



ulm university universität
uulm

VOITH
Engineered reliability.

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Numerische Mathematik

Dissertation

Optimale Allokation für Voith-Schneider Propeller im Rahmen des dynamischen Positionierens

zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.
der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
der Universität Ulm

vorgelegt von
Anke Brandner
aus Stuttgart

Oktober 2014

Amtierender Dekan: Prof. Dr. Dieter Rautenbach (Universität Ulm)
1. Gutachter: Prof. Dr. Karsten Urban (Universität Ulm)
2. Gutachter: Prof. Dr. Dirk Lebiedz (Universität Ulm)
Tag der Promotion: 04. Februar 2015

Zusammenfassung

Der Voith-Schneider Propeller (VSP) ist ein von der Firma Voith entwickelter Zykloidalpropeller, der Schub in jede horizontale Richtung erzeugen kann. Ein weiterer Propeller, der diese Eigenschaft besitzt, ist der sogenannte Azimutpropeller, der von verschiedenen Herstellern produziert wird. Beide Antriebe sind sehr manövrierfähig und eignen sich damit für Aufgaben, wie dem dynamischen Positionieren (DP), bei dem eine hohe Akkuratessse erforderlich ist. Das DP-System sendet dabei in regelmäßigen Abständen eine Kraftanforderung an die Antriebe. Die energieeffiziente Verteilung dieser übernimmt die Allokation. Bei der Allokation sind vor allem Kenntnisse über das Steuerverhalten der Antriebe notwendig. Aufgrund der stärkeren Verbreitung des Azimutpropellers existiert bisher in den DP-Systemen keine eigene Allokation für den VSP, sodass er bisweilen als Azimutpropeller betrachtet wird. Da sich die beiden Antriebe jedoch grundsätzlich in ihrer Steuerung unterscheiden, wird der VSP mit seiner besonderen Steuerlogik nicht optimal genutzt. Aufgrund dieser Gegebenheit entstand diese Arbeit mit dem Ziel der Entwicklung eines Allokationsmoduls zur optimalen und energieeffizienten Ansteuerung von Voith-Schneider Propellern unter Beachtung seiner besonderen Steuereigenschaften, wodurch sich eine Verbesserung der Akkuratessse und des Energieverbrauchs im DP-Betrieb im Vergleich zur bisherigen Betrachtung ergibt. Für die Umsetzung des Allokationsmoduls wurde das Allokationsproblem, also die Ansteuerung der Propeller zum Erzeugen einer geforderten Kraft, als Optimalsteuerungsproblem mit multikriterieller Zielfunktion formuliert, da neben einem schnellen Erzeugen der geforderten Kraft auch die Energieeffizienz von hoher Bedeutung ist. Um Einflüsse, wie die Auswirkung von Anströmung oder Interaktionen zwischen den Antrieben berücksichtigen zu können, wurden aus Berechnungen und Messungen Modelle entwickelt, welche die Einflüsse abbilden. Resultierend daraus entstand ein Allokationsmodul, das sowohl für VSP, aber auch für Azimutpropeller und Bugstrahlruder verwendet werden kann. Dies ermöglicht eine optimale Steuerung und Ausnutzung aller Antriebe im Falle eines Mischbetriebes. Des Weiteren können die Steuereigenschaften und DP-Eigenschaften von VSP und Azimutpropellern direkt miteinander verglichen werden. Fallstudien hierzu ergaben eine höhere Manövrierfähigkeit des VSP gegenüber dem Azimutpropeller, jedoch einen höheren Energieverbrauch bei gleichem Schub. Dies unterstreicht die Wichtigkeit der eigenständigen Betrachtung des Voith-Schneider-Propellers in der Allokation.

Abstract

The Voith-Schneider-Propeller (VSP) is a cycloid propeller, developed by the company Voith, which has the potential to produce thrust in each horizontal direction. Another propeller also has this property and is the so called Azimuth propeller, which is produced by a variety of manufacturers. Both drives are extremely maneuverable and are suitable for such tasks as the dynamic positioning (DP), in which high accuracy is required. The DP system sends hereby thrust requirements in regular frequencies to the drives. The energy efficient distribution of the thrust requirements takes the allocation. In the allocation, knowledge about the control behaviour of the drives is a necessity. Due to the fact that there are more Azimuth propeller existing, so far in the DP System does not exist an own allocation for the VSP, hence it's considered to be an Azimuth propeller. Since the two drives in principle differ in their control, the VSP is not with its special control logic optimally utilised. Due to this fact, this work was created with the aim of developing a module for the optimal allocation and energy efficient control of the Voith-Schneider propellers. In accordance with its special control properties, thereby improving the accuracy and energy consumption in the DP-mode in comparison to the previous viewing results. For the implementation of the allocation module the allocation issue, which means control of the propeller for generating a required thrust, was formulated as an optimal control problem with multicriteria objective function, since in addition to a fast generating of the required force, the energy efficiency is considered of great importance. In order to be able to take into consideration influences such as the impact of the flow of the water or the impact of the interaction between the propellers, calculations and measuring models were developed, which map the influences created. As a result, an allocation module, which can be utilised by VSP, Azimuth propellers and bow thrusters, was developed. This makes it possible to have an optimal control and utilisation of all drives in the event of a mixing operation. Furthermore, the control and DP properties of VSP and Azimuth propellers can be directly compared. Case studies indicated a higher manouverability of the VSP against the Azimuth-Propeller, however, the VSP requires a higher energy consumption to generate the same thrust. Ultimately, this highlights the importance of the independent consideration of Voith-Schneider propeller in the allocation.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ziel der Arbeit	2
1.2	Aufbau der Arbeit	3
2	Grundlagen des dynamischen Positionierens (DP)	5
2.1	Struktur eines DP-Systems	5
2.2	Allokation von Schiffsantrieben	7
2.3	Funktionsweise einiger Schiffsantriebe	9
2.3.1	Voith-Schneider Propeller (VSP)	9
2.3.2	Azimutpropeller	11
2.3.3	Bugstrahlruder	12
3	Numerische Optimierung	13
3.1	Multikriterielle Optimierung	15
3.1.1	Methode der gewichteten Summe	16
3.1.2	Elastic-Constraint Methode	17
3.1.3	Lexikographische Optimierung	19
3.2	Minimumprinzip für Optimalsteuerungsprobleme	23
3.2.1	Anwendung des Minimumprinzip auf die Allokation	25
3.2.2	Zeitoptimale Steuerung	27
3.3	Numerische Lösungsverfahren	28
3.3.1	Diskretisierung der Steuerung	28
3.3.2	Diskretisierung des Zustandes	29
3.3.3	Runge-Kutta-Verfahren	31
3.3.4	Reduzierte Diskretisierung	33
3.4	Optimierungsverfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme	35
3.4.1	Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen	35
3.4.2	SQP-Verfahren	37
3.4.3	Innere-Punkte-Verfahren	39
4	Optimale Allokation für VSP und Azimutpropeller	43
4.1	Modellierung von Schub und Leistung der Antriebe	43
4.1.1	Modellierung des Voith-Schneider Propellers	44
4.1.2	Modellierung des Azimutpropellers	56
4.1.3	Modellierung des Bugstrahlruders	59
4.1.4	Allokationsproblem für VSP und Azimutpropeller	61

4.1.5	Aufbau des Allokationsmoduls	63
4.2	Numerische Resultate	66
4.2.1	Multikriterielle Zielfunktionen	66
4.2.2	Fall- und Parameterstudien	72
4.2.3	Vergleich von VSP und Azimutpropeller	74
5	Echtzeitsteuerung mittels Modellreduktion	79
5.1	Sensitivitätsanalyse	80
5.2	Proper Orthogonal Decompostion (POD)	84
5.2.1	Reduktion des Optimierungsproblems	84
5.2.2	Reduktion der Nebenbedingungen	85
5.3	Numerische Resultate	90
5.3.1	Parameterstudie	90
5.3.2	Beispiel: Schuberzeugung mit Echtzeitsteuerung	93
6	Kombination der Allokation mit einem Regler	97
6.1	Dynamisches Positionieren mit einem PID-Regler	97
6.2	Dynamisches Positionieren mit optimaler Steuerung	101
6.2.1	Feedback-Steuerung	101
6.2.2	Bewegungsgleichung - 6 Freiheitsgrade	107
6.2.3	Umwelteinflüsse	110
6.2.4	Problemformulierung	112
6.3	Analyse des DP-Verhaltens von VSP und Azimutpropeller	116
6.3.1	Durschnittliche Wetterbedingungen auf der Nordsee	116
6.3.2	DP-Verhalten von VSP und Azimutpropeller	116
6.4	Ausblick: Integration von Rollstabilisierung in das DP-System mit VSP .	123
Anhang A		126
Anhang B		126
Abbildungsverzeichnis		171
Literaturverzeichnis		175
Erklärung		179

1 Einleitung

Seit der nuklearen Katastrophe am 11. März 2011 in Fukushima, Japan, verstärkt sich die Forderung in der Bevölkerung nach erneuerbaren Energien und dem Abschalten vor allem alter Kernkraftwerke [1]. Bisher werden, nach dem Stand von Dezember 2013, 15.4% der in Deutschland benötigten Energie in Kernkraftwerken gewonnen [2]. Erneuerbare Energien, wie unter anderem Windkraftanlagen und Wasserkraftwerke haben einen Anteil von 23.4% [2]. Bis zum Jahr 2025 soll dieser auf 40 – 45% und bis 2035 sogar auf 55 – 60% ausgebaut werden [2]. Dies hat schon jetzt eine steigende Anzahl an Gezeitenkraftwerken und Windkraftanlagen auch im Offshore-Bereich zur Folge. Bisher sind in Deutschland, verteilt auf die Nord- und Ostsee, 146 Offshore-Windkraftanlagen in Betrieb [3]. Weitere 570 befinden sich im Bau [3]. Für die Installation und Wartung solcher Windkraftanlagen auf dem Meer sind besonders manövrierfähige Schiffe notwendig. Um Arbeiten an den Anlagen zu ermöglichen, müssen die Schiffe auch unter extremen Umweltbedingungen ruhig die Position halten. Exemplarisch ist hier die North Sea Giant (vgl. Abbildung 1.1) des norwegischen Betreibers North Sea Shipping AS zu nennen. Sie wird mit fünf Voith-Schneider Propellern (VSP) angetrieben und wird neben der Installation und Wartung von Windkraftanlagen auch zur „Installation von Plattformen, Förderanlagen, Verlegung von Pipelines, Unterseekabeln und der Installation von Gezeitenturbinen“ [4] eingesetzt. Das Halten der Position ohne Ankersysteme nur durch die Kraft der Antriebe nennt man dynamisches Positionieren (DP). Hierbei ist neben einer hohen Genauigkeit auch Energieeffizienz erwünscht. Um eine hohe Genauigkeit zu erreichen, benötigt man sehr manövrierfähige Propeller. Dabei eignen sich vor allem Propeller, die Schub in jede Richtung der horizontalen Ebene erzeugen können. Dazu gehören der sich an einer Gondel befindliche und damit drehbare Azimutpropeller und der Voith-Schneider Propeller. Der Voith-Schneider Propeller gehört zu den Zykloidalpropellern und kann aufgrund seiner besonderen XY-Steuerlogik (vgl. Kapitel 2) neben der Schubrichtung auch die Schubstärke stufenlos und schnell verstellen. Während des



Abbildung 1.1: Versorgungsschiff: North Sea Giant (Quelle: Voith Turbo)

dynamischen Positionierens werden, um das Schiff auf Position zu halten, Schubforderungen an die Antriebe gestellt. Die Verteilung dieser Forderungen auf die einzelnen Antriebe des Schiffes übernimmt die sogenannte Allokation. Für einen Azimutpropeller ergeben sich daraus eine Schubstärke und Schubrichtung, die durch eine Änderung der Drehzahl und der Ausrichtung des Propellers erreicht werden kann. Der Voith-Schneider Propeller dagegen wird bisher in der Allokation als Azimutpropeller betrachtet, da für den VSP bisher keine eigene Allokation vorliegt. Die geforderte Schubstärke und Richtung werden dann durch Änderung der Drehzahl, aber vor allem durch die Änderung der XY-Steuerung erreicht. Da er die Schubstärke neben der Drehzahl auch durch seine Steuerlogik beeinflussen kann, ist es dem VSP möglich, die geforderte Schubstärke deutlich schneller zu erreichen als der Azimutpropeller. Ähnliches gilt für die Schubrichtung. Für eine Änderung der Schubrichtung muss sich der Azimutpropeller um sich selbst drehen. Der dabei entstehende unerwünschte Schub muss durch weitere Propeller am Schiff kompensiert werden. Dieser Nachteil besteht beim VSP nicht. Mit ihm ist es möglich die Schubrichtung zu ändern, ohne Schub in Richtungen zu erzeugen, die nicht erwünscht sind. Dazu kommt, dass eine Richtungsänderung von 180° bei einem Azimutpropeller bis zu viermal länger dauern kann als bei einem VSP.

1.1 Ziel der Arbeit

Die Allokation im DP-System ist darauf ausgelegt, die Schubforderung so auf die Antriebe zu verteilen, dass es diesen auch möglich ist, den Schub zu erzeugen und dass nach Möglichkeit der von den Antrieben erzeugte Schub der Schubforderung entspricht. Da der VSP bisher als Azimutpropeller betrachtet wird, werden einige grundlegende Eigenschaften in der Allokation nicht berücksichtigt. Darunter befinden sich unter anderem die schnellen Steuerzeiten des VSP bezüglich der Änderung von Schubrichtung, aber auch Schubstärke, sowie das Vermeiden unerwünschter Querkräfte während der Änderung der Schubrichtung. Um eine noch bessere Akkuratess und Energieeffizienz von Schiffen mit Voith-Schneider Antrieb im DP-Betrieb zu erreichen, ist eine eigene Betrachtung des VSP in der Allokation notwendig. Die Umsetzung einer Allokation, die alle Steuereigenschaften des VSP beachtet und optimal ausnutzt, ist das Ziel dieser Arbeit. Die Entwicklung der Allokation für Voith-Schneider Propeller ist ein Teil des Projekts „*Dynamic Positioning von Schiffen und Plattformen mit Motionstabilisierung unter Verwendung von XY-Logik*“ in Kooperation mit der Firma Voith Turbo, der Universität Rostock, der TU Hamburg und der Schiffbau-Versuchsanstalt Potsdam. Neben dem Einsatz im DP-Betrieb findet die neuentwickelte Allokation auch Anwendung in der neuen elektronischen Steuerung der Firma Voith Turbo. Die Ansteuerung der einzelnen Antriebe am Schiff erfolgt bisher über einzelne Joysticks oder Steuerräder. Bei mehr als drei Propellern am Schiff werden je zwei Propeller mit einem Joystick gemeinsam angesteuert. Dies kann zu unerwünschten Interaktionen zwischen den Propellern führen. Durch die Allokation ist es allerdings möglich, einen Masterjoystick einzusetzen, der ähnlich zum DP-Betrieb eine Schubforderung an alle Propeller richtet und diese durch die Allokation auf die einzelnen Antriebe effizient verteilt. Da in der Allokation

neben dem VSP auch die Steuereigenschaften von Azimutpropellern und Bugstrahlrudern integriert sind, ist ein sogenannter Mischbetrieb einfach mit einem Masterjoystick steuerbar. Eine weitere Anforderung an die Allokation stellt die Energieeffizienz dar. Die Antriebe sollen den geforderten Schub nicht nur erzeugen, sondern dabei nach Möglichkeit auch wenig Kraftstoff benötigen. Die Kombination aus Energieeffizienz und schneller Schuberzeugung, sowie die Steuerung verschiedenartiger Antriebe führt zu einem Optimalsteuerungsproblem mit multikriterieller Zielfunktion, auf das ausführlich in Kapitel 3 und 4 eingegangen wird. Aufgrund der Anwendungsgebiete der Allokation, dem DP-Betrieb und dem Masterjoystick, sind robuste und zeitnahe Lösungen des Optimalsteuerungsproblems notwendig. Neben der genannten Anwendungsgebieten ist es zudem möglich, die Allokation für Simulationen zu nutzen. Hierbei können aufgrund der Integration von VSP und Azimutpropeller die Eigenschaften der Antriebe direkt miteinander verglichen werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Funktionsweise und den Aufbau der in der Allokation verwendeten Antriebe, VSP, Azimutpropeller und Bugstrahlruder beschreibt Kapitel 2 dieser Arbeit. Die theoretischen Grundlagen der multikriteriellen Optimierung sowie der Optimalsteuerung werden in Kapitel 3 dargestellt. Numerische Verfahren zu Lösung von Optimalsteuerungsproblemen als auch Optimierungsprobleme schließen dieses Kapitel. Neben der Beachtung der besonderen Steuerung des VSP in der Allokation ist auch die Berücksichtigung von Interaktionen zwischen den Antrieben oder den Antrieben und dem Schiff von hoher Bedeutung. Die Modellierung von Propellerschub und Leistung aller drei Antriebsarten sowie die Umsetzung und Bewertung der Allokation für diese Antriebe ergeben Kapitel 4. Für eine zeitnahe Lösung ist eine Echtzeitapproximation dieser oft unvermeidlich. Zwei Approximationmethoden werden in Kapitel 5 vorgestellt. Im abschließenden letzten Kapitel dieser Arbeit wird die Allokation in ein DP-System integriert. Dabei werden die Unterschiede zwischen einem DP-System mit einem PID-Regler und einer modellbasierten Regelung untersucht, sowie das DP-Verhalten von VSP und Azimutpropeller miteinander verglichen.

2 Grundlagen des dynamischen Positionierens (DP)

Die Idee des dynamischen Positionierens entstand mit der Etablierung der Offshore-Ölförderung. Zunächst wurden dafür schwimmende Plattformen oder Schiffe verwendet, die durch ein System von Ankerleinen am Grund befestigt waren. Dadurch war es möglich, trotz Umwelteinflüssen die Position zu halten. Im Jahr 1957 wurde es im Rahmen eines amerikanischen Projektes notwendig, Öl aus einer Tiefe von 6000 m zu fördern. Zudem war der Förderpunkt 4,5 km von der Küste entfernt. Unter diesen Bedingungen war es nicht mehr möglich, ein Ankersystem zu nutzen, das die Plattform auf ihrer Position hielt. So entstand die Idee, die Ankerleinen durch Antriebe zu ersetzen, welche die Plattform oder das Schiff auf Position halten sollten. Das erste DP-System wurde dann 1961 auf der *Cuss 1* installiert und getestet [25]. Heute werden DP-Systeme auch zur Wartung und Installation von Offshore-Windkraftanlagen und Gezeitenkraftwerken, sowie zur Versorgung von Plattformen angewendet.

2.1 Struktur eines DP-Systems

Im Allgemeinen bedeutet dynamisches Positionieren bei Schiffen, dass Position und Ausrichtung bezüglich dem Grund des Meeres, trotz Umwelteinflüssen wie Wind, Wellen und Strömung, beibehalten werden. Dies geschieht rein durch die Kraft der Antriebe, ohne Anwendung von Ankersystemen [25]. Dies zu gewährleisten ist Aufgabe eines DP-Systems. Ein einfaches DP-System setzt sich aus mehreren Komponenten (vgl. Abbildung 2.1) zusammen. Mit Messsystemen, wie Global Positioning System (GPS) und Kompass, wird die aktuelle Position und Ausrichtung des Schiffes ermittelt. Diese Informationen gehen zusammen mit der Sollposition/-ausrichtung in den Regler ein. Der Regler ermittelt aufgrund dieser Informationen eine Kraft $\hat{\tau} \in \mathbb{R}^3$, welche es dem Schiff ermöglichen soll, die Position zu halten. Da man sich beim DP rein auf die Bewegungen in x- und y-Richtung und die Drehung um die z-Achse beschränkt, setzt sich die Kraft $\hat{\tau}$ dabei aus der Kraft in x- und y-Richtung, sowie dem Moment um die z-Achse des Schiffes zusammen. Die weiteren Bewegungen wie Rollen (Drehung um die x-Achse), Stampfen (Drehung um die y-Achse) und die Bewegung in z-Richtung werden nicht beachtet. Dabei bezeichnet die x-Achse die Längsachse und die y-Achse die Querachse des Schiffes. Die vom Regler geforderte Kraft $\hat{\tau}$ bezieht sich im Allgemeinen und in dieser Arbeit auf den Schwerpunkt des Schiffes. Die nächste Komponente des DP-Systems ist die Allokation oder die Schuballokation. In diesem Teil wird die vom Regler geforderte Kraft so auf die Antriebe verteilt, dass die Kraft energieeffizient erzeugt wird. Die von

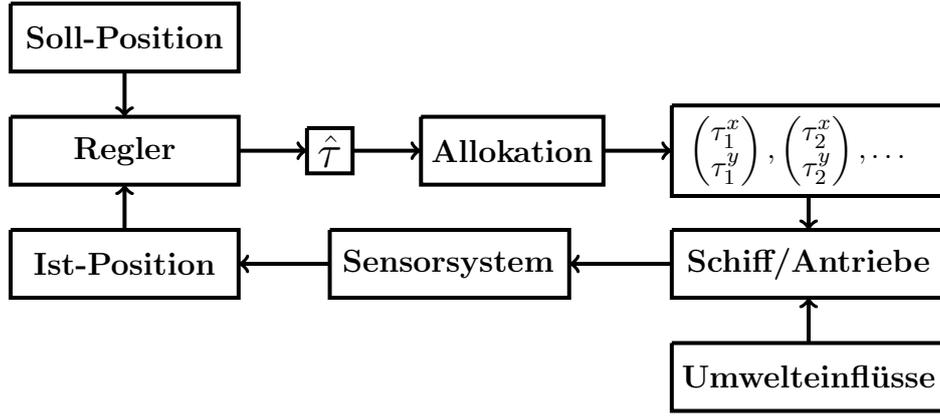


Abbildung 2.1: DP-System

den Antrieben erzeugten Kräfte wirken zusammen mit den Kräften von Strömung, Wind und Wellen auf das Schiff, welches daraufhin seine Position und Ausrichtung ändert. Die neu entstandene Position und Ausrichtung wird in Anwendungen über GPS und andere Sensorsysteme bestimmt. Bei Simulationen wird die Schiffsbewegung über die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= R(\phi, \theta, \psi) \cdot \nu \\ M_{\text{RB}}\dot{\nu} + C_{\text{RB}}(\nu)\nu + M_{\text{A}}\dot{\nu}_r + C_{\text{A}}(\nu_r)\nu_r + D(\nu_r)\nu_r + g(\eta) + g_0 &= \tau \end{aligned} \quad (2.1)$$

ermittelt. Dabei beschreibt $\eta = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)^T$ die Position, $\nu = (u, v, w, p, q, r)^T$ die Geschwindigkeit und ν_r die relative Schiffsgeschwindigkeit zur Meeresströmung. Da die Geschwindigkeit bezüglich des schiffsfesten Koordinatensystem angegeben wird, ist für die korrekte Berechnung der Position die Rotationsmatrix R notwendig. In $\tau \in \mathbb{R}^3$ sind alle auf das Schiff wirkenden Kräfte zusammengefasst. Die Matrizen M_{RB} und $C_{\text{RB}}(\nu)$ bezeichnen hierbei die Masse- und Coriolismatrix, hydrodynamische und hydrostatische Einflüsse finden sich in $M_{\text{A}}, C_{\text{A}}, D, g$ und g_0 . Einzelheiten zu der Bewegungsgleichung werden in [27] und Kapitel 6 beschrieben. Diese Bewegungsgleichung findet auch Anwendung in DP-Systemen mit einer modellprädiktiven Regelung. Sehr häufig wird jedoch ein PID-Regler verwendet (mündl. Aussage der Firma Voith Turbo), um das Schiff auf der Sollposition $\hat{\eta}$ zu halten. Bei diesem Regler reicht das Wissen über die aktuellen und vorherigen Positionen sowie die aktuelle Geschwindigkeit aus

$$\hat{\tau}(t) = P \cdot (\eta(t) - \hat{\eta}) + I \cdot \int_0^t (\eta(s) - \hat{\eta}) \, ds + D \cdot \nu(t). \quad (2.2)$$

Die konstanten Koeffizienten P , I und D müssen dabei für jedes Schiff separat angepasst werden. Zusammengefasst besteht ein einfaches DP-System aus drei Komponenten: dem Regler, der Allokation und der Ermittlung der Schiffsposition über Sensorsysteme oder über die Bewegungsgleichung.

2.2 Allokation von Schiffsantrieben

Die Hauptaufgabe der Allokation besteht in der Verteilung der geforderten Kraft auf die einzelnen Antriebe, sodass gilt:

$$\hat{\tau} = B \cdot f. \quad (2.3)$$

Hierbei beschreibt der Vektor $f \in \mathbb{R}^K$ die Kraft der K Antriebe. Die Matrix B wird entsprechend der verwendeten Antriebe aufgestellt,

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & \cdots & \cos(\alpha_K) \\ \sin(\alpha_1) & \cdots & \sin(\alpha_K) \\ l_{x,1} \sin(\alpha_1) - l_{y,1} \cos(\alpha_1) & \cdots & l_{x,K} \sin(\alpha_K) - l_{y,K} \cos(\alpha_K) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

wobei α die Schubrichtung der einzelnen Antriebe beschreibt. Eine äquivalente Möglichkeit ist die Berechnung über die x - und y -Komponente der Schubkraft, sodass gilt:

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -l_{y,1} & l_{x,1} & \cdots & -l_{y,K} & l_{x,K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ \vdots \\ f_K^x \\ f_K^y \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Bei nicht rotierbaren Antrieben ist der Winkel α konstant. Im Fall eines Bugstrahlruders wäre $\alpha = \pi/2$, also $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ l_x \end{pmatrix}$. Die geforderte Kraft $\hat{\tau}$ bezieht sich immer auf einen fixen Bezugspunkt im schiffsfesten Koordinatensystem. In der Regel wird hierfür der Schwerpunkt des Schiffes gewählt. Da sich die einzelnen Propellerkräfte auf denselben Punkt beziehen, beschreiben l_x und l_y den Abstand der Propeller zu dem Bezugspunkt [27, S. 400-403]. Ein weiteres Ziel der Allokation ist die Leistungsminimierung. In einigen Arbeiten wie [50] und [39], wird dafür die Leistung P als Funktion des Propellerschubes T approximiert

$$P(T) = (P_{\max} - P_{\min}) \left(\frac{|T|}{T_{\max}} \right)^\mu + P_{\min}, \quad 1.3 \leq \mu \leq 1.7. \quad (2.6)$$

Als weitere Approximation wird die Leistung zuletzt als quadratische Funktion

$$P(T) \approx aT^2 + b \quad (2.7)$$

dargestellt. Restriktionen wie das Erzeugen der Kraft $\hat{\tau}$ mit (2.3) und die Beschränkungen von Propellerschub und Leistung

$$f_{\min} \leq f \leq f_{\max} \quad (2.8)$$

$$P_{\min} \leq P \leq P_{\max} \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

gehen ebenfalls in die Allokation ein. In einigen Arbeiten wie [35] wird zusätzlich noch die Änderungsrate des Propellerschubes und des Azimutwinkels α beschränkt

$$\Delta\alpha_{\min} \leq \alpha - \alpha_0 \leq \Delta\alpha_{\max}. \quad (2.11)$$

Das sich daraus ergebende Optimierungsproblem mit den Schubkomponenten der einzelnen Antriebe als Optimierungsvariable wird meist mit einem SQP-Verfahren gelöst. Das Allokationsmodul, welches in dieser Arbeit entwickelt wird, unterscheidet sich in einigen Punkten grundsätzlich von der beschriebenen Allokation. Anstatt einer Approximation der Leistung als quadratische Funktion des Schubes wird sie, genau wie der Propellerschub selbst, als Funktion abhängig der Steuerkomponenten, beispielsweise der Drehzahl, modelliert. Zudem fließen zusätzlich Interaktionseffekte, wie Propeller-Propeller-Interaktion in die Problemformulierung mit ein. Arbeiten wie die von Arditto und Tannuri [14] haben gezeigt, dass die Leistung besser reduziert werden kann, wenn man solche Interaktionseffekte beachtet. Die Beschränkung der Änderungsrate des Schubes wird somit durch die Beschränkung der Änderungsrate der Steuerkomponenten ersetzt. Die Variablen des Optimierungsproblems sind durch diese Formulierung die Steuerkomponenten der Antrieb und nicht mehr die Schubkomponenten in x - und y -Richtung. Da man nicht nur an der Steuerung interessiert ist, welche die geforderte Kraft Energieoptimal erzeugt, sondern auch an der Trajektorie, die jede der einzelnen Steuerkomponenten zurücklegen muss um diesen Wert zu erreichen, wird die Allokation anstatt als Optimierungsproblem als Optimalsteuerungsproblem formuliert (vgl. Kapitel 3). Ein letzter Unterschied ist die Behandlung des Voith-Schneider Propellers in der Allokation. Da er bisher wie ein Azimutpropeller in jede Richtung Schub erzeugen kann (vgl. Abschnitt 2.3) wird er in der Allokation auch als ein solcher betrachtet. Dabei wird bei der Allokation eine Schubstärke und -richtung für jeden einzelnen Antrieb gefordert. Diese werden über ein weiteres Steuermodul so angesteuert, dass diese Forderungen nach Möglichkeit erfüllt werden. Mit dieser Methode werden die besonderen Steuereigenschaften des Voith-Schneider Propellers nicht optimal ausgenutzt. Das optimale Nutzen der besonderen Eigenschaften des Voith-Schneider-Propellers wird als einer der wichtigsten Punkte in das Allokationsmodul dieser Arbeit eingehen.

2.3 Funktionsweise einiger Schiffsantriebe

Da der Voith-Schneider Propeller bisher in der Allokation als Azimutpropeller behandelt wird und damit seine Vorteile der hohen Manövrierfähigkeit nicht optimal ausgenutzt werden, liegt das Hauptinteresse des zu entwickelnden Allokationsmoduls bei dem Voith-Schneider Propeller. Um ihn mit dem Azimutpropeller bezüglich Leistung und Akkuratessse vergleichen zu können, aber auch um Mischbetriebe beider Propellerarten behandeln zu können, wird der Azimutpropeller ebenfalls in dem Modul berücksichtigt. Die zusätzliche Manövrierunterstützung bei vielen Schiffen in Form von Bugstrahlrudern erfordert auch deren Berücksichtigung in dem Modul. Die folgenden Abschnitte gehen auf die allgemeine Schuberzeugung und Eigenschaften der einzelnen Antriebe ein. Die genaue Modellierung von Schub, Propellermoment und Propellerleistung findet sich in Kapitel 4.

2.3.1 Voith-Schneider Propeller (VSP)

Der Voith-Schneider Propeller (VSP) wurde 1926 von dem Ingenieur Ernst Schneider entwickelt und von der Firma Voith produziert. Seine erste Anwendung fand der Antrieb 1930 an einem Schiff der bayrischen Lloyd Company, welches mit zwei VSP mit je 350 PS ausgestattet wurde. Der VSP selbst besteht meist aus vier bis sechs Flügeln, welche senkrecht zum Radkörper angebracht sind (vgl. Abbildung 2.2a). Während einer Propellerumdrehung führen diese Flügel eine Schwingbewegung um ihre eigene Schaftlage aus. Der Punkt, in dem sich die Normalen der Profilachsen der Flügel schneiden, nennt man Steuerpunkt N (vgl. Abbildung 2.3a, 2.3b) [11]. Ist der Steuerpunkt in der sogenannten Null-Schub-Position, so sind während der gesamten Propellerumdrehung die Flügel immer so zur Kreisbahn ausgerichtet, dass sich die an den Flügeln entstehenden Schübe ausgleichen und der Propeller gesamt keinen Schub erzeugt. Durch Verschieben dieses Steuerpunktes von N nach N' verändert sich der Anstellwinkel der Flügel zur Kreisbahn, wodurch sich eine Widerstandskraft und ein hydrodynamischer Auftrieb an den Flügeln ergibt. Dies ermöglicht eine Schuberzeugung in jede beliebige Richtung in der Horizontalebene.

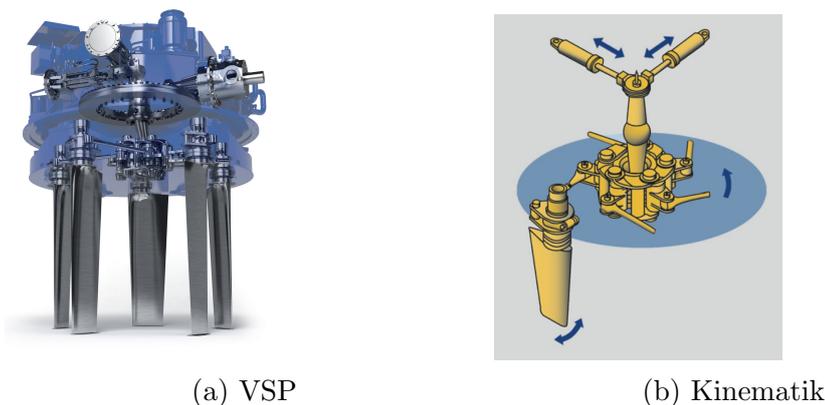


Abbildung 2.2: Voith-Schneider Propeller (Quelle: Voith Turbo [37])

Neben der Schubrichtung wird auch die Schubstärke durch den Steuerpunkt beeinflusst. Je weiter der Steuerpunkt von der Null-Schub-Position entfernt ist, desto stärker ist der entstehende Propellerschub. Dieser Abstand wird als Steigung $\tilde{\lambda}_0$ bezeichnet und wird entweder in Prozent $\tilde{\lambda}_0 \in [0, 100]$ oder im Verhältnis zum Propellerradius $\tilde{\lambda}_0 = \frac{ON}{D/2} \leq 0.8$ angegeben. Der Steuerpunkt wird beim VSP über den sogenannten Steuerknüppel verstellt. Aufgrund der Kinematik ist es möglich, während eines einzigen Steuervorgangs diesen sowohl vertikal als auch horizontal zu verstellen (vgl. Abbildungen 2.2b-2.4c). Die Steuerzeit, welche der Steuerknüppel benötigt um die Steigung von 0% auf 100% zu verändern, hängt zwar auch von der Größe des Propellers ab, liegt aber in der Regel zwischen 2,5 – 5 Sekunden (mündl. Aussage der Firma Voith-Turbo). Diese kurzen Steuerzeiten und das zeitgleiche Variieren von Schubrichtung und Schubstärke machen mit den Voith-Schneider Propellern betriebene Schiffe sehr manövrierfähig.

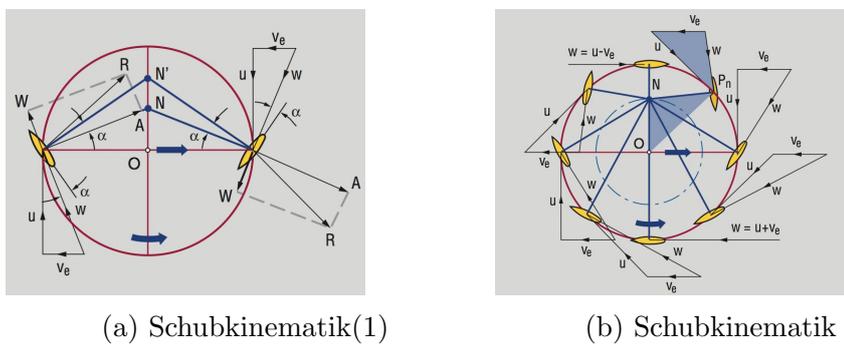


Abbildung 2.3: Voith-Schneider Propeller (Quelle: Voith Turbo [37])

Anwendung finden die Voith-Schneider Propeller aufgrund dieser hohen Manövrierfähigkeit bei Offshore-Versorgungsschiffen mit DP-Systemen und Rollstabilisierung, wie der North Sea Giant [9], bei Schleppern, wie dem Voith-Wasser-Trecker, welcher einem hohen Sicherheitslevel genügt [10], aber auch bei Doppelendfähren und Minenjägern [37]. Alle Informationen in diesem Abschnitt entstammen [36] und [11].

