Beweis}{Beweis.}
%
\usepackage[format=plain%
,justification=centering%
,indention=0cm]{caption}%
\usepackage[]{subfig}
%
% Formel-Satz (mit AMSmath)
% \mathindent7mm %eigenstaendige Formel bei fleqn einruecken
\setlength{\jot}{4mm} %Abstand in mehrzeiligen Formeln
\numberwithin{equation}{section} %Formelnummerierung in Sections
\allowdisplaybreaks %Seitenumbruch in Formeln erlauben
\renewcommand{\arraystretch}{1} %Array-Zeilenabstand vergrössern
%
% Satzspiegelberechnung book (koma-script)
% siehe: scrguide.pdf,
% in Optionen der Dokumentenklasse
%
% Kopf- und Fusszeilen mit scrpage2
\usepackage[]{scrpage2}
\pagestyle{scrheadings}
\clearscrheadfoot
\let\ps@plain=\ps@empty % Kapitelseite ohne Seitenzahl
\ihead{}
```

```
\chead{\headmark}
\ohead{\pagemark}
\ifoot{}
\cfoot{}
\ofoot{}
%
% Kommutative Diagramme mit xymatrix aus Xy-pic
\usepackage[all]{xy}
%
\usepackage[pdftex]{graphicx}
%
% \usepackage[backref=page%Rueckverweise in Bibl.
% ,pdftex
% ,plainpages=false% Seitenanker=format. SeitenNr.
% ,pdfpagelabels% AcroRead4.0 zeigt log. SeiteNr.
% ,%colorlinks% Links und Anker nicht faerben
% ,bookmarks% erstellt Lesezeichen
% ,pdfpagemode=None
% ,pdfstartview=FitH
% ]{hyperref}
%
% \hypersetup{pdftitle={Krümmungen und Indexsätze -
% auf den Spuren von Gauß-Bonnet, Cartan, Atiyah-Singer und Witten}%
% ,pdfsubject={Eine Einführung in Geometrie und Topologie für
%  Physiker}%
% ,pdfkeywords={Krümmungen, Indexsätze, Gauss-Bonnet,
%  Atiyah-Singer}%
% ,pdfauthor={Bernhard Schiekel}%
% }
%
% Format der Rueckverweise im Literaturverzeichnis
\renewcommand*{\backref}[1]{- zitiert auf S. #1.}
%
```

F.3 Einstellungen am Dokumentbeginn

```
% neue Satzspiegelberechnung, siehe scrguide.pdf,
% Optionen in Dokumentenklasse-Def.
\typearea[current]{15}
%
% Title
% 1. Hyperref-Spezialität:
% \renewcommand{\thepage}{Title} ist nötig, damit beim Indizieren mit
% hyperref bei der Titelseite und der Folgeseite nicht zweimal die
% gleiche Seitennummer in \page auftritt.
% 2. In der Präambel wird der Seitenstil plain auf empty umdefiniert,
```

```
% um auf Leerseiten keine headings zu haben
% 3. Bei den Optionen für scnbook wird notitlepage gewählt und die
% Titelei von Hand gestaltet.
%-------------------------------------------------------------------
\begingroup
\renewcommand{\thepage}{Title}
\setcounter{page}{1}
\title{\vspace{2cm}Krümmungen und Indexsätze - \\
auf den Spuren von Gauß-Bonnet, Cartan, Atiyah-Singer und Witten.\\[2ex]
Eine Einführung in Geometrie und Topologie für Physiker.\\ \ }
\author{\\ \textbf{Bernhard Schiekel}}
\date{ }
\maketitle
\endgroup
```

F.4 BibTEX style

Bibliography -> Processor: bibtex8

BibiTEX style: natdin

In Bibtex-Eintraegen mit % in URLs müssen diese als \% maskiert werden, sonst gibt es Konflikte mit der Option 'backref' des Packets 'hyperref'.
(Fehlermeldung: „Paragraph ended before \BR@@lbibitem was complete").

Literaturverzeichnis

[Abramowitz u. Stegun 1970]
Abramowitz, Milton ; Stegun, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, New York, USA, 1970 - zitiert auf S. 509, 546, 556, 557.

[Alinhac u. Gérard 2007]
Alinhac, Serge ; Gérard, Patrick: *Pseudo-differential Operators and the Nash-Moser Theorem.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 2007 - zitiert auf S. 583, 599, 612.

[Alvarez 1995]
Kapitel Lectures on Quantum Mechanics and the Index Theorem. In: Alvarez, Orlando: *Geometry and Quantum Field Theory.* American Mathematical Soc., Princeton, N.J., USA, 1995, S. 273–322 - zitiert auf S. 480.

[Alvarez-Gaumé 1983]
Alvarez-Gaumé, Luis: Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem. In: *Comm. Math. Phys. 90 (1983), no. 2, 161–173* (1983) - zitiert auf S. 480.