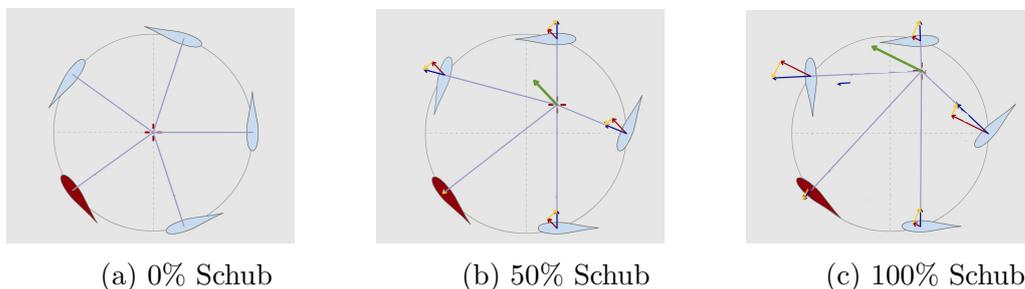


Abbildung 2.4: Steuerung des VSP (Quelle: Interaktiver VSP [5])

2.3.2 Azimutpropeller

Der Ruderpropeller von Schottel ist der Klassiker unter den Schiffsantrieben. Er wurde von Josef Becker 1950 entwickelt und gebaut. Im Gegensatz zu herkömmlichen Propellern ist er an einer rotierbaren Gondel am Schiff angebracht (vgl. Abbildung 2.5a). Damit ist es möglich, den Propeller in jede beliebige Richtung auszurichten und Schub in jede Richtung zu erzeugen. Die Schubstärke kann bei Festpropellern nur mittels der Drehzahl variiert werden, bei Verstellpropellern kann zusätzlich noch der Anstellwinkel der Propellerblätter variiert werden. Da in dieser Arbeit der Azimutpropeller nur als Vergleichspropeller zu dem VSP dienen soll, beschränkt sich das Allokationsmodul (vgl. Kapitel 4) auf Festpropeller. Wie der VSP besitzt der Azimutpropeller ebenfalls gute Manöviereigenschaften und wird daher in ähnlichen Bereichen eingesetzt. Somit findet man ihn unter anderem bei Offshore-Schiffen, Schleppern und Fähren [13], [21]. Im direkten Vergleich mit dem VSP unterscheiden sich die beiden Antriebe hauptsächlich

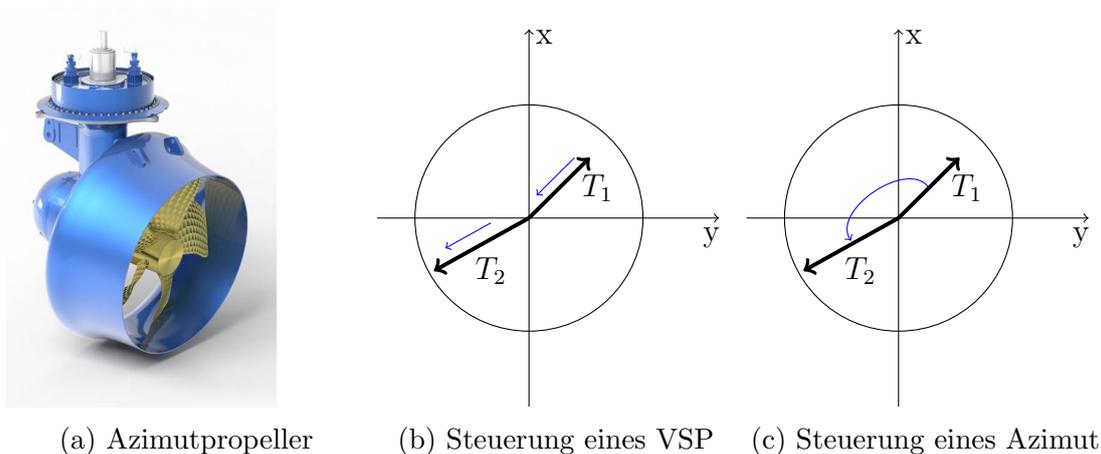


Abbildung 2.5: Azimutpropeller (Quelle:Voith Turbo)

in zwei Punkten. Zum einen in der Änderung von Schubrichtung und Kraft und zum anderen in der maximalen Kraft bei gleicher Leistung. Während der VSP für eine Änderung von maximalem Schub voraus auf maximalen Schub achteraus (zurück) in der Regel nur fünf bis acht Sekunden benötigt und keinen zusätzlich Querschub erzeugt, benötigt der Azimut etwa 20 bis 30 Sekunden um sich um 180° zu drehen (vgl. Abbildung 2.5b und 2.5c). Während dieser Umdrehung erzeugt der Azimut unerwünschten Querschub, welcher durch einen anderen Propeller nach Möglichkeit kompensiert werden muss. Dagegen ist es für den Azimutpropeller möglich, deutlich mehr Schub bei gleicher Leistung zu erzeugen als der VSP (siehe Kapitel 4.2). Einige Beispiele in denen der VSP und der Azimutpropeller direkt im DP-Betrieb miteinander verglichen werden, finden sich in Kapitel 6.

2.3.3 Bugstrahlruder

Zur Verbesserung der Manövrierfähigkeit eines Schiffes werden oft neben den Hauptantrieben, wie beispielsweise den Voith-Schneider-Propellern, zusätzlich Querstrahlanlagen eingebaut [12], [15]. Je nach Anordnung am Schiff werden sie als Bug- bzw. Heckstrahlruder bezeichnet. Im Allgemeinen genügen jedoch Bugstrahlruder mit genügend Leistung. Ein Querstrahlruder ist üblicherweise ein quer zum Schiff eingebauter röhrenförmiger Kanal (vgl. Abbildung 2.6), indem sich eine Propelleranlage befindet. Das Wasser wird

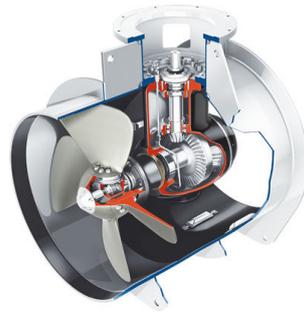


Abbildung 2.6: Bugstrahlruder (Quelle: Voith Turbo)

in den Kanal gesaugt, und verlässt diesen als gerichteten Strahl nach Backbord (links) oder Steuerbord (rechts). Aufgrund dieser Funktionsweise ist es mit einem Querstrahlruder nur möglich, Schub zur Seite zu erzeugen. Bei starker Anströmung, wie beispielsweise bei einer hohen Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes kommt es zu einer starken Verminderung des vom Antrieb erzeugten Querschubes (vgl. dazu Kapitel 4.1). In der Regel kann man sagen, dass der Querstrahler nur bis zu einer Geschwindigkeit von fünf Knoten sinnvoll und effizient eingesetzt werden kann [6], [12]. Damit eignet er sich neben An- und Ablegemanövern auch zur Unterstützung beim Dynamischen Positionieren.

3 Numerische Optimierung

Das primäre Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Allokationsmoduls für Voith-Schneider Propeller (VSP). Mittels dieses Moduls soll es ermöglicht werden, die Antriebe eines Schiffes anzusteuern, sodass die während des DP-Betriebs von einem Regler geforderte Kraft $\hat{\tau} \in \mathbb{R}^3$ oder die Kraftanforderung eines Masterjoysticks erzeugt werden. Um auch gemischte Antriebskonstellationen steuern zu können, werden neben dem VSP auch Azimutpropeller und Bugstrahlruder in das Modul eingebunden.

Das Modul selbst muss zwei Hauptanforderungen genügen. Die erste und wichtigste Anforderung ist das schnelle Erzeugen der geforderten Kraft $\hat{\tau} \in \mathbb{R}^3$

$$J_1(z) := \int_0^T \|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 dt \longrightarrow \min_{z \in \mathbb{R}^m}, \quad (3.1)$$

wobei $\tau_{\text{thr}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^3$ den Gesamtschub aller Antriebe beschreibt und $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ die Steuerelemente der Antriebe.

Die zweite wichtige Anforderung gilt der Energieeffizienz, also das leistungsminimale Erzeugen der geforderten Kraft

$$J_2(z) := \int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt \longrightarrow \min_{z \in \mathbb{R}^m}. \quad (3.2)$$

Hierbei beschreibt die Funktion $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^K$ die Leistung der einzelnen $K \in \mathbb{N}$ Antriebe am Schiff und die Konstante $P_{\min} \in \mathbb{R}^K$ die minimal mögliche Leistung dieser Antriebe. Da eine schnelle Krafterzeugung mit einem hohen Leistungsaufwand verbunden ist, widersprechen sich die beiden Anforderungen. Das Allokationsproblem wird deshalb als multikriterielles Optimierungsproblem

$$\text{„min“ } J(z) = \text{„min“} (J_1(z), J_2(z)) \quad (3.3)$$

formuliert (vgl. Abschnitt 3.1).

Weiter müssen die Steuerzeiten der Antriebe eingehalten sowie Beschränkungen von Moment, Leistung und Steuerelementen wie Propellerdrehzahl beachtet werden. Damit lässt sich für das Allokationsproblem ein Optimalsteuerungsproblem mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen formulieren.

Problem 3.0.1 (Allokationsproblem)

Finde eine Steuerung $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, sodass die multikriterielle Zielfunktion

$$\left(\int_0^T \|\hat{\tau} - \tau_{thr}(z(t))\|_2^2 dt, \int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt \right) \quad (3.4)$$

minimal wird und die Nebenbedingungen für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\dot{z}(t)| &\leq \tilde{z} \\ z_{\min,i} &\leq z_i(t) \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m \\ M_{\min,i} &\leq M_i(z(t)) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K \\ P_{\min,i} &\leq P_i(z(t)) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

erfüllt sind.

Die Funktion $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^K$ beschreibt das Moment der Antriebe. In der Steuervariablen $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ werden die einzelnen Steuerelemente wie Drehzahl, Steuerknüppelposition oder Azimutwinkel zusammengefasst. Die maximale Verstellgeschwindigkeit dieser Steuervariablen wird mit $\tilde{z} \in \mathbb{R}^m$ beschrieben. Beschränkungen von beispielsweise Drehzahl, Steuerknüppelposition, Moment und Leistung ergeben sich notwendigerweise aus den mechanischen Eigenschaften der Propeller. Da bei dem Allokationsproblem 3.0.1 die Steuervariable in ihrer Ableitung beschränkt ist, wird das Problem modifiziert. Dafür werden die Steuervariablen zu Zustandsvariablen, welche mit neuen Steuervariablen $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\|\omega(t)\|_\infty \leq 1$ gesteuert werden. Somit ist es möglich, ein äquivalentes Optimalsteuerungsproblem zu formulieren, welches keine Beschränkung in der Ableitung der Steuervariablen aufweist.

Problem 3.0.2 (Modifiziertes Allokationsproblem)

Finde eine Steuerung $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, sodass die multikriterielle Zielfunktion

$$\left(\int_0^T \|\hat{\tau} - \tau_{thr}(z(t))\|_2^2 dt, \int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt \right) \quad (3.6)$$

minimal wird und die Nebenbedingungen für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{z}\omega(t) \\ z_{\min,i} &\leq z_i(t) \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m \\ M_{\min,i} &\leq M_i(z(t)) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K \\ P_{\min,i} &\leq P_i(z(t)) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K \\ \|\omega(t)\|_\infty &\leq 1 \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

erfüllt sind.

Zusammen mit den beiden Hauptanforderungen: Schubertzeugung und Leistungseffizienz, erhält man nun ein Optimalsteuerungsproblem mit reinen Zustandsbeschränkungen und multikriterieller Zielfunktion.

Zur Lösung dieses Problems ist die Theorie zur multikriteriellen Optimierung und zu Optimalsteuerungsproblemen notwendig. Die für dieses Problem wichtigsten Aspekte der bereits bekannten Theorie werden im folgenden dargestellt. In den folgenden Abschnitten werden neben der Theorie der multikriteriellen Optimierung [24, 41] auch die notwendige Bedingung und numerische Lösungsmöglichkeiten von Optimalsteuerungsproblemen [30] erläutert. Die dafür nötigen numerischen Methoden zur Lösung von nichtlinearen restringierten Optimierungsproblemen [28] schließen dieses Kapitel.

3.1 Multikriterielle Optimierung

Die multikriterielle Optimierung bezeichnet die Optimierung von Problemen mit mehreren Zielfunktionen, die sich unter Umständen widersprechen können. Das multikriterielle Optimierungsproblem (MOP) hat dann folgende Form [41]:

$$(\text{MOP}) \begin{cases} \min_x f(x) := (f_1(x), \dots, f_r(x))^T \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bei einer Optimierung im Sinne von Pareto [24] ist der optimale Zustand erreicht, sobald sich keine einzelne Zielfunktion mehr verbessern kann, ohne dass sich mindestens eine andere verschlechtert. Um die Funktionswerte der Zielfunktion vergleichen zu können, müssen Ordnungsrelationen definiert werden.

Definition 3.1.1 (Ordnungsrelationen [41, S.2, Def. 1.1])

Seien $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^r$.

a) Die Vektoren y^1 und y^2 sind schwach komponentenweise geordnet $y^1 \leq y^2$, falls

$$y_i^1 \leq y_i^2, \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

b) Die Vektoren y^1 und y^2 sind komponentenweise geordnet $y^1 \leq y^2$, falls

$$y^1 \leq y^2 \text{ und } y^1 \neq y^2.$$

c) Die Vektoren y^1 und y^2 sind streng komponentenweise geordnet $y^1 < y^2$, falls

$$y_i^1 < y_i^2, \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

d) Die Vektoren y^1 und y^2 sind lexikographisch geordnet $y^1 \leq_{\text{lex}} y^2$, falls

$$y^1 = y^2 \text{ oder } y_q^1 < y_q^2 \text{ mit } q := \min_{1 \leq i \leq r} \{y_i^1 \neq y_i^2\}.$$

Mit diesen Relationen lassen sich die wichtigsten Effizienzbegriffe definieren:

Definition 3.1.2 (Effizienz [24, S.24, Def. 2.1])

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in \mathcal{X}$ heißt effizient oder Pareto optimal, falls es kein $x \in \mathcal{X}$ gibt, sodass $f(x) \leq f(\hat{x})$. $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ heißt nichtdominierender Punkt, falls \hat{x} effizient ist. Sei $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ und $f(x^1) \leq f(x^2)$, dann wird x^2 von x^1 dominiert und $f(x^2)$ von $f(x^1)$.

Die Menge aller effizienten Lösungen $\hat{x} \in \mathcal{X}$ sei mit \mathcal{X}_E bezeichnet und heißt Effizienzmenge. Die Menge aller nichtdominierenden Punkte $\hat{y} = f(\hat{x}) \in \mathcal{Y}$, mit $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$, sei \mathcal{Y}_N und heißt nichtdominierende Menge.

Definition 3.1.3 (Schwache/strenge Effizienz [24, S.38, Def. 2.24])

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in \mathcal{X}$ heißt schwach effizient, falls es kein $x \in \mathcal{X}$ gibt, sodass $f(x) < f(\hat{x})$, d.h. $f_k(x) < f_k(\hat{x}) \forall k = 1, \dots, p$. Der Punkt $\hat{y} = f(\hat{x})$ heißt dann schwach nichtdominiert.

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in \mathcal{X}$ heißt streng effizient, falls es kein $x \in \mathcal{X}$, $x \neq \hat{x}$ gibt, sodass $f(x) \leq f(\hat{x})$.

Die schwache (strenge) Effizienzmenge und nichtdominierende Menge seien mit \mathcal{X}_{wE} (\mathcal{X}_{sE}) und \mathcal{Y}_{wE} bezeichnet.

Definition 3.1.4 (Eigentliche Effizienz (Geoffrion 1968) [24, S.51, Def. 2.39])

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in \mathcal{X}$ heißt eigentlich effizient, falls sie effizient ist und eine reelle Zahl $M > 0$ existiert, sodass für alle i und $x \in \mathcal{X}$ für die gilt $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ ein Index j mit $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ existiert, sodass $\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M$.

Der dazugehörige Punkt $\hat{y} = f(\hat{x})$ heißt eigentlich nichtdominiert.

Im Folgenden werden einige ausgewählte Methoden der multikriteriellen Optimierung vorgestellt. Weitere Methoden und Herangehensweisen und Beweise zu den folgenden Propositionen und Sätzen finden sich in [24] und [41]. Numerische Vergleiche bezüglich der Rechenzeit und der optimalen Lösung der einzelnen Methoden folgen in Kapitel 4.2.

3.1.1 Methode der gewichteten Summe

Die Methode der gewichteten Summe ist ein traditioneller Ansatz zur Lösung multikriterieller Optimierungsprobleme. Dabei werden einzelnen Zielfunktionen gewichtet und aufsummiert.

Definition 3.1.5 (Methode der gewichteten Summen [24])

Für ein multikriterielles Optimierungsproblem

$$\min_x f(x) := (f_1(x), \dots, f_r(x))^T$$

mit $x \in \mathcal{X}$ ist das parametrische Problem gegeben durch

$$\min_x \sum_{k=1}^r \mu_k f_k(x), \quad x \in \mathcal{X}, \mu \in \mathbb{R}_+^r. \tag{3.8}$$

Je nach Wahl des Gewichtes $\mu \in \mathbb{R}_+^r$ sind die Lösungen des Optimierungsproblems: eigentlich, schwach oder streng effizient.

Satz 3.1.6

Sei $\hat{x} \in \mathcal{X}$ eine optimale Lösung von (3.8). Dann gilt:

1. Falls $\mu > 0$, dann ist $\hat{x} \in \mathcal{X}$ eigentlich effizient.
2. Falls $\mu \geq 0$, dann ist $\hat{x} \in \mathcal{X}$ schwach effizient.
3. Falls $\mu \geq 0$ und \hat{x} ist eine eindeutige Lösung von (3.8), dann ist $\hat{x} \in \mathcal{X}$ streng effizient.

Bei Anwendung der Methode der gewichteten Summe auf das Allokationsproblem 3.0.2 erhält man für die Zielfunktion (3.6)

$$\mu \int_0^T \|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 dt + (1 - \mu) \left(\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt \right). \quad (3.9)$$

Die Nebenbedingungen (3.7) bleiben unverändert.

Bei diesem Ansatz entstehen keine zusätzlichen Nebenbedingungen oder Variablen, welche die Rechenzeit bei der numerischen Umsetzung des Problems negativ beeinflussen könnten, jedoch hängt das Ergebnis stark von der Wahl der Gewichte μ ab. Aufgrund der Gewichtung ist es nicht möglich, sowohl den bestmöglichen Schub, als auch die dafür minimale Leistung zu berechnen. Numerische Resultate hierzu finden sich in Kapitel 4.2.

3.1.2 Elastic-Constraint Methode

Bei der Elastic-Constraint Methode wird nur eine der Zielfunktionen minimiert, während die verbleibenden Zielfunktionen als Nebenbedingungen in das Problem integriert werden.

$$\begin{aligned} \min_x f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k, \text{ sodass} \\ f_k(x) - s_k \leq \varepsilon_k, \quad k \neq j, \\ s_k \geq 0, \quad k \neq j, \\ x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ähnlich zum Penalty-Verfahren beschreibt die Variable $s \in \mathbb{R}^{r-1}$, wie stark eine Nebenbedingung verletzt wird und der Faktor $\mu \in \mathbb{R}^{r-1}$ die Gewichtung dieser Variablen in der neuen Zielfunktion. Wie bei der Methode der gewichteten Summe lassen sich auch hier Aussagen zu der Effizienz der Lösung des Optimierungsproblems treffen.

Proposition 3.1.7 [24, S.103, Prop. 4.8]

Sei $\mu \geq 0$ und (\hat{x}, \hat{s}) eine optimale Lösung von (3.10). Dann ist $\hat{x} \in \mathcal{X}_{wE}$ schwach effizient.

Proposition 3.1.8 [24, S.103, Prop. 4.9]

Ist $\hat{x} \in \mathcal{X}$ die einzige optimale Lösung von (3.10), dann ist $\hat{x} \in \mathcal{X}_{sE}$ eine streng effiziente Lösung des multikriteriellen Optimierungsproblems.

Damit ist es mit dieser Methode ebenfalls möglich, effiziente Lösungen zu erhalten. Bei Anwendung dieser Methode auf das Allokationsproblem 3.0.2 wird die Zielfunktion (3.1) als Nebenbedingung formuliert und die Zielfunktion (3.2) minimiert. Es gilt mit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt + \mu \int_0^T s(t) dt \longrightarrow \min \quad (3.11)$$

unter den Nebenbedingungen mit $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{z}\omega(t) \\ z_{\min,i} &\leq z_i(t) \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m \\ M_{\min,i} &\leq M_i(z(t)) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K \\ P_{\min,i} &\leq P_i(z(t)) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K \\ \|\omega(t)\|_\infty &\leq 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 - s(t) \leq \varepsilon. \quad (3.13)$$

Wird das Gewicht $\mu \in \mathbb{R}_+$ genügend groß gewählt, so kann der geforderte Schub bis auf eine Toleranz ε erreicht und zusätzlich die Leistung minimiert werden. Aufgrund der zusätzlichen Variablen s und der neuen Nebenbedingung 3.13 ist aber bei der numerischen Umsetzung mit deutlich längeren Rechenzeiten zu rechnen (vgl. 4.2).

Modifikation der Elastic-Constraint Methode

Um den Nachteil der zusätzlichen Variablen und Nebenbedingungen der der Elastic-Constraint Methode zu vermeiden wird diese Methode modifiziert. Bei der Modifikation wird die Variable $s \in \mathbb{R}^{r-1}$ durch

$$\tilde{s}_k := (f_k(x) - \varepsilon_k)_+ \quad (3.14)$$

mit $\varepsilon_k > 0$ ersetzt. Die Nebenbedingungen sind durch die Wahl von $\tilde{s} \in \mathbb{R}^{r-1}$ immer erfüllt und müssen damit im Optimierungsproblem nicht weiter beachtet werden. Sei $k \neq j$

$$f_k(x) - \tilde{s}_k = f_k(x) - (f_k(x) - \varepsilon_k)_+ = \begin{cases} f_k(x), & \text{falls } f_k(x) \leq \varepsilon_k \\ \varepsilon_k, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ergibt sich für das Problem (3.0.2) mit $\tilde{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{s}(t) := (\|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 - \varepsilon)_+,$$

$$\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt + \mu \int_0^T \tilde{s}(t) dt \longrightarrow \min \quad (3.15)$$

beziehungsweise

$$\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt + \mu \int_0^T (\|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 - \varepsilon)_+ dt \longrightarrow \min \quad (3.16)$$

unter den Nebenbedingungen mit $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{z}\omega(t), \\ z_{\min,i} &\leq z_i(t) \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ M_{\min,i} &\leq M_i(z(t)) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ P_{\min,i} &\leq P_i(z(t)) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ \|\omega(t)\|_\infty &\leq 1, \\ z(0) &= z_0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

ein Optimierungsproblem mit den Vorteilen der Elastic-Constraint Methode, jedoch ohne eine weitere Variablen oder Nebenbedingungen.

3.1.3 Lexikographische Optimierung

Die Idee in der lexikographischen Optimierung besteht darin, die Zielfunktionen nacheinander zu minimieren. Dabei wird das Optimierungsproblem auf der Lösungsmenge des zuvor gelösten Problems optimiert.

Definition 3.1.9 (Lexikographisch optimal [24, S.129, Def. 5.1])

Ein zulässige Lösung $\hat{x} \in \mathcal{X}$ heißt *lexikographisch optimal* oder *eine lexikographische Lösung*, falls kein $x \in \mathcal{X}$ existiert, sodass $f(x) <_{\text{lex}} f(\hat{x})$.

Algorithmus 3.1.10 (Lexikographische Optimierung [24, S.129/130])

Gegeben: Zulässige Menge \mathcal{X} und Zielfunktionen $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$.

Initialization: Sei $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}$ und $k := 1$.

Löse das einfache Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathcal{X}_k} f_k(x) \quad (3.18)$$

- Falls (3.18) eine eindeutige Lösung \hat{x}_k besitzt: Abbruch. \hat{x}_k ist die eindeutige optimale Lösung des lexikographischen Optimierungsproblems.
- Falls (3.18) nicht beschränkt ist, so ist auch das lexikographische Optimierungsproblem unbeschränkt: Abbruch.
- Falls $k = r$: Abbruch. Die Menge von optimalen Lösungen des lexikographischen Optimierungsproblems ist gegeben durch

$$\{\hat{x} \in \mathcal{X}_r : f_r(\hat{x}) = \min_{x \in \mathcal{X}_r} f_r(x)\}.$$

Ansonsten ist die neue zulässige Menge \mathcal{X}_{k+1} definiert als

$$\mathcal{X}_{k+1} := \{\hat{x} \in \mathcal{X}_k : f_k(\hat{x}) = \min_{x \in \mathcal{X}_k} f_k(x)\}$$

und $k := k + 1$.

Ausgabe: Menge von lexikographisch optimalen Lösungen.

Falls das einfache Optimierungsproblem (3.18) eine Lösung besitzt, kann man auch hier Effizienzaussagen formulieren.

Proposition 3.1.11 [24, S.130, Prop. 5.3]

Sei \hat{x} eine eindeutige optimale Lösung von (3.18) mit $k < r$ oder sei \hat{x} eine optimale Lösung von (3.18) mit $k = r$, dann ist $f(\hat{x}) \leq_{lex} f(x) \forall x \in \mathcal{X}$.

Proposition 3.1.12 [24, S.131, Prop. 5.3]

Sei x eine optimale Lösung von (3.18) für $k \in 1, \dots, r$, dann ist $x \in \mathcal{X}_{sE}$.

Formuliert man das Allokationsproblem 3.0.2 als lexikographisches Optimierungsproblem, so ergibt sich für den ersten Optimierungsschritt

$$\int_0^T \|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 dt \longrightarrow \min \quad (3.19)$$

unter den Nebenbedingungen mit $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{z}\omega(t), \\ z_{\min,i} &\leq z_i(t) \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ M_{\min,i} &\leq M_i(z(t)) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ P_{\min,i} &\leq P_i(z(t)) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ \|\omega(t)\|_\infty &\leq 1, \\ z(0) &= z_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sei $\hat{z}(t)$ die Lösung des ersten Optimalsteuerungsproblem und sei $\tau_{\text{thr}}(\hat{z}(t))$ der dazugehörige Propellerschub, welcher sich aus der Lösung der ersten Optimalsteuerungsproblems ergibt. Dann lautet das zweite Optimalsteuerungsproblem

$$\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt \longrightarrow \min \quad (3.21)$$

unter den Nebenbedingungen mit $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \tilde{z}\omega(t), \\
z_{\min,i} &\leq z_i(t) \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
M_{\min,i} &\leq M_i(z(t)) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\
P_{\min,i} &\leq P_i(z(t)) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\
\|\omega(t)\|_\infty &\leq 1, \\
\|\tau_{\text{thr}}(\hat{z}(t)) - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 &\leq \varepsilon, \\
z(0) &= z_0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Da die Gleichungsrestriktion der zusätzlichen Nebenbedingung in der Anwendung nicht zwingend notwendig ist, wurde sie aus numerischen Gründen zu einer Ungleichungsrestriktion mit einer Toleranz $\varepsilon > 0$ umformuliert. Mit dieser Methode ist es möglich, den bestmöglichen Schub mit der dafür nötigen minimalen Leistung zu berechnen. Allerdings sind für dieses Ergebnis zwei Optimierungsprobleme zu lösen.

Alternative Problemformulierung zur Schuberzeugung

Die Zielfunktion (3.19) ist darauf ausgelegt, den Fehler $\|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2$ über den Zeitverlauf $t \in [0, T]$ zu minimieren. Ist man jedoch daran interessiert eine geforderte Kraft $\hat{\tau}$ so schnell wie möglich zu erzeugen, so muss das Optimalsteuerungsproblem zu einem zeitoptimalen Steuerungsproblem variiert werden. Eine wichtige Voraussetzung für diese Formulierung ist, dass diese Kraft von den Antrieben erzeugt werden kann.

Voraussetzung 3.1.13 (Optimalsteuerungsproblem - zeitoptimal)

Sei $\hat{\tau} \in \mathbb{R}^3$ die geforderte Kraft. Es gibt Steuerkomponenten der Antriebe $z \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z) = 0 \tag{3.23}$$

gilt, wobei die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
z_{\min,i} &\leq z_i \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
M_{\min,i} &\leq M_i(z) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\
P_{\min,i} &\leq P_i(z) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K,
\end{aligned}$$

erfüllt sind.

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so hat das erste Optimalsteuerungsproblem (3.24)-(3.25) der lexikographischen Optimierung keine Lösung. Ist Voraussetzung 3.1.13 erfüllt, so ist das zeitoptimale Optimalsteuerungsproblem gegeben durch:

Finde t_f, ω , sodass

$$t_f \longrightarrow \min \quad (3.24)$$

minimal wird unter den Nebenbedingungen für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{z}\omega(t), \\ z_{\min,i} &\leq z_i(t) \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ M_{\min,i} &\leq M_i(z(t)) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ P_{\min,i} &\leq P_i(z(t)) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ \|\omega(t)\|_\infty &\leq 1, \\ \hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t_f)) &= 0, \\ z(0) &= z_0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sei nun $(\hat{T}, \hat{\omega}(t))$ die optimale Lösung des zeitoptimalen Steuerungsproblems, so wird für die Optimierung der Leistung in zwei Fällen unterschieden:

Fall 1:

Ist die optimale Lösung $\hat{T} < T$, dann gilt für die zusätzliche Nebenbedingung des zweiten Problems

$$\|\tau_{\text{thr}}(\hat{z}(t)) - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, \hat{T}], \quad (3.26)$$

$$\|\tau_{\text{thr}}(\hat{z}(\hat{T})) - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 \leq \varepsilon \quad \forall t \in (\hat{T}, T]. \quad (3.27)$$

Fall 2:

Ist die optimale Lösung $\hat{T} \geq T$, dann gilt für die zusätzliche Nebenbedingung des zweiten Problems

$$\|\tau_{\text{thr}}(\hat{z}(t)) - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.28)$$

Diese Problemformulierung eignet sich besonders bei der Verwendung eines Masterjoysticks. Hierbei ist sichergestellt, dass die geforderte Kraft erreicht werden kann und eine zeitoptimale Steuerung wünschenswert ist.

3.2 Minimumprinzip für Optimalsteuerungsprobleme

Bei dem Allokationsproblem 3.0.2 handelt es sich um ein Optimalsteuerungsproblem mit reinen Zustandsbeschränkungen. Allgemein haben diese Probleme folgende Form [31, S.125-126, Problem 3.2.1]:

Problem 3.2.1 (Optimalsteuerungsproblem mit Zustandsbeschränkungen)

Sei $I := [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Zeitintervall mit $t_0 < t_f$ fest. Seien

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f_0 &: I \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f &: I \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ s &: I \times \mathbb{R}^{n_x} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \psi &: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_\psi}\end{aligned}$$

genügend glatte Funktionen und $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ eine abgeschlossene, konvexe Menge mit $\overset{\circ}{\mathcal{U}} \neq \emptyset$.

Minimiere

$$\varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

in Abhängigkeit von $x \in W^{1,\infty}([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_x})$ und $u \in L^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_u})$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) && \text{f.ü. in } [t_0, t_f], \\ \psi(x(t_0), x(t_f)) &= 0_{\mathbb{R}^{n_\psi}} && \text{in } [t_0, t_f], \\ s(t, x(t)) &\leq 0_{\mathbb{R}^{n_s}} && \text{in } [t_0, t_f], \\ u(t) &\in \mathcal{U} && \text{f.ü. in } [t_0, t_f].\end{aligned}$$

Im Allokationsproblem 3.0.2 hängen die Funktionen f_0 , f und s nicht explizit von der Zeit t ab. Da zusätzlich $\varphi \equiv 0$ gilt, kann man das Optimalsteuerungsproblem auch als autonomes Lagrange-Problem bezeichnen [31].

Definition 3.2.2 (schwaches/starkes lokales Minimum)

- a) Eine Lösung des Problems 3.2.1 $(\hat{x}, \hat{u}) \in W^{1,\infty}([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_x}) \times L^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_u})$ heißt zulässig für das Optimalsteuerungsproblem 3.2.1, falls die Nebenbedingungen erfüllt sind.
- b) Ein zulässiges Paar (\hat{x}, \hat{u}) heißt schwaches lokales Minimum des Problems 3.2.1, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\varphi(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq \varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

für alle zulässigen (x, u) mit $\|x - \hat{x}\|_{1,\infty} < \varepsilon$ und $\|u - \hat{u}\|_\infty < \varepsilon$.

c) Ein zulässiges Paar (\hat{x}, \hat{u}) heißt starkes lokales Minimum des Problems 3.2.1, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\varphi(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq \varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

für alle zulässigen (x, u) mit $\|x - \hat{x}\|_\infty < \varepsilon$.

Einer der ersten notwendigen Optimalitätsbedingungen für Optimalsteuerungsprobleme ohne Steuer- und Zustandsbeschränkungen stammt von Pontryagin. Diese wird in Satz 3.2.4 für Probleme mit reinen Zustandsbeschränkungen erweitert. Die im Satz 3.2.4 verwendete Hamiltonfunktion $\mathcal{H} : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathcal{H}(t, x, u, \lambda, l_0) := l_0 f_0(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u). \quad (3.29)$$

Eine Besonderheit bei Optimalsteuerungsproblemen mit reinen Zustandsbeschränkungen ist, dass die Adjungierte λ nur von beschränkter Variation ist und Sprünge besitzen kann [30].

Definition 3.2.3 (Beschränkte Variation [30])

Eine Funktion $\mu : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn es eine konstante C gibt, sodass für jede beliebige Partition $\mathbb{G} := \{t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_f\}$ von $[t_0, t_f]$ gilt

$$\sum_{i=1}^m |\mu(t_i) - \mu(t_{i-1})| \leq C.$$

Der Raum dieser Funktionen wird mit $BV([t_0, t_f], \mathbb{R})$ bezeichnet. Der Raum $NBV([t_0, t_f], \mathbb{R})$ besteht aus Funktionen die zusätzlich $\mu(t_0) = 0$ erfüllen und auf (t_0, t_f) rechtsseitig stetig sind.

Satz 3.2.4 (Lokales Minimumprinzip [31, S.134, Theorem 3.2.7])

Seien folgende Voraussetzungen für das Optimalsteuerungsproblem 3.2.1 erfüllt.

1. Die Funktionen φ, f_0, f, s, ψ seien stetig bezüglich aller Argumente und stetig differenzierbar bezüglich x und u .
2. Es sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ eine abgeschlossene, konvexe Menge mit $\mathring{\mathcal{U}} \neq \emptyset$.
3. Sei $(\hat{x}, \hat{u}) \in W^{1,\infty}([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_x}) \times L^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_u})$ ein schwaches lokales Minimum des Optimalsteuerungsproblems.

Dann gibt es Multiplikatoren $l_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in BV([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_x})$, $\mu \in NBV([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_s})$ und $\sigma \in \mathbb{R}^{n_\psi}$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- a) $l_0 \geq 0$, $(l_0, \sigma, \lambda, \mu) \neq 0$,

b) *Adjungierte Gleichung:*

$$\lambda(t) = \lambda(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{H}_x(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \lambda(\tau), l_0)^T d\tau + \int_t^{t_f} s_x(\tau, \hat{x}(\tau))^T d\mu(\tau).$$

c) *Transversalitätsbedingungen:*

$$\begin{aligned} \lambda(t_0)^T &= - (l_0 \varphi_{x_0}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_f)) + \sigma^T \psi_{x_0}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_f))) \\ \lambda(t_f)^T &= l_0 \varphi_{x_f}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_f)) + \sigma^T \psi_{x_f}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_f)). \end{aligned}$$

d) *Optimalitätsbedingung: Fast überall in $[t_0, t_f]$ gilt für alle $u \in \mathcal{U}$*

$$\mathcal{H}_u(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda(t), l_0)(u - \hat{u}(t)) \geq 0.$$

e) *Komplementaritätsbedingung: μ_i , $i \in \{1, \dots, n_s\}$ ist monoton wachsend auf $[t_0, t_f]$ und konstant auf jedem Intervall (t_1, t_2) mit $t_1 < t_2$ und $s_i(t, \hat{x}(t)) < 0$ für alle $t \in (t_1, t_2)$.*

Beweis. [31] □

3.2.1 Anwendung des Minimumprinzips auf die Allokation

Um die Flexibilität der Methode für die multikriterielle Optimierung zu erhalten, wird die Zielfunktion

$$\left(\int_0^T \|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 dt, \int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt \right) \quad (3.30)$$

in

$$\int_0^T J(z(t)) dt \quad (3.31)$$

zusammengefasst. Selbiges gilt für die Nebenbedingungen für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} z_{\min, i} &\leq z_i(t) \leq z_{\max, i} \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ M_{\min, i} &\leq M_i(z(t)) \leq M_{\max, i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ P_{\min, i} &\leq P_i(z(t)) \leq P_{\max, i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.32)$$

welche in einer vektorwertigen Ungleichung

$$c(z(t)) \leq 0. \quad (3.33)$$

zusammengefasst werden. Aus dem Minimumprinzip (Satz 3.2.4) ergeben sich damit folgende Zusammenhänge:

a) Hamiltonfunktion: $\mathcal{H}(z, \omega, \lambda, l_0) := l_0 J(z) + \lambda^T \tilde{z} \omega$.

b) $l_0 \geq 0, (l_0, \sigma, \lambda, \mu) \neq 0,$

c) Adjungierte Gleichung:

$$\lambda(t) = \lambda(T) + \int_0^T l_0 J_z(\hat{z}(\tau))^T d\tau + \int_t^T c_z(\tau, \hat{z}(\tau))^T d\mu(\tau).$$

d) Transversalitätsbedingungen:

$$\lambda(T)^T = 0.$$

e) Optimalitätsbedingung: Fast überall in $[0, T]$ gilt für $\|\omega(t)\|_\infty \leq 1$

$$\mathcal{H}_\omega(\hat{z}(t), \hat{\omega}(t), \lambda(t), l_0)(\omega - \hat{\omega}(t)) = \lambda(t)^T(\omega - \hat{\omega}(t)) \geq 0.$$

f) Komplementaritätsbedingung: $\mu_i, i \in \{1, \dots, n_s\}$, ist monoton wachsend auf $[0, T]$ und konstant auf jedem Intervall (t_1, t_2) mit $t_1 < t_2$ und $c_i(t, \hat{z}(t)) < 0$ für alle $t \in (t_1, t_2)$.