[Alvarez-Gaumé u. Ginsparg 1985]
Alvarez-Gaumé, Luis ; Ginsparg, Paul: The structure of gauge and gravitational anomalies. In: *Annals of Physics, 161, S. 423-490* (1985) - zitiert auf S. 428.

[Alvarez-Gaumé u. Witten 1984]
Alvarez-Gaumé, Luis ; Witten, Edward: Gravitational Anomalies. In: *Nucl.Phys. B234 (1984), p. 269-331* (1984) - zitiert auf S. 516.

[Ambjørn u. a. 2013]
Ambjørn, Jan ; Görlich, Andrzej ; Jurkiewicz, Jerzy ; Loll, Renate: Quantum Gravity via Causal Dynamical Triangulations. (2013). `https://arxiv.org/pdf/1302.2173v1.pdf` - zitiert auf S. 516.

[Ambjørn u. a. 2009]
Ambjørn, Jan ; Jurkiewicz, Jerzy ; Loll, Renate: Das fraktale Quantenuniversum. In: *Spektrum der Wissenschaften, 02-2009, S.24-31* (2009) - zitiert auf S. 516.

[Atiyah 1988]
Atiyah, Michael: *Collected Works, Vol. I-V.* Oxford University Press, Oxford, GB, 1988 - zitiert auf S. 467, 469.

[Atiyah 2005]
Atiyah, Michael: *Collected Works, Vol. VI.* Oxford University Press, Oxford, GB, 2005 - zitiert auf S. 467.

[Atiyah u. a. 2010]
Atiyah, Michael ; Dijkgraaf, Robbert ; Hitchin, Nigel: Geometry and physics. In: *Phil. Trans. R. Soc. A* 368 (2010), 913-926. `http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/368/1914/913.full.html` - zitiert auf S. 467.

[Atiyah u. Zagier 2014]
Atiyah, Michael ; Zagier, Don: Friedrich Hirzebruch (1927-2012). In: *Notices of the American Mathematical Society, 61, 706-727 (2014)* (2014). `http://www.ams.org/notices/201407/rnoti-p706.pdf` - zitiert auf S. 466.

[Audin 2008]
Audin, Michèle: Homage to Henri Cartan (1904-2008). In: *Notices of the AMS, 56, 614-615* (2008). `http://www.ams.org/notices/200905/rtx090500614p.pdf` - zitiert auf S. 96.

[Baader 2008]
Baader, Sebastian: Differentialtopologie - Vorlesungs-Script. (2008). `https://www.mitschriften.ethz.ch/main.php?page=3&scrid=1&pid=51&oid=73&eid=1` - zitiert auf S. 257.

[Bär 2010]
Bär, Christian: *Elementare Differential-Geometrie.* de Gruyter, Berlin, 2010 - zitiert auf S. 143, 187.

[Bär 2011]
Bär, Christian: Charakteristische Klassen, Crashkurs, MPI für Gravitationsphysik, Oktober 2006. (2011). `http://geometrie.math.uni-potsdam.de/documents/baer/skripte/charakteristisch.pdf` - zitiert auf S. 428, 442, 456.

[Barut u. Raczka 1986]
Barut, Asim O. ; Raczka, Ryszard: *Theory of Group Representations and Applications.* 2. revised edition. World Scientific Publishing Co Pte Ltd., Singapur, 1986. – mit einer 35 Seiten umfassenden Bibliographie. - zitiert auf S. 281, 330.

[Bastianelli u. van Nieuwenhuizen 2006]
Bastianelli, Fiorenzo ; Nieuwenhuizen, Peter van: *Path Integrals and Anomalies in Curved Space.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006 - zitiert auf S. 516.

[Berline u. a. 2004]
Berline, Nicole ; Getzler, Ezra ; Vergne, Michèle: *Heat Kernels and Dirac Operators.* Springer-Verlag, Berlin, 2004 - zitiert auf S. 470.

[Bertlmann 1996]
Bertlmann, Reinhold A.: *Anomalies in Quantum Field Theory.* Oxford University Press Inc., New York, USA, 1996 - zitiert auf S. 516.

[Blaschke u. Reichardt 1960]
Blaschke, Wilhelm ; Reichardt, Hans: *Einführung in die Differentialgeometrie.* 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, 1960 - zitiert auf S. 139.

[Bleecker 1981]
Bleecker, David: *Gauge Theory and Variational Principles.* Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., USA, 1981 - zitiert auf S. 394.

[Booß 1977]
Booss, Bernhelm: *Topologie und Analysis.* Springer Verlag, Berlin, 1977 - zitiert auf S. 466, 560, 580, 581, 583.

[Booss u. Bleecker 1985]
Booss, Bernhelm ; Bleecker, David: *Topology and analysis: the Atiyah-Singer index formula and gauge-theoretic physic.* Springer, New York, USA, 1985 - zitiert auf S. 466.