Aufgrund der Optimalitätsbedingung gilt für die Steuerung

$$\hat{\omega}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lambda(t) < 0, \\ -1, & \text{falls } \lambda(t) > 0, \\ \text{singulär,} & \text{falls } \lambda(t) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Steuerungen dieser Art werden als Bang-Bang-Steuerungen bezeichnet. Des Weiteren wird die Steuerung durch aktive Zustandsbeschränkungen beeinflusst. Hierbei wird zwischen Randstücken und Kontaktpunkten unterschieden.

Definition 3.2.5 (Randstück, Kontaktpunkt [30, S.123, Def. 4.7.4])

Sei $z(t), \omega(t)$ zulässig für das Optimalsteuerungsproblem 3.2.1.

1. Die Beschränkung c_i heißt aktiv in $t \in [t_0, t_f]$, falls $c_i(z(t)) = 0$ gilt. Gilt $c_i(z(t)) < 0$ so heißt die Beschränkung inaktiv.
2. Ist c_i aktiv auf einem Teilintervall $[t_1, t_2] \subseteq [t_0, t_f]$ mit $t_1 < t_2$, so heißt $[t_1, t_2]$ Randstück von c_i .
3. Ein Punkt $t_1 \in [t_0, t_f]$ heißt Kontaktpunkt von c_i , wenn c_i in t_1 aktiv ist und es ein $\delta > 0$ gibt, sodass c_i für alle $t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta] \setminus \{t_1\}$ inaktiv ist.

Durch rekursiv definierte Funktionen $C^{(k)}(z, \omega)$ lässt sich sowohl die Ordnung als auch unter einigen Voraussetzungen die Randsteuerung bestimmen. Sei dafür $[t_1, t_2] \subseteq [t_0, t_f]$ ein Randstück einer Zustandsbeschränkung c_i , dann gilt

$$\begin{aligned} C^{(0)}(z, \omega) &:= c_i(z), \\ C^{(1)}(z, \omega) &:= C_z^{(0)}(z, \omega)\tilde{z}\omega. \end{aligned}$$

Im Fall des Allokationsproblems tritt für $k = 1$ die Steuerung ω erstmals auf. Es gilt nach Gerds [30, S.124-125]

$$C^{(1)}(\hat{z}(t), \hat{\omega}(t)) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2], k = 0, 1.$$

Falls

$$\frac{\partial}{\partial \omega} C^{(0)}(z, \omega) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \omega} C^{(1)}(z, \omega) \neq 0,$$

so lässt sich die Randsteuerung mittels des Satzes über implizite Funktion bestimmen. Die Zustandsbeschränkungen des Allokationsproblems haben die Ordnung 1.

3.2.2 Zeitoptimale Steuerung

Im Hinblick auf den zweiten Ansatz der lexikographischen Optimierung ist neben den Optimalsteuerungsproblemen mit festem Endzeitpunkt $t_f = T$ auch ein zeitoptimales Optimalsteuerungsproblem ((3.24), (3.25)) zu lösen. Ein möglicher Ansatz, dieses zu lösen, ist die Transformation des Problems in ein Optimalsteuerungsproblem mit festem Endzeitpunkt, Gerds [31]. Hierfür wird das Zeitintervall $[0, t_f]$ auf das feste Zeitintervall $\hat{I} := [0, 1]$

$$t(\xi) := \xi \cdot t_f, \quad \xi \in \hat{I},$$

transformiert. Mit dieser Transformation ergeben sich zusätzlich neue Zustände und Steuerungen

$$\begin{aligned} \bar{z}(\xi) &:= x(t(\xi)) = x(\xi \cdot t_f), \\ \bar{\omega}(\xi) &:= \omega(t(\xi)) = \omega(\xi \cdot t_f). \end{aligned}$$

Differenziert man den neuen Zustand nach ξ , so resultiert das transformierte Problem

$$\int_0^1 t_f \, d\xi \longrightarrow \min \tag{3.35}$$

unter den Nebenbedingungen für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}(\xi) &= t_f \cdot \bar{z}\bar{\omega}(t), \\ z_{\min,i} &\leq \bar{z}_i(t) \leq z_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ M_{\min,i} &\leq M_i(\bar{z}(t)) \leq M_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ P_{\min,i} &\leq P_i(\bar{z}(t)) \leq P_{\max,i} \quad \forall i = 1, \dots, K, \\ \|\bar{\omega}(t)\|_\infty &\leq 1, \\ \hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(\bar{z}(t_f)) &= 0, \\ \bar{z}(0) &= z_0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Durch diese Transformation ergibt sich ein Optimalsteuerungsproblem, das sich leichter mit numerischen Verfahren lösen lässt als das ursprünglich zeitoptimale Problem.

3.3 Numerische Lösungsverfahren

Bei den numerischen Lösungsverfahren für Optimalsteuerungsprobleme unterscheidet man zwischen direkten und indirekten Lösungsverfahren [31]. Bei den sogenannten indirekten Methoden werden zunächst die notwendigen Bedingungen (vgl. Satz 3.2.4) formuliert. Diese bilden zusammen mit der Differentialgleichung des Problems ein Randwertproblem, welches mit numerischen Verfahren gelöst werden kann. Ohne die Kenntnis der Adjungiertendifferentialgleichung kommt man hingegen bei den direkten Verfahren aus. Diese Lösungsverfahren basieren auf der Diskretisierung der Steuer- und Zustandsvariablen sowie der Diskretisierung der Restriktionen. Das dadurch entstandene meist nichtlineare Optimierungsproblem mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen wird mit numerischen Optimierungsverfahren wie dem SQP-Verfahren (sequential quadratic programming) oder einem Innere-Punkte-Verfahren gelöst. Vor der Diskretisierung wird das Optimalsteuerungsproblem 3.2.1 in ein Mayer-Problem transformiert, das heißt, dass für die Funktionen der Zielfunktion $\varphi \neq 0$ und $f_0 \equiv 0$ gelten.

Für die Transformation wird eine zusätzliche Zustandsvariable $y \in W^{1,\infty}([t_0, t_f], \mathbb{R})$ eingeführt, für die gilt

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= f_0(t, x(t), u(t)) \\ y(t_0) &= 0.\end{aligned}$$

Für die Zielfunktion des Problems 3.2.1 gilt damit

$$\begin{aligned}\varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt &= \varphi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \dot{y}(t) dt \\ &= \varphi(x(t_0), x(t_f)) + y(t_f) - y(t_0) \\ &= \varphi(x(t_0), x(t_f)) + y(t_f).\end{aligned}$$

3.3.1 Diskretisierung der Steuerung

Eine Möglichkeit, die Steuerung $u \in L^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_u})$ zu diskretisieren, ist die Approximation dieser mit B-Splines.

Definition 3.3.1 (B-Spline [43, S.29, Def. 8.2])

Der normalisierte B-Spline $B_{i,k}$ der Ordnung k (vom Grade $k - 1$) bezogen auf die verschiedenen Knoten x_i, \dots, x_{i+k} ist definiert als

$$B_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i) \sum_{j=0}^k \frac{(x_{j+1} - x)_+^{k-1}}{\prod_{l=0, l \neq j}^k (x_{i+j} - x_{i+l})}. \quad (3.37)$$

Zusammen mit dem Gitter $\mathbb{G}_h := t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ gilt für die Approximation der Steuerung

$$\hat{u}(t) = \sum_{i=1}^{N+k-1} c_i B_{i,k}(t), \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}^{n_u} \text{ und } i = 1, \dots, N+k-1. \quad (3.38)$$

Die Approximation mittels B-Splines gewährleistet aufgrund der lokalen Träger eine dünnbesetzte Jacobimatrix der Restriktionen [31].

Die Steuerung ω im Allokationsproblem 3.0.2 ist nach Abschnitt 3.2 eine sogenannten Bang-Bang-Steuerung, wobei auch singuläre Teilstücke entstehen können. Aufgrund dieser Form reicht es aus, sie mit B-Splines erster Ordnung zu approximieren.

$$\hat{\omega}(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i B_{i,1}(t).$$

3.3.2 Diskretisierung des Zustandes

Die Zustandsvariablen des Optimalsteuerungsproblems werden durch die Differenzialgleichung

$$\dot{y}(t) = f_0(t, x(t), u(t)) \quad (3.39)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (3.40)$$

beschrieben. Diese gewöhnlichen Differenzialgleichungen lassen sich beispielsweise mit Ein- oder Mehrschrittverfahren numerisch lösen. In dieser Arbeit und im damit verbundenen Allokationsmodul beschränken sich die Diskretisierungsverfahren auf die beiden Einschrittverfahren: explizites Euler-Verfahren und vierstufiges Runge-Kutta-Verfahren.

Für ein gegebenes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

können die Einschrittverfahren mittels einer sogenannten Verfahrensfunktion

$$\phi(t, y; h; f) \quad (3.42)$$

definiert werden [45]. Über diese Funktion lassen sich die Funktionswerte von y zu diskreten Zeitpunkten t_i mit $t_{i+1} = t_i + h_i$, mit der Schrittweite $h_i > 0$, $i = 0, \dots, N-1$ näherungsweise mit

$$\begin{aligned} y_0 &= y(t_0) \\ y_{k+1} &= y_k + h_k \cdot \phi(t, y; h; f) \text{ für } k = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

bestimmen. Zur Gütebewertung dieser Verfahren dient der lokale Diskretisierungsfehler.

Definition 3.3.2 (Lok. Diskretisierungsfehler, Konsistenzfehler [31, S.169])

Seien $y_\star \in \mathbb{R}^n$ und $t_\star \in [t_0, t_f]$ gegeben. Es bezeichne y die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_\star) = y_\star.$$

Der lokale Diskretisierungsfehler in (t_\star, y_\star) ist definiert durch

$$\ell_h(t_\star, y_\star) := \frac{y(t_\star + h) - y_\star}{h} - \phi(t_\star, y_\star, h).$$

Das Einschrittverfahren heißt konsistent, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ell_h(t_\star, y_\star) = 0 \quad \forall (t_\star, y_\star) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n.$$

Das Einschrittverfahren ist konsistent der Ordnung p , wenn

$$\ell_h(t_\star, y_\star) = \mathcal{O}(h^p) \quad \forall (t_\star, y_\star) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n.$$

Neben der Konsistenz eines Einschrittsverfahrens ist auch dessen Konvergenz von Bedeutung.

Definition 3.3.3 (Globaler Fehler, Konvergenz [31, S.169, Def. 4.1.13])

Der globale Fehler $e_h : \mathbb{G}_h \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ ist definiert durch

$$e_h := y(t) - y_\Lambda(t),$$

wobei y_Λ die Approximation der Funktion y auf dem Gitter \mathbb{G}_h bezeichnet. Ein Einschrittverfahren heißt konvergent, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|e_h\|_\infty = 0.$$

Das Einschrittverfahren ist konvergent der Ordnung p , wenn

$$\|e_h(\cdot)\|_\infty = \mathcal{O}(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Mit dem Konvergenzsatz [23] folgt für Verfahren wie dem explizitem Eulerverfahren oder dem Runge-Kutta-Verfahren aus einer Konsistenzordnung p eine Konvergenzordnung p .

Explizites Eulerverfahren

Das bekannte explizite Eulerverfahren gehört zu den einfachsten Einschrittverfahren. Das Integral in 3.43 wird dabei mit der linksseitigen Rechteckregel approximiert

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx y(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot f(t_k, y(t_k)). \quad (3.43)$$

Über einer Taylorreihenentwicklung lässt sich leicht die Konsistenzordnung 1 zeigen. Für die Differentialgleichung des Allokationsproblems 3.0.2, transformiert in ein Mayer-Problem, folgt mit einer stückweisen konstanten Steuerung und einer äquidistanten Schrittweite h und $y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \cdot f_0(z_k) \text{ für } k = 0, \dots, N-1 \\ z_{k+1} &= z_k + h \cdot \tilde{z}\omega_k \text{ für } k = 0, \dots, N-1 \\ y_0 &= 0, \quad z_0 = z(0). \end{aligned}$$

Da sich die Zielfunktion je nach Methode der multikriteriellen Optimierung ändert, wird hier die Funktion unter dem Integral stellvertretend mit f_0 bezeichnet.

3.3.3 Runge-Kutta-Verfahren

Für eine höhere Ordnung im Allokationsmodul wurde neben dem explizitem Eulerverfahren auch das klassische vierstufige Runge-Kutta-Verfahren implementiert, um die Differentialgleichung numerisch zu lösen.

Definition 3.3.4 (Runge-Kutta-Verfahren [23])

Sei das Anfangswertproblem (3.41) gegeben. Die Verfahrensfunktion $\phi(t, y; h; f)$ ist bei einem s -stufigen Runge-Kutta-Verfahren durch

$$\phi(t, y; h; f) := \sum_{i=1}^s b_i k_i(t, y; h; f),$$

mit $b = (b_1, \dots, b_s) \in \mathbb{R}^s$, $c = (c_1, \dots, c_s) \in \mathbb{R}^s$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(s \times s)}$ gegeben. Die Stufen $k_i(t, y; h; f)$ sind über

$$k_i(t, y; h; f) := f \left(t + c_i h, y(t) + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j(t, y; h; f) \right) \quad i = 1, \dots, s$$

definiert.

Zusammen mit den passenden Koeffizient für A mit $a_{21} = a_{32} = \frac{1}{2}$, $a_{43} = 1$ und $a_{ij} = 0$, sonst, $b = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right)^T$ und $c = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T$ ergibt sich das klassische Runge-Kutta-Verfahren mit der Ordnung vier. Aufgrund der Struktur der Differentialgleichung des Allokationsproblems unterscheidet sich diese Diskretisierung nur für die, bei der Transformation in ein Mayerproblem eingeführte Differentialgleichung von der Diskretisierung

mit dem explizitem Eulerverfahren.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_k \\ z_k \end{pmatrix} + h \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \right) \text{ mit} \\ k_1 &= \begin{pmatrix} f_0(z_k) \\ \tilde{z}\omega(t_k) \end{pmatrix} \\ k_2 &= \begin{pmatrix} f_0\left(z_k + \frac{1}{2}h\tilde{z}\omega(t_k)\right) \\ \tilde{z}\omega\left(t_k + \frac{1}{2}h\right) \end{pmatrix} \\ k_3 &= \begin{pmatrix} f_0\left(z_k + \frac{1}{2}h\tilde{z}\omega\left(t_k + \frac{1}{2}h\right)\right) \\ \tilde{z}\omega\left(t_k + \frac{1}{2}h\right) \end{pmatrix} \\ k_4 &= \begin{pmatrix} f_0\left(z_k + h\tilde{z}\omega\left(t_k + \frac{1}{2}h\right)\right) \\ \tilde{z}\omega(t_k + h) \end{pmatrix} \\ &\text{und} \\ \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ z(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgrund der Unstetigkeitsstellen der Steuerfunktion ω wird bei der Berechnung von k_4 die Steuerfunktion mit $\omega_k := \omega(t_k + h)$ verwendet.

$$\begin{aligned} k_1 &= \begin{pmatrix} f_0(z_k) \\ \tilde{z}\omega_k \end{pmatrix} \\ k_2 &= \begin{pmatrix} f_0\left(z_k + \frac{1}{2}h\tilde{z}\omega_k\right) \\ \tilde{z}\omega_k \end{pmatrix} \\ k_3 &= \begin{pmatrix} f_0\left(z_k + \frac{1}{2}h\tilde{z}\omega_k\right) \\ \tilde{z}\omega_k \end{pmatrix} \\ k_4 &= \begin{pmatrix} f_0\left(z_k + h\tilde{z}\omega_k\right) \\ \tilde{z}\omega_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich daraus

$$z_{k+1} = z_k + h \left(\frac{1}{6}\tilde{z}\omega_k + \frac{2}{6}\tilde{z}\omega_k + \frac{2}{6}\tilde{z}\omega_k + \frac{1}{6}\tilde{z}\omega_k \right) = z_k + h\tilde{z}\omega_k$$

und

$$y_{k+1} = y_k + h \left(\frac{1}{6}f_0(z_k) + \frac{2}{6}f_0\left(\frac{z_{k+1} + z_k}{2}\right) + \frac{2}{6}f_0\left(\frac{z_{k+1} + z_k}{2}\right) + \frac{1}{6}f_0(z_{k+1}) \right),$$

mit $z_k + h\tilde{z}\omega_k = z_{k+1}$ und $z_k + \frac{1}{2}h\tilde{z}\omega_k = \frac{1}{2}(z_{k+1} + z_k)$.

3.3.4 Reduzierte Diskretisierung

Nach der Diskretisierung des Zustandes und der Steuerung ergibt sich ein Optimierungsproblem mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen.

Problem 3.3.5

Seien (y, z, ω) die Optimierungsvariablen mit $y = (y_1, \dots, y_N)^T$, $z = (z_1, \dots, z_N)^T$ und $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{N-1})^T$ bezeichnet. Sei zudem $y_0 = 0$ und $z_0 = z(t_0)$.

$$y_N \rightarrow \min_{y, z, \omega},$$

sodass die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\phi(t_k, z_k; h; f_0) & k &= 0, \dots, N-1, \\ z_{k+1} &= z_k + h\tilde{z}\omega_k & k &= 0, \dots, N-1, \\ s_i(t_k, z_k) &\leq 0 & k &= 0, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, n_s, \\ \|\omega_k\|_\infty &\leq 1 & k &= 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Die Ungleichungsrestriktionen s_i , $i = 1, \dots, n_s$, sind dabei die Zustandsrestriktionen aus dem Optimalsteuerungsproblem 3.0.2, ausgewertet an den diskreten Zeitpunkten t_i . Die Optimierungsvariablen bestehen hier zum einen aus den diskretisierten Zustandsvariablen $y \in \mathbb{R}^N$ und $z^j \in \mathbb{R}^N$, mit $j = 1, \dots, n_z$, wobei n_z die Anzahl der Steuerkomponenten bezeichnet. Zum anderen aus der diskreten Steuerung $\omega_j \in \mathbb{R}^N$, mit $j = 1, \dots, n_z$. Zusammengefasst ist ein $(N + 2 \cdot n_z \cdot N)$ -dimensionales Optimierungsproblem mit $(N + n_z \cdot N)$ Gleichungs- und $(N \cdot n_s)$ Ungleichungsnebenbedingungen zu lösen. Die Idee bei der reduzierten Diskretisierung besteht nun darin, die Zustandsvariablen in Abhängigkeit der Steuervariablen zu schreiben. Dadurch reduziert sich die Dimension der Optimierungsvariablen auf die Dimension der diskreten Steuerung und es sind keine Gleichungsrestriktionen zu beachten [31]. Die Zustandsvariable z lässt sich durch

$$\begin{aligned} z_{k+1}(\omega, z_k) &= z_k(\omega, z_{k-1}) + h\tilde{z}\omega_k \\ &= z_{k-1}(\omega, z_{k-2}) + h\tilde{z}\omega_{k-1} + h\tilde{z}\omega_k \\ &\vdots \\ &= z_0 + h\tilde{z} \sum_{i=0}^k \omega_i \end{aligned}$$

in reine Abhängigkeit von ω und dem Anfangswert z_0 bringen, es gilt

$$z_{k+1}(\omega; z_0) := z_0 + h\tilde{z} \sum_{i=0}^k \omega_i.$$

Analog dazu lässt sich die Zustandsvariable y in Abhängigkeit der Steuervariablen schreiben

$$y_{k+1}(\omega; y_0; z_0) := y_0 + h \sum_{i=0}^k \phi(t_i, z_i(\omega; z_0); h; f_0).$$

Durch diese reduzierte Diskretisierung hat das Optimierungsproblem 3.3.5 folgende Form:

Problem 3.3.6

Seien ω die Optimierungsvariablen mit $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{N-1})^T$. Sei zudem $y_0 = 0$ und $z_0 = z(t_0)$.

$$y_0 + h \sum_{i=0}^{N-1} \phi(t_i, z_i(\omega; z_0); h; f_0) \rightarrow \min_{\omega},$$

sodass die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} s_i(t_k, z_k) &\leq 0, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, n_s, \\ \|\omega_k\|_{\infty} &\leq 1, \quad k = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

3.4 Optimierungsverfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme

Nach der Diskretisierung des Optimalsteuerungsproblems (3.0.2) erhält man ein nichtlineares Optimierungsproblem mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen. In diesem Abschnitt werden, basierend auf der Literatur von Kanzow [28], Gerdt's [29] und Wright [42], die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen sowie zwei numerische Verfahren zur Lösung dieser Probleme beschrieben.

3.4.1 Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen

Allgemein hat ein nichtlineares Optimierungsproblem folgende Form:

Problem 3.4.1 (Allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem)

$$f(x) \rightarrow \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_i(x) &\leq 0, & i = 1, \dots, m, \\ h_j(x) &= 0, & j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ nichtlineare Funktionen sind.

Die Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ zu diesem Problem lautet dann

$$L(x, \lambda, \mu, \ell_0) = \ell_0 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x), \quad (3.44)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ und $\ell_0 \in \mathbb{R}$. Um die Optimalität einer Lösung x des Problems 3.4.1 sicherzustellen, müssen Optimalitätsbedingungen erfüllt werden.

Satz 3.4.2 (Notwendige Bedingungen 1. Ordnung [29, S.162, Satz 5.2.1])

Sei \hat{x} ein lokales Minimum des Optimierungsproblems 3.4.1. Die Funktionen $f, g_i, i = 1, \dots, m$ und $h_j, j = 1, \dots, p$ seien stetig differenzierbar. Dann existieren Multiplikatoren $\ell_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ und $\mu \in \mathbb{R}^p$ mit $(\ell_0, \lambda, \mu) \neq 0$, so dass die folgenden Bedingungen gelten:

1. Vorzeichenbedingungen:

$$\ell_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.45)$$

2. Optimalitätsbedingung:

$$\left(\ell_0 f'(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g'_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j h'_j(\hat{x}) \right) (x - \hat{x}) \geq 0. \quad (3.46)$$

3. Komplementaritätsbedingungen:

$$\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.47)$$

4. Zulässigkeit:

$$\hat{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}.$$

Beweis. [29, S.162-165] □

Falls zusätzlich noch Regularitätsbedingungen erfüllt sind, wie zum Beispiel die Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromowitz (siehe [29, S.168, Def. 5.2.5]), so kann o.B.d.A. $\ell_0 = 1$ angenommen werden. Für Optimalitätskriterien zweiter Ordnung müssen zunächst Indexmengen definiert werden.

Definition 3.4.3 (Aktive Ungleichungsrestriktionen [29, S.157, Def. 5.0.3])

Sei $x \in \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\tilde{x}) \leq 0, h(\tilde{x}) = 0\}$. Die Beschränkung $g_i(x) \leq 0$ heißt *aktiv* in x , wenn $g_i(x) = 0$ gilt. Sie heißt *inaktiv* in x , wenn $g_i(x) < 0$ gilt. Die Menge

$$A(x) := \{i \mid g_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m\}$$

heißt *Indexmenge der (in x) aktiven Ungleichungsrestriktionen*.

Dann lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung:

Satz 3.4.4 (Notwendige Bedingungen 2. Ordnung [29, S.172, Satz 5.2.10])

Es seien $f, g_i, i = 1, \dots, m$ und $h_j, j = 1, \dots, p$ zweimal stetig differenzierbar. Des Weiteren erfülle $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ die notwendigen Bedingungen erster Ordnung. Sei \hat{x} ein lokales Minimum des Optimierungsproblem 3.4.1 und die Gradienten $\nabla g_i(\hat{x}), i \in A(\hat{x})$, und $\nabla h_j(\hat{x}), j = 1, \dots, p$ seien linear unabhängig. Dann gilt

$$d^T \nabla_{xx} L(\hat{x}, 1, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) d > 0 \quad \forall d \in T_K(\hat{x}). \quad (3.48)$$

Dabei bezeichnet

$$\begin{aligned} T_K(\hat{x}) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid & \nabla g_i(\hat{x})^T d \leq 0, \quad i \in A(\hat{x}), \hat{\lambda}_i = 0, \\ & \nabla g_i(\hat{x})^T d = 0, \quad i \in A(\hat{x}), \hat{\lambda}_i > 0, \\ & \nabla h_j(\hat{x})^T d = 0, \quad j = 1, \dots, p\} \end{aligned}$$

den sogenannten *kritischen Kegel*.

Beweis. [29, S.172] □

Satz 3.4.5 (Hinreichende Bedingungen 2. Ordnung [29, S.173, Satz. 5.3.1])

Seien $f, g_i, i = 1, \dots, m$ und $h_j, j = 1, \dots, p$ zweimal stetig differenzierbar. Weiter erfülle $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ die notwendigen Bedingungen erster Ordnung des Problems 3.4.1 mit

$$d^T \nabla_{xx} L(\hat{x}, 1, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) d > 0 \quad \forall d \in T_K(\hat{x}), d \neq 0. \quad (3.49)$$

Dann existiert eine Umgebung U von \hat{x} und ein $\alpha > 0$ mit

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \alpha \|x - \hat{x}\|^2 \quad \forall x \in \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\tilde{x}) \leq 0, h(\tilde{x}) = 0\} \cap U. \quad (3.50)$$

Beweis. [29, S. 173-174] □

Zur numerischen Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme werden häufig Verfahren, wie das SQP-Verfahren (Sequential Quadratic Programming) oder Innere-Punkte-Verfahren, basierend auf den notwendigen Bedingungen erster Ordnung (Satz 3.4.2), verwendet.

3.4.2 SQP-Verfahren

SQP-Verfahren gehören zu den effizientesten und wichtigsten Verfahren der nichtlinearen Optimierung [42]. Um die Idee dieser Verfahren zu veranschaulichen, betrachtet man zunächst ein nichtlineares Optimierungsproblem mit Gleichungsnebenbedingungen

$$f(x) \rightarrow \min \quad \text{unter den Nebenbedingungen} \quad h(x) = 0.$$

Mit der Lagrangefunktion

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

und den notwendigen Optimalitätsbedingungen 3.4.2 ergibt daraus das Nullstellenproblem

$$\phi(x, \mu) := \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \mu) \\ h(x) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.51)$$

Diese Nullstellensuche lässt sich mit dem Lagrange-Newton-Verfahren (vgl. [28, S.240, Algorithmus 5.27]) numerisch lösen. Das hierbei zu lösende Gleichungssystem

$$\phi'(x^k, \mu^k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \mu \end{pmatrix} = -\phi(x^k, \mu^k) \quad (3.52)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} H_k \Delta x + h'(x^k)^T \Delta \mu &= -\nabla_x L(x^k, \mu^k), \\ \nabla h_j(x^k)^T \Delta x &= -h_j(x^k) \quad \forall j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

mit $x^{k+1} := x^k + \Delta x$ und $\mu^{k+1} := \mu^k + \Delta \mu$ beschreibt umformuliert

$$\begin{aligned} H_k \Delta x + h'(x^k)^T (\Delta \mu + \mu^k) &= -\nabla f(x^k), \\ \nabla h_j(x^k)^T \Delta x &= -h_j(x^k) \quad \forall j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

die notwendigen Bedingungen des quadratischen Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \nabla f(x^k)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta^T H_k \Delta x &\rightarrow \min, \text{ u. d. Nb.} \\ h_j(x^k) + \nabla h_j(x^k)^T \Delta x &= 0 \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Die Matrix H_k beschreibt dabei die Hessematrix $\nabla_{xx} L(x^k, \mu^k)$ oder eine Approximation derjenigen. Übertragen auf das Optimierungsproblem mit Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen ergibt sich der Algorithmus für das lokale SQP-Verfahren.

Algorithmus 3.4.6 (SQP-Verfahren (lokal) [28, S.244, Algorithmus. 5.29])

1. Wähle $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, $H_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Setze $k := 0$.
2. Erfüllt (x^k, λ^k, μ^k) die notwendigen Bedingungen erster Ordnung: Abbruch.
3. Berechne eine Lösung $\Delta x^k \in \mathbb{R}^n$ des quadratischen Teilproblems

$$\begin{aligned} \nabla f(x^k)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta^T H_k \Delta x &\rightarrow \min, \text{ u. d. Nb.} \\ g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T \Delta x &\leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \\ h_j(x^k) + \nabla h_j(x^k)^T \Delta x &= 0 \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

mit zugehörigen Lagrangemultiplikatoren λ_{k+1} und μ_{k+1} .

4. Setze $x^{k+1} := x^k + \Delta x^k$, bestimme $H_{k+1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, setze $k := k + 1$ und gehe zu Schritt 1.

Eine globale Konvergenz des Verfahrens kann über eine Schrittweitensteuerung bei der Aufdatierung von x^k in Schritt 4 des Algorithmus erreicht werden. Die Schrittweite t_k lässt sich zum Beispiel mit der Armijo-artigen Abstiegsbedingung

$$P_1(x^k + t_k \Delta x^k; \alpha) \leq P_1(x^k; \alpha) + \sigma t_k P_1'(x^k; \delta x^k; \alpha) \quad (3.53)$$

mit

$$P_1(x; \alpha) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} + \alpha \sum_{j=1}^p |h_j(x)|$$

und ihrer Richtungsableitung in Richtung $d \in \mathbb{R}^n$

$$P'_1(x; d; \alpha) = \nabla f(x)^T d + \alpha \sum_{i: g_i(x) > 0} \nabla g_i(x)^T d + \alpha \sum_{i: g_i(x) = 0} \max\{0, \nabla g_i(x)^T d\} \\ + \alpha \sum_{j: h_j(x) > 0} \nabla h_j(x)^T d - \alpha \sum_{j: h_j(x) < 0} \nabla h_j(x)^T d + \alpha \sum_{j: h_j(x) = 0} |\nabla h_j(x)^T d|$$

bestimmen. Die Schrittweite ist dabei $t_k = \max\{\beta^\ell \mid \ell = 0, 1, 2, \dots\}$, wobei $\beta \in (0, 1)$ und $\sigma \in (0, 1)$.

3.4.3 Innere-Punkte-Verfahren

Weitere effiziente Verfahren sind die Innere-Punkte-Verfahren. Die Grundidee dieser Verfahren ist die Konstruktion von Näherungslösungen im zulässigen Bereich. Die Idee der Verfahren lässt sich leicht anhand des linearen Problems

$$c^T x \rightarrow \min, \quad \text{u. d. Nb.} \\ Ax = b, \\ x \geq 0$$

veranschaulichen. Das Problem wird hierfür in ein (logarithmisches) Barriereproblem umgewandelt. Die Ungleichungsnebenbedingungen werden dabei eliminiert und gehen als Strafterme in die Zielfunktion ein.

$$c^T x - \eta \sum_{i=1}^n \log(x_i) \rightarrow \min, \quad \text{u. d. Nb.} \\ Ax = b$$

Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für dieses Problem haben mit $\lambda_i := \frac{\eta}{x_i}$, $i = 1, \dots, n$ folgende Gestalt:

$$A^T \mu + \lambda = c, \\ Ax = b, \\ \lambda_i x_i = \eta, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Lösung $(x(\eta), \lambda(\eta), \mu(\eta))$ ist damit abhängig von dem Parameter $\eta > 0$. Die Menge der Lösungen $\{(x(\eta), \lambda(\eta), \mu(\eta)) \mid \eta > 0\}$ wird dabei als zentraler Pfad bezeichnet. Das Ziel dieses Ansatz ist die Konvergenz des zentralen Pfades für $\eta \rightarrow 0$ gegen die Lösung des ursprünglichen Problems. Numerisch werden die Gleichungen der notwendigen Bedingungen erster Ordnung des Barriereproblems wieder mit dem Newton-Verfahren gelöst.

Es gilt

$$\phi(x, \mu, \lambda; \eta) := \begin{pmatrix} A^T \mu + \lambda - c \\ Ax - b \\ X \Lambda e - \eta e \end{pmatrix}$$

$$\phi'(x, \mu, \lambda; \eta) = \begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ \Lambda & 0 & X \end{pmatrix}$$

mit $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $e = (1, \dots, 1)^T$.

Insgesamt ergibt sich daraus ein Algorithmus für ein Inneres-Punkte-Verfahren.

Algorithmus 3.4.7 (Innere-Punkte-Verfahren [29, S.229])

1. Wähle $w_0 := (x_0, \mu_0, \lambda_0)$ mit $Ax_0 = b$, $A^T \mu_0 + \lambda_0 = c$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $\epsilon > 0$ und setze $k = 0$.
2. Abbruchkriterium: Ist $\zeta_k := \frac{x_k^T \lambda_k}{n} \leq \epsilon$, STOP.
3. Wähle $\sigma_k \in [0, 1]$ und berechne $\Delta w = (\Delta x, \Delta \mu, \Delta \lambda)$ als Lösung von

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ \Lambda_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \mu \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_k \Lambda_k e - \sigma_k \zeta_k e \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

4. Setze $w_{k+1} := w_k + t_k \Delta w$, wobei $t_k > 0$ so gewählt ist, dass $x_{k+1} > 0$ und $\lambda_{k+1} > 0$ gelten.
5. Setze $k := k+1$ und gehe zu Schritt 2.

Satz 3.4.8 (Konvergenzsatz [29, S.230, Satz. 5.11.4])

Seien $\epsilon \in (0, 1)$ beliebig und $\{(x_k, \mu_k, \lambda_k)\}$ eine durch den Algorithmus erzeugte Folge. Es gelte

$$\zeta_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\delta}{n^s}\right) \zeta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.55)$$

mit gewissen Parametern $\delta > 0$ und $s > 0$. Der Startvektor (x_0, μ_0, λ_0) erfülle die Bedingung

$$\zeta_0 \leq \frac{1}{\epsilon^\kappa}, \quad \kappa > 0. \quad (3.56)$$

Dann existiert ein Index $K \in \mathbb{N}$ mit $K = \mathcal{O}(n^s |\log(\epsilon)|)$ und $\zeta_k \leq \epsilon$ für alle $k \geq K$.

Beweis. [29, S.230-231] □

Liniensuchverfahren

Bei nichtlinearen Problemen der Form

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \text{ u. d. Nb.} \\ c(x) &= 0, \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{3.57}$$

ergibt sich aufgrund der notwendigen Bedingungen erster Ordnung des Barriereproblems

$$\begin{aligned} \varphi(x; \eta) &:= f(x) - \eta \sum_{i=1}^n \log(x_i) \rightarrow \min, \text{ u. d. Nb.} \\ c(x) &= 0, \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{3.58}$$

ein nichtlineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \nabla c(x)\mu - \lambda &= 0, \\ c(x) &= 0, \\ X\Lambda e - \eta e &= 0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

In Ipopt einer Implementierung von Wächter und Biegler [49] wird zur Lösung solcher Probleme ein Inneres-Punkte-Verfahren mit Liniensuche verwendet. Dabei wird die Primal-Duale-Suchrichtung mit

$$\begin{pmatrix} H(x, \mu, \lambda) & \nabla c(x) & -I \\ \nabla c(x)^T & 0 & 0 \\ \Lambda & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^x \\ d^\mu \\ d^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \nabla c(x)\mu - \lambda \\ c(x) \\ X\Lambda e - \eta e \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

bestimmt [42]. Hierbei ist $H(x, \mu, \lambda)$ wieder die exakte Hessematrix oder die Approximation der Lagrangefunktion. Alternativ können dafür auch die linearisierten notwendigen Bedingungen in einem kleineren System

$$\begin{pmatrix} H(x, \mu, \lambda) + X^{-1}\Lambda & \nabla c(x) \\ \nabla c(x)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^x \\ d^\mu \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla \varphi(x; \eta) + \nabla c(x)\mu \\ c(x) \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

verwendet werden [42, 48, 49]. Die Suchrichtung für λ ergibt sich dann aus

$$d^\lambda = \eta X^{-1}e - \lambda - X^{-1}\Lambda d^x. \tag{3.62}$$

Die Schrittweite muss bei der Aufdatierung so gewählt werden, dass die Bedingungen im vierten Schritt des Algorithmus 3.4.7 nicht verletzt werden. Es gilt daher nach [42]

$$\alpha_x^{\max} := \max\{\alpha \in (0, 1] \mid x + \alpha d^x \geq (1 - \tau)x\} \tag{3.63}$$

$$\alpha_\lambda^{\max} := \max\{\alpha \in (0, 1] \mid \lambda + \alpha d^\lambda \geq (1 - \tau)\lambda\} \tag{3.64}$$

mit $\tau \in (0, 1)$. Sobald im Algorithmus eine Lösung (x_k, μ_k, λ_k)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &:= x_k + \alpha^x d^x \\ \mu_{k+1} &:= \mu^k + \alpha^x d^\mu \\ \lambda_{k+1} &:= \lambda_k + \alpha^\lambda d^\lambda \end{aligned} \tag{3.65}$$

gefunden worden ist, sodass für den Fehler

$$E(x, \mu, \lambda; \eta) := \max \{ \|\nabla f(x) + \nabla c(x)\mu - \lambda\|_\infty, \|c(x)\|_\infty, \|X\Lambda e - \eta e\|_\infty \} \leq \epsilon_{tol} \tag{3.66}$$

gilt, wird der Parameter η mit

$$\eta := \max \left\{ \frac{\epsilon_{tol}}{10}, \min \{ \kappa_\eta \eta, \eta^{\theta_\eta} \} \right\}, \kappa_\eta \in (0, 1), \theta_\eta \in (1, 2) \tag{3.67}$$

aktualisiert [49]. Mit diesem neuen Parameter wird erneut eine Suchrichtung und Schrittweite für die Aufdatierung der Lösung bestimmt.