[Booss u. Bleecker 2013]
Booss, Bernhelm ; Bleecker, David: *Index Theory with Applications to Mathematics and Physics.* International Press of Boston inc, Boston, NJ, USA, 2013 - zitiert auf S. 466.

[Bott u. Tu 1982]
Bott, Raoul ; Tu, Loring W.: *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer Verlag, New York, USA, 1982 - zitiert auf S. 257, 428, 441, 449.

[Bröcker u. tom Dieck 1985]
Bröcker, Theodore ; Dieck, Tammo tom: *Representations of Compact Lie Groups.* Springer Verlag, New York, USA, 1985 - zitiert auf S. 281, 292.

[Brown 2012]
Brown, Kevin: *Essays on Geometry.* print on demand by the author `http://mathpages.com/home/kmath343/kmath343.htm` - zitiert auf S. 23.

[do Carmo 1976]
Carmo, Manfredo P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1976 - zitiert auf S. 143.

[Cartan 1938]
Cartan, Élie ; Mercier, André (Hrsg.): *Leçons sur la théorie des spineurs.* Hermann & Cie, Paris, 1938 - zitiert auf S. 96.

[Cartan 1966]
Cartan, Élie ; Mercier, André (Hrsg.): *Theory of Spinors.* Hermann, Paris & Cie (1966), Dover Pub. Inc., New York (1981), 1966 - zitiert auf S. 96.

[Cartier u. DeWitt-Morette 2006]
Cartier, Pierre ; DeWitt-Morette, Cécille: *Functional Integration - Action and Symmetries.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006 - zitiert auf S. 533.

[Chern 1944]
Chern, Shiing-Shen: A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. In: *Annals of Math, 45, 747-752* (1944) - zitiert auf S. 426.

[Chern u. Chevalley 1952]
Chern, Shiing-Shen ; Chevalley, Claude: Élie Cartan and his mathematical work.

In: *Bull. Amer. Math. Soc. 58, p. 217-250.* (1952). http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183516693 - zitiert auf S. 96, 426.

[Choquet-Bruhat u. a. 1978]
Choquet-Bruhat, Yvonne ; DeWitt-Morette, Cécile ; Dillard-Bleick, Margaret: *Analysis, Manifolds and Physics.* North-Holland (Elsevier Science Pub. Inc.), Amsterdam, Niederlande, 1978 - zitiert auf S. 149, 156, 394, 395.

[Deimling 1985]
Deimling, Klaus: *Nonlinear Functional Analysis.* Springer Verlag, Berlin, 1985 - zitiert auf S. 149.

[Dirac 1970]
Dirac, A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics.* 4. ed., rev., repr. Clarendon Press, Oxford, GB, 1970 - zitiert auf S. 352.

[Dirac 1975]
Dirac, Paul A. M.: *General theory of relativity.* New York : Wiley, 1975, 1975 - zitiert auf S. 353.

[Dirac 2003]
Dirac, Paul A. M.: *Lectures on Quantum Mechanics (at Yeshiva University, 1964).* Dover Publications Inc.„ 2003 - zitiert auf S. 352.

[DMV 2013]
DMV: *Zitatsammlung zur Mathematik.* Deutsche Mathematiker Vereinigung, Online http://www.mathematik.de/ger/index.php?artid=506 - zitiert auf S. 13.

[Dobrowolski 2006]
Dobrowolski, Manfred: *Angewandte Funktionalanalysis.* Springer Verlag, Berlin, 2006 - zitiert auf S. 583, 588, 613.

[Eilenberg u. Steenrod 1952]
Eilenberg, S. ; Steenrod, N.: *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton University Press, Princeton, NJ., USA, 1952 - zitiert auf S. 185.

[Einstein 1984]
Einstein, Albert: *Aus meinen späten Jahren.* DVA, Stuttgart, 1984 - zitiert auf S. 126.

[Einstein 1997]
Einstein, Albert ; Calaprice, Alice (Hrsg.): *Einstein sagt.* Piper, München, 1997 - zitiert auf S. 126.

[Einstein 1998]
Einstein, Albert: *Mein Weltbild.* Ullstein Buchverlage GmbH, Berlin, 1998 - zitiert auf S. 126.

[Eppstein 2013]
Eppstein, David: Twenty Proofs of Euler's Formula: V-E+F=2. In: *Theory Group, ICS, UC Irvine, Online* (2013). http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/ - zitiert auf S. 51.

[Eschenburg u. Jost 2007]
ESCHENBURG, Jost-Hinrich ; JOST, Jürgen: *Differentialgeometrie und Minimalflächen.* 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, 2007 - zitiert auf S. 27, 47, 49, 57, 68, 70, 71, 83, 113, 136, 139, 401.