4 Optimale Allokation für VSP und Azimutpropeller

In das Allokationsproblem 3.0.2 gehen neben den Funktionen für den Propellerschub, die Propellerleistung und das Moment auch die Steuerkomponenten in Form ihrer Ableitungen ein. Diese sind je nach Antrieb unterschiedlich. In welcher Form die Funktionen für den Schub τ_{thr} , das Propellermoment M und die Leistung P von den Steuerkomponenten abhängen und wie sie sich aufgrund von Interaktionen ändern können, wird im ersten Teil dieses Kapitels für den VSP, Azimutpropeller und Bugstrahler modelliert. Der zweite Teil zeigt numerische Resultate zu den verschiedenen Methoden der multi-kriteriellen Optimierung, Fehler und Rechenzeit des Allokationsmoduls für verschiedene Propellerkonstellationen sowie den unterschiedlichen Eigenschaften der beiden Hauptantriebe VSP und Azimutpropeller.

4.1 Modellierung von Schub und Leistung der Antriebe

Die Funktion $\tau_{\text{thr}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^3$ bildet den Gesamtschub in x- und y-Richtung als auch das Gesamtmoment um die z-Achse aller Propeller in Abhängigkeit der Zustandsvariablen $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ab. Sie setzt sich aus den Schüben in x- und y-Richtung und Momenten um die z-Achse der einzelnen Propeller zusammen

$$\tau_{\text{thr}}(z(t)) = \sum_{i=1}^K \tau_{\text{thr}_i}(z(t)), \quad (4.1)$$

wobei $K \in \mathbb{N}$ die Anzahl der verwendeten Propeller bezeichnet.

Für den i -ten Propeller, der einen Schub in x- und y-Richtung $\tau_i(z(t)) = \begin{pmatrix} \tau_{x,i}(z(t)) \\ \tau_{y,i}(z(t)) \end{pmatrix}$ erzeugt und an der Position $(l_{x,i}, l_{y,i}, l_{z,i})$ am Schiff angebracht ist (vgl. Abbildung 4.1) gilt dann nach [27, S. 401]

$$\tau_{\text{thr}_i}(z(t)) = \begin{pmatrix} \tau_{x,i}(z(t)) \\ \tau_{y,i}(z(t)) \\ -l_{y,i}\tau_{x,i}(z(t)) + l_{x,i}\tau_{y,i}(z(t)) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

In der Berechnung der Schubkomponenten, beschrieben durch die Funktionen $\tau_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tau_y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, der Momente $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ und der Leistung $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, aber auch in den Zustandsvariablen z , welche die charakteristische Steue-

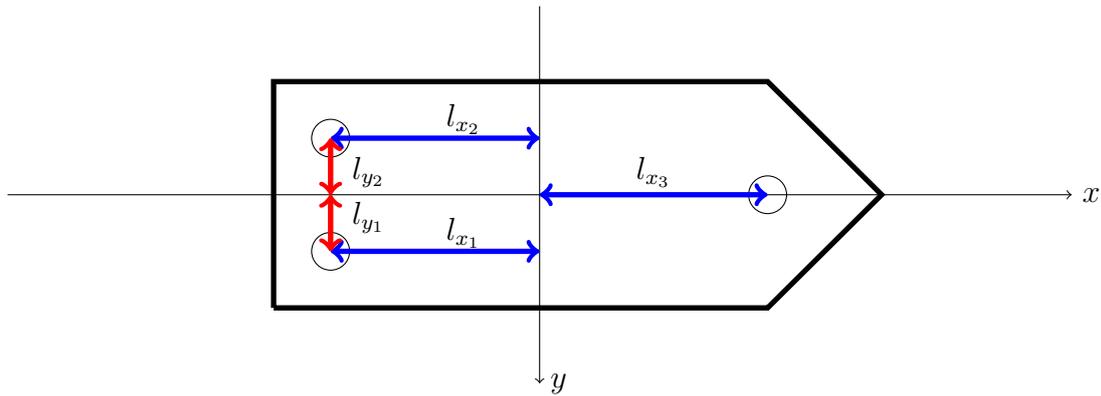


Abbildung 4.1: Propelleranordnung

zung der Propeller abbilden, unterscheiden sich die Propellertypen VSP, Azimutpropeller und Bugstrahler voneinander.

4.1.1 Modellierung des Voith-Schneider Propellers

Die Steuerung des VSP erfolgt über die beiden Komponenten Steuerknüppel und Drehzahl. Durch Positionsänderung des Steuerknüppels können Schubrichtung und Stärke des Propellers beeinflusst werden. Die Steuerknüppelposition kann für jeden beliebigen VSP über die Steigung beschrieben werden [36].

Definition 4.1.1 (Steigung und Steigungsrichtung)

Sei $O = \begin{pmatrix} O_x \\ O_y \end{pmatrix}$ der Flügelmittelpunkt, $N = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix}$ der Normalenschnittpunkt (vgl. Abbildung 2.3b) und D der Durchmesser des Propellers. Die Steigung, definiert durch

$$\tilde{\lambda}_0 := \frac{\|O - N\|_2}{D/2} \leq 0,8 \quad (4.3)$$

stellt die Stärke der Auslenkung der Flügel dar. Analog gilt für die Längssteigung x

$$x := \frac{(O_x - N_x)}{D/2} \quad (4.4)$$

und die Quersteigung y

$$y := \frac{(O_y - N_y)}{D/2}. \quad (4.5)$$

Die Steigungsrichtung φ

$$\varphi := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

beschreibt den Winkel, in dem der Steuerknüppel ausgelenkt ist [36, S. 119].

Aufgrund der Kinematik des VSP ist es möglich, die Längssteigung, beschrieben durch die Variable x , wie auch die Quersteigung, beschrieben durch y zeitgleich unter Einhaltung der Steuerzeiten zu verändern.

Zusätzlich kann die Schubstärke durch die Drehzahl n_{VSP} variiert werden, welche in der Regel eine deutlich kleinere Änderungsrate als die Steigung besitzt. Zusammengefasst gilt für die Steuerung des VSP:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{x} \cdot \omega_1(t), \\ \dot{y}(t) &= \tilde{y} \cdot \omega_2(t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\text{VSP}}(t) &= \tilde{n}_{\text{VSP}} \cdot \omega_3(t), \\ \|\omega_i(t)\|_\infty &\leq 1 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Zustandsvariable $z(t)$ setzt sich demnach für den VSP aus der Steuerknüppelposition und der Drehzahl zusammen

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ n_{\text{VSP}}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Da sich die Steigung $\tilde{\lambda}_0$ für einen einzelnen VSP nach Definition 4.1.1 über die Steuerknüppelpositionen x und y berechnen lässt, kann man sie auch als Funktion definieren:

$$\tilde{\lambda}_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \tilde{\lambda}_0(x(t), y(t)) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Zudem sind sowohl die Steigung als auch die Drehzahl beschränkt

$$0 \leq \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \leq \tilde{\lambda}_{0, \max}, \quad (4.10)$$

$$n_{\text{VSP}, \min} \leq n_{\text{VSP}}(t) \leq n_{\text{VSP}, \max}. \quad (4.11)$$

Analog zu der Steigung gilt für die Steigungsrichtung $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi]$ definiert mit dem Zusammenhang (4.6) aus Definition 4.1.1. Zusammen mit der Drehzahl und der Anströmgeschwindigkeit V_A lässt sich zuletzt noch der Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ als Quotient aus Anströmgeschwindigkeit V_A und Umfangsgeschwindigkeit des Propellers

definieren,

$$\tilde{\lambda}(n_{\text{VSP}}(t), V_A) := \frac{\|V_A\|_2}{D\pi n_{\text{VSP}}(t)}. \quad (4.12)$$

Nach [11] gilt für den Schub $\tau_{\text{VSP}} = \begin{pmatrix} \tau_{\text{VSP},x} \\ \tau_{\text{VSP},y} \end{pmatrix}$ und die Leistung P_{VSP} bzw. das Moment M_{VSP}

$$\tau_{\text{VSP},x}(z(t)) = c_{\text{thrust,VSP}} \cdot k_{SX}(\tilde{\lambda}_0(x(t), y(t)), \varphi(x(t), y(t)), \tilde{\lambda}(n_{\text{VSP}}(t), V_A)) \cdot n_{\text{VSP}}(t)^2, \quad (4.13)$$

$$\tau_{\text{VSP},y}(z(t)) = c_{\text{thrust,VSP}} \cdot k_{SY}(\tilde{\lambda}_0(x(t), y(t)), \varphi(x(t), y(t)), \tilde{\lambda}(n_{\text{VSP}}(t), V_A)) \cdot n_{\text{VSP}}(t)^2, \quad (4.14)$$

$$M_{\text{VSP}}(z(t)) = c_{\text{torque,VSP}} \cdot k_D(\tilde{\lambda}_0(x(t), y(t)), \varphi(x(t), y(t)), \tilde{\lambda}(n_{\text{VSP}}(t), V_A)) \cdot n_{\text{VSP}}(t)^2, \quad (4.15)$$

$$P_{\text{VSP}}(z(t)) = \frac{2\pi n_{\text{VSP}}(t) \cdot M_{\text{VSP}}(z(t))}{\eta_{m,\text{VSP}}}, \quad (4.16)$$

wobei für den mechanischen Wirkungsgrad des VSP meist $\eta_{m,\text{VSP}} = 0,92$ angenommen wird. Die propellerspezifischen Konstanten $c_{\text{thrust,VSP}}$ und $c_{\text{torque,VSP}}$ setzen sich aus den Konstanten Durchmesser D , Flügellänge L und Wasserdichte ρ mit $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$

$$c_{\text{thrust,VSP}} = \frac{1}{2}\rho \cdot D \cdot L \cdot (D\pi)^2 \quad \text{und} \quad (4.17)$$

$$c_{\text{torque,VSP}} = \frac{1}{4}\rho \cdot D^2 \cdot L \cdot (D\pi)^2 \quad (4.18)$$

zusammen.

Neben der Drehzahl n_{VSP} hängen Schub und Leistung auch von den dimensionslosen Schubbeiwerten $k_S = \begin{pmatrix} k_{SX} \\ k_{SY} \end{pmatrix}$ und Momentenbeiwert k_D ab.

Die Beiwerte k_S und k_D lassen sich durch Messungen oder CFD-Berechnungen (Computational Fluid Dynamics) in Abhängigkeit von der Steigung $\tilde{\lambda}_0$, der Steigungsrichtung φ und dem Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda}$ bestimmen.

Neben der Anströmung werden Schub und Leistung eines Propellers zusätzlich durch Interaktionen zwischen Propellern und zwischen Propeller und Schiff beeinflusst. Um die Realität möglichst genau abbilden zu können, wäre es notwendig, in CFD-Berechnungen diese drei Faktoren kombiniert zu betrachten. Dies ist aber aufgrund der vielen verschiedenen Möglichkeiten und der dafür nötigen sehr aufwändigen CFD-Berechnungen nicht realisierbar. Deshalb beschränkt sich diese Arbeit auf die einzelne Modellierung der Interaktionen.

Approximation der Schub- und Momentenbeiwerte

Als Basis für die Approximation der Beiwerte wurden Ergebnisse aus CFD-Berechnungen für verschiedene Fortschrittsgrade, Steigungen und Steigungsrichtungen verwendet. Mit-

tels kubischer B-Splines wurden die Beiwerte zunächst bezüglich der Steigungsrichtung, dann bezüglich des Fortschrittsgrades und zuletzt bezüglich der Steigung approximiert. Um eine bessere Übersicht zu gewährleisten, werden die Argumente von $\tilde{\lambda}_0$ und φ im Folgenden weggelassen. Für die Berechnung von k_{SX} ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$k_{SX}(\tilde{\lambda}_0, \varphi, \tilde{\lambda}) = \sum_{i=0}^{n^\varphi} c_i^\varphi(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}) \cdot B_{i,4}^\varphi(\varphi) \quad \text{mit} \quad (4.19)$$

$$c_i^\varphi(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}) = \sum_{j=0}^{n^{\tilde{\lambda}_0}} c_{j,i}^{\tilde{\lambda}_0}(\tilde{\lambda}) \cdot B_{j,4}^{\tilde{\lambda}_0}(\tilde{\lambda}_0) \quad \text{für } i = 0, \dots, n^\varphi \text{ und} \quad (4.20)$$

$$c_{j,i}^{\tilde{\lambda}_0}(\tilde{\lambda}) = \sum_{k=0}^{n^{\tilde{\lambda}}} c_{k,j,i}^{\tilde{\lambda}} \cdot B_{k,4}^\varphi(\varphi) \quad \text{für } j = 0, \dots, n^{\tilde{\lambda}_0}. \quad (4.21)$$

Hierbei ist die Spline-Basis $B_{i,4}^\varphi(\varphi)$ periodisch mit einer Periodenlänge von 2π . Die Koeffizienten $c_{k,j,i}^{\tilde{\lambda}}$ wurden über Least-Squares ermittelt. Statt dem Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda}$ selbst wird bei dieser Berechnung der Arkustangens des Fortschrittsgrades verwendet. Diese in der Marine übliche Transformation gewährleistet, dass für Drehzahlen $n \approx 0$ der transformierte Fortschrittsgrad gegen $\pi/2$ konvergiert anstatt gegen unendlich.

Analog zu k_{SX} lassen sich auch die Beiwerte k_{SY} und k_D approximieren. Einzelheiten zu der Approximation der Beiwerte und zu der Wahl der Knotenpunkte finden sich in [17]. Für den Fall, dass es nicht möglich ist, die Anströmung zu ermitteln, wird für den Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda} \equiv 0$ angenommen. Die Fehler, die dabei bei der Schub und Leistungsberechnung, beispielsweise im DP-Betrieb entstehen, können durch den DP-Regler wieder kompensiert werden. Für die Approximation der Beiwerte wird in diesem Fall folgende Annahme getroffen:

Annahme 4.1.2

Sei der Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda} \equiv 0$, dann gilt:

1. *Die Steigungsrichtung φ entspricht der Schubrichtung β .*
2. *Die Leistung ist unabhängig von der Steigungsrichtung.*

Mit Annahme 4.1.2 gilt für die Beiwerte

$$k_{SX}(\tilde{\lambda}_0, \varphi, 0) = k_{S,0}(\tilde{\lambda}_0) \cdot \cos(\varphi), \quad (4.22)$$

$$k_{SY}(\tilde{\lambda}_0, \varphi, 0) = k_{S,0}(\tilde{\lambda}_0) \cdot \sin(\varphi), \quad (4.23)$$

$$k_D(\tilde{\lambda}_0, \varphi, 0) \equiv k_D(\tilde{\lambda}_0, 0, 0) = k_{D,0}(\tilde{\lambda}_0), \quad (4.24)$$

mit

$$k_{S,0}(\tilde{\lambda}_0) = c_{k_S,2} \tilde{\lambda}_0^2 + c_{k_S,1} \tilde{\lambda}_0, \quad (4.25)$$

$$k_{D,0}(\tilde{\lambda}_0) = c_{k_D,3} \tilde{\lambda}_0^3 + c_{k_D,2} \tilde{\lambda}_0^2 + c_{k_D,1} \tilde{\lambda}_0 + c_{k_D,0}, \quad (4.26)$$

wobei die Koeffizienten $c_{k_S} \in \mathbb{R}^2$ und $c_{k_D} \in \mathbb{R}^4$ mittels Least-Squares aus CFD-Daten ermittelt werden. Exemplarisch zeigt Abbildung 4.2 die CFD-Ergebnisse der Schub- und Momentenbeiwerte und ihre Approximation für den Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda} = 0.3$ für verschiedene Steigungen und Steigungsrichtungen.

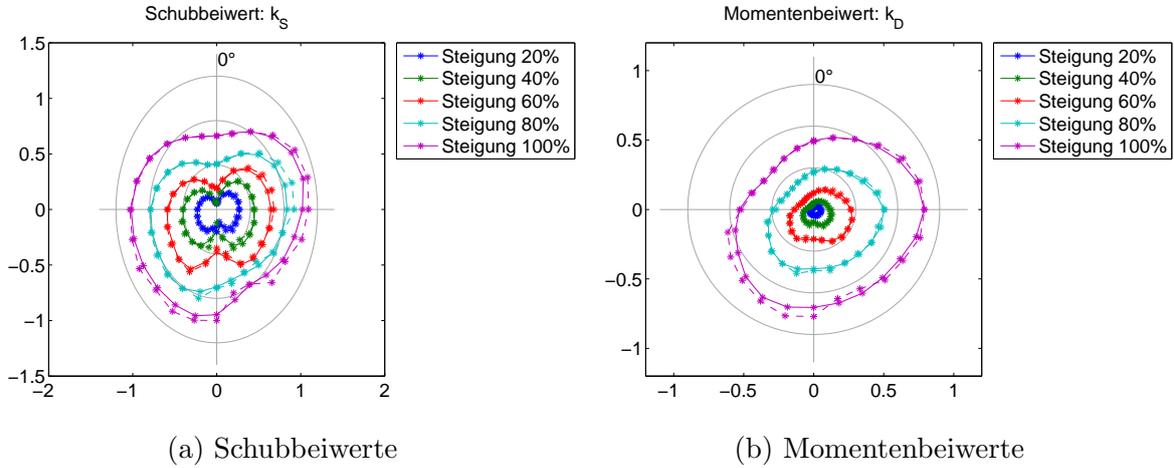


Abbildung 4.2: Schub- und Momentenbeiwerte (Daten \rightarrow Quelle: Voith Turbo).

Propeller-Propeller-Interaktion

Zwischen Propellern entsteht eine Interaktion, wenn sich ein Propeller in dem Propellerstrahl eines anderen Propellers befindet. Als Konsequenz kommt es bei dem sich im Propellerstrahl befindenden Propeller zu einer Schubreduktion, einem Leistungsabfall sowie zu einer Änderung der Propellerstrahlrichtung, was eine Änderung der Schubrichtung mit sich bringt. Einen Ansatz der Modellierung dieser Interaktion liefert [44]. Dieser Ansatz beruht auf der Modellierung des Propellerstrahls, basierend auf Modellversuchen. Mittels dieser Modellierung lässt sich die Anströmgeschwindigkeit berechnen, mit der ein anderer Propeller angestrahlt wird. Mit der Spline-Approximation für die Berechnung der Beiwerte ergibt sich daraus sowohl der neue Schubwert k_S , als auch der neue Momentbeiwert k_D . Aufgrund von einigen Unstimmigkeiten im Vergleich zu CFD-Berechnungen, basiert die Modellierung der Propeller-Propeller-Interaktion in dieser Arbeit auf der Approximation dieser CFD-Daten. Die CFD-Untersuchungen der Propeller-Propeller-Interaktion von Voith-Schneider Propellern wurden im Rahmen einer Diplomarbeit [16] durchgeführt. Hierbei wurde ein Propeller von einem anderen aus verschiedenen Richtungen angeströmt (vgl. Abbildung 4.3). Die Abstände der beiden Propeller zueinander betragen dabei 4.8 m , 8.0 m und 11.2 m , beziehungsweise den 1.5, 2.5 und 3.5-fachen Propellerdurchmesser. Bei diesen Untersuchungen hatten beide Propeller immer konstant die selbe Drehzahl ($n = 1.125\text{ rps}$) und Steigung ($\tilde{\lambda}_0 = 0.64$, entspricht 80%). Der beeinflusste Propeller hielt zudem seine Steigungsrichtung konstant bei $\frac{3}{2}\pi$. Berechnungen, in denen die Stärke des beeinflussenden Propellers vari-

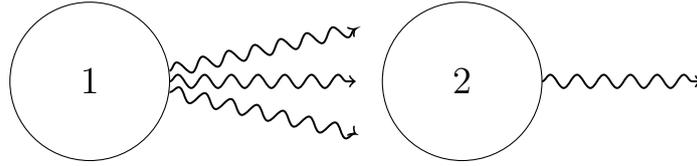


Abbildung 4.3: Propelleranordnung und Strahlrichtung für CFD-Untersuchungen der Propeller-Propeller-Interaktion

iert wurde oder sich beide Propeller gegenseitig anströmen, wurden nicht durchgeführt. Des Weiteren gibt es keine Ergebnisse für verschiedene Steigungsrichtungen des beeinflussten Propellers. Abgebildet wurde der prozentuale Schubverlust und Leistungsabfall, sowie die Änderung des Strahlwinkels. Das Modell der Propeller-Propeller-Interaktion soll unabhängig von der Drehrichtung der Propeller sein. Ansonsten wären noch weitere CFD-Berechnungen notwendig, um diesem Aspekt gerecht zu werden. Die vorhandenen CFD-Ergebnisse stammen von linksdrehenden Propellern, weshalb sich der stärkste Einfluss des Propellerstrahls bei einem Anströmwinkel $\gamma < 0$ befindet (vgl. Abbildung 6.22). Bei einem rechtsdrehenden Propeller hingegen hätte der Propellerstrahl bei einem positiven Anströmwinkel den größten Einfluss. Aus diesem Grund und unter der Annahme, dass der Einfluss sich bei einem Anströmwinkel von β_1 nicht von dem bei einem Winkel von $-\beta_1$ unterscheidet, wurden die CFD-Daten entsprechend bearbeitet (vgl. Abbildung 6.22). Für die bearbeiteten Daten $y_{\text{red}}(\gamma)$ gilt dann

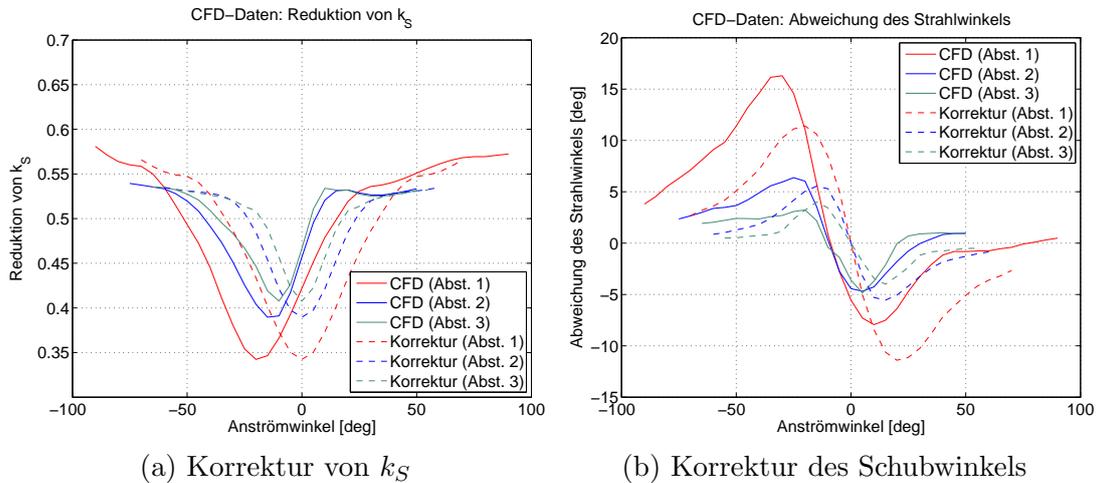


Abbildung 4.4: Korrektur der CFD-Daten (Daten \rightarrow Quelle: Voith Turbo)
(Abstand 1: 11.2 m, Abstand 2: 8.0 m, Abstand 3: 4.8 m)

$$\arg \min_{\gamma} (y_{\text{red}}(\gamma)) = 0 \quad (4.27)$$

$$y_{\text{red}}(\gamma) = y_{\text{red}}(-\gamma). \quad (4.28)$$

Für die Modellierung der Propeller-Propeller-Interaktion wird nun die Schub- beziehungsweise Leistungsreduktion, τ_{red} bzw. P_{red} sowie die Änderung der Schubrichtung β_{red} anhand dieser Daten in Abhängigkeit des Abstandes der beiden Propeller, der Anströmrichtung, sowie der Schubstärke des beeinflussenden Propellers abgebildet. Die Abbildung des Einflusses auf den angeströmten Propeller bezüglich des Anströmwinkels erfolgt über die Approximation der bearbeiteten Daten $y_{\text{red}}(\gamma)$ mit quadratischen B-Splines $B_{i,3}(\gamma)$, sodass für die Schub- und Leistungsreduktion

$$\left\| y_{\text{red}}(\gamma) - \left(1 + \sum_{i=1}^n c_i B_{i,3}(\gamma) \right) \right\|_2^2 \longrightarrow \min_{c \in \mathbb{R}^n} \quad (4.29)$$

gilt und für die Änderung der Schubrichtung

$$\| y_{\text{red}}(\gamma) - \sum_{i=1}^n c_i B_{i,3}(\gamma) \|_2^2 \longrightarrow \min_{c \in \mathbb{R}^n}. \quad (4.30)$$

Hieraus ergibt sich für die Reduktion von Schub und Leistung und der Änderung der Schubrichtung

$$\begin{aligned} \tau_{\text{red}}(\gamma) &= 1 + \sum_{i=1}^n c_i^{m,\tau} B_{i,3}^{\tau}(\gamma), \\ P_{\text{red}}(\gamma) &= 1 + \sum_{i=1}^n c_i^{m,P} B_{i,3}^P(\gamma), \\ \beta_{\text{red}}(\gamma) &= \sum_{i=1}^n c_i^{m,\beta} B_{i,3}^{\beta}(\gamma), \end{aligned} \quad (4.31)$$

wobei $m \in [4.8, 8.0, 11.2]$. Die Koeffizienten c_i unterscheiden sich bezüglich der Abstandes. Zudem wurden verschiedene Knotenpunkte der B-Splines für die Approximation von Schub, Leistung und Schubrichtung verwendet. Die Approximation CFD-Berechnung zeigt Abbildung 4.5. Diese zeigt auch, dass die Propeller nur dann beeinflusst werden, wenn sie mit einem Anströmwinkel $|\gamma| < \frac{70}{180}\pi$ getroffen werden. Für die Abhängigkeit bezüglich des Abstandes der beiden Propeller geht man von zwei Annahmen aus:

Annahme 4.1.3

Sei der Abstand m zwischen zwei Propellern größer als m_{max} , $m > m_{\text{max}}$, dann kommt es zu keiner Interaktion zwischen den Propellern.

Da keine Daten für den Fall $m < 4.8$ existieren und damit keine Aussage für diesen Fall getroffen werden kann, wird eine weitere Annahme getroffen.

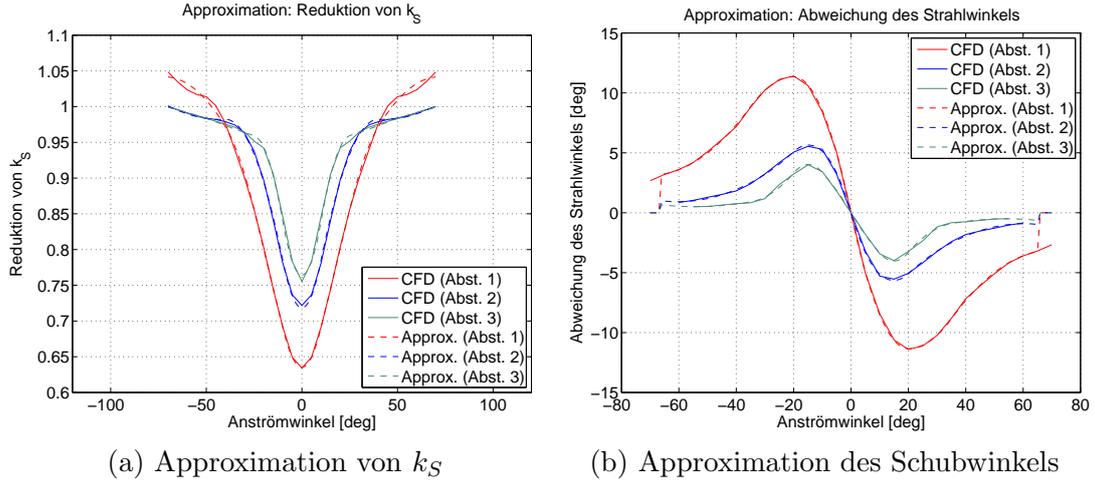


Abbildung 4.5: Approximation der CFD-Daten (Daten → Quelle: Voith Turbo)
(Abstand 1: 11.2 m, Abstand 2: 8.0 m, Abstand 3: 4.8 m)

Annahme 4.1.4

Sei der Abstand $m \leq 4.8$, dann ist die Schub- und Leistungsreduktion gleich der Reduktion des Falles $m = 4.8$.

Für jeden weiteren Fall, also $m \in [4.8, m_{\max}]$, wird zwischen den vorhandenen Daten $m_1 = 4.8$, $m_2 = 8.0m$ und $m_3 = 11.2$ linear interpoliert. Der Koeffizient c ist damit abhängig von dem Abstand der beiden interagierenden Propeller

$$c(m) := \begin{cases} c(m_1), & \text{falls } m < m_1, \\ c(m_1) + \frac{c(m_2) - c(m_1)}{m_2 - m_1}(m - m_1), & \text{falls } m_1 \leq m < m_2, \\ c(m_2) + \frac{c(m_3) - c(m_2)}{m_3 - m_2}(m - m_2), & \text{falls } m_2 \leq m < m_3, \\ c(m_3) + \frac{c(m_{\max}) - c(m_3)}{m_{\max} - m_3}(m - m_3), & \text{falls } m_3 \leq m \leq m_{\max}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.32)$$

Auch über den Einfluss der Schubstärke des beeinflussenden Propellers τ_1 kann aufgrund der Datenlage keine Aussage getroffen werden. Zu vermuten ist allerdings, dass die Schubstärke linear in die Funktionen τ_{red} , P_{red} und β_{red} mit

$$\begin{aligned} \tau_{\text{red}}(\gamma, \tau_1, m) &= \frac{\tau_1}{\tau_{\text{ref}}} \left(1 + \sum_{i=1}^n c_i^\tau(m) B_{i,3}^\tau(\gamma) \right), \\ P_{\text{red}}(\gamma, \tau_1, m) &= \frac{\tau_1}{\tau_{\text{ref}}} \left(1 + \sum_{i=1}^n c_i^P(m) B_{i,3}^P(\gamma) \right), \\ \beta_{\text{red}}(\gamma, \tau_1, m) &= \frac{\tau_1}{\tau_{\text{ref}}} \sum_{i=1}^n c_i^\beta(m) B_{i,3}^\beta(\gamma), \end{aligned} \quad (4.33)$$

eingeht. Als Referenzschub $\tau_{\text{ref}} \in \mathbb{R}$ dient der Propellerschub aus den CFD-Berechnungen ($n = 1.125 \text{ rps}$, $\tilde{\lambda}_0 = 0.64$). Je nach Propelleranordnung besteht die Möglichkeit, dass ein Propeller von mehreren Propellern beeinflusst wird (vgl. Beispiel 4.1.5). Für diesen Fall existieren noch keine Untersuchungen für den Voith-Schneider Propeller. Darum wird für diesen Fall ein vorläufiges Modell angenommen

$$\begin{aligned}\tau_{\text{red}}(\gamma, \tau, m) &= \prod_{j=1}^M \frac{\tau_j}{\tau_{\text{ref}}} \left(1 + \sum_{i=1}^n c_i^{\tau,j}(m_j) B_{i,3}^{\tau,j}(\gamma_j) \right), \\ P_{\text{red}}(\gamma, \tau, m) &= \prod_{j=1}^M \frac{\tau_j}{\tau_{\text{ref}}} \left(1 + \sum_{i=1}^n c_i^{P,j}(m_j) B_{i,3}^{P,j}(\gamma_j) \right), \\ \beta_{\text{red}}(\gamma, \tau, m) &= \sum_{j=1}^M \frac{\tau_j}{\tau_{\text{ref}}} \sum_{i=1}^n c_i^{\beta,j}(m_j) B_{i,3}^{\beta,j}(\gamma_j).\end{aligned}\tag{4.34}$$

Der Vektor $\tau \in \mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}$ beschreibt die Schübe der M beeinflussenden Propeller $\beta \in \mathbb{R}^M$ und $m \in \mathbb{R}^M$, deren Anströmwinkel und Abstand. Sobald Daten für diesen Fall vorliegen, kann im Allokationsmodul das Modell für die Propeller-Propeller-Interaktion entsprechend angepasst werden. Zusammenfassend gilt dann für den Schub τ_{PPI} und die Leistung P_{PPI} interagierender Propeller

$$\begin{aligned}\tau_{\text{PPI}}(\bar{\tau}, \gamma, \tau, m) &= \bar{\tau} \cdot \tau_{\text{red}}(\gamma, \tau, m), \\ P_{\text{PPI}}(\bar{P}, \gamma, \tau, m) &= \bar{P} \cdot P_{\text{red}}(\gamma, \tau, m), \\ \beta_{\text{PPI}}(\bar{\beta}, \gamma, \tau, m) &= \bar{\beta} + \beta_{\text{red}}(\gamma, \tau, m),\end{aligned}\tag{4.35}$$

wobei $\bar{\tau} \in \mathbb{R}^3$ den Schub des beeinflussten Propellers ohne Propeller-Propeller-Interaktion bezeichnet. Mit $\bar{\beta} \in (-\pi, \pi]$ und $\bar{P} \in \mathbb{R}$ wird seine ursprüngliche Schubrichtung und Leistung beschrieben.

Beispiel 4.1.5 (Propeller-Propeller-Interaktion)

Sei ein Schiff mit vier VSP ausgestattet. Alle Antriebe erzeugen einen Schub von 250 kN. Die Position der Antriebe sowie ihre Schubrichtung β lässt sich aus der Tabelle 4.1 entnehmen. Sei zudem $m_{\text{max}} = 32 \text{ m}$ der Abstand, ab dem keine Interaktion mehr möglich ist.

1. Abstände der Propeller zueinander

$$\begin{aligned}m_{1,2} &= 8.0 \text{ m}, \\ m_{1,3} &= m_{2,3} = \sqrt{32} \text{ m} \approx 5.6 \text{ m}, \\ m_{1,4} &= m_{2,4} \approx 64.1 \text{ m} > m_{\text{max}}, \\ m_{3,4} &= 60 \text{ m} > m_{\text{max}}.\end{aligned}$$

Zwischen Propeller 4 und den anderen Antrieben kommt es wegen des großen Abstands zu keiner Interaktion. Schubstärke und Richtung des vierten Antriebs bleiben

unverändert.

2. Einfluss von Propeller 1 auf Propeller 3

Der Angriffswinkel γ des ersten Propellers auf den dritten ergibt sich aus der Differenz der Lage $\tilde{\beta}$ des dritten Propellers zum ersten

$$\tilde{\alpha} := \arctan\left(\frac{l_{y,1} - l_{y,3}}{l_{x,1} - l_{x,3}}\right) = \arctan\left(\frac{-4 - 0}{-34 - (-30)}\right) = \frac{\pi}{4}$$

und dem Strahlwinkel $\tilde{\beta}$ mit

$$\tilde{\beta} := \begin{cases} \beta + \pi, & \text{falls } \beta < \pi, \\ \beta - \pi & \text{falls } \beta \geq \pi. \end{cases}$$

sodas gilt

$$\beta = \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} = (\beta - \pi) - \frac{\pi}{4} = \left(\frac{5}{4}\pi - \pi\right) - \frac{\pi}{4} = 0.$$

Aufgrund des Abstandes $m_{1,3}$ und der Schubstärke der Propeller reduziert sich der Schub des dritten Propellers.

3. Einfluss von Propeller 2 auf Propeller 1 und 3

Der zweite Antrieb trifft mit seinem Strahl sowohl Propeller 1 als auch 3. Dies führt bei Propeller 3 zu einer zusätzlichen Schubreduktion. Da Propeller 2 beide Antriebe nicht direkt trifft, kommt es neben der Reduktion der Schubstärke auch zu einer Änderung der Schubrichtung.

4. Einfluss von Propeller 3

Der Propellerstrahl des dritten Propellers trifft weder Propeller 1 noch 2, sodass beide trotz ihrer Nähe zu Propeller 3 nicht von ihm beeinflusst werden.