[Evans 1998]
EVANS, Lawrence C.: *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1998 - zitiert auf S. 78, 388.

[Farmelo 2009]
FARMELO, Graham: *The Strangest Man - The hidden life of Paul Dirac, Quantum Genius.* Faber and Faber Ltd., London, GB, 2009 - zitiert auf S. 351, 353, 478.

[Fischer u. Kaul 1998]
FISCHER, H. ; KAUL, H.: *Mathematik für Physiker, Band 2.* Teubner GmbH, Stuttgart, 1998 - zitiert auf S. 560, 581, 583, 613.

[Fischer u. Kaul 2001]
FISCHER, H. ; KAUL, H.: *Mathematik für Physiker, Band 1.* Teubner GmbH, Stuttgart, 2001 - zitiert auf S. 328, 560, 568, 581.

[Flanders 1989]
FLANDERS, Harley: *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences.* Dover Publications, Inc., New York, USA, 1989 - zitiert auf S. 14.

[Frankel 2004]
FRANKEL, Theodore: *The Geometry of Physics - an Introduction.* 2.Ed. Cambridge University Press, Cambridge, GB, 2004 - zitiert auf S. 14, 15, 47, 57, 82.

[Freedman u. Van Proeyen 2012]
FREEDMAN, Daniel Z. ; VAN PROEYEN, Antoine: *Supergravity.* Cambridge University Press, Cambridge, GB, 2012 - zitiert auf S. 15, 78, 90, 313, 355, 368, 515.

[Friedan u. Windey 1984]
FRIEDAN, Daniel ; WINDEY, Paul: Supersymmetric Derivation of the Atiyah-Singer Index and the Chiral Anomaly. In: *Nuc. Phys. B235, (1984) 395-416* (1984) - zitiert auf S. 480.

[Fulton 1995]
FULTON, William: *Algebraic Topology - A First Course.* Springer Science+Business Media, Inc., New York, (NY), USA, 1995 - zitiert auf S. 175.

[Gauß 2013]
GAUSS, Carl F.: *Die Originalarbeiten von Gauß.* Digitalisierungszentrum der Universität Göttingen. `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/dms/load/toc/?PPN=PPN235957348`. Version: 2013 - zitiert auf S. 57.

[Gilkey 1995]
GILKEY, Peter B.: *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem.* 2. Ed. CRC Press, Boca Raton, USA, 1995 - zitiert auf S. 14, 267, 428, 448, 469, 500, 560, 581, 583, 587, 599, 604, 612.

[Goosens u. a. 2000]
GOOSENS, Michael ; MITTELBACH, Frank ; SAMARIN, Alexander: *Der Latex-Begleiter*. Addison-Wesley, München, 2000 - zitiert auf S. 615.

[Greiner u. Reinhardt 1993]
GREINER, Walter ; REINHARDT, Joachim: *Feldquantisierung.* 1. Aufl. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1993 (Theoretische Physik 7A) - zitiert auf S. 537.

[Grosche u. a. 2003]
GROSCHE, Günter ; ZEIDLER, Eberhard ; ZIEGLER, Viktor ; ZIEGLER, Dorothea: *Teubner Taschenbuch der Mathematik, Teil II.* Teubner, Stuttgart, 2003 - zitiert auf S. 13.

[Großmann 1972]
GROSSMANN, Siegfried: *Funktionalanlysis I u. II.* Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1972 - zitiert auf S. 560, 581, 583, 585, 613.

[Guilini u. a. 2003]
GUILINI, Domenico ; KIEFER, Claus ; LÄMMERZAHL, Claus: *Quantum Gravity - From Theory To Experimental Search.* Springer Verlag, Berlin, 2003 - zitiert auf S. 381.

[Guillemin u. Pollack 1974]
GUILLEMIN, Victor ; POLLACK, Alan: *Differential Topology.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, USA, 1974 - zitiert auf S. 149, 150, 152, 153, 159, 253.

[Hall 2003]
HALL, Brian C.: *Lie Groups, Lie Algebras and Representations.* Springer Verlag Inc., New York, USA, 2003 - zitiert auf S. 281, 297, 322, 332.

[Hassani 1999]
HASSANI, Sadri: *Mathematical Physics, A Modern Introduction to Its Foundations.* Springer, New York, USA, 1999 - zitiert auf S. 281, 285.

[Hatcher 2001]
HATCHER, Allen: *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, GB `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html` - zitiert auf S. 14, 207, 228, 239, 249.

[Hausner u. Schwartz 1968]
HAUSNER, Melvin ; SCHWARTZ, Jacob T.: *Lie Groups; Lie Algebras.* Gordon and Breach, New York, USA, 1968 - zitiert auf S. 175.