Propeller	l_x	l_y	β	Schubreduktion	β_{PPI}
1	-34 m	-4 m	$\frac{10}{9}\pi$	1.3%	1.1π
2	-34 m	4 m	$\frac{3}{4}\pi$	0%	$\frac{3}{4}\pi$
3	-30 m	0 m	$\frac{5}{4}\pi$	9%	1.28π
4	30 m	0 m	0	0%	0

Tabelle 4.1: Propeller-Propeller-Interaktion

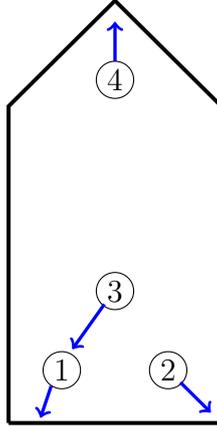


Abbildung 4.6: Beispiel: Propeller-Propeller-Interaktion

Propeller-Schiff-Interaktion

Neben Anströmung und der Propeller-Propeller-Interaktion wird der Schub eines Propellers auch durch die Schiffsförm beeinflusst. Der Schub des Propellers wird aufgrund des Widerstandes des Propellerstrahls entlang des Schiffes reduziert [14]. Für die Modellierung der Propeller-Schiff-Interaktion wird folgende Annahme getroffen:

Annahme 4.1.6

1. Die Leistung wird durch die Interaktion nicht beeinflusst.
2. Die Schubrichtung β wird bei der Interaktion zwischen Propeller und Schiff nicht verändert.

Um die Interaktion zwischen Schiff und Propeller abbilden zu können, sind wieder CFD-Berechnungen notwendig. Für jede Schiffsförm lässt sich mit CFD-Berechnungen für diskrete Schubrichtungen β_i der prozentuale Anteil $PSI_{\text{red},i} \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, des unbeeinflussten Schubes bestimmen. Mittels stückweise linearer Interpolation gilt dann für den prozentualen Anteil $PSI_{\text{red}} : (-\pi, \pi] \rightarrow [0, 1]$

$$PSI_{\text{red}}(\beta) = PSI_{\text{red},i} + \frac{PSI_{\text{red},i+1} - PSI_{\text{red},i}}{(\beta_{i+1} - \beta_i)} \cdot (\beta - \beta_i), \quad \text{für } \beta_i \leq \beta < \beta_{i+1}. \quad (4.36)$$

Ein mögliches Diagramm der Schubreduktion aufgrund der Propeller-Schiff-Interaktion zeigt Abbildung 4.7. Für den Schub gilt bei einer Interaktion mit der Schiffshülle

$$\tau_{PSI}(\bar{\tau}, \beta) = \bar{\tau} \cdot PSI_{\text{red}}(\beta), \quad (4.37)$$

wobei $\bar{\tau}$ den Schub des Propellers ohne Propeller-Schiff-Interaktion beschreibt.

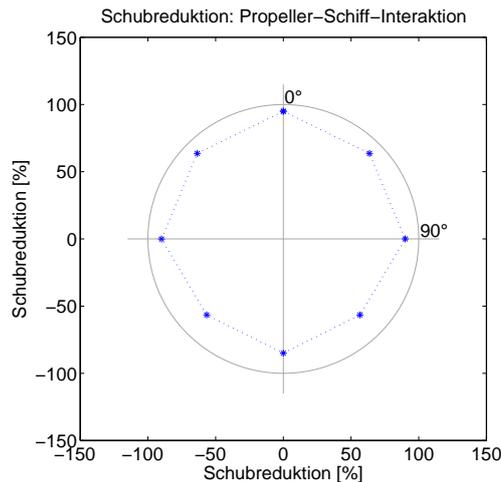


Abbildung 4.7: Schubreduktion: Propeller-Schiff-Interaktion (Quelle: Voith Turbo)

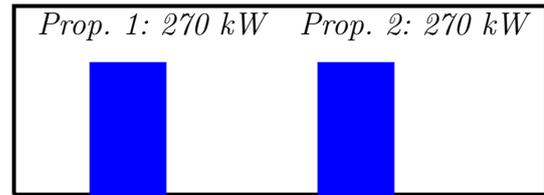
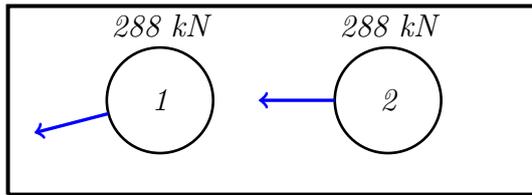
Kombination aller Interaktionen

In den letzten drei Abschnitten wurden die Interaktionen des VSP mit der Anströmung, anderen Propellern und der Schiffshülle modelliert. Da für die Modellierung einer Kombination aller drei Interaktionen bisher keine Daten vorliegen, werden die Modelle der Interaktionen nacheinander angewandt. Dass heißt, es wird zunächst für jeden Antrieb im System der Schub und die Leistung in Abhängigkeit der Anströmung berechnet. Danach wird anhand dieser Ergebnisse die Reduktion von Schub und Leistung sowie die Änderung des Schubwinkels aufgrund der Propeller-Propeller-Interaktion ermittelt. Zuletzt folgt die Propeller-Schiff-Interaktion, welche sich auf die Resultate der Propeller-Propeller-Interaktion bezieht. Im Beispiel 4.1.7 werden die Auswirkungen der Interaktionen auf Schub und Leistung veranschaulicht.

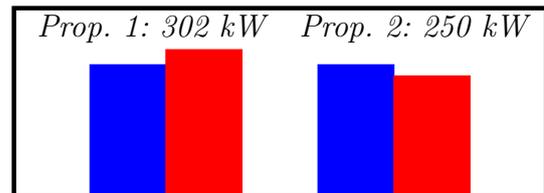
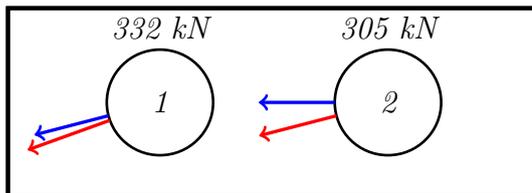
Beispiel 4.1.7 (Kombination aller Interaktionen)

Seien zwei VSP an den Positionen $l_{x,1} = l_{x,2} = -28 \text{ m}$, $l_{y,1} = -l_{y,2} = -4 \text{ m}$ gegeben. Beide drehen sich mit einer Drehzahl von 60 rpm und die Steigung liegt bei $\tilde{\lambda}_0 = 0.64$, also 80%. Die Steigungsrichtung beim ersten Propeller ist $\varphi_1 \approx 1.41\pi$ und beim zweiten $\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$. Die Anströmung hat eine Geschwindigkeit von $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. In jedem Schritt wird eine Interaktion mehr beachtet. Zum besseren Vergleich wird mit blauen Balken und Pfeilen der Schub und die Leistung ohne Interaktionen dargestellt. Die roten stellen den Schub und die Leistung der durch Interaktionen beeinflussten Propeller dar.

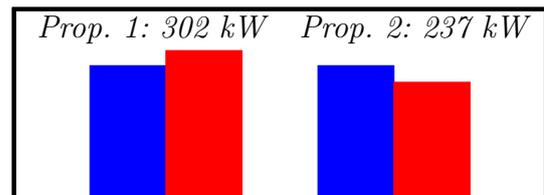
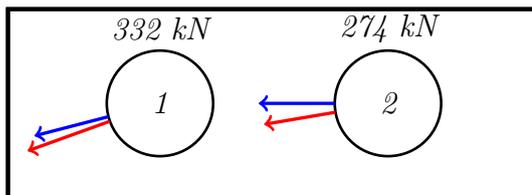
1. **Keine Beachtung von Interaktionen:** Werden keine Interaktionen beachtet, so erzeugen beide Antriebe den selben Schub, einmal in Richtung φ_1 und einmal in Richtung φ_2 . Die Leistung ist ebenfalls bei beiden identisch.



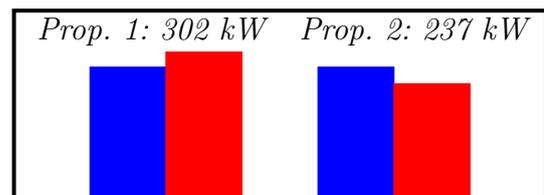
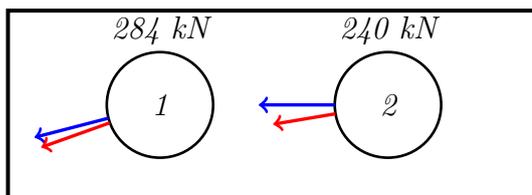
2. **Beachtung der Anströmung:** Aufgrund ihrer unterschiedlichen Steigungsrichtungen hat die Anströmung von $-1 \frac{m}{s}$ unterschiedliche Einflüsse auf die Propeller.



3. **Der Einfluss der Propeller-Propeller-Interaktion:** Die Strahlrichtung von Propeller 1 führt zu einer Propeller-Propeller-Interaktion der beiden Antriebe. Während Propeller 1 unbeeinflusst seine Schub und seine Leistung erhält, beeinflusst er die Schubrichtung und Stärke sowie die Leistung des zweiten Antriebs.



4. **Auswirkung der Propeller-Schiff-Interaktion:** Die Propeller-Schiff-Interaktion in diesem Beispiel basiert auf den Daten von Abbildung 4.7. Schubrichtung und Leistung bleiben bei dieser Interaktion unverändert.



Die Reihenfolge der Interaktionen wurde in Zusammenarbeit mit der Firma Voith Turbo, Heidenheim festgelegt. Belegende Untersuchungen zur Verifizierung dieser Annahme stehen aus.

4.1.2 Modellierung des Azimutpropellers

Die Schubrichtung eines Azimutpropellers ist abhängig von der Ausrichtung des Propellers, dem Azimutwinkel $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Durch Drehen des gesamten Propellers um sich selbst lässt sich die Schubrichtung verändern. Um den Propeller bei dieser Drehung

nicht zu schädigen, ist die Drehgeschwindigkeit durch $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\alpha} > 0$ beschränkt, sodass für die Steuerung gilt:

$$\dot{\alpha}(t) = \tilde{\alpha} \cdot \omega_4(t). \quad (4.38)$$

Da sich der Propeller beliebig oft um sich selbst drehen kann, sind für den Azimutwinkel keine weiteren Restriktionen nötig. Die Schubstärke variiert sich durch die Drehzahl $n_{\text{Azi}} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Sie lässt sich, wie die Drehzahl des VSP n_{VSP} , nur beschränkt verstellen

$$\dot{n}_{\text{Azi}}(t) = \tilde{n}_{\text{Azi}} \cdot \omega_5(t) \quad (4.39)$$

und ist nach oben wie auch nach unten beschränkt

$$n_{\text{Azi}, \min} \leq n_{\text{Azi}}(t) \leq n_{\text{Azi}, \max}. \quad (4.40)$$

Der Schub und die Leistung, beziehungsweise das Moment, berechnen sich ähnlich wie beim VSP, es gilt

$$\tau_{\text{Azi},x}(z(t)) = c_{\text{thrust,Azi}} \cdot k_{TX}(\alpha(t), \tilde{\lambda}(n_{\text{Azi}}(t), V_A)) \cdot n_{\text{Azi}}(t)^2, \quad (4.41)$$

$$\tau_{\text{Azi},y}(z(t)) = c_{\text{thrust,Azi}} \cdot k_{TY}(\alpha(t), \tilde{\lambda}(n_{\text{Azi}}(t), V_A)) \cdot n_{\text{Azi}}(t)^2, \quad (4.42)$$

$$M_{\text{Azi}}(z(t)) = c_{\text{torque,Azi}} \cdot k_Q(\alpha(t), \tilde{\lambda}(n_{\text{Azi}}(t), V_A)) \cdot n_{\text{Azi}}(t)^2, \quad (4.43)$$

$$P_{\text{Azi}}(z(t)) = \frac{2\pi n_{\text{Azi}}(t) \cdot M_{\text{Azi}}(z(t))}{\eta_{m,\text{Azi}}}, \quad (4.44)$$

wobei sich die propellerspezifischen Konstanten aus dem Durchmesser D des Azimutpropellers und der Wasserdichte $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$ zusammensetzen

$$c_{\text{thrust,Azi}} = \rho \cdot D^4, \quad (4.45)$$

$$c_{\text{torque,Azi}} = \rho \cdot D^5. \quad (4.46)$$

Der mechanische Wirkungsgrad des Azimutpropellers liegt bei $\eta_{m,\text{Azi}} = 0.97$. Die Werte k_T und k_Q entsprechen den Schub- und Momentenbeiwerten k_S und k_D des VSP. Sie sind, falls der Propeller nicht angeströmt wird, konstant, ansonsten hängen sie von der Anströmung und dem Azimutwinkel ab. Anders als beim VSP berechnet sich der Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow R$ mit

$$\tilde{\lambda} := \frac{\|V_A\|_2}{n_{\text{Azi}}(t) \cdot D}.$$

Da der Azimutwinkel verschieden interpretiert werden kann, gilt in dieser Arbeit, dass der Azimutwinkel, falls keine Anströmung anliegt, der Schubrichtung des Propellers entspricht. In anderen Publikationen können sich Azimutwinkel und Schubwinkel um 180° unterscheiden.

Interaktionen bei Azimutpropellern

Die Abhängigkeit zwischen Schubbeiwert beziehungsweise Momentenbeiwert und Anströmung wird im Gegensatz zu dem Voith-Schneider Propeller nicht mit Hilfe von approximierten CFD-Daten abgebildet. In aufwändigen Modellversuchen wurde in der Versuchsanstalt Marin, Niederlande, das Verhalten von Schub und Leistung von Azimutpropellern bei unterschiedlicher Anströmung untersucht [22]. Der Zusammenhang zwischen den sich daraus ergebenden Beiwerten und dem Azimutwinkel wurde vor Ort mit Fourierkoeffizienten approximiert. Damit stehen für jeden untersuchten Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda}_i$ mit $\tilde{\lambda}_{i+1} = \tilde{\lambda}_i + 0.2$ und $\tilde{\lambda}_0 = 0$, $i = 1, \dots, 6$ jeweils $2 \cdot n$ mit $n = 20$ Koeffizienten zu Verfügung, welche den Zusammenhang von Azimutwinkel α und den Beiwerten, zusammengefasst in C_{Azi} , beschreiben (vgl. Abbildung 4.8)

$$C_{Azi}(\bar{\alpha}, \tilde{\lambda}_i) = \sum_{k=0}^{20} \left(A_k(\tilde{\lambda}_i) \sin(k\bar{\alpha}) + B_k(\tilde{\lambda}_i) \cos(k\bar{\alpha}) \right). \quad (4.47)$$

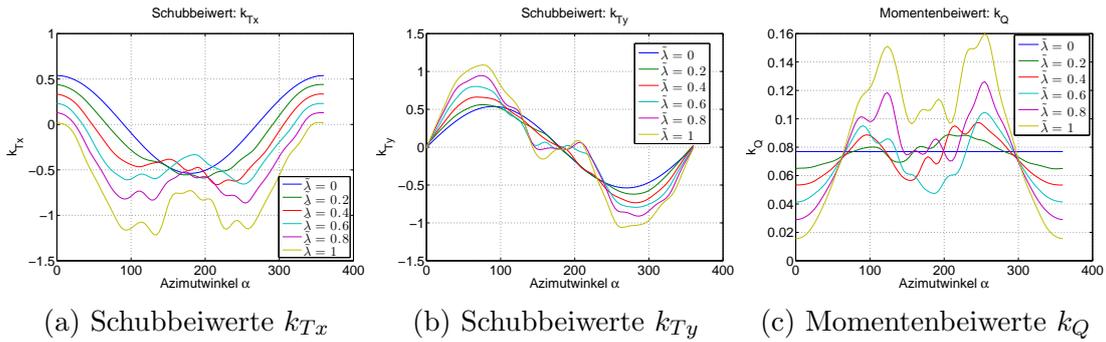


Abbildung 4.8: Azimut: Schub- und Momentenbeiwerte
(Daten → Quelle: MARIN, Niederlande)

Der Winkel $\bar{\alpha}$ ist dabei der relative Schubwinkel bezüglich der Anströmung. Um auch den Einfluss des Fortschrittsgrades abzubilden, wird zwischen den diskreten Fortschrittsgraden linear interpoliert. Ist der Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda} > 1$, so werden, da keine weiteren Untersuchungen vorliegen, in diesem Fall die Koeffizienten für $\tilde{\lambda} = 1$ verwendet. Damit gilt für die Berechnung der Schub- und Momentenbeiwerte bei Anströmung mit

$$\tilde{\lambda}(n_{Azi}(t), V_A) = \frac{\|V_A\|_2}{n_{Azi}(t) \cdot D} \quad (4.48)$$

und

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}(n_{Azi}(t), V_A) \leq \tilde{\lambda}_2 \quad (4.49)$$

und dem dazugehörigen Anströmwinkel $\gamma_{\tilde{\lambda}}$

$$\begin{aligned}
C_{\text{Azi}}(\alpha(t), \tilde{\lambda}(n_{\text{Azi}}(t), V_A)) = & \\
& \sum_{k=0}^{20} \left(A_k(\tilde{\lambda}_1) + \left(\frac{A_k(\tilde{\lambda}_2) - A_k(\tilde{\lambda}_1)}{0.2} \right) \cdot (\tilde{\lambda}(n_{\text{Azi}}(t), V_A) - \tilde{\lambda}_1) \right) \sin(k(\alpha + \gamma_{\tilde{\lambda}})) \\
& + \sum_{k=0}^{20} \left(B_k(\tilde{\lambda}_1) + \left(\frac{B_k(\tilde{\lambda}_2) - B_k(\tilde{\lambda}_1)}{0.2} \right) \cdot (\tilde{\lambda}(n_{\text{Azi}}(t), V_A) - \tilde{\lambda}_1) \right) \cos(k(\alpha + \gamma_{\tilde{\lambda}})).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Für die Interaktion zwischen zwei Azimutpropellern liegen der Firma Voith Turbo derzeit keine zugänglichen Daten von Modellversuchen oder CFD-Berechnungen vor. Damit ist es nicht möglich, ein zuverlässiges Modell für die Propeller-Propeller-Interaktion von Azimutpropellern aufzustellen. Um die Flexibilität des Allokationsmoduls zu gewährleisten, wird als vorläufiges Modell angenommen, dass der Azimutpropeller bei der Interaktion genauso oder ähnlich wie der Voith-Schneider Propeller reagiert, sodass das selbe Modell für die Propeller-Propeller-Interaktion verwendet werden kann.

Die Propeller-Schiff-Interaktion wird analog zu der Propeller-Schiff-Interaktion von Voith-Schneider-Propellern modelliert, sodass für den Schub des Azimutpropellers bei einer Propeller-Schiff-Interaktion ebenfalls über Gleichung (4.37) ermittelt wird. Die dafür nötigen Koeffizienten PSI_{red} müssen auch hier zuvor in Modellversuchen oder CFD-Berechnungen ermittelt werden.

4.1.3 Modellierung des Bugstrahlruders

Die Modellierung der Bugstrahler basiert auf Brix [20] und unterscheidet sich geringfügig von der Modellierung des VSP und des Azimutpropellers. Bugstrahler können je nach Typ ihren Schub sowohl durch Drehzahländerung als auch durch Verstellen der Flügel verändern. Um die Modellierung für beide Arten von Bugstrahlern flexibel zu halten, wird die Steuerung des Bugstrahlers anstatt durch Drehzahl und Änderungen der Flügelstellung durch $f_{\text{Bug}} : [0, T] \rightarrow [-1, 1]$ mit

$$\dot{f}_{\text{Bug}} = \tilde{f}_{\text{Bug}} \cdot \omega_6 \tag{4.51}$$

beschrieben. Hierbei ist $\omega_6 : [0, T] \rightarrow [-1, 1]$ die Steuervariable und $\tilde{f}_{\text{Bug}} \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}_{\text{Bug}} > 0$ entspricht wieder der maximalen Änderungsrate der Steuerung. Für einen gegebenen nominalen Schub $F_{\text{max}} \in \mathbb{R}$, $F_{\text{max}} > 0$ gilt dann für den Schub des Bugstrahlers nach [20]

$$\tau_{\text{Bug}}(t, f_{\text{Bug}}(t)) = \begin{pmatrix} \tau_{\text{Bug},x}(t, f_{\text{Bug}}(t)) \\ \tau_{\text{Bug},y}(t, f_{\text{Bug}}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{\text{max}} \cdot f_{\text{Bug}}(t) \cdot C(\gamma) \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

und die Leistung

$$P_{\text{Bug}}(t, f_{\text{Bug}}(t)) = \sqrt{\frac{|F_{\text{max}} \cdot f_{\text{Bug}}(t)|^3}{\rho \cdot \eta_{\text{Bug}}^3 \cdot \pi \cdot D_{\text{Bug}}^2}}. \tag{4.53}$$

Hierbei beschreiben $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$ die Dichte des Wassers, D_{Bug} den Durchmesser des Bugstrahlers und η_{Bug} den Wirkungsgrad. Die Funktion $C : [-\pi, \pi] \rightarrow [0, 1]$ bildet den prozentualen Schubverlust approximativ in Abhängigkeit des Winkels $\gamma = \arctan(\frac{V_{A,x}}{v_{Bug}})$, dem Winkel zwischen der negativen Anströmung in x-Richtung $V_{A,x}$ und der Strahlgeschwindigkeit v_{Bug} mit

$$v_{Bug} = -2\text{sign}(f_{Bug})\sqrt{\frac{|f_{Bug}| \cdot F_{\max}}{\rho D_{Bug}^2 \pi}} \quad (4.54)$$

ab. Für die Approximation des Schubverlustes wird folgende Annahme getroffen:

Annahme 4.1.8

a) Falls $V_{A,x} = 0$, reduziert sich der Schub des Bugstrahlers nicht. Es gilt:

$$C(0) = C(\pi) = C(-\pi) = 1.$$

b) Je stärker die Anströmung $V_{A,x}$ bezüglich der Strahlgeschwindigkeit v_{Bug} ist, desto größer ist die Schubreduktion. Damit gilt:

$$C(\gamma_1) \leq C(\gamma_2) \quad \text{für } \gamma_1 \geq \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \quad (4.55)$$

$$C(\gamma_1) \geq C(\gamma_2) \quad \text{für } \gamma_1 \geq \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]. \quad (4.56)$$

c) Die Schubreduktion ist aufgrund der Schiffssymmetrie symmetrisch bezüglich der Strahlrichtung der Bugstrahlruder, jedoch nicht bezüglich der Anströmrichtung (vgl. Abbildung 4.9). Es gilt

$$C(\gamma_1) = C\left(\gamma_1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für } \gamma_1 \in [0, \pi] \quad (4.57)$$

$$C(\gamma_2) = C\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für } \gamma_2 \in [-\pi, 0]. \quad (4.58)$$

d) Es gibt ein Intervall $I_1 := [\frac{\pi}{2} - \delta_{Bug,1}, \frac{\pi}{2} + \delta_{Bug,1}]$ um $\gamma = \frac{\pi}{2}$ bzw. $I_2 := [-\frac{\pi}{2} - \delta_{Bug,1}, -\frac{\pi}{2} + \delta_{Bug,1}]$ um $\gamma = -\frac{\pi}{2}$, mit $\delta_{Bug,1}, \delta_{Bug,2} > 0$ in der die maximale Schubreduktion erreicht ist.

$$C(\gamma) \equiv c_{1,max}, \quad \text{für } \gamma \in I_1 \quad (4.59)$$

$$C(\gamma) \equiv c_{2,max}, \quad \text{für } \gamma \in I_2 \quad (4.60)$$

e) Die Schubreduktion genügt außerhalb der Intervalle I_1 und I_2 einer quadratischen

Funktion und ist stetig.

$$C(\gamma) = \begin{cases} a_{1,1}\gamma^2 + a_{1,2}\gamma + a_{1,3}, & \text{für } \gamma \in [0, \pi) \setminus I_1, \\ a_{2,1}\gamma^2 + a_{2,2}\gamma + a_{2,3}, & \text{für } \gamma \in [-\pi, 0) \setminus I_2, \\ c_{1,max} & \text{für } \gamma \in I_1, \\ c_{2,max} & \text{für } \gamma \in I_2. \end{cases} \quad (4.61)$$

Wegen der Annahme 4.1.8 gilt damit für die Funktion $C : [-\pi, \pi] \rightarrow [0, 1]$

$$C(\gamma) := \begin{cases} \left(\frac{c_{1,max}-1}{\gamma_1^2-\pi\gamma_1} \right) \cdot \gamma^2 - \left(\frac{c_{1,max}-1}{\gamma_1^2-\pi\gamma_1} \right) \cdot \pi\gamma + 1, & \text{für } \gamma \in [0, \pi) \setminus I_1, \\ \left(\frac{c_{2,max}-1}{\gamma_2^2-\pi\gamma_2} \right) \cdot \gamma^2 + \left(\frac{c_{2,max}-1}{\gamma_2^2+\pi\gamma_2} \right) \cdot \pi\gamma + 1, & \text{für } \gamma \in [-\pi, 0) \setminus I_2, \\ c_{1,max} & \text{für } \gamma \in I_1, \\ c_{2,max} & \text{für } \gamma \in I_2. \end{cases}, \quad (4.62)$$

wobei $\gamma_1 := \min\{\gamma \mid \gamma \in I_1\}$ und $\gamma_2 := \min\{\gamma \mid \gamma \in I_2\}$ ist. Die Annahme 4.1.8 basiert auf Daten zweier Bugstrahlruder des im Schiffssimulator der Firma Voith Turbo Marine, Heidenheim, verwendeten Programms FORCE. Die Approximation dieser Schubreduktionsdaten zeigt Abbildung 4.9. Der Bereich, in dem die maximale Schubreduktion erreicht

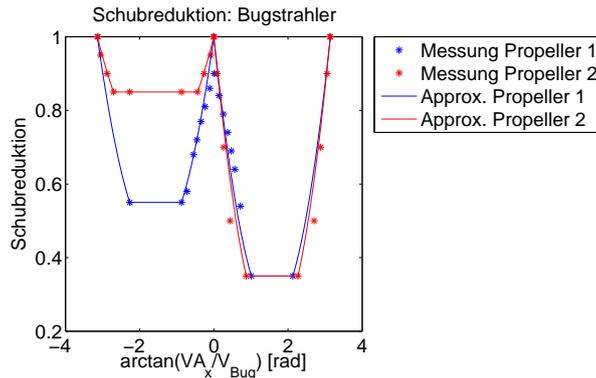


Abbildung 4.9: Schubreduktion: Bugstrahlruder (Daten → Quelle: Voith Turbo)

ist, sowie die maximale Schubreduktion selbst, ist abhängig von der Art und der Position des Bugstrahlruders. Sie bilden damit neben der Reduktion aufgrund der Anströmung zugleich die Propeller-Schiff-Interaktion ab. Aufgrund der teilweise sehr starken Schubreduktion ist der Bugstrahler nur bei niedrigen Anströmungen wie beispielsweise im DP-Betrieb effizient einsetzbar.

4.1.4 Allokationsproblem für VSP und Azimutpropeller

Verbindet man das Allokationsproblem 3.0.2 aus Kapitel 3 mit der Modellierung von Propellerschub und Leistung, so lässt sich das Allokationsproblem für VSP und Azimut-

propeller formulieren. Der Bugstrahler wird aufgrund seiner wichtigen unterstützenden Funktion ebenfalls mit in das Problem aufgenommen.

Problem 4.1.9 (Allokationsproblem für VSP und Azimutpropeller)

Sei eine Propelleranordnung von K_{VSP} VSP, $K_{VSP} \in \mathbb{N}$, K_{Azi} Azimutpropellern, $K_{Azi} \in \mathbb{N}$, und K_{Bug} Bugstrahlrudern. $K_{Bug} \in \mathbb{N}$ gegeben. Die minimal und maximal möglichen Propellermomente und Leistungen sind konstant und werden durch die Vektoren $M_{\min,VSP}, M_{\max,VSP}, P_{\min,VSP}, P_{\max,VSP} \in \mathbb{R}^{K_{VSP}}$, $M_{\min,Azi}, M_{\max,Azi}, P_{\min,Azi}, P_{\max,Azi} \in \mathbb{R}^{K_{Azi}}$ und $P_{\min,Bug}, P_{\max,Bug} \in \mathbb{R}^{K_{Bug}}$ beschrieben. Selbiges gilt für die Beschränkung der Drehzahlen von VSP und Azimut, $n_{\min,VSP}, n_{\max,VSP} \in \mathbb{R}^{K_{VSP}}$ und $n_{\min,Azi}, n_{\max,Azi} \in \mathbb{R}^{K_{Azi}}$. Die Restriktion der Steigung bei VSP Antrieben wird mit der konstanten $\tilde{\lambda}_{0,\max} \in \mathbb{R}^{K_{VSP}}$ beschrieben. Seien zudem die maximalen Änderungsraten der Steuerkomponenten gegeben durch $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{n}_{VSP} \in \mathbb{R}^{K_{VSP}}$, $\tilde{\alpha}, \tilde{n}_{Azi} \in \mathbb{R}^{K_{Azi}}$ und $\tilde{f}_{Bug} \in \mathbb{R}^{K_{Bug}}$. Die aktuelle Position der Steuerkomponenten sei zum Zeitpunkt $t_0 = 0$

$$z(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ n_{VSP}(0) \\ \alpha(0) \\ n_{Azi}(0) \\ f_{Bug}(0) \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren sei die Anströmung $V_A = \begin{pmatrix} V_{A,x} \\ V_{A,y} \end{pmatrix}$ bekannt.

Finde eine Steuerung $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \cdot K_{VSP} + 2 \cdot K_{Azi} + K_{Bug}}$, sodass

$$\left(\int_0^T J_1(z(t)) dt, \int_0^T J_2(z(t)) dt \right) \tag{4.63}$$

mit

$$J_1(z(t)) := \left\| \hat{\tau} - \sum_{i=1}^{K_{VSP}} \tau_{thr,VSP,i}(z(t)) - \sum_{i=1}^{K_{Azi}} \tau_{thr,Azi,i}(z(t)) - \sum_{i=1}^{K_{Bug}} \tau_{thr,Bug,i}(z(t)) \right\|_2^2$$

und

$$J_2(z(t)) := \sum_{i=1}^{K_{VSP}} (P_{VSP,i} - P_{\min,VSP,i})^2 + \sum_{i=1}^{K_{Azi}} (P_{Azi,i} - P_{\min,Azi,i})^2 + \sum_{i=1}^{K_{Bug}} (P_{Bug,i} - P_{\min,Bug,i})^2$$

minimal wird unter den Nebenbedingungen für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \tilde{x} \cdot \omega_1(t), \\
\dot{y}(t) &= \tilde{y} \cdot \omega_2(t), \\
\dot{n}_{VSP}(t) &= \tilde{n}_{VSP} \cdot \omega_3(t), \\
\dot{\alpha}(t) &= \tilde{\alpha} \cdot \omega_4(t), \\
\dot{n}_{Azi}(t) &= \tilde{n}_{Azi} \cdot \omega_5(t), \\
\dot{f}_{Bug}(t) &= \tilde{f}_{Bug} \cdot \omega_6(t),
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \leq \tilde{\lambda}_{0, \max}, \\
n_{\min, VSP} &\leq n_{VSP}(t) \leq n_{\max, VSP}, \\
M_{\min, VSP} &\leq M_{VSP}(t) \leq M_{\max, VSP}, \\
P_{\min, VSP} &\leq P_{VSP}(t) \leq P_{\max, VSP}, \\
n_{\min, Azi} &\leq n_{Azi}(t) \leq n_{\max, Azi}, \\
M_{\min, Azi} &\leq M_{Azi}(t) \leq M_{\max, Azi}, \\
P_{\min, Azi} &\leq P_{Azi}(t) \leq P_{\max, Azi}, \\
-1 &\leq f_{Bug}(t) \leq 1, \\
P_{\min, Bug} &\leq P_{Bug}(t) \leq P_{\max, Bug},
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\|\omega(t)\|_\infty \leq 1, \tag{4.66}$$

wobei $\omega_1(t)$ die ersten K_{VSP} Komponenten, $\omega_2(t)$ die zweiten K_{VSP} Komponenten, usw. von der Steuerung $\omega(t)$ sind. Dabei beschreiben die Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{K_{VSP}}$ und $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{K_{VSP}}$ die Längs- und Quersteigung der Steuerknüppel der VSP, $n_{VSP} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{K_{VSP}}$ und $n_{Azi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{K_{Azi}}$ die Drehzahlen von VSP und Azimutpropeller, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{K_{Azi}}$ den Azimutwinkel der Azimutpropeller und $f_{Bug} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{K_{Bug}}$ die Steuerung der Bugstrahlruder. Die Schubfunktionen $\tau_{thr, VSP}$, $\tau_{thr, Azi}$, $\tau_{thr, Bug}$, sowie die Funktionen für das Propellermoment M_{VSP} , M_{Azi} und die Leistung P_{VSP} , P_{Azi} , P_{Bug} werden entsprechend der Modellierung aus den vorherigen Abschnitten ausgewertet.

Um dieses Allokationsproblem zu lösen, wird das multikriterielle Optimalsteuerungsproblem zunächst, beispielsweise mit der Elastic-Constraint Methode in ein einfaches Optimalsteuerungsproblem umgewandelt. Nach der reduzierten Diskretisierung (vgl. Kapitel 3.3) mit dem Euler- oder Runge-Kutta-Verfahren ergibt sich daraus ein nichtlineares Optimierungsproblem, das mit einem SQP-Verfahren oder Innere-Punkte-Verfahren gelöst werden kann.

4.1.5 Aufbau des Allokationsmoduls

Implementiert wurde das Allokationsmodul sowohl in MATLAB (Version 2008b) als auch in C++. Für die Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems wurde in der Matla-

bimplementierung die MATLAB-interne Funktion *fmincon* verwendet. Das Programm Ipopt von Wächter und Biegler [49] wurde für die Optimierung in der C++-Version eingesetzt. Neben der lexikographischen Optimierung und der Modifikation der Elastic-Constraint Methode enthält die MATLAB-Version zusätzlich noch sowohl die Methode der gewichteten Summe als auch die nicht modifizierte Form der Elastic-Constraint Methode.

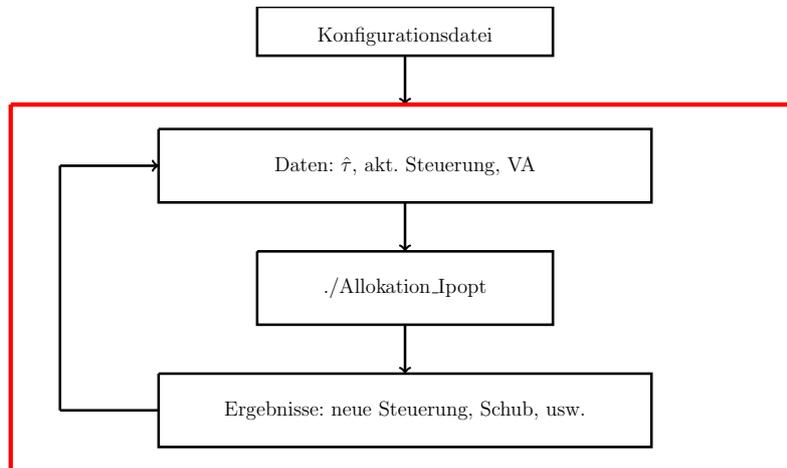


Abbildung 4.10: Aufbau: Allokationsmodul

Das Allokationsmodul besteht aus vier Bausteinen (vgl. Abbildung 4.10). In der Konfigurationsdatei wird festgelegt, um welche Antriebe es sich handelt und an welcher Position sie am Schiff angebracht sind. Desweiteren finden sich hier Angaben zu den propellerspezifischen Koeffizienten, zur Wahl der Methode für die multikriterielle Optimierung und zum Diskretisierungsverfahren. Zudem ist es möglich, Interaktionen während der Berechnung zu beachten. Zuletzt wird hier noch die Frequenz des Eingangssignals der geforderten Kraft $\hat{\tau}$ und die gewünschte Frequenz des Ausgangssignals festgelegt. Dabei entspricht die Frequenz des Eingangssignals dem Endzeitpunkt T im Optimalsteuerungsproblem und die Frequenz des Ausgangssignals der Schrittweite des Diskretisierungsverfahrens. Während des DP-Betriebs wird meist jede Sekunde eine neue Kraftanforderung gesendet. Die Antriebe erwarten in der Regel alle 100 ms ein neues Steuersignal. In diesem Fall wäre $T = 1$ und $h = 0.1$. Zusätzlich besteht bei dem Modul die Möglichkeit, die geforderten Kräfte des Reglers zu skalieren. Im Fall einer zeitoptimalen Steuerung geschieht dies automatisch, um die Existenz einer zulässigen Lösung zu gewährleisten.

Skalierung der geforderten Kraft

Sei $\tau_{\text{thr,max}} \in \mathbb{R}^K$ konstant, $K \in \mathbb{N}$ die maximal mögliche absolute Kraft der einzelnen Antriebe.

Skalierung 1: Bei der ersten Variante der Skalierung wird die Länge des geforderten Kraftvektors so reduziert, dass es den Antrieben möglich ist, diese reduzierte Kraft zu

erzeugen

$$a \rightarrow \max_{a \in \mathbb{R}}, \text{ s.d.} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} a \cdot \hat{\tau} &= B \cdot \tau_{\text{thr}}, \\ \tau_{\text{thr},i} &\leq \tau_{\text{thr,max},i} \quad i = 1, \dots, K, \\ a &\in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.68)$$

wobei $\tau_{\text{thr}} \in \mathbb{R}^K$ und B der Konfigurationsmatrix (2.4) aus Kapitel 2.2 entspricht.

Skalierung 2: Diese zweite Variante setzt voraus, dass es den Antrieben möglich ist, die dritte Komponente der Kraftforderung, also das Moment, zu erzeugen. Skaliert werden hierbei nur die ersten beiden Kraftkomponenten

$$a_1 \rightarrow \max_{a_1 \in \mathbb{R}}, \text{ s.d.} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \hat{\tau}^{(1,2)} &= B^{(1,2)} \cdot \tau_{\text{thr}}, \\ \hat{\tau}^{(3)} &= B^{(3)} \cdot \tau_{\text{thr}}, \\ \tau_{\text{thr},i} &\leq \tau_{\text{thr,max},i} \quad i = 1, \dots, K, \\ a_1 &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Die zweite Skalierungsmethode gewährleistet das Halten der Ausrichtung im DP-Betrieb, kann jedoch zu einem starken Driften des Schiffes führen. Neben der Konfiguration benötigt das Modul aktuelle Informationen wie eine neue Kraftforderung $\hat{\tau}$, die aktuelle Anströmung sowie die aktuellen Positionen und Größen der einzelnen Steuerkomponenten. Zusammen mit den Informationen aus der Konfiguration entsteht ein nichtlineares Optimierungsproblem, das in MATLAB mit *fmincon* bzw. mit Ipopt gelöst wird. Da die Optimierungsvariablen die Änderung der Steuerkomponenten beschreiben, werden zuletzt die Steuerkomponenten sowie der Propellerschub und die Leistung berechnet. Die neuen Steuerkomponenten können somit als Eingangsdaten für das nächste Intervall dienen. Alle weiteren Informationen sind rein für theoretische Untersuchungen von Interesse. Eine ausführliche Dokumentation des Moduls findet sich in [18].

4.2 Numerische Resultate

In den folgenden Abschnitten werden zunächst anhand eines Beispiels die Eigenschaften der verschiedenen Methoden der multikriteriellen Optimierung aus Kapitel 3 veranschaulicht. Darauffolgend werden die Implementierungen bezüglich ihrer Rechenzeit und Genauigkeit gegenübergestellt. Zuletzt folgt eine Untersuchung der Antriebe auf ihre Energieeffizienz und Schuberzeugung. Die dafür nötigen Berechnungen liefen auf dem Rechencluster *Pacioli* (2.6 – 2.8 GHz) der Universität Ulm.

4.2.1 Multikriterielle Zielfunktionen

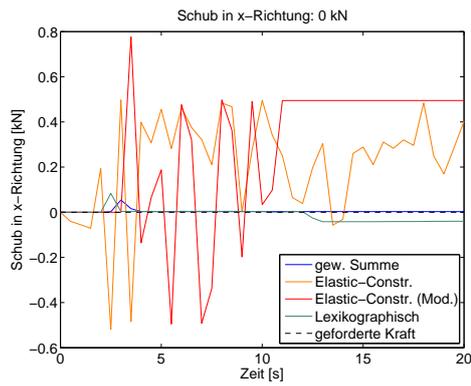
Im dritten Kapitel wurden verschiedene Methoden der multikriteriellen Optimierung vorgestellt. Das folgende Beispiel veranschaulicht die Unterschiede bezüglich der Rechenzeit, aber auch der Endresultate wie Propellerschub und Leistung. Im Beispiel 4.2.1 wird mit einer Frequenz von einem Hertz in einem Zeitraum von 20 Sekunden die Kraft $\hat{\tau} = (0, 250, -7000)^T \text{ kN}$ gefordert. Die einzelnen Zeitintervalle werden mit $h = 0.5 \text{ s}$ diskretisiert. Zwei VSP mit den Propellerdaten aus Tabelle 1 dienen als Antriebe. Interaktionen wie Anströmung, Propeller-Propeller-Interaktion oder Propeller-Schiff-Interaktion werden nicht beachtet.

Beispiel 4.2.1 (Vergleich multikriterielle Optimierungsmethoden)

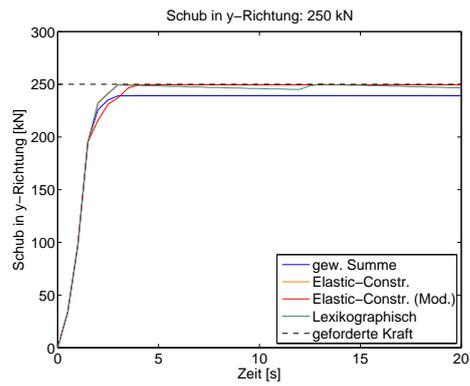
Gegeben sei eine geforderte Kraft $\hat{\tau} = (0, 250, -7000)^T \text{ kN}$ über eine Zeitspanne von 20 Sekunden und eine Propelleranordnung von zwei VSP im Heck, $l_{x,1} = l_{x,2} = -28 \text{ m}$ und $l_{x,1} = -l_{x,2} = -4 \text{ m}$.

<i>Methode</i>	$\int_0^{10} \ \hat{\tau} - \tau_{thr}(z(t))\ _2^2 dt$	$\int_0^{10} \ P(z(t)) - P_{\min}\ _2^2 dt$	$\emptyset \text{ CPU (s)}$
<i>Gew. Summe</i>	$5.0445e + 07$	$9.6544e + 06$	0.1380 s
<i>Elastic-constraint</i>	$4.9956e + 07$	$1.0666e + 07$	1.3115 s
<i>Elast.-Constr. (Mod.)</i>	$4.9917e + 07$	$1.1248e + 07$	1.1185 s
<i>Lexikographisch</i>	$9.6544e + 06$	$1.0469e + 07$	1.2025 s

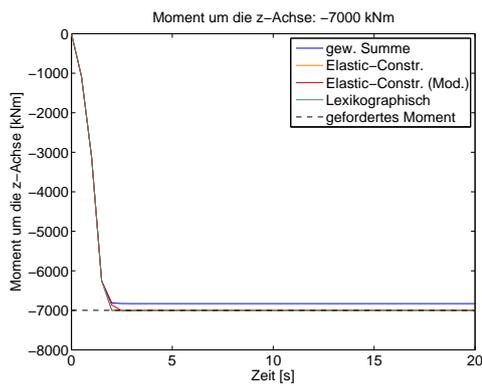
Wie erwartet ist die Rechenzeit bei der gewichteten Summe am geringsten. Alle anderen Methoden bestehen entweder aus zwei Optimierungsproblemen oder haben zusätzliche Nebenbedingungen, welche die Rechenzeit erhöhen. Die Elastic-Constraint Methode ist aufgrund ihrer zusätzlichen Variablen und Nebenbedingung die Methode, die am meisten Rechenzeit benötigt. Im Vergleich bezüglich ihrer Akkuratessse zeigt sich, dass die Methode der gewichteten Summe ungeeignet für das Allokationsproblem ist. Mit dieser Methode ist es nicht möglich, die geforderte Kraft zu erreichen und gleichzeitig die Leistung zu reduzieren. Aufgrund der Trennung der Optimierungsprobleme bei der lexikographischen Optimierung wird sowohl die Kraft am besten erzeugt als auch die Leistung so gering wie möglich gehalten. Da bei der numerischen Umsetzung zur Lösung des zweiten



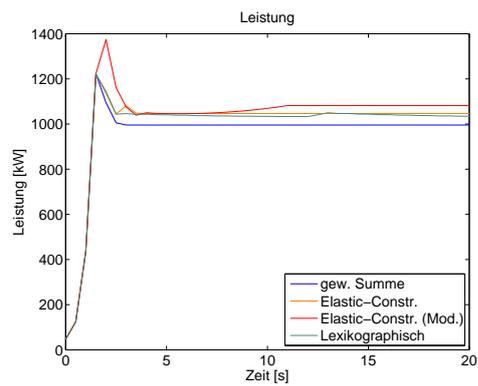
(a) Schub in x-Richtung



(b) Schub in y-Richtung



(c) Moment um die z-Achse



(d) Leistung beider Antriebe

Abbildung 4.11: Verschiedene Methoden der multikrit. Optimierung

Optimierungsproblems die Lösung des ersten als Startwert verwendet wird, konvergiert das zweite Problem meist so schnell, dass sich der zusätzliche Aufwand kaum auf die Rechenzeit auswirkt. Bei beiden Elastic-Constraint Methoden wird der Schub nicht so exakt erreicht wie bei der lexikographischen Optimierung, jedoch liefern beide Verfahren sehr viel bessere Ergebnisse als die Methode der gewichteten Summe. Fasst man die Kriterien Akkuratess und Rechenzeit zusammen, so sind sie lexikographische Optimierung und die Modifizierung der Elastic-Constraint Methode am besten zur Lösung des Allokationsproblems geeignet.

Vor- und Nachteile der zeitoptimalen Optimierung

In Kapitel 3 wurden zwei Varianten zur Lösung des ersten Optimalsteuerungsproblems vorgestellt. Die Minimierung des Lagrangeterms

$$\int_0^T \|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 dt$$

und die zeitoptimale Optimierung. Beide haben ihre Vor- und Nachteile, die nun an Beispielen deutlich gemacht werden sollen.

Beispiel 4.2.2 (Vorteil der zeitoptimalen Optimierung)

Sei ein VSP an der Stelle $l_x = l_y = 0 \text{ m}$ gegeben. Sei seine minimale Drehzahl $n_{\text{min}} = 0 \text{ rps}$. Die Änderungsrate \tilde{x}, \tilde{y} für die Steigung x, y sei mit $\tilde{x} = \tilde{y} = 0.32$ und die für die Drehzahl mit $\tilde{n} = 0.04$ gegeben. Zum Startzeitpunkt gilt

$$\begin{aligned} x(0) &= -0.8, \\ y(0) &= 0, \\ n(0) &= 0. \end{aligned}$$

Gefordert sei nun eine Kraft $\hat{\tau} = (100, 0, 0)^T \text{ kN}$. Gelöst wird dieses Problem einmal durch Minimierung des Lagrangeterms und zeitoptimalen Optimierung.

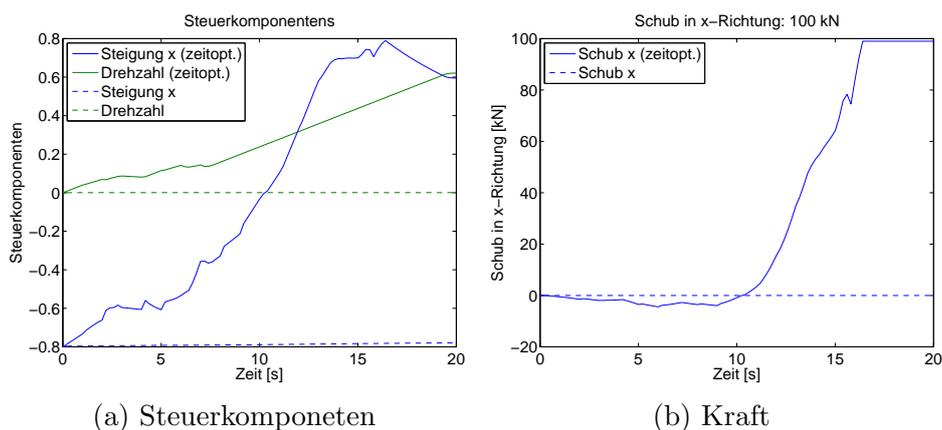


Abbildung 4.12: Beispiel 1: Zeitoptimale Steuerung

Beispiel 4.2.3 (Nachteil der zeitoptimalen Optimierung)

Sei ein VSP an der Stelle $l_x = l_y = 0 \text{ m}$ gegeben. Sei seine minimale Drehzahl $n_{\min} = 0.24 \text{ rps}$. Die Steuerzeit \tilde{x} , \tilde{y} und \tilde{n} seien wie in Beispiel 4.2.2. Zum Startzeitpunkt gilt

$$\begin{aligned} x(0) &= -0.8, \\ y(0) &= 0, \\ n(0) &= 0.24. \end{aligned}$$

Gefordert sei nun eine Kraft $\hat{\tau} = (250, 0, 0)^T \text{ kN}$. Dieses Problem wird wieder durch Minimierung des Lagrangeterms und zeitoptimale Optimierung gelöst.

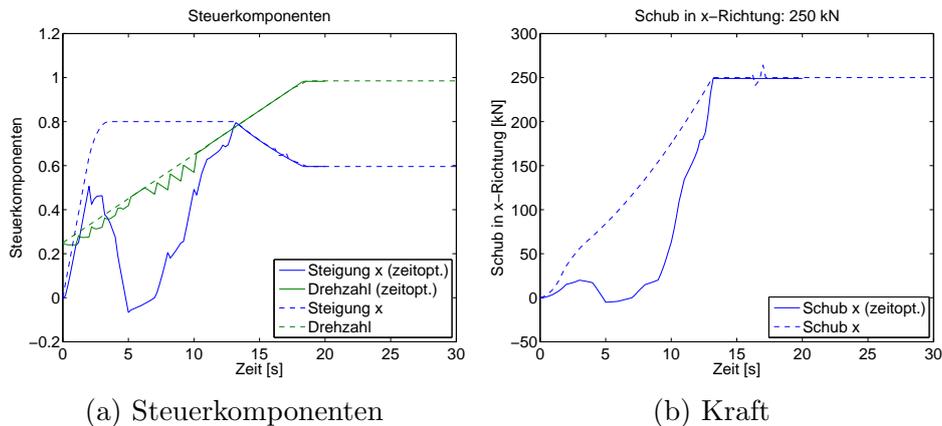


Abbildung 4.13: Beispiel 2: Zeitoptimale Steuerung

Die Beispiele 4.2.2 und 4.2.3 veranschaulichen, dass es mit der zeitoptimalen Steuerung immer möglich ist, eine Kraft $\hat{\tau}$ zu erzeugen. Dabei werden den Kräften und Momenten, die auf diesem Weg entstehen, keine Beachtung geschenkt. Das heißt, es könnte mit dieser Variante zu kurzfristigen ungewollten Rotationen und Fahrverhalten des Schiffes kommen. Diese Problematik ist besonders gut in beiden Beispielen am Verlauf der Steigung des VSP zu erkennen. Bei der Optimierung mit dem Lagrangeterm wird versucht, die Differenz zwischen gefordertem Schub und Propellerschub zu minimieren. Dies führt in Beispiel 4.2.3 zu einem direkten Anstieg der Steigung in Längsrichtung. Bei der zeitoptimalen Steuerung dagegen liegt das Interesse nur am Endzeitpunkt, an dem der Schub erzeugt sein muss. Im Beispiel 4.2.3 ist jedoch für den Schub von 250 kN mindestens eine Drehzahl von etwa 0.77 rps notwendig. Aufgrund der Startdrehzahl und der maximalen Änderungsrate der Drehzahl benötigt der Antrieb etwa 14 s , um diese Drehzahl zu erreichen. Da die maximale Änderungsrate der Steigung deutlich größer ist, ist zwar der Endzustand der Steigung eindeutig bestimmt, jedoch nicht seine Trajektorie. Die Grenzen der Variante mit dem Lagrangeterm zeigt Beispiel 4.2.2. Wählt man das Zeitintervall $[t_0, t_f]$ zu klein, in diesem Fall $[0, 1]$, besteht die Möglichkeit, dass es in diesem Intervall nicht möglich ist, eine Verbesserung des Lagrangeterms zu erhalten.

Die Steuerkomponenten stagnieren in ihrem Ausgangspunkt. Beispiel 4.2.2 ist jedoch die absolute Ausnahme, denn solche Fälle treten meist nur dann auf, falls die minimale Drehzahl $n_{\min} = 0 \text{ rps}$ ist. In der Praxis sollte die minimale Drehzahl jedoch aus technischen Gründen mindestens 20% der maximalen Drehzahl betragen. Zusammengefasst ergibt sich folgende Konsequenz: Ist es irrelevant, auf welchem Weg die Kraft erzeugt wird und ist es den Antrieben möglich, diese zu erzeugen, so ist die zeitoptimale Variante die bessere Methode. Während des dynamischen Positionierens ist sie jedoch nicht zu empfehlen.

Interpretation der Energieeffizienz

Die Energieeffizienz spielt beim dynamischen Positionieren eine große Rolle. Allerdings lässt sie sich unterschiedlich interpretieren. In dieser Arbeit wurde der Fokus darauf gelegt, dass jeder einzelne Antrieb möglichst energieeffizient arbeitet, also

$$\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt \longrightarrow \min.$$

Mit diesem Ansatz wird gewährleistet, dass die Antriebe relativ gleichmäßig abgenutzt werden und nur bei sehr hohen Kraftanforderungen an ihre Leistungsgrenze gelangen. Alternativ kann man auch die Gesamtleistung aller Propeller minimieren,

$$\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_1^2 dt \longrightarrow \min.$$

Dies hat den Vorteil, dass über einen längeren Zeitraum einiges an Energie, im Gegensatz zur ersten Variante, eingespart werden kann. Beispiel 4.2.4 zeigt die unterschiedliche Schuberzeugung der Antriebe dieser beiden Interpretationen.

Beispiel 4.2.4 (Energieeffizienz)

Sei eine Kraft $\hat{\tau} = (0, 250, 0)^T \text{ kN}$ über einen Zeitraum von 10 s gefordert und eine Propelleranordnung von drei VSP ($l_{x,1} = l_{x,2} = -28 \text{ m}$, $l_{y,1} = -l_{y,2} = -4 \text{ m}$ und $l_{x,3} = l_{y,3} = 0 \text{ m}$) gegeben. Für die Berechnung wurde die lexikographische Optimierung mit dem Eulerverfahren für die Diskretisierung verwendet.

Variante 1: Minimierung der Leistung mit der 2-Norm.

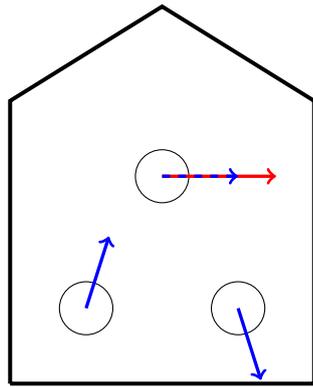
Variante 2: Minimierung der Leistung mit der 1-Norm.

Abbildung 4.14a zeigt die unterschiedliche Auslastung der Propeller, Abbildung 4.14b bildet zum Vergleich die Gesamtleistung aller Propeller über den Zeitverlauf beider Varianten.

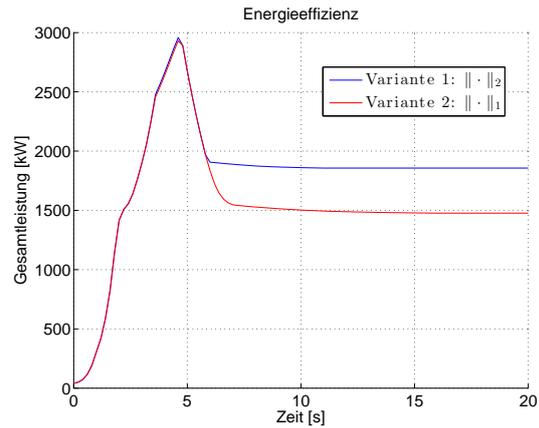
In den Fällen, in denen die Propeller symmetrisch arbeiten, zum Beispiel $\tau_{\text{thr},1} = \tau_{\text{thr},2}$, führen beide Interpretationen zum selben Ergebnis.

Einfluss von Interaktionen auf das Allokationsverhalten

Wie im vorherigen Abschnitt 4.1 vorgestellt, beeinflussen Interaktionen die Schubstärke und Richtung sowie die Leistung eines Propellers. An Beispiel 4.2.5 wird exemplarisch



(a) Schubverteilung



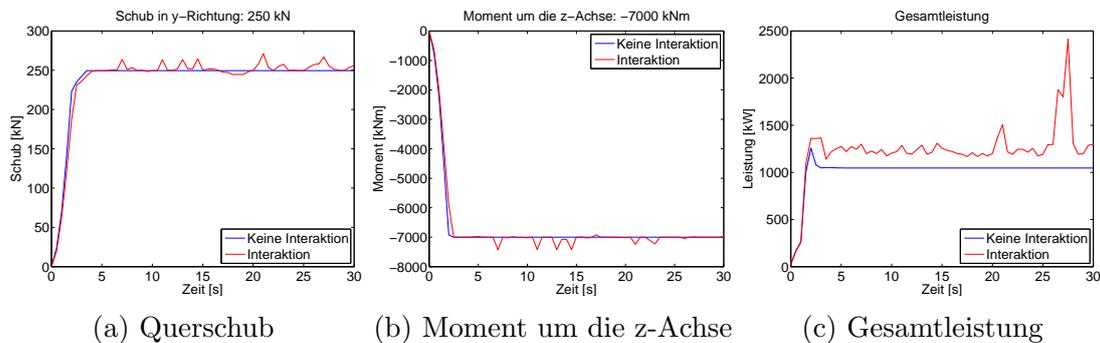
(b) Leistung

Abbildung 4.14: Beispiel: Energieeffizienz

veranschaulicht, wie sich die Steuerung der Propeller bei Interaktionen verändert.

Beispiel 4.2.5 (Auswirkung von Interaktionen)

Sei eine Propelleranordnung von zwei VSP gegeben, welche eine Kraft $\hat{\tau} = (0, 250, -7000)^T \text{ kN}$ erzeugen sollen. Im ersten Fall werden keine Interaktionen beachtet. Im zweiten Fall wird eine Anströmung von $-0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sowie Propeller-Propeller-Interaktion und Propeller-Schiff-Interaktion berücksichtigt. In beiden Fällen wird der selbe Gesamtschub erzeugt, jedoch benötigen die Antriebe, wie in Abbildung 4.15a und 4.15b zu sehen, unter dem Einfluss der Interaktion etwas länger, diesen zu erzeugen. Der deutliche Mehraufwand an Leistung wird in Abbildung 4.15c verdeutlicht.



(a) Querschub

(b) Moment um die z-Achse

(c) Gesamtleistung

Abbildung 4.15: Beispiel: Auswirkung von Interaktionen

Als Konsequenz aus Beispiel 4.2.5 ergibt sich, dass bei einer Nichtbeachtung von vorhandenen Interaktionen der gewünschte Schub nicht erzeugt werden kann. In Abbildung 4.16a und 4.16b wird diese Konsequenz veranschaulicht.

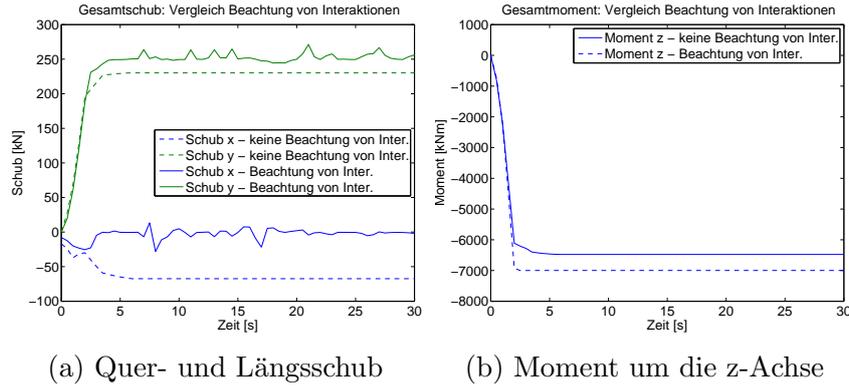


Abbildung 4.16: Nichtbeachtung von Interaktionen

4.2.2 Fall- und Parameterstudien

Das Allokationsmodul wird in drei Punkten untersucht. Darunter befinden sich der Fehler, welcher bei der Berechnung entsteht, die Rechenzeit für verschieden feine Schrittweiten der Diskretisierung und das Abbruchkriterium des Optimierungsalgorithmus. Neben Ipopt (Version 3.11.5) wurde die Berechnung zum Vergleich auch mit Matlab (Version 2008) durchgeführt.

Der Fehler wird über das Minimumprinzip bestimmt. Dieses angewandt auf das Allokationsproblem 3.0.2 ergibt sich nach der Berechnung der Adjungierten λ

$$\hat{\omega} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lambda < 0, \\ -1, & \text{falls } \lambda > 0, \\ \text{unbekannt,} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.71)$$

woraus sich der Fehler für das Problem definieren lässt.

Definition 4.2.6 (Fehler des Allokationsproblems)

Sei $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des diskretisierten Optimalsteuerungsproblems 4.1.9 und λ die dazugehörige Adjungierte, dann gilt für den Fehler ε_{OC} des Allokationsproblems

$$\varepsilon_{OC} := \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1, \lambda_i \neq 0}^n (\hat{\omega}_i - \bar{\omega}_i) \right) \quad (4.72)$$

mit

$$\bar{\omega} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \lambda < 0, \\ -1, & \text{falls } \lambda > 0. \end{cases} \quad (4.73)$$

Um bei den Parameterstudien ein großes Spektrum an möglichen Varianten abzudecken, wurden neun verschiedene Antriebskonstellationen (vgl. Tabelle 6.1) ausgewählt, welche auch in der Realität anzutreffen sind. Als Hauptantriebe wurden VSP und Azimutpropeller verwendet. Die propellerspezifischen Konstanten blieben während des Tests

unverändert. Zudem wurden die Studien einmal ohne Beachtung von Interaktionen, einmal mit Beachtung von Propeller-Schiff-Interaktion und einmal mit Beachtung der Anströmung zusammen mit der Propeller-Propeller-Interaktion durchgeführt. Die zu variierende geforderte Kraft $\hat{\tau}$, die Ausgangssteuerung der Antriebe, die Anströmung sowie die Daten für die Schubreduktion der Propeller-Schiff-Interaktion wurden zufällig erzeugt und sind gleichverteilt in ihren jeweils zulässigen Bereichen. Als maximal mögliche Anströmungsgeschwindigkeit wurde hier 10 Knoten gewählt. Die Ergebnisse der Berechnungen werden an drei Konfigurationen exemplarisch veranschaulicht. Die Resultate aller weiteren Konfigurationen finden sich im Anhang 6.4.

Fall 4: Zwei Hauptantriebe und ein Bugstrahler

Abbildung 4.17a stellt die Rechenzeiten von Matlab und Ipopt gegenüber. Die Berechnung von VSP und Azimut werden hier wegen ihrer unterschiedlichen Anzahl an Variablen getrennt betrachtet. Aufgrund der kleineren Anzahl an Variablen ist die Rechenzeit im Fall des Azimutantriebs geringer als beim VSP. Im Vergleich von Matlab und Ipopt zeigt sich, wie auch in Abbildung 4.17b zu sehen, dass man unter Verwendung von Ipopt deutlich an Rechenzeit einsparen kann. Zudem sieht man in dieser Abbildung den wachsenden Aufwand aufgrund von Interaktionen. Während die Rechenzeit ohne Interaktionen am geringsten ist, wächst sie aufgrund der Komplexität bei der Interaktion von Propeller-Propeller und Propeller-Anströmung stark an. Neben der Rechenzeit sind auch

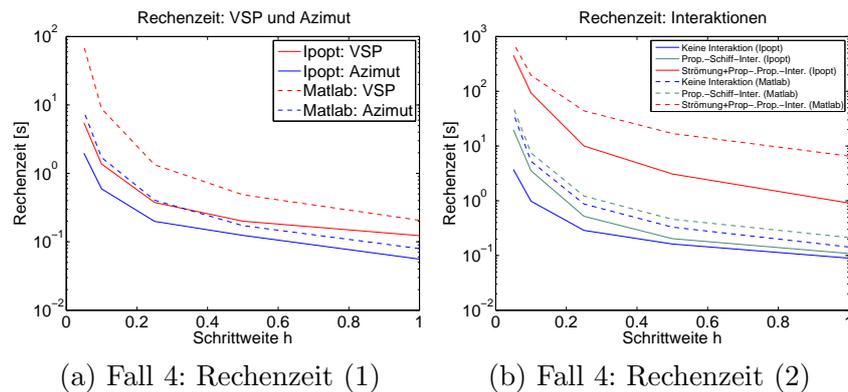


Abbildung 4.17: Fall 4: Rechenzeit

die Anzahl der erfolgreichen Berechnungen, also Berechnungen, bei denen eine optimale Lösung gefunden worden ist und ihr Fehler von Interesse. Wie schon bei der Rechenzeit zeigt Abbildung 4.18a und 4.18b, dass mit wachsender Komplexität des Problems die Anzahl der erfolgreichen Rechnungen zurückgeht und der Fehler wächst.

Fall 9: Acht Hauptantriebe

Diese Antriebskonstellation findet man häufig bei Plattformen, die in jedem Eck mit zwei Antrieben ausgestattet sind. Aufgrund der hohen Anzahl an Variablen, insbesondere bei einer Schrittweite von $h = 0.05 s$ stößt man mit Matlab oft an die Grenzen. Die Anzahl

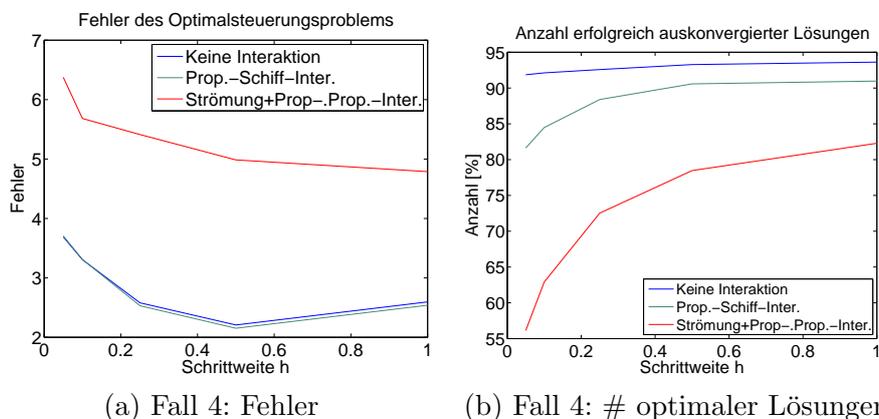


Abbildung 4.18: Fall 4: Fehler

der erfolgreichen Ergebnisse geht im Vergleich zu Fall 4 stark zurück und die Rechenzeit ist immens. Ipopt ist dagegen auf große Probleme ausgelegt. Dieser Vorteil zahlt sich in diesem Fall aus. Abbildungen 4.19a und 4.19b zeigen auch hier wieder die Rechenzeit im Vergleich zu Fall 4 sowie die Anzahl der erfolgreichen Berechnungen.

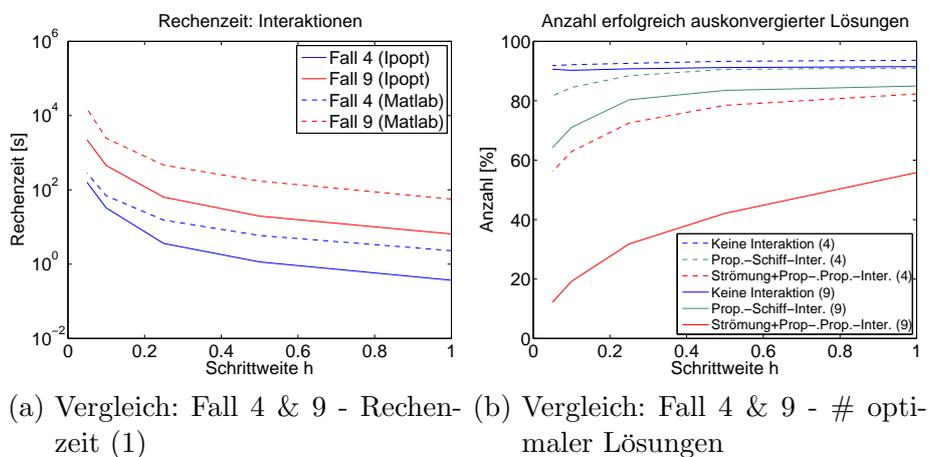


Abbildung 4.19: Fall 9: Auswertung

4.2.3 Vergleich von VSP und Azimutpropeller

Die Motivation dieser Arbeit beruht auf der Tatsache, dass der VSP in DP-Systemen als Azimutpropeller betrachtet wird. Die Vorteile der schnellen Steuerung werden dabei nicht optimal ausgenutzt. Das Allokationsproblem in dieser Arbeit berücksichtigt deshalb

explizit diese besondere Steuerlogik des VSP. Um die Möglichkeit eines Mischbetriebs mit Azimutpropellern und Bugstrahlern zu gewährleisten, sind diese Antriebe ebenfalls mit ihrem Steuerverhalten in der Allokation integriert. Um die Unterschiede bezüglich der Schubzeugung und der Leistung der beiden Antriebe VSP und Azimutpropeller zu veranschaulichen, wird ihr Verhalten bei unterschiedlichen Kraftanforderungen untersucht. Dabei befinden sich jeweils zwei Antriebe im Heck des Schiffes. Zudem haben die Antriebe beide die selbe maximale Leistung von 2600 kW . Dies stellt ihre Vergleichbarkeit sicher. Zum Startzeitpunkt drehen sich die Antriebe mit 50% ihrer maximalen Drehzahl ohne dabei Schub zu erzeugen, das heißt, bei den VSP ist die Steigung $\tilde{\lambda}_0 = 0$ und die Azimutpropeller haben einen Azimutwinkel von $\alpha_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$, wodurch sich ihr Schub ausgleicht. Von Interesse sind im Folgenden, wie schnell die Antriebe eine geforderte Kraft erzeugen können, wieviel Leistung sie dafür aufwenden müssen und wie gut sie auf schnelle Schubänderungen reagieren.

Erzeugen einer konstanten Kraft

Sei $\hat{\tau} = 100 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$ mit $\phi = k \cdot \frac{\pi}{12}$, $k = 0, \dots, 24$, gefordert. Die Kraft ist so gewählt, dass es den Antrieben möglich ist diese zu erzeugen. Zunächst zu der Frage, mit welchem Antrieb es schneller möglich ist, die geforderte Kraft zu erzeugen. Abbildung

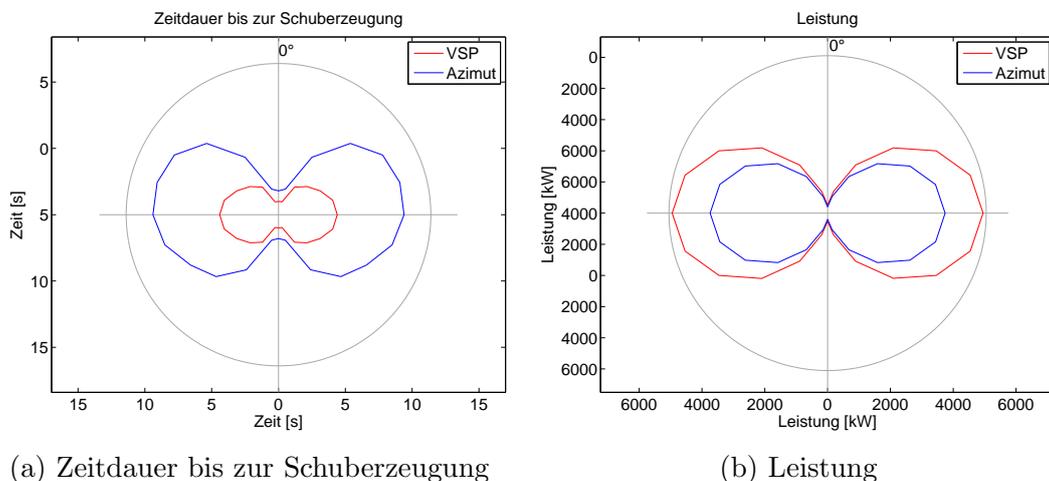


Abbildung 4.20: Erzeugen einer konstanten Kraft

4.20a zeigt die Zeit, die die Antriebe benötigen, um den geforderten Schub zu erzeugen. Aufgrund der Steuerlogik des VSP gelingt es diesem in jedem Fall schneller die Kraft zu erzeugen, jedoch benötigt er im Gegensatz zum Azimutpropeller für diesen Schub deutlich mehr Leistung.

Erzeugen einer maximalen Kraft

Sei $\hat{\tau} = 8000 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$ mit $\phi = k \cdot \frac{\pi}{12}$, $k = 0, \dots, 24$, gefordert. Diese geforderte

Kraft kann von den Antrieben nicht erzeugt werden und wird deshalb so skaliert, dass die gesamte Vektorlänge reduziert wird. Abbildung 4.21 zeigt den maximal möglichen Schub der Antriebe in jede Richtung ϕ . Hier liegt ein klarer Vorteil beim Azimutpropeller. Dieser kann mit der selben Leistung deutlich mehr Schub erzeugen als der VSP.