[Hehl u. a. 1976]
HEHL, Friedrich W. ; HEYDE, Paul von d. ; KERLICK, G. D.: General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. In: *Rev. Mod. Phys., 48, 393-416* (1976) - zitiert auf S. 90, 127.

[Hirzebruch 1978]
HIRZEBRUCH, Friedrich: *Topological Methods in Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1978 - zitiert auf S. 427, 442.

[Janssen u. Renn 2015]
JANSSEN, Michel ; RENN, Jürgen: Einsteins Weg zur allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Spektrum der Wissenschaft* 10 (2015), Oktober, S. S. 49–55 - zitiert auf S. 125.

[Joos u. a. 2003]
JOOS, Erich ; ZEH, H. D. ; KIEFER, Claus ; GIULINI, Domenico J. W. ; KUPSCH, Joachim ; STAMATESCU, Ion-Olimpiu: *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory.* Springer, New York, USA, 2003 - zitiert auf S. 126.

[Jost 1995]
JOST, Jürgen: *Riemannian Geometry and Geometrical Analysis.* Springer Verlag, Berlin, 1995 - zitiert auf S. 413.

[Kalka u. Soff 1997]
KALKA, Harald ; SOFF, Gerhard: *Supersymmetrie.* Teubner, Stuttgart, 1997 - zitiert auf S. 486, 491, 515, 529, 554.

[Katok u. Hasselblatt 2009]
KATOK, Anatole ; HASSELBLATT, Boris: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* 10. printing. Cambridge University Press, New York, USA, 2009 - zitiert auf S. 159.

[Klauder 2010]
KLAUDER, John R.: *A Modern Approach to Functional Integration.* Birkhäuser/Springer, New York, 2010 - zitiert auf S. 533.

[Kleinert 2006]
KLEINERT, H.: *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets.* 4. ed. World Scientific, Singapore, 2006 - zitiert auf S. 533.

[Knapp 1986]
KNAPP, Anthony W.: *Representation Theory of Semisimple Groups - An Overview Based On Examples.* Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1986 - zitiert auf S. 331.

[Kobayashi u. Nomizu 1963]
KOBAYASHI, Shoshichi ; NOMIZU, Katsumi: *Foundations of Differential Geometry.* Bd. I. Interscience Publishers, New York, NY, USA, 1963 - zitiert auf S. 14.

[Kobayashi u. Nomizu 1969]
KOBAYASHI, Shoshichi ; NOMIZU, Katsumi: *Foundations of Differential Geometry.* Bd. II. Interscience Publishers, New York, NY, USA, 1969 - zitiert auf S. 14, 428.

[Koecher 1992]
KOECHER, Max: *Lineare Algebra und analytische Geometrie.* Springer-Verlag, Berlin, 1992 - zitiert auf S. 439.

[Kragh 1990]
KRAGH, Helge: *Dirac : a scientific biography.* Cambridge University Press, Cambridge, GB, 1990 - zitiert auf S. 353.

[Kriegl 2006]
KRIEGL, Andreas: *Algebraic Topology.* http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/alg-top.pdf. Version: 2006 - zitiert auf S. 207, 240.

[Lax 2002]
LAX, Peter D.: *Functional Analysis.* John Wiley & Sons, Inc, New York, 2002 - zitiert auf S. 560, 575, 581.

[Lee 2012]
LEE, John M.: Simply Connected Spaces. (2012). http://www.math.washington.edu/~lee/Courses/441-2012/simplyconn.pdf?v2 - zitiert auf S. 174.

[Loll 2003]
Kapitel I/3. In: LOLL, Renate: *A Discrete History of the Lorentzian Path Integral.* Springer-Verlag, Berlin, 2003, S. 137–171 - zitiert auf S. 516.

[van Loon 2015]
LOON, Mark van: *Path Integral Methods in Index Theorems*, Merton College, University of Oxford, UK, Diss., 2015. http://arxiv.org/abs/1509.03063v1. – Elektronische Ressource - zitiert auf S. 480.

[MacTutor-E.-Cartan 2013]
MACTUTOR-E.-CARTAN: The MacTutor History of Mathematics archive: Élie Cartan. (2013). http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cartan.html - zitiert auf S. 96.

[Mania 2012]
MANIA, Hubert: *Gauß - Eine Biographie.* Rowohlt Verlag, Reinbeck bei Hamburg, 2012 - zitiert auf S. 57.

[Milnor 1965]
MILNOR, John W.: *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Princeton University Press, Princeton, NJ., USA, 1965 - zitiert auf S. 149, 152.

[Milnor u. Stasheff 1974]
MILNOR, John W. ; STASHEFF, James D.: *Characteristic Classes.* Princeton University Press, Princeton, NJ. USA, 1974 - zitiert auf S. 428.

[Misner u. a. 1973]
MISNER, Charles W. ; THORNE, Kip S. ; WHEELER, John A.: *Gravitation.* W. H. Freeman and Company, San Francisco, CA., USA, 1973 - zitiert auf S. 15, 79, 125, 313, 345.

[Mostafazadeh 1994]
MOSTAFAZADEH, Ali: *Supersymmetry, Path Integration, and the Atiyah-Singer Index Theorem*, The University of Texas at Austin, USA, Diss., 1994. http://arxiv.org/abs/hep-th/9405048v1. – Elektronische Ressource - zitiert auf S. 480.

[Munkres 1966]
MUNKRES, James R.: *Elementary Differential Topology.* Princeton Univ. Press, Princeton, USA, 1966 - zitiert auf S. 143, 187.

[Nakahara 2003]
NAKAHARA, Mikio: *Geometry, Topology and Physics.* Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL., USA, 2003 - zitiert auf S. 14, 15, 78, 79, 164, 170, 185, 192, 208, 257, 267, 377, 388, 394, 401, 413, 428, 429, 480, 516, 529, 604.

[Nash u. Sen 1983]
NASH, Charles ; SEN, Siddharta: *Topology and Geometry for Physicists.* Academic Press, Inc., New York, 1983 - zitiert auf S. 164, 185.

[Penrose 2004]
PENROSE, Roger: *The Road To Reality.* Vintage Books, Random House, Inc., New York, 2004 - zitiert auf S. 381, 479.

[Phillips 2013]
PHILLIPS, Tony: Descartes's Lost Theorem. In: *American Mathematical Society, Online* (2013). `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-descartes1` - zitiert auf S. 51.

[Pilet u. Struik 1970]
PILET, P. E. ; STRUIK, D. J.: *Biography in Dictionary of Scientific Biography: Pierre Ossian Bonnet.* New York `http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900523.html` - zitiert auf S. 135.

[Pontryagin 1966]
PONTRYAGIN, L. S.: *Topologica Groups.* Gordon and Breach, Science Pub., Inc., New York, (NY), USA, 1966 - zitiert auf S. 426.

[Poplawsky 2011]
POPLAWSKY, Nikodem: Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling. (2011). `http://arxiv.org/abs/1111.4595` - zitiert auf S. 127.

[Reed u. Simon 1980]
REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of Modern Mathematical Physics - Vol. 1 - Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1980 - zitiert auf S. 559.

[Richter u. Schiekel 2004]
RICHTER, H. ; SCHIEKEL, B.: Potenzsummen, Bernoulli-Zahlen und Eulersche Summenformel. (2004). `http://dx.doi.org/10.18725/OPARU-1819` - zitiert auf S. 447.

[Riemann 1854]
RIEMANN, Bernhard: Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen. In: *Online: Göttinger Digitalisierungszentrum* (1854). `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?IDDOC=35634` - zitiert auf S. 78.

[Roe 1998]
ROE, John: *Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods.* 2. ed. Addison Wesley Longman Ltd., Essex, England, 1998 - zitiert auf S. 470.

[Rovelli 2004]
ROVELLI, Carlo: *Quantum Gravity.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004 - zitiert auf S. 516.

[Růžička 2004]
Růžička, Michael: *Nichtlineare Funktionalanalysis.* Springer Verlag, Berlin, 2004 - zitiert auf S. 149.

[Ryder 2003]
Ryder, Lewis H.: *Quantum Field Theory.* 2. ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2003 - zitiert auf S. 355.

[de Sabbata 1998]
Sabbata, V. de: Evidence for torsion in gravity. In: Bergmann, P. G. (Hrsg.) ; et al. (Hrsg.): *Spin Gravity: Is it possible to give an experimental basis to torsion?* International School of Cosmology and Gravitation, XV Course, Erice, Italy, 1997, World Scientific, Singapore, 1998, S. 52–85 - zitiert auf S. 127.

[Sattinger u. Weaver 1986]
Sattinger, D. H. ; Weaver, O. L.: *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.* Springer Verlag, New York, USA, 1986 - zitiert auf S. 281, 285, 307.

[Scharlau 2017]
Scharlau, Winfried: *Das Glück, Mathematiker zu sein. Friedrich Hirzebruch und seine Zeit.* Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017 - zitiert auf S. 466.

[Schiekel 2011]
Schiekel, Bernhard: *Zeta-Funktionen in der Physik - eine Einführung.* 3. ed. Universität Ulm, Fakultät für Naturwissenschaften, Online `http://dx.doi.org/10.18725/OPARU-1927` - zitiert auf S. 13, 469, 488, 502, 519, 533, 543, 545, 546, 557, 559, 583.

[Schlosshauer 2008]
Schlosshauer, Maximilian: *Decoherence and the Quantum-To-Classical Transition.* 2. corr. printing. Springer-Verlag Berlin, 2008 - zitiert auf S. 126.