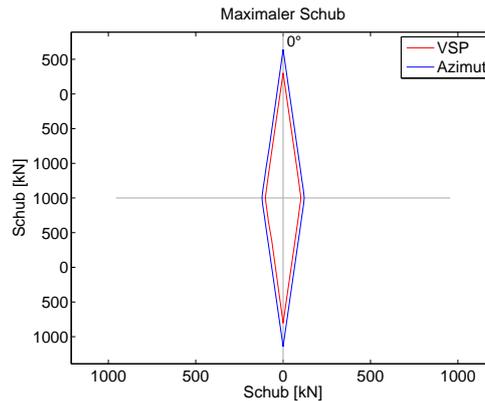


Abbildung 4.21: Maximaler Schub

Erzeugen einer periodischen Kraft

Sei über einen Zeitverlauf von 5 min eine sinusförmige Kraft in x-Richtung mit einer Periodenlänge von $b = (5, 15, 60, 120)$ Sekunden gefordert

$$\hat{\tau} = 500 \cdot \begin{pmatrix} \sin \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}, \quad t \in [0, 300].$$

Aufgrund der langen Steuerzeiten ist es dem Azimutpropeller erst bei einer Periode von 120 s möglich, den geforderten Schub zu erzeugen (vgl. Abbildung 4.22). Sein Vorteil ist allerdings, dass er aufgrund seines hohen Schubes nicht in jeder Periode komplett von $\alpha = 0$ auf $\alpha = \pi$ schwenken muss, sondern ein kleinerer Bereich ausreicht, um den Schub zu erzeugen und sich damit die Steuerzeit reduziert. Dem VSP hingegen gelingen die Schubveränderungen schon ab einer Periode von 15 s, was er seiner besonderen Steuerlogik zu verdanken hat.

Zusammengefasst zeigt dieser Abschnitt, dass es mit dem Azimutpropeller zwar möglich ist, höhere Kräfte zu erzeugen, der VSP sich jedoch für schnelle Manöver besser eignet.

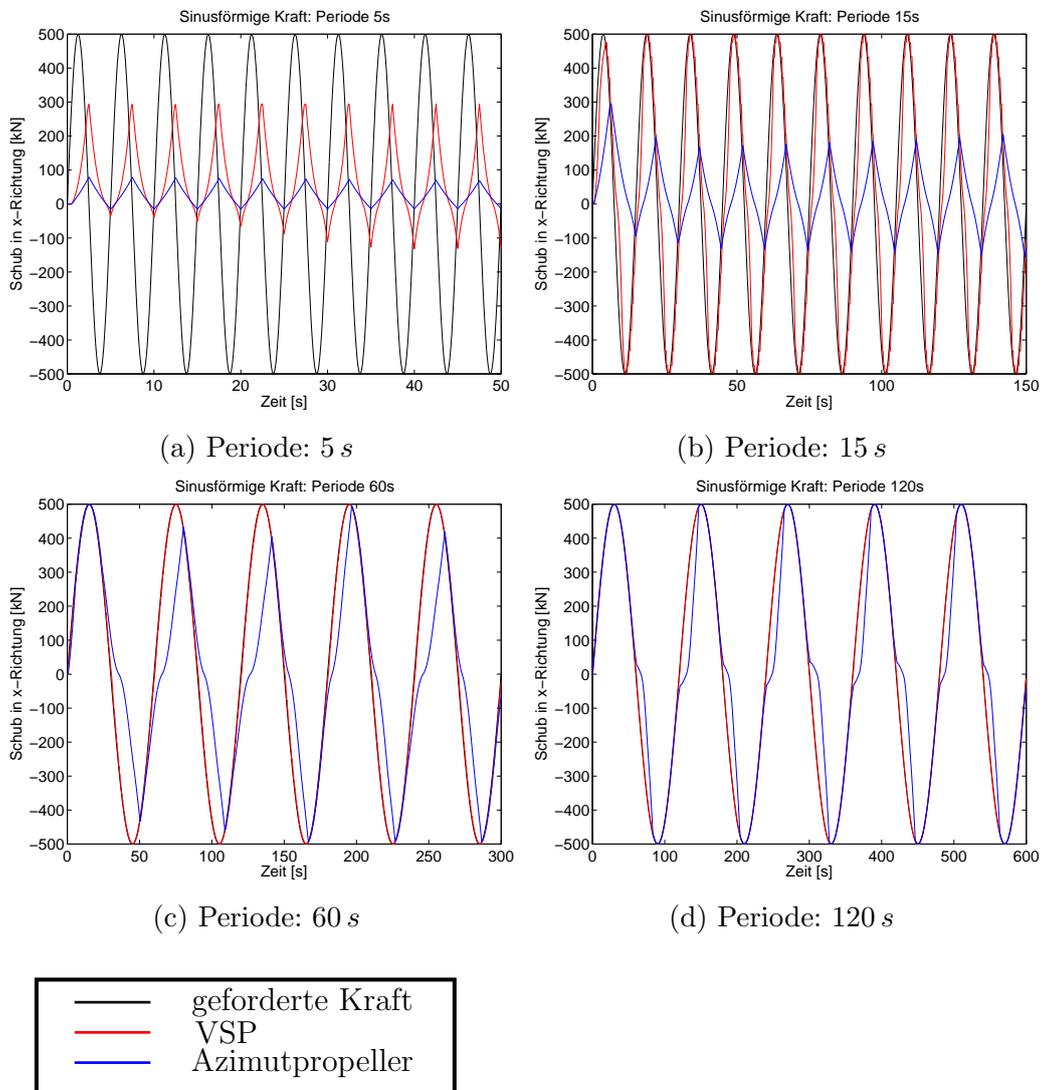


Abbildung 4.22: Periodische Kräfte

5 Echtzeitsteuerung mittels Modellreduktion

Die numerischen Resultate aus Kapitel 4 haben gezeigt, dass eine Berechnung ohne Beachtung von Interaktionen bis zu 6.5 Sekunden dauern kann. In manchen Fällen, sei es auf einem Schiff, dessen Steuerung zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Signal benötigt oder bei der Durchführung einer Vielzahl von Simulationen, ist es jedoch notwendig, schnell an eine Lösung oder zumindest an eine approximierte Lösung zu gelangen. Bei Betrachtung einer festen Propellerkonstellation, wie sie auf einem Schiff gegeben ist, variieren im Optimalsteuerungsproblem 4.1.9 die geforderte Kraft $\hat{\tau}$, die Startsteuerungen z_0 sowie die Anströmung V_A . Die Beschränkungen, wie die maximale Leistung P_{\max} , die Steuerzeiten \tilde{z} , als auch die Daten für die Schubreduktion aufgrund der Propeller-Schiff-Interaktion bleiben für eine feste Propelleranordnung und die selben Propellertypen unverändert. Für diesen Fall lässt sich das aus dem Allokationsproblem 4.1.9 resultierende Optimierungsproblem als parametrisches Optimierungsproblem formulieren. Dieses wird während des dynamischen Positionierens wiederholt für verschiedene Parameter ausgewertet.

Problem 5.0.7 (Parametrisches Optimierungsproblem)

Sei der Parameter $p := (\hat{\tau}, z_0, V_A)^T \in \mathbb{R}^{n_P}$ bestehend aus geforderter Kraft $\hat{\tau}$, Startsteuerung z_0 und Anströmung V_A gegeben. Seien des Weiteren $J, C_i : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_P} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $i = 1, \dots, n_C$.

Minimiere $J(z, p)$ bezüglich $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ unter den Nebenbedingungen

$$C_i(z, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_C.$$

Im allgemeinen Fall kann ein parametrisches Optimierungsproblem zusätzlich auch parameterabhängige Gleichungsnebenbedingungen $H : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_H}$ mit $H(z, p) = 0$ enthalten. Wegen der komplizierten Verkettungen, die sich bei der Beachtung von Interaktionen ergeben, werden in diesem Kapitel keine Interaktionen beachtet. Um sich auf ein einzelnes Optimalsteuerungsproblem konzentrieren zu können, beschränkt sich die Auswertung der multikriteriellen Zielfunktion auf die modifizierte Elastic-Constraint-Methode. Ein häufig verwendeter Ansatz zur Echtzeitapproximation der Lösung des parametrischen Optimierungsproblems stellt die Sensitivitätsanalyse [31] dar. Ein weiterer Ansatz, basierend auf Proper Orthogonal Decomposition (POD) [32, 47], wird im zweiten Teil des Kapitels vorgestellt. In einem numerischen Beispiel werden beide Ansätze abschließend miteinander verglichen.

5.1 Sensitivitätsanalyse

Mit der Sensitivitätsanalyse kann die Abhängigkeit der Lösung von den Parametern bei parametrischen Optimierungsproblemen untersucht werden. Im Zusammenhang der Echtzeitapproximation wird davon ausgegangen, dass der Parameter, für den das Problem gelöst werden soll, bekannt ist und während der Online-Phase leicht gestört wird. Die Approximation der Lösung $z(\hat{p})$ des gestörten Problems erfolgt mittels Taylors erster Ordnung. Dabei sei $p_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{n_P}$ der ungestörte, beziehungsweise der sogenannte nominale Parameter. Dann gilt für die Approximation:

$$z_{\text{app}}(\hat{p}) := z(p_{\text{ref}}) + \frac{dz}{dp}(p_{\text{ref}})(\hat{p} - p_{\text{ref}}). \quad (5.1)$$

Dabei ist $z(p_{\text{ref}})$ die exakte Lösung des parametrischen Problems für den nominalen Parameter p_{ref} . Dieser Approximationsansatz, sowie die Ableitung der Lösung $z(p)$ nach dem Parameter p ergibt sich aus dem Sensitivitätssatz. Eine wichtige Voraussetzung des Sensitivitätssatzes ist, dass die Lösung $z(p_{\text{ref}})$ eine starke Lösung des parametrischen Problems ist.

Definition 5.1.1 (Starke Lösung [31, S.298, Def. 6.1.2])

Ein lokales Minimum \hat{z} des parametrischen Problems mit Parameter \hat{p} heißt starke Lösung, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. \hat{z} ist zulässig:

$$\hat{z} \in \{z \in \mathbb{R}^{n_z} \mid C_i(z, p) \leq 0, i = 1, \dots, n_C, H_j(z, p) = 0, j = 1, \dots, n_H\}.$$

2. Die Gradienten $(C_i)_z(\hat{z}, \hat{p})$, $i \in A(\hat{z}, \hat{p})$ und $(H_j)_z(\hat{z}, \hat{p})$, $j = 1, \dots, n_H$, sind linear unabhängig.

3. Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung (Satz 3.4.2) sind für den Punkt $(\hat{z}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ erfüllt.

4. Die strikte Komplementaritätsbedingung ist erfüllt:

$$\hat{\lambda}_i - C_i(\hat{z}, \hat{p}) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_C.$$

5. Sei

$$L_{zz}(\hat{z}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}, \ell_0, \hat{p})(d, d) > 0 \quad \forall d \in T_{\text{Cone}}(\hat{z}, \hat{p}),$$

mit $d \neq 0_{\mathbb{R}^{n_z}}$ und $\ell_0 = 1$. Dabei beschreibt

$$L(z, \lambda, \mu, \ell_0, p) := \ell_0 J(z, p) + \lambda^T C(z, p) + \mu^T H(z, p)$$

die Lagrangefunktion des parametrischen Problems und

$$T_{\text{Cone}}(z, p) := \left\{ d \in \mathbb{R}^{n_z} \mid \begin{array}{l} (C_i)_z(z, p)(d) \leq 0, \quad i \in A(z, p), \lambda_i = 0, \\ (C_i)_z(z, p)(d) = 0, \quad i \in A(z, p), \lambda_i > 0, \\ (H_j)_z(z, p)(d) = 0, \quad j = 1, \dots, n_H \end{array} \right\}$$

den kritischen Kegel.

Satz 5.1.2 (Sensitivitätssatz [31, S.298, Satz 6.1.4])

Seien $J : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_P} \rightarrow \mathbb{R}$, $C : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_C}$, $H : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_H}$ zweimal stetig differenzierbar und p_{ref} ein nominaler Parameter. Sei z_{ref} mit den zugehörigen Lagrange-multiplikatoren λ_{ref} und μ_{ref} eine starke Lösung des allgemeinen parametrischen Optimierungsproblems. Dann existieren Umgebung $B_\epsilon(p_{\text{ref}})$ und $B_\delta(z_{\text{ref}}, \lambda_{\text{ref}}, \mu_{\text{ref}})$, sodass für jedes $p \in B_\epsilon(p_{\text{ref}})$ das parametrische Optimierungsproblem eine eindeutige starke Lösung $(z(p), \lambda(p), \mu(p)) \in B_\delta(z_{\text{ref}}, \lambda_{\text{ref}}, \mu_{\text{ref}})$ besitzt. Zusätzlich ist $(z(p), \lambda(p), \mu(p))$ bezüglich p mit

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dp}(p_{\text{ref}}) \\ \frac{d\lambda}{dp}(p_{\text{ref}}) \\ \frac{d\mu}{dp}(p_{\text{ref}}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{zz} & C_z^T & H_z^T \\ \Xi \cdot C_z & \Gamma & 0 \\ H_z & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L_{zp} \\ \Xi \cdot G_p \\ H_p \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

stetig differenzierbar, wobei $\Xi := \text{diag}(\lambda_{\text{ref},1}, \dots, \lambda_{\text{ref},n_C})$, $\Gamma := \text{diag}(C_1, \dots, C_{n_z})$ und L die Lagrangefunktion beschreibt. Alle Funktionen und ihre Ableitungen wurden dabei an $(z_{\text{ref}}, \lambda_{\text{ref}}, \mu_{\text{ref}}, p_{\text{ref}})$ ausgewertet. Bei der Lagrangefunktion wird $\ell_0 = 1$ verwendet.

Beweis. [31, S.298-301] □

Sind die Voraussetzung aus Satz 5.1.2 erfüllt, so gilt für die Lösung $z(\hat{p})$ des parametrischen Problems mit einem Parameter $\hat{p} \in B_\epsilon(p_{\text{ref}})$

$$z(\hat{p}) = z(p_{\text{ref}}) + \frac{dz}{dp}(p_{\text{ref}})(\hat{p} - p_{\text{ref}}) + o(\|\hat{p} - p_{\text{ref}}\|). \quad (5.3)$$

Die Ableitung $\frac{dz}{dp}(p_{\text{ref}})$ ergibt sich hierfür aus Gleichung (5.2). Besitzt das parametrische Problem eine komplizierte Zielfunktion oder komplizierte Nebenbedingungen, so kann das Aufstellen der Matrizen aus Gleichung (5.2) sehr umständlich werden. Alternativ kann die Ableitung auch über Finite Differenzen

$$\frac{dz}{dp_i}(p_{\text{ref}}) \approx \frac{z(p_{\text{ref}} + he_i) - z(p_{\text{ref}} - he_i)}{2h} \quad (5.4)$$

bestimmt werden. Dabei sind $z(p_{\text{ref}} \pm he_i)$ die Lösungen des parametrischen Problems für die Parameter $(p_{\text{ref}} \pm he_i)$ und e_i der i -te Einheitsvektor. Dies setzt jedoch die Lösung weiterer $(2 \cdot n_P)$ nichtlinearer Optimierungsprobleme voraus. Um den dafür nötigen Aufwand etwas zu reduzieren, kann als Startwert für diese zusätzlichen Berechnungen die Lösung $z(p_{\text{ref}})$ verwendet werden. Die Problematik bei dieser Approximation ist, dass es keine Aussage dazu gibt, wie groß die Umgebung $B_\epsilon(p_{\text{ref}})$ ist. Deshalb kann eine

Approximation der Lösung mit (5.1) dazu führen, dass die Nebenbedingungen verletzt werden. Eine Möglichkeit, trotzdem eine zulässige Lösung, zu erhalten ist die Projektion der Approximation $z_{\text{app}}(\hat{p})$ auf den zulässigen Bereich, also

$$\frac{1}{2} \|z - z_{\text{app}}(\hat{p})\|_2^2 \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}^{n_z}} \quad (5.5)$$

unter den Nebenbedingungen

$$C_i(z, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_C, \quad (5.6)$$

$$H_j(z, p) = 0, \quad j = 1, \dots, n_H. \quad (5.7)$$

Eine weitere Möglichkeit, die allerdings mit einem höherem Aufwand verbunden ist als die Projektion, ist das exakte Lösen des parametrischen Problems, wobei die Approximation $z_{\text{app}}(\hat{p})$ als Startwert dient. Dabei ist die Idee, dass die Approximation schon sehr nahe an der exakten Lösung liegt und damit nur noch wenige Iterationsschritte notwendig sind, um das Problem exakt zu lösen.

Numerische Umsetzung im Allokationsmodul

Die Echtzeitapproximation mittels Sensitivitätsanalyse basiert standardmäßig auf der Störung eines bekannten nominalen Parameters. Für die Anwendung auf das Allokationsproblem muss die Approximation angepasst werden. Im Gegensatz zur üblichen Anwendung werden hier die bekannten Parameter nicht gestört, sondern sind erst in der Online-Phase bekannt. Um trotzdem die Sensitivitätsanalyse anwenden zu können, wird statt einem nominalen Parameter eine Menge an nominalen Parametern verwendet. Aus dieser Menge wird dann der nominale Parameter ausgewählt für den der aktuelle Parameter am besten als Störung betrachtet werden kann (vgl. Abbildung 5.1)

Offline-Phase: Für die Approximation der Lösung $z(\hat{p})$ des parametrischen Problems mit Parameter \hat{p} ist die Kenntnis der Lösung eines nominalen Parameters p_{ref} und dessen Ableitung notwendig. Diese müssen im Vorfeld ermittelt werden. Um flexibel in der Online-Phase auf verschiedene Parameter reagieren zu können, werden in der Offline-Phase die Lösungen $z(p_{\text{ref},i})$ und deren Ableitungen für $N_{\text{sens}} \in \mathbb{N}$ verschiedene Parameter $p_i \in \mathbb{R}^{n_P}$, $i = 1, \dots, N_{\text{sens}}$ berechnet und gespeichert. Die Menge der Parameter, für die eine Lösung gespeichert wurde, wird im Folgenden mit \mathcal{D} bezeichnet.

Online-Phase: Das Ziel in der Online-Phase ist die schnelle und gute Approximation der Lösung $z(\hat{p})$ für einen gegebenen Parameter \hat{p} . Dafür wird in einem ersten Schritt zunächst ein Parameter p_{ref} aus der Menge \mathcal{D} gesucht, der möglichst nah am gegebenen Parameter \hat{p} liegt

$$p_{\text{ref}} := \min_{p \in \mathcal{D}} \|\hat{p} - p\|_2^2. \quad (5.8)$$

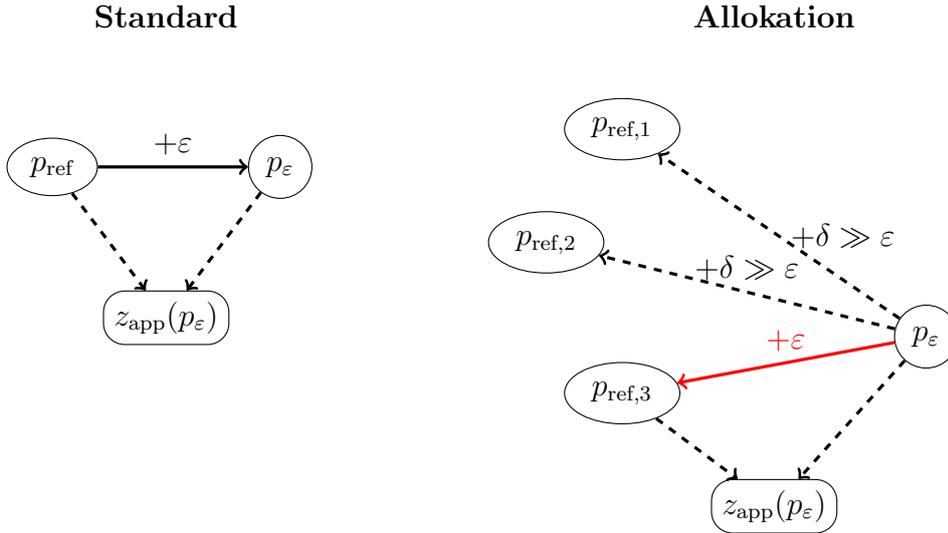


Abbildung 5.1: Numerische Umsetzung: Sensitivitätsanalyse

Dies erhöht die Chancen, dass \hat{p} in der Umgebung des ausgewählten nominalen Parameters p_0 liegt und die Approximation zulässig ist. Für den Fall $\hat{p} \in \mathcal{D}$ kann direkt die gespeicherte Lösung verwendet werden. Ansonsten wird die Lösung für den Parameter \hat{p} mit

$$z_{\text{app}}(\hat{p}) := z(p_{\text{ref}}) + \frac{dz}{dp}(p_{\text{ref}})(\hat{p} - p_{\text{ref}}) \quad (5.9)$$

approximiert. Um sicherzustellen, dass die approximierte Lösung zulässig ist, werden zusätzlich die Nebenbedingungen

$$C_i(z_{\text{app}}(\hat{p}), \hat{p}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_C, \quad (5.10)$$

überprüft. Sollten diese nicht erfüllt sein, wird die approximierte Lösung $z_{\text{app}}(\hat{p})$ auf den zulässigen Bereich projiziert,

$$\frac{1}{2} \|z - z_{\text{app}}(p)\|_2^2 \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}^{n_z}}, \quad \text{sodass } C_i(z, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_C. \quad (5.11)$$

Der Vorteil dieser Approximation ist, dass das Lösen eines nichtlinearen Optimierungsproblems im Optimalfall durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation ersetzt wird, was den Rechenaufwand deutlich reduziert. Jedoch benötigt man aufgrund der vielen Lösungen und deren Ableitungen sehr viel Speicherplatz $\mathcal{O}(N_{\text{sens}} \cdot n_z(1 + n_P))$. Des Weiteren muss aufgrund der Projektion mit zusätzlichem Rechenaufwand gerechnet werden. Numerische Resultate zu diesem Approximationsansatz finden sich im letzten Abschnitt dieses Kapitels.

5.2 Proper Orthogonal Decomposition (POD)

POD oder auch Hauptkomponentenanalyse wird häufig verwendet um große Datenmengen zu komprimieren und dabei die wichtigsten Information zu erhalten [47]. Zur Bestimmung der sogenannten POD-Basis ist, wie auch schon bei der Sensitivitätsanalyse, zuvor das Lösen des parameterischen Problems für verschiedene Parameter notwendig. Die Menge dieser Lösungen $z_i := z(p_i)$, $i = 1, \dots, N_{\text{POD}}$ sei mit $\mathcal{Z} := \{z_i \mid i = 1, \dots, N_{\text{POD}}\}$ bezeichnet. Die POD-Basis $\{\psi_i \mid i = 1, \dots, m\}$ mit $m \geq 1$ für die Menge \mathcal{Z} ist die Lösung des Minimumproblems [47]:

$$\min_{\psi_1, \dots, \psi_m \in \mathbb{R}^{n_z}} \sum_{i=1}^{N_{\text{POD}}} \left\| z_i - \sum_{j=1}^m (z_i, \psi_j)_A \psi_j \right\|_A^2, \quad (5.12)$$

sodass für $i, j = 1, \dots, m$

$$(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.13)$$

erfüllt ist. Dabei ist $(\cdot, \cdot)_A : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $(x_1, x_2)_A := x_1^T A x_2$ das A-Skalarprodukt für symmetrisch positiv definite Matrizen A .

Direkt berechnen lassen sich die Basisvektoren durch Bestimmen der Eigenwerte $\lambda_{\text{POD}, i}$ und Vektoren $v_{\text{POD}, i}^i$, $i = 1, \dots, N_{\text{POD}}$, der Korrelationsmatrix $C_{\text{POD}} \in \mathbb{R}^{N_{\text{POD}} \times N_{\text{POD}}}$

$$C_{\text{POD}}^{i,j} := \frac{1}{N_{\text{POD}}} (z_i, z_j)_A, \quad i, j = 1, \dots, N_{\text{POD}}. \quad (5.14)$$

Zudem seien die Eigenwerte geordnet

$$\lambda_{\text{POD}, 1} \geq \dots \geq \lambda_{\text{POD}, N'_{\text{POD}}} > 0.$$

Dann gilt für die Basisvektoren der POD-Basis mit $m \leq N'_{\text{POD}}$:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{POD}, i}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{POD}}} v_{\text{POD}}^{j,i} \cdot z_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.15)$$

5.2.1 Reduktion des Optimierungsproblems

Dieser zweite Approximationssatz basiert auf der Idee der Reduktion der Dimension der Optimierungsvariable $z \in \mathbb{R}^{n_z}$. Dabei wird diese durch $\hat{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ approximiert. Es gilt

$$\hat{z} := Bu, \quad (5.16)$$

mit $B \in \mathbb{R}^{n_z \times m}$ und $u \in \mathbb{R}^m$, wobei $n_z > m$. Die Matrix B ist dabei eine POD-Basis. Durch diese Approximation ist es möglich, ein kleineres Optimierungsproblem zu lösen.

Sei $\tilde{J} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n_P} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{J}(u, p) := J(Bu, p) \quad (5.17)$$

und $\tilde{C}_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n_P} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n_C$ definiert durch

$$\tilde{C}_i(u, p) := C_i(Bu, p), \quad i = 1, \dots, n_C. \quad (5.18)$$

Zu lösen ist nun

$$\tilde{J}(u, p) \rightarrow \min_{u \in \mathbb{R}^m}, \quad \text{u. d. Nb. } C_i(u, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_C. \quad (5.19)$$

Mit diesem Ansatz ist die Approximation der Lösung immer zulässig. Die Problematik der Sensitivitätsanalyse wird somit umgangen.

Problematik im Allokationsproblem

Die Steuerung des Allokationsproblems 4.1.9 wird mit B-Splines approximiert. Bei der Optimierung führt dies zu einer dünnbesetzten Jacobimatrix. Durch die Approximation von z durch $\hat{z} = Bu$ geht diese Struktur verloren und hat eine vollbesetzte Jacobimatrix zur Konsequenz. Dies wiederum hat negative Auswirkungen auf die Rechenzeit. Da an der Struktur der Jacobimatrix nichts zu ändern ist, wird im Folgenden versucht die Anzahl an Nebenbedingungen und damit die Dimension der Jacobimatrix zu reduzieren.

5.2.2 Reduktion der Nebenbedingungen

Die Nebenbedingungen des Allokationsproblems 4.1.9 wie beispielsweise

$$n_{\min} \leq n(t) \leq n_{\max}, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5.20)$$

werden zur Lösung des Optimalsteuerungsproblems zeitlich diskretisiert

$$n_{\min} \leq n(t_k) \leq n_{\max}, \quad k = 0, \dots, N, \quad (5.21)$$

wobei $t_{k+1} := t_k + h$ mit $h := t_f/N$ und finden sich in dieser diskretisierten Form im Optimierungsproblem wieder. Dadurch wird aus einer zeitstetigen Nebenbedingung, $N + 1$ zeitdiskrete Nebenbedingungen. Ziel ist es nun, die Zeitpunkte $t^* \in [t_0, t_f]$ zu finden, an denen die Nebenbedingung sicher erfüllt sind und damit nicht mehr im Optimierungsproblem beachtet werden müssen. Dafür macht man sich die Struktur der Zustands- und Steuervariablen zu Nutze. Nach dem Allokationsproblem 4.1.9 gilt

$$\dot{z}(t) = \tilde{z}\omega(t), \quad \|\omega(t)\|_\infty \leq 1, \quad \forall [t_0, t_f] \quad (5.22)$$

und $z(t_0) = z_0$. Daraus ergibt sich

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{z}\omega(s) ds \leq z_0 + \int_{t_0}^t \tilde{z} \cdot 1 ds = z_0 + \tilde{z} \cdot (t - t_0), \quad \forall [t_0, t_f] \quad (5.23)$$

beziehungsweise

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{z}\omega(s) ds \geq z_0 + \int_{t_0}^t \tilde{z} \cdot (-1) ds = z_0 - \tilde{z} \cdot (t - t_0), \quad \forall [t_0, t_f]. \quad (5.24)$$

Aufgrund von (5.23) und (5.24) können nun die Zustandsrestriktionen des Allokationsproblems abgeschätzt werden. Dafür wird in jedem Fall angenommen, dass die Nebenbedingung für $t = t_0$ sicher erfüllt ist. Aufgrund der teilweise unterschiedlichen Struktur der Nebenbedingungen wird nun die Reduktion für die einzelnen Nebenbedingungen vorgestellt.

Drehzahlen der Antriebe

Aufgrund der selben Struktur werden die Restriktionen der Drehzahlen von Azimutpropeller und VSP, sowie die Steuerrestriktion des Bugstrahlers in

$$n_{\min} \leq n(t) \leq n_{\max}, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5.25)$$

zusammengefasst. Wegen (5.23) gilt

$$\begin{aligned} n(t) &\leq n_0 + \tilde{n} \cdot (t - t_0) \leq n_{\max}, & \forall t \in [t_0, t_f] \\ \Rightarrow t &\leq \frac{n_{\max} - n_0 + \tilde{n} \cdot t_0}{\tilde{n}}. \end{aligned}$$

Analog folgt aus (5.24)

$$\begin{aligned} n_{\min} &\leq n_0 - \tilde{n} \cdot (t - t_0) \leq n(t), & \forall t \in [t_0, t_f] \\ \Rightarrow t &\leq \frac{n_0 - n_{\min} + \tilde{n} \cdot t_0}{\tilde{n}}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich daraus, dass die Nebenbedingung (5.25) für $t \in [t_0, \min\{\frac{n_{\max} - n_0 + \tilde{n} \cdot t_0}{\tilde{n}}, \frac{n_0 - n_{\min} + \tilde{n} \cdot t_0}{\tilde{n}}, t_f\}]$ immer erfüllt ist. Es reicht also aus im Allokationsproblem

$$n_{\min} \leq n(t) \leq n_{\max}, \quad \forall t \in \left[\min \left\{ \frac{n_{\max} - n_0 + \tilde{n} \cdot t_0}{\tilde{n}}, \frac{n_0 - n_{\min} + \tilde{n} \cdot t_0}{\tilde{n}}, t_f \right\}, t_f \right] \quad (5.26)$$

zu fordern. Falls

$$\min \left\{ \frac{n_{\max} - n_0 + \tilde{n} \cdot t_0}{\tilde{n}}, \frac{n_0 - n_{\min} + \tilde{n} \cdot t_0}{\tilde{n}}, t_f \right\} = t_f$$

kann die Nebenbedingung sogar komplett ignoriert werden.

Steigung des VSP

Die Steigung des VSP wird mit

$$0 \leq x(t)^2 + y(t)^2 \leq \tilde{\lambda}_{0,\max}^2, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5.27)$$

beschrieben. Da $x(t)$ und $y(t)$ reelwertig sind, ist der erste Teil der Nebenbedingung immer erfüllt. Für den zweiten Teil gilt $\forall t \in [t_0, t_f]$:

$$\begin{aligned} x(t)^2 &\leq \max\{(x_0 + \tilde{x} \cdot (t - t_0))^2, (x_0 - \tilde{x} \cdot (t - t_0))^2\} = x_0^2 + 2\tilde{x}|x_0|(t - t_0) + \tilde{x}^2(t - t_0)^2, \\ y(t)^2 &\leq \max\{(y_0 + \tilde{y} \cdot (t - t_0))^2, (y_0 - \tilde{y} \cdot (t - t_0))^2\} = y_0^2 + 2\tilde{y}|y_0|(t - t_0) + \tilde{y}^2(t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Sei

$$t^* := \min_{t \in \mathbb{R}} t,$$

sodass

$$\begin{aligned} (t - t_0)^2 \cdot (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + 2(t - t_0) \cdot (\tilde{x}|x_0| + \tilde{y}|y_0|) + x_0^2 + y_0^2 - \tilde{\lambda}_{0,\max}^2 &\leq 0, \\ t &\geq t_0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dann kann die Nebenbedingung (5.27) erst ab $t \geq t^*$ aktiv werden.

Moment und Leistung des VSP

Analog zur Steigung lassen sich die Zeitpunkte $t^{*,1}$ und $t^{*,2}$ finden, ab denen die Leistung und das Moment des VSP aktiv werden können. Ohne Interaktionen werden die Leistung und das Moment als eine Funktion abhängig von der Drehzahl und der Steigung betrachtet

$$\begin{aligned} M_{\text{VSP}}(t, n_{\text{VSP}}, \tilde{\lambda}_0) &= c_1 \cdot n_{\text{VSP}}(t)^2 \cdot \text{KD}(\tilde{\lambda}_0(t)), \\ P_{\text{VSP}}(t, n_{\text{VSP}}, \tilde{\lambda}_0) &= c_2 \cdot n_{\text{VSP}}(t)^3 \cdot \text{KD}(\tilde{\lambda}_0(t)). \end{aligned}$$

Die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beschreiben dabei die propellerspezifischen Konstanten des Antriebs (vgl. Kapitel 4.1). Die Zeitpunkte $t^{*,1}$ und $t^{*,2}$ lassen sich damit über die Minimierungsprobleme

$$t^{*,1} := \min_{t \in \mathbb{R}} t,$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} c_1 \cdot n_{\text{VSP}}(t)^2 \cdot \text{KD}(\tilde{\lambda}_0(t)) &\leq M_{\max,\text{VSP}}, \\ c_1 \cdot n_{\text{VSP}}(t)^2 \cdot \text{KD}(\tilde{\lambda}_0(t)) &\geq M_{\min,\text{VSP}}, \\ t &\geq t_0 \end{aligned}$$

und

$$t^{*,2} := \min_{t \in \mathbb{R}} t,$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} c_2 \cdot n_{\text{VSP}}(t)^3 \cdot \text{KD}(\tilde{\lambda}_0(t)) &\leq P_{\text{max,VSP}}, \\ c_2 \cdot n_{\text{VSP}}(t)^3 \cdot \text{KD}(\tilde{\lambda}_0(t)) &\geq P_{\text{min,VSP}}, \\ t &\geq t_0 \end{aligned}$$

bestimmen.

Moment und Leistung des Azimutpropellers

Die Leistung und das Moment des Azimutpropellers sind im einfachsten Fall, ohne Interaktionen, rein von dessen Drehzahl und den propellerspezifischen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ abhängig

$$\begin{aligned} M_{\text{Azi}}(t, n_{\text{Azi}}) &= c_1 \cdot n_{\text{Azi}}(t)^2 \\ P_{\text{Azi}}(t, n_{\text{Azi}}) &= c_2 \cdot n_{\text{Azi}}(t)^3. \end{aligned}$$

Da die Drehzahl immer positiv oder Null sein muss, gilt

$$\begin{aligned} (n_{\text{Azi}}(t_0) - t\tilde{n}_{\text{Azi}})^2 &\leq n_{\text{Azi}}(t)^2 \leq (n_{\text{Azi}}(t_0) + t\tilde{n}_{\text{Azi}})^2, & \forall t \in [t_0, t_f] \\ (n_{\text{Azi}}(t_0) - t\tilde{n}_{\text{Azi}})^3 &\leq n_{\text{Azi}}(t)^3 \leq (n_{\text{Azi}}(t_0) + t\tilde{n}_{\text{Azi}})^3, & \forall t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Damit ist der früheste Zeitpunkt $t^{*,3}$ beziehungsweise $t^{*,4}$ ab dem diese Nebenbedingungen aktiv werden können gegeben durch das Minimierungsproblem:

$$t^{*,3} := \min_{t \in \mathbb{R}} t,$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} c_1(n_{\text{Azi}}(t_0) + t\tilde{n}_{\text{Azi}})^2 &\leq M_{\text{max,Azi}}, \\ c_1(n_{\text{Azi}}(t_0) - t\tilde{n}_{\text{Azi}})^2 &\geq M_{\text{min,Azi}}, \\ t &\geq t_0 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$t^{*,4} := \min_{t \in \mathbb{R}} t,$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} c_2(n_{\text{Azi}}(t_0) + t\tilde{n}_{\text{Azi}})^3 &\leq P_{\text{max,Azi}}, \\ c_2(n_{\text{Azi}}(t_0) - t\tilde{n}_{\text{Azi}})^3 &\geq P_{\text{min,Azi}}, \\ t &\geq t_0. \end{aligned}$$

Leistung des Bugstrahlers

Die Leistung des Bugstrahlers ist rein von dessen Schub abhängig. Es gilt vereinfacht dargestellt

$$P_{\text{Bug}} = c_{\text{Power, Bug}} \cdot |f_{\text{Bug}}(t)|^{\frac{3}{2}}, \quad (5.28)$$

wobei $c_{\text{Power, Bug}} \in \mathbb{R}$ die propellerspezifische Konstante für die Leistung beschreibt. Analog zu VSP und Azimut gilt für die Nebenbedingung

$$P_{\text{min,Bug}} \leq P_{\text{Bug}} \leq P_{\text{max,Bug}}, \quad (5.29)$$

dass sie erst ab dem Zeitpunkt $t^{*,5}$ mit

$$t^{*,5} := \min_{t \in \mathbb{R}} t,$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} c_{\text{Power, Bug}} \cdot |f_{\text{Bug}}(t)|^{\frac{3}{2}} &\leq P_{\text{max,Bug}}, \\ c_{\text{Power, Bug}} \cdot |f_{\text{Bug}}(t)|^{\frac{3}{2}} &\geq P_{\text{min,Bug}}, \\ t &\geq t_0, \end{aligned}$$

aktiv werden kann.