[Schutz 1980]
Schutz, Bernhard: *Geometrical methods of mathematical physics.* Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1980 - zitiert auf S. 14.

[Schwarz 1993]
Schwarz, Albert S.: *Quantum Field Theory and Topology.* Springer, Berlin, 1993 - zitiert auf S. 543.

[Scriba u. Schreiber 2010]
Scriba, C. J. ; Schreiber, P.: *5000 Jahre Geometrie.* Springer Verlag, Heidelberg, 2010 - zitiert auf S. 20, 21, 27, 32, 47.

[Shanahan 1978]
Shanahan, Patrick: *The Atiyah-Singer Index Theorem.* Springer Verlag, Berlin, 1978 - zitiert auf S. 441, 472.

[Shastri 2011]
Shastri, Anant R.: *Elements of Differential Topology.* CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2011 - zitiert auf S. 149.

[Shubin 2001]
Shubin, Mikhail A.: *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory.* 2. ed. Springer-Verlag, Berlin, 2001 - zitiert auf S. 593, 598, 613.

[Smolin 2001]
Smolin, Lee: *Three Roads to Quantum Gravity.* Basic Books, New York, NY, USA, 2001 - zitiert auf S. 479.

[Smolin 2013]
Smolin, Lee: *Time Reborn - From the Crisis in Physics to the Future of the Universe.* Houghton Mifflin Harcourt, Boston, USA, 2013 - zitiert auf S. 126, 515.

[Socolovsky 2011]
Socolovsky, M.: Fibre Bundles, Connections, General Relativity, and Einstein-Cartan Theory. (2011). `http://arxiv.org/abs/1110.1018` - zitiert auf S. 127, 130, 134.

[Spivak 1979]
Spivak, Michael: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Bd. I-V. Publish or Perish, Inc., Berkeley, CA., USA, 1979 - zitiert auf S. 14, 30, 32, 47, 57, 65, 66, 85, 120, 136, 139, 143, 187, 394, 426, 427.

[Steane 2013]
Steane, Andrew M.: An introduction to spinors. (2013). `http://arxiv.org/pdf/1312.3824` - zitiert auf S. 342.

[Steenrod 1951]
Steenrod, Norman: *Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, Princeton, USA, 1951 - zitiert auf S. 388.

[Stöcker u. Zieschang 1994]
Stöcker, Ralph ; Zieschang, Heiner: *Algebraische Topologie.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1994 - zitiert auf S. 14, 185, 186, 187, 207, 211, 228, 231, 233, 240.

[Streater u. Wightman 1969]
Streater, R. F. ; Wightman, A.S.: *PCT - Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie.* Bibliographischers Institut AG, Mannheim, 1969 - zitiert auf S. 375.

[Taylor 1996a]
Taylor, Michael E.: *Partial Differential Equations - 1. Basic Theory.* Springer-Verlag, New York, 1996 - zitiert auf S. 267.

[Taylor 1996b]
Taylor, Michael E.: *Partial Differential Equations - 2. Qualitative Studies of Linear Equations.* Springer-Verlag, New York, 1996 - zitiert auf S. 593.

[Thaller 1992]
Thaller, Bernd: *The Dirac Equation.* Springer Verlag, Berlin, 1992 - zitiert auf S. 351.

[Thiemann 2003]
Kapitel I/2. In: Thiemann, Thomas: *Lectures on Loop Quantum Gravity.* Springer-Verlag, Berlin, 2003, S. 41–135 - zitiert auf S. 516.

[Varadarajan 1984]
VARADARAJAN, Veeravalli S.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations.* 2. printing. Springer Verlag, New York, USA, 1984 - zitiert auf S. 281, 289, 307.

[Voigt u. Wloka 1975]
VOIGT, Alexander ; WLOKA, Josef: *Hilberträume und elliptische Differentialoperatoren.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1975 - zitiert auf S. 560, 581, 583, 613.

[van der Waerden 1974]
WAERDEN, B. L. d.: *Group Theory and Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, 1974 - zitiert auf S. 281, 332.

[Wald 1984]
WALD, Robert M.: *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago, USA, 1984 - zitiert auf S. 15, 78, 79, 125.

[Weinberg 1995a]
WEINBERG, Steven: *The Quantum Theory of Fields.* Bd. I. Cambridge University Press, Cambridge, GB, 1995 - zitiert auf S. 313, 375.

[Weinberg 1995b]
WEINBERG, Steven: *The Quantum Theory of Fields - Supersymmetry.* Bd. III. Cambridge University Press, Cambridge, GB, 1995 - zitiert auf S. 368, 515.

[Werner 2005]
WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis.* 5. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 2005 - zitiert auf S. 329, 330, 560, 563, 566, 567, 581, 583, 585, 587, 613.

[Wikipedia-Atiyah 2010]
WIKIPEDIA-ATIYAH: Michael Atiyah. (2010). `https://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Atiyah` - zitiert auf S. 468.

[Wikipedia-Bonnet 2013]
WIKIPEDIA-BONNET: Pierre Ossian Bonnet. (2013). `https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Ossian_Bonnet` - zitiert auf S. 135.

[Wikipedia-Cartan 2013]
WIKIPEDIA-CARTAN: Élie Cartan. (2013). `https://en.wikipedia.org/wiki/Elie_Cartan` - zitiert auf S. 96.

[Wikipedia-Chern 2015]
WIKIPEDIA-CHERN: Shiing-Shen Chern. (2015). `https://en.wikipedia.org/wiki/Shiing-Shen_Chern` - zitiert auf S. 426.

[Wikipedia-Dirac 2016]
WIKIPEDIA-DIRAC: Paul Dirac. (2016). `https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac` - zitiert auf S. 353.

[Wikipedia-Ehresmann 2010]
WIKIPEDIA-EHRESMANN: Charles Ehresmann. (2010). `https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Ehresmann` - zitiert auf S. 388.

[Wikipedia-Einstein 2017]
Wikipedia-Einstein: Albert Einstein. (2017). `https://de.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein` - zitiert auf S. 126.

[Wikipedia-Euklid 2016]
Wikipedia-Euklid: Euklid. (2016). `https://de.wikipedia.org/wiki/Euklid` - zitiert auf S. 20.

[Wikipedia-Euler 2010]
Wikipedia-Euler: Leonhard Euler. (2010). `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler` - zitiert auf S. 31.

[Wikipedia-Gauß 2013]
Wikipedia-Gauss: Carl Friedrich Gauß. (2013). `https://de.wikipedia.org/wiki/Gauss` - zitiert auf S. 57.

[Wikipedia-Hirzebruch 2016]
Wikipedia-Hirzebruch: Friedrich Hirzebruch. (2016). `https://en.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Hirzebruch` - zitiert auf S. 466.

[Wikipedia-Poincaré 2016]
Wikipedia-Poincaré: Henri Poincaré. (2016). `https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincare` - zitiert auf S. 164.

[Wikipedia-Poincaré-Vermutung 2015]
Wikipedia-Poincaré-Vermutung: Poincaré-Vermutung. (2015). `https://de.wikipedia.org/wiki/Poincare-Vermutung` - zitiert auf S. 164, 244.

[Wikipedia-Pontrjagin 2016]
Wikipedia-Pontrjagin: Lew Semjonowitsch Pontrjagin. (2016). `https://en.wikipedia.org/wiki/Lev_Pontryagin` - zitiert auf S. 426.

[Wikipedia-Riemann 2010]
Wikipedia-Riemann: Bernhard Riemann. (2010). `https://de.wikipedia.org/wiki/Riemann` - zitiert auf S. 78.

[Wikipedia-Singer 2016]
Wikipedia-Singer: Isadore M. Singer. (2016). `https://de.wikipedia.org/wiki/Isadore_M._Singer` - zitiert auf S. 468.

[Wikipedia-Witten 2016]
Wikipedia-Witten: Edward Witten. (2016). `https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Witten` - zitiert auf S. 479.

[Wikipedia-Yang 2017]
Wikipedia-Yang: Chen-Ning Yang. (2017) - zitiert auf S. 414.

[Wilkins 2008]
Wilkins, David R.: Algebraic Topology, Section 4: Covering Maps and Discontinuous Group Actions. (2008). `http://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/421/421S4_0809.pdf` - zitiert auf S. 181.

[Windey 1984]
Windey, Paul: Supersymmetric Quantum Mechanics and the Atiyah-Singer Index Theorem. In: *Acta Physica Polonica, B15 (1984) 435-452* (1984) - zitiert auf S. 480.

[Witten 1982]
Witten, Edward: Constraints on Supersymmetry Breaking. In: *Nucl. Phys. B202 (1982) 253-316* (1982) - zitiert auf S. 480.

[Witten 2016]
Witten, Edward: Homepage von Edward Witten. (2016). `http://www.sns.ias.edu/witten/` - zitiert auf S. 479.

[Woit 2006]
Woit, Peter: *Not Even Wrong*. Basic Books, Perseus Books Group, New York, USA, 2006 - zitiert auf S. 479.

[Wong 1999]
Wong, Man W.: *Pseudo-Differential Operators*. World Scientific Pub. Co., Singapore, 1999 - zitiert auf S. 583, 612.

[Zeidler 1986]
Zeidler, Eberhard: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*. Springer Verlag, New York, USA, 1986 - zitiert auf S. 149.

[Zeidler 2011]
Zeidler, Eberhard: *Quantum Field Theory III: Gauge Theory*. Springer Verlag, Berlin, 2011 - zitiert auf S. 413, 414.