Durch die Kombination der Reduktion von der Dimension der Optimierungsvariablen mit POD und der Reduktion der Anzahl der Nebenbedingungen muss nur noch ein kleines Optimierungsproblem gelöst werden. Dessen Lösung ist im Vergleich zur Approximation mit der Sensitivitätsanalyse immer zulässig, benötigt jedoch mehr Rechenzeit. Außerdem benötigt man deutlich weniger Speicherplatz als bei der Sensitivitätsanalyse. Selbst beim Speichern der gesamten Basis ist der Speicheraufwand mit $\mathcal{O}(n_z^2)$ deutlich geringer als der Aufwand bei der Sensitivitätsanalyse, da davon ausgegangen werden kann, dass $N_{\text{Sens}} \gg n_z$ ist, um genügend nominale Parameter für die Online-Phase zur Verfügung zu haben. Des Weiteren reduziert sich auch der Offline-Aufwand, da nur einmal ein Eigenwertproblem gelöst werden muss, anstatt N_{Sens} Ableitungen zu bestimmen. Im folgenden Abschnitt finden sich numerische Resultate zu beiden Approximationsvarianten.

5.3 Numerische Resultate

In Kapitel 4 wurden Fall- und Parameterstudien vorgestellt, in denen für verschiedene Propelleranordnungen und verschiedene Parameter das Allokationsproblem gelöst wurde. Die numerischen Resultate für die Echtzeitapproximation basieren auf den selben Propelleranordnungen. Für die Berechnung der für die Sensitivitätsanalyse nötigen Ableitungen oder POD-Basisvektoren wurden die Ergebnisse aus der Parameterstudie verwendet. Die Untersuchungen der Echtzeitapproximation beschränken sich dabei auf die modifizierte Elastic-Constraint Methode, die Diskretisierung mit dem Eulerverfahren und der Nichtbeachtung von Interaktionen. Des Weiteren wurden für die Untersuchungen zufällig weitere Parameter ausgewählt, für die das Allokationsproblem 4.1.9 approximativ gelöst wurde. Um den dabei entstehenden Fehler ϵ_{app} definiert durch

$$\epsilon_{\text{app}} := |J(z(p)) - J(z_{\text{app}}(p))| \quad (5.30)$$

zu bestimmen, wurde das Allokationsmodul zusätzlich für diese Parameter exakt gelöst. Alle Rechnungen liefen wieder auf dem Rechencluster *Pacioli* (2.6 – 2.8 GHz) der Universität Ulm.

5.3.1 Parameterstudie

Bei dieser Parameterstudie wurden die Rechenzeiten und die Fehler der beiden Approximationsansätze untersucht. Da bei Problemen mit wenig Variablen keine große Verbesserung bei der Rechenzeit zu erwarten ist, beschränkt sich die Auswertung der Studie auf die feinste Diskretisierung des Problems, also $h = T/20 = 0.05$.

Sensitivitätsanalyse

Aufgrund der gewählten Zielfunktion

$$\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|_2^2 dt + \mu \int_0^T (\|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z(t))\|_2^2 - \varepsilon)_+ dt \longrightarrow \min \quad (5.31)$$

kann es bei der Approximation zu sehr großen Fehlern kommen. Sei beispielsweise \hat{z} die exakte Lösung mit

$$\|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(\hat{z}(t))\|_2^2 \leq \varepsilon \quad (5.32)$$

und z_{app} die Approximation mit

$$\|\hat{\tau} - \tau_{\text{thr}}(z_{\text{app}}(t))\|_2^2 \geq \varepsilon. \quad (5.33)$$

Wird nun zusätzlich die Gewichtung $\mu \gg 1$ gewählt, so entstehen unverhältnismäßig große Fehler, falls für die exakte Lösung der Strafterm sehr klein oder Null ist, jedoch nicht für die Approximation. Aus diesem Grund werden im Folgenden neben der Rechenzeit (vgl. Abbildung 5.2) und dem Fehler der Zielfunktion ϵ_{app} (vgl. Abbildung 5.5a) auch

der Fehler der Variablen ϵ_{arg}

$$\epsilon_{\text{arg}} := \|z(p) - z_{\text{app}}(p)\|_2^2 \quad (5.34)$$

abgebildet (vgl. Abbildung 5.3b). Wie erwartet, reduziert sich die Rechenzeit durch die

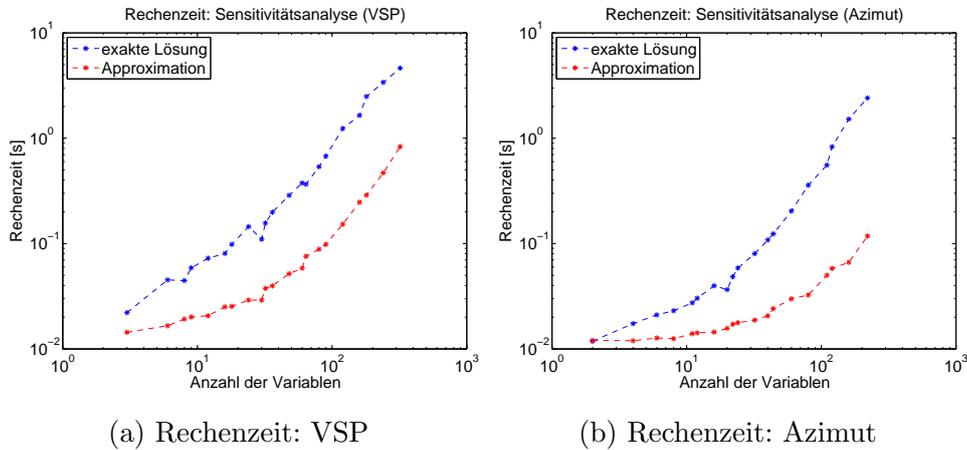


Abbildung 5.2: Rechenzeit: Sensitivitätsanalyse

Approximation um bis zu 88%, beziehungsweise 95%. Allerdings sind die Fehler, die aufgrund der Approximation entstehen, sehr hoch. Dies ist auch der Projektion auf den zulässigen Bereich geschuldet. Durch diese Projektion erhält man zwar eine zulässige Lösung, jedoch nicht unbedingt die Optimale. Dadurch kann es nicht nur passieren, dass sich die Steuerung nicht verbessert, also $\omega(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0, t_f]$, sondern sogar verschlechtert.

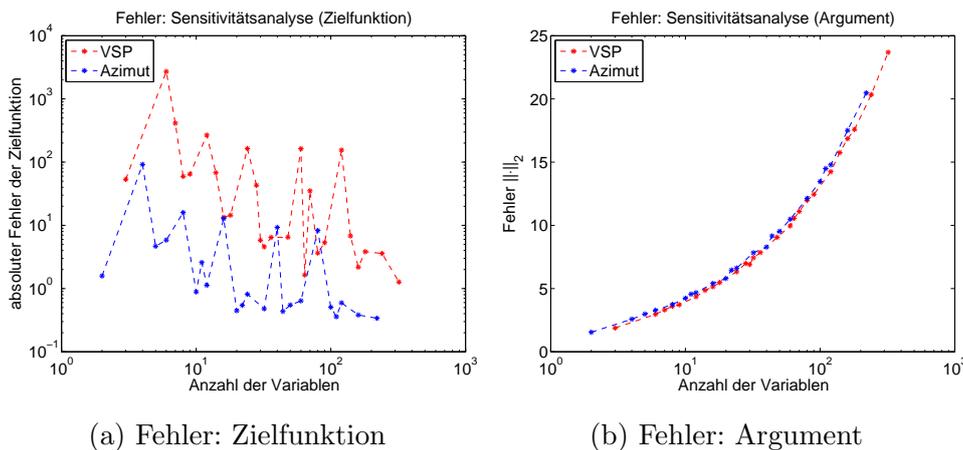


Abbildung 5.3: Fehler: Sensitivitätsanalyse

POD

Bei der Approximation mit POD hängt die Rechenzeit und der Approximationsfehler von der Anzahl der verwendeten Basisfunktionen ab. Abbildung 5.4 zeigt für die Propelleranordnung zwei Hauptantriebe im Heck und einen Nebenantrieb im Bug, wie sich die Rechenzeit bezüglich der Anzahl der verwendeten Basisfunktionen verhält. Im Vergleich zur Sensitivitätsanalyse gibt es hier einen Punkt, ab dem die Approximation längere Rechenzeiten benötigt als die exakte Lösung. Dies erklärt sich jedoch bei Betrachtung der Jacobimatrix des Optimierungsproblems. Während diese im exakten Fall dünnbesetzt ist, muss bei der Approximation mit einer vollbesetzten Matrix gerechnet werden, so dass trotz der Reduktion der Nebenbedingungen es nicht möglich ist, immer kürzere Rechenzeiten zu erhalten als bei der Berechnung der exakten Lösung. Allerdings erhält man schon mit wenigen Basisvektoren eine gute Approximation. In diesem Beispiel eine Genauigkeit von $7 \cdot 10^{-3}$ bei 50% der Rechenzeit. Für die Betrachtung des Approxima-

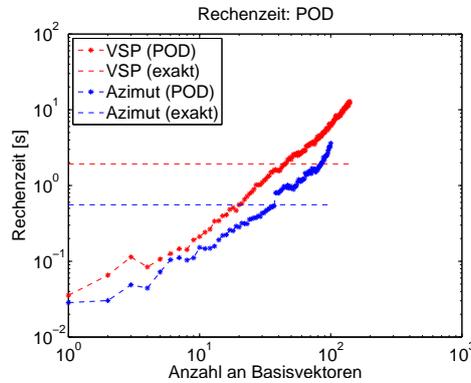


Abbildung 5.4: Rechenzeit: POD

tionsfehlers kann man zeigen, dass für den mittleren quadratischen Fehler

$$\frac{1}{N_{\text{POD}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{POD}}} \left\| z_i - \sum_{j=1}^m (z_i, \psi_j)_A \psi_j \right\|_A^2 = \sum_{i=m+1}^{N'_{\text{POD}}} \lambda_{\text{POD},i} \quad (5.35)$$

gilt [32]. Bei der Approximation der Lösung des parametrischen Problems wird jedoch nicht die Lösung gewählt, welche die exakte Lösung am besten approximiert, sondern diejenige, die die Zielfunktion minimiert. Allerdings kann man mit der Approximation des Fehlers (5.35) den Verlauf des exakten Fehlers relativ gut abschätzen (vgl. Abbildung 5.5b) und damit auch Rückschlüsse auf den Fehler des Zielfunktionswerts ziehen. Dass der Fehler des Zielfunktionswerts für die maximale Anzahl an Basisvektoren nicht im Bereich der Maschinengenauigkeit liegt, begründet sich durch das Abbruchkriterium des Optimierungsproblems mit einer Toleranz $tol = 10^{-5}$. Dieser Aspekt erklärt auch die Differenz zwischen dem exakten Fehler ϵ_{arg} und dessen Approximation (5.35).

Weitere Auswertungen der Parameterstudie der Approximation mit POD finden sich im Anhang.

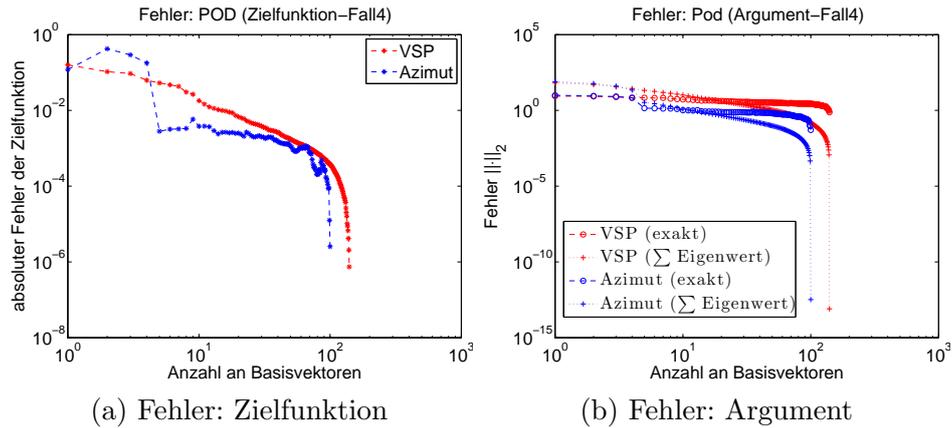


Abbildung 5.5: Fehler: POD

5.3.2 Beispiel: Schuberzeugung mit Echtzeitsteuerung

Um neben der Parameterstudie ein Gefühl dafür zu erhalten, wie gut die beiden Approximationen für die Anwendung geeignet sind, wird im folgenden Beispiel über 30 Sekunden eine konstante Kraft gefordert, die von zwei VSP leistungsminimal erzeugt werden soll. Verglichen werden dabei die Sensitivitätsanalyse mit dem POD-Ansatz und der exakten Lösung.

Beispiel 5.3.1 (Echtzeitapproximation)

Sei eine Propelleranordnung von zwei VSP im Heck ($l_{x,1} = l_{x,2} = -28 \text{ m}$, $l_{y,1} = -l_{y,2} = -4 \text{ m}$) gegeben. Gefordert sei über 30 s eine konstante Kraft $\hat{\tau} = (250, 0, 0)^T \text{ kN}$.

Approximation der Lösung mit der Sensitivitätsanalyse:

Als Grundlage für diese Approximation dienen 5000 Lösungen und deren Ableitung nach dem Parameter $p \in \mathbb{R}^9$ ($\tau \in \mathbb{R}^3, z_0 \in \mathbb{R}^6$) des parametrischen Problems 5.0.7. Die 5000 Parameter wurden dabei zufällig ausgewählt. Abbildung 5.6 zeigt den aus der Approximation der Steuerung resultierenden Schub und Leistung der Antriebe.

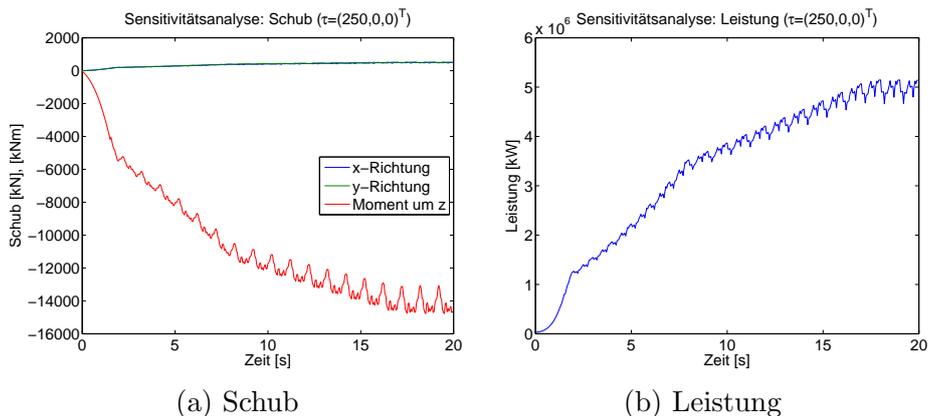


Abbildung 5.6: Beispiel: Sensitivitätsanalyse

Es zeigt sich, dass der geforderte Schub nicht erreicht wird und die Leistung extrem hoch ist. Dies hat zwei grundlegende Ursachen. Zum einen ist die Sensitivitätsanalyse sehr gut dafür geeignet, die Lösungen für einen Parameter zu approximieren, der in der Nähe des nominalen Parameters liegt. Dies kann jedoch durch die zuvor fix bestimmte Parametermenge nicht sichergestellt werden. Zum anderen kann es sein, dass die Approximation nicht zulässig ist. Durch die Projektion auf den zulässigen Bereich wird zwar die Zulässigkeit sichergestellt, jedoch nicht die Optimalität der Steuerung.

Approximation der Lösung mit POD:

Die POD-Basis basiert auf den selben 5000 Lösungen wie die Sensitivitätsanalyse. Abbildung 5.7 zeigt dabei wieder den Schub und die Leistung der Propeller für zwei, vier und sieben Basisvektoren im Vergleich zur exakten Lösung.

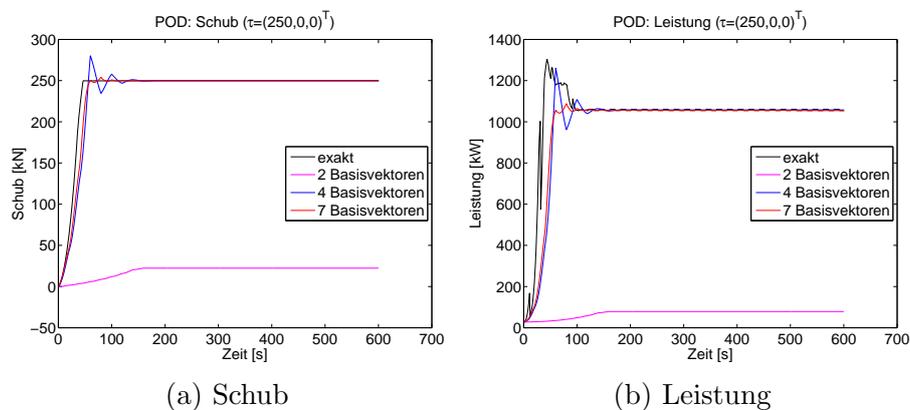


Abbildung 5.7: Beispiel: POD

Bei dieser Approximation reichen schon vier Basisvektoren aus, um das Problem, ursprünglich mit $z \in \mathbb{R}^{60}$, sehr gut zu lösen. Der Schub von 250 kN wird erzeugt und die Leistung entspricht ebenfalls der exakten Lösung. Die Verwendung von sieben Basisvektoren führt dann nur noch zu kleinen Verbesserungen in den ersten Sekunden.

Vergleich der Rechenzeit

Zuletzt noch zum Vergleich der gesamten Rechenzeit. Dies ist in Abbildung 5.8 zum einen für die POD-Approximation in Abhängigkeit der verwendeten Anzahl an Basisfunktionen aufgetragen, zum anderen für einen anschaulichen Vergleich, für die Sensitivitätsapproximation und die exakte Lösung. Da in diesem Beispiel nur vier bis sieben Basisvektoren notwendig waren, um die Lösung zu approximieren, ist die Rechenzeit für den POD-Ansatz sogar noch geringer als die Rechenzeit der Sensitivitätsanalyse. Allerdings ist diese vergleichbar hohe Rechenzeit der Projektion der Approximation auf den zulässigen Bereich und dem damit verbundenen Lösen eines Optimierungsproblems geschuldet.

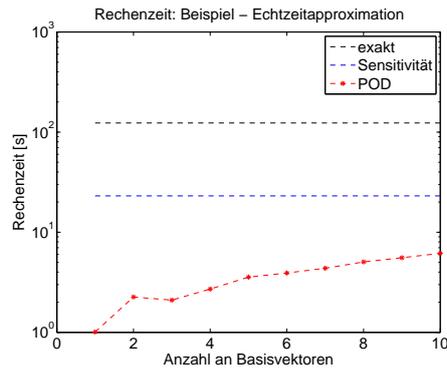


Abbildung 5.8: Beispiel: Rechenzeit

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Sensitivitätsanalyse für Parameter nahe des nominalen Parameters gut geeignet ist. Eine Verbesserung der Approximation bei nicht zulässigen Lösungen kann durch das Ersetzen der Projektion durch das exakte Lösen des Problems erreicht werden. Allerdings muss hierbei mit mehr Rechenaufwand und höherer Rechenzeit gerechnet werden. Bei der Approximation mit dem POD-Ansatz hingegen reichen oft schon so wenige Basisvektoren aus, um das Problem zum einen genau genug zu lösen und zum anderen die Rechenzeit stark zu reduzieren. Der Fehler ist damit deutlich geringer als bei der Sensitivitätsanalyse. Allerdings muss hier bei wachsender Genauigkeit auch mit deutlich mehr Rechenzeit gerechnet werden.

6 Kombination der Allokation mit einem Regler

In den vorherigen Kapiteln wurde vorgestellt, wie mit Hilfe eines multikriteriellen Optimalsteuerungsproblems Antriebe eines Schiffes gesteuert werden müssen, um möglichst effizient eine geforderte Kraft zu erreichen. Im Kontext des dynamischen Positionierens nimmt die Allokation damit den Platz zwischen dem Regler und den Antrieben ein. Beim dynamischen Positionieren selbst werden verschiedene Ziele verfolgt. Am wichtigsten ist das Halten der Ausrichtung des Schiffes [39], dann folgt das Halten der Position und zuletzt die Energieeffizienz. Dieses Kapitel stellt abschließend dar, wie sich diese Ziele mit einem klassischen PID-Regler im Vergleich zu einem multikriteriellen Optimalsteuerungsproblem umsetzen lassen. Abschließend folgt in einem kurzen Ausblick eine Möglichkeit einer effizienten Integration der Rollstabilisierung in ein DP-System.

6.1 Dynamisches Positionieren mit einem PID-Regler

Klassischerweise wird für die Regelung eines DP-Systems ein PID-Regler [40] verwendet. Dieser wird bei der Inbetriebnahme des Systems für das Schiff und dessen Antriebe passend eingestellt. Diese Einstellung wird als DP-Tuning bezeichnet und basiert hauptsächlich auf Erfahrungswerten. Nach mündlichen Aussagen der Firma Voith Turbo kann ein DP-Tuning mehrere Tage benötigen.

Der PID- Regler ist eine additive Kombination aus dem P-Regler,

$$\hat{\tau}_P(t) = P \cdot e(t), \quad (6.1)$$

dem I-Regler mit einer komponentenweisen Betrachtung von e

$$\hat{\tau}_{I,k}(t) = I \cdot \int_0^t e_k(s) \, ds, \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.2)$$

und dem D-Regler

$$\hat{\tau}_D(t) = D \cdot \dot{e}(t), \quad (6.3)$$

wobei $e(t) := \eta(t) - \hat{\eta}$ die Abweichung des Schiffes von der Sollposition $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^3$ ist. Damit ergibt sich dann gesamt für den PID-Regler

$$\hat{\tau}_{PID}(t) = P \cdot e(t) + I \cdot \int_0^t e(s) \, ds + D \cdot \dot{e}(t). \quad (6.4)$$

Die Resultate des Reglers basieren ausschließlich auf den Messungen der vorherigen und des aktuellen Zustandes. Die Kraft, die aufgrund des Reglers auf die Antriebe verteilt werden soll, muss zwei Kriterien erfüllen: Zum einen muss sie das Schiff auf Position halten, zum anderen muss es den Antrieben möglich sein die Kraft zu erzeugen. Entsprechend dieser beiden Forderungen müssen die Koeffizienten des PID-Reglers gewählt werden. Konsequenzen einer schlechten Wahl der Koeffizienten zeigt Beispiel 6.1.1 .

Bestimmung der Reglerkoeffizienten

Um die Koeffizienten des Reglers einzustellen, gibt es verschiedene Ansätze. Ein Ansatz basiert auf allgemeinen Einstellregeln, wie die Methode des Stabilitätsrandes oder der Sprungantwort von Ziegler und Nichols, beziehungsweise die Methode der Sprungantwort von Chien, Hrones und Reswick [46]. Diese Ansätze erfordern jedoch in der Regel viel Erfahrung und Wissen über das Verhalten des Systems und basieren auf heuristischen Ergebnissen. Ein weiterer Ansatz, der auch in [19, 26, 27] verwendet wird, ist die Bestimmung der Koeffizienten über die Riccati-Gleichung. Dieser Variante liegt eine linearisierte Form der Bewegungsgleichung zugrunde

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \nu(t) \\ (M_{\text{RB}} + M_{\text{A}})\dot{\nu}(t) + D\nu(t) &= \tau(t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Zur Bestimmung der Konstanten P , I und D wird ein Optimalsteuerungsproblem mit der Zielfunktion

$$J_{\text{PID}}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \tilde{e}(t)^T Q \tilde{e}(t) + \tau(t)^T R \tau(t) dt, \quad (6.6)$$

mit $R \in \mathbb{R}^3$ und $Q \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ symmetrisch und positiv definit und der Differenzialgleichung

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -(M_{\text{RB}} + M_{\text{A}})^{-1}D \end{pmatrix} \cdot \tilde{e}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (M_{\text{RB}} + M_{\text{A}})^{-1} \end{pmatrix} \cdot \tau(t) \quad (6.7)$$

mit $\tilde{e}(t) := \left(\int_0^t e(s) ds, e(t), \dot{e}(t) \right)^T$ formuliert. Sei

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -(M_{\text{RB}} + M_{\text{A}})^{-1}D \end{pmatrix} &=: A \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (M_{\text{RB}} + M_{\text{A}})^{-1} \end{pmatrix} &=: B. \end{aligned}$$

Aus der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t, \tilde{e}, \tau, \lambda) = \frac{1}{2} (\tilde{e}(t)^T Q \tilde{e}(t) + \tau(t)^T R \tau(t)) + \lambda(t)^T (A \tilde{e}(t) + B \tau(t)) \quad (6.8)$$

ergibt sich dann die Differenzialgleichung der Adjungierten λ

$$\dot{\lambda}(t) = -Q\tilde{e}(t) - A^T\lambda(t) \quad (6.9)$$

und wegen der Optimalitätsbedingung $\mathcal{H}_\tau(t, \tilde{e}, \tau, \lambda) = 0$ folgt für die Kraft τ

$$\tau(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t). \quad (6.10)$$

Fasst man diese Resultate zusammen, so ergibt sich ein Hamiltonsystem

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{e}}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -R^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

das mit der Riccatigleichung

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.12)$$

mit $P\tilde{e} = \lambda$ gelöst werden kann. Somit hängt die Kraft τ linear von \tilde{e} ab, also

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -R^{-1}B^T\lambda(t) \\ &= -R^{-1}B^T P\tilde{e}(t). \end{aligned}$$

Sei $-R^{-1}B^T P := (I, P, D)^T$ mit $I, P, D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ konstant, so gilt für die Kraft

$$\tau(t) = I \cdot \int_0^t e(s) \, ds + P \cdot e(t) + D \cdot \dot{e}(t). \quad (6.13)$$

Durch diesen Ansatz wird sichergestellt, dass bei optimalen Antrieben, also Antrieben ohne Restriktionen in Leistung und maximaler Schubkraft und beliebig schnellen Steuerzeiten, die Sollposition erreicht wird. Durch die Wahl der Gewichte $R \in \mathbb{R}^3$ mit $R = R^T > 0$ und $Q \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ mit $Q = Q^T \geq 0$ können Prioritäten auf Energieeffizienz und damit ein langsames Erreichen der Position oder umgekehrt auf ein schnelles Erreichen der Position mit einem höherem Energieaufwand gesetzt werden. Aufgrund der Limitierung der Antriebe ist es jedoch notwendig, die Gewichte derart zu wählen, dass ein Halten möglich ist.

Beispiel 6.1.1 Sei eine Propelleranordnung mit zwei VSP im Heck gegeben. Als Schiff dient das Supply Vessel aus Marine System Simulators [7] mit einer Länge von 82 m, einer Breite von 19 m, einem Tiefgang von 6 m und einem Gewicht von 6362 Tonnen. Die PID-Koeffizienten wurden für zwei verschiedene Matrizen Q bestimmt. Die Sollposition des Schiffes sei $\hat{\eta} = (0, 0, 0)^T$. Auf dieses Schiff wirken 90 min ein Moment von -2000 kNm , also $\tau_{ext,1} = (0, 0, -2000)^T$. Dieser Fall wird mit beiden Varianten der PID Koeffizienten simuliert. Abbildung 6.1 zeigt den stark unterschiedlichen Verlauf der Schiffsbewegung bei gleichbleibender externer Kraft. In einem weiteren Fall wird die externe Kraft zu $\tau_{ext,1} = (250, 0, 0)^T$ verändert. Für diesen Fall werden die zuvor schlechteren PID-Koeffizienten verwendet. Wie in Abbildung 6.1c zu sehen ist, führen in diesem

Fall die Koeffizienten zu einem schnellen Erreichen der Sollposition.

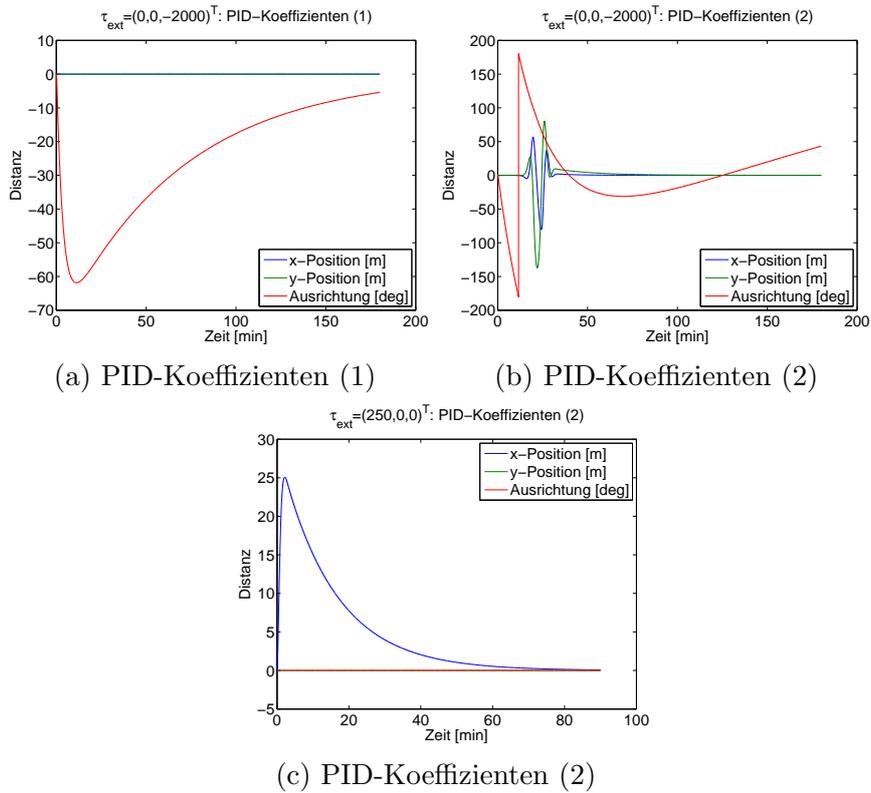


Abbildung 6.1: Beispiel: PID-Koeffizienten

Beispiel 6.1.1 zeigt, wie groß der Einfluss des Reglers im DP-System ist. Für einen erfolgreichen DP-Betrieb sind nicht nur gute Antriebe erforderlich, sondern auch auf das Schiff und die Antriebe angepasste PID-Koeffizienten. Da diese Koeffizienten konstant sind, ist es nicht möglich, eine optimale Einstellung zu finden, sodass in jeder Situation sowohl die Position gehalten wird, als auch der Energieaufwand minimal wird.

6.2 Dynamisches Positionieren mit optimaler Steuerung

Zusammengefasst ergeben sich bei der Regelung mit einem PID-Regler zwei große Nachteile. Zum einen muss der Regler für jedes neue Schiff und jede Propellerkonstellation neu konfiguriert werden. Zum anderen ist aufgrund der fest gewählten Konstanten P , I und D keine optimale Steuerung der Antriebe möglich. Ein möglicher Ausweg für diese Probleme ist die Kombination von Allokation und Regler in einem Optimalsteuerungsproblem. Dabei wird ein Optimalsteuerungsproblem gelöst, das neben der Propellersteuerung auch die Bewegungsgleichung enthält. Das Ziel bei diesem Problem ist die Minimierung der Abweichung des Schiffes von der Sollposition. Um diesen Ansatz zu veranschaulichen, wird zunächst anstatt des Schiffsmodells ein stark vereinfachtes Bewegungsmodell betrachtet.

Problem 6.2.1

Sei $I := [0, T]$ das Intervall, in dem die Sollposition gehalten werden soll. Sei $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Position, $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ein äußerer Einfluss, der auf das System wirkt. Mit der Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ wird die Steuerung des Systems bezeichnet. Gesucht ist die Steuerung u^* , die dafür sorgt, dass die Abweichung von der Position x zu einer Sollposition $x_{\text{Soll}} \in \mathbb{R}$ trotz des Einflusses der Funktion f minimal ist

$$J(t, x, v, u) := \int_0^T (x(t) - x_{\text{Soll}})^2 dt \quad (6.14)$$

und die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= u(t) + f(t). \end{aligned} \quad (6.15)$$

erfüllt sind.

6.2.1 Feedback-Steuerung

In der Realität sind äußere Einflüsse oft nicht bekannt, oder es wird ein vereinfachtes Modell verwendet, sodass nach einer Optimierung das Ergebnis oft nicht mit der Realität übereinstimmt. In diesem Fall ist eine sogenannte Feedback-Steuerung notwendig, deren Prinzip in Abbildung 6.2 zu sehen ist. Bei einer Feedback-Steuerung wird die Abweichung zwischen der Realität und des Modells verwendet um die Steuerung zu verbessern. Ein Beispiel für einen in der Feedback-Steuerung eingesetzten Regler ist der zuvor beschriebene PID-Regler. Im Folgenden wird ein Ansatz vorgestellt, in dem nicht die Steuerung durch den Regler angepasst wird, sondern die Kenntnisse über die äußeren Einflüsse verbessert werden.

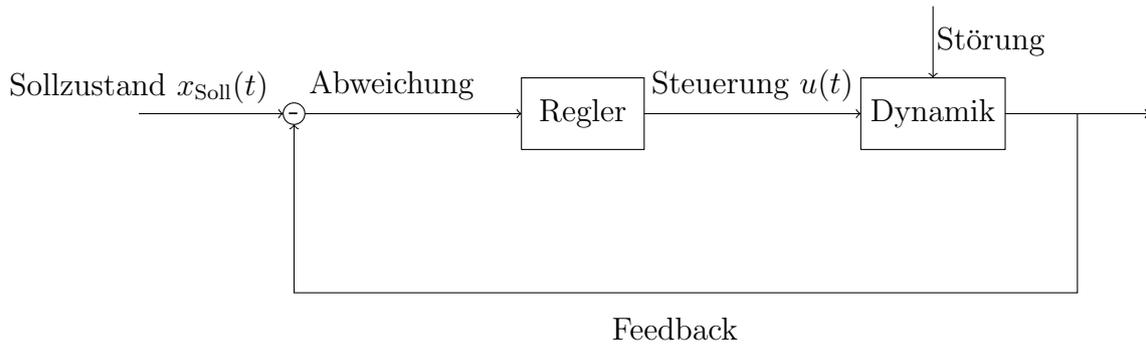


Abbildung 6.2: Schema: Feedback-Steuerung

Approximation der externen Kraft

Bei einer Feedback-Steuerung finden in regelmäßigen Abständen Messungen der Zustandsvariablen, in diesem Fall Position und Geschwindigkeit, statt, um die Steuerung zu aktualisieren. Seien $T_k \in I$, $k = 0, \dots, N$, mit $T_k < T_{k+1}$ die Zeitpunkte an denen eine Messung der Zustandsvariablen stattfindet. Um den Fehler der Steuerung aufgrund mangelnder Kenntnis von f zu reduzieren, wird das Optimalsteuerungsproblem 6.2.1) nicht einmal auf I gelöst, sondern wiederholt auf den Intervallen $I_k := [T_k, T_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N - 1$. Dadurch wird ermöglicht, dass die Erfahrungen der vorherigen Zeitschritte im aktuellen Zeitintervall verwendet werden können.

Für die Lösung des Optimalsteuerungsproblems auf I_k wird die Funktion f durch eine Approximation $\hat{f} : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ ersetzt. Stimmen nach der Lösung des Problems die Zustandsvariablen $x(T_{k+1})$ und $v(T_{k+1})$ mit der Messung $\bar{x}(T_{k+1})$ und $\bar{v}(T_{k+1})$ überein, so kann für das nächste Intervall I_{k+1} dieselbe Approximation für f verwendet werden. Andernfalls muss die Approximation angepasst werden. Dies geschieht durch Lösen eines weiteren Optimalsteuerungsproblems.

Problem 6.2.2 *Finde eine Funktion $f_{est} : [0, T_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Zielfunktion*

$$J(x, v) := \sum_{i=0}^{k+1} ((x(T_i) - \bar{x}(T_i))^2 + (v(T_i) - \bar{v}(T_i))^2) \quad (6.16)$$

minimal wird unter den Nebenbedingungen geltend für $t \in [0, T_{k+1}]$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \hat{u}(t) + f_{est}(t). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die Messungen $\bar{x}(T_j)$, $\bar{v}(T_j)$, für $j = 0, \dots, k + 1$, sowie die Steuerung $\hat{u} : [0, T_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ sind aus den vorherigen Zeitschritten und Berechnungen bekannt.

Die Approximation \hat{f} für f ergibt sich dann aus der quadratischen Fortsetzung auf dem Intervall I_{k+1} der Lösung \hat{f}_{est} des Problems 6.2.2.

Für die numerische Lösung des Problems 6.2.2 wird die Funktion f_{est} mit kubischen

B-Splines approximiert. Falls die Lösung nicht eindeutig ist, werden, um starkes Oszillieren zu vermeiden, B-Splines niedrigerer Ordnung verwendet. Bei einem zu hohen Zielfunktionswert von 6.16, also einer zu starken Abweichung der Messwerte von den Zustandsvariablen, werden weitere Knoten für die B-Splines eingefügt. Zudem reicht es aus, die letzten l Messwerte mit $l \in \mathbb{N}$ und $1 < l \leq k$ in der Zielfunktion 6.16 zu berücksichtigen und damit das Problem 6.2.2 anstatt auf dem Intervall $[0, T_{k+1}]$, auf dem Intervall $[T_{k-l}, T_{k+1}]$ mit der Zielfunktion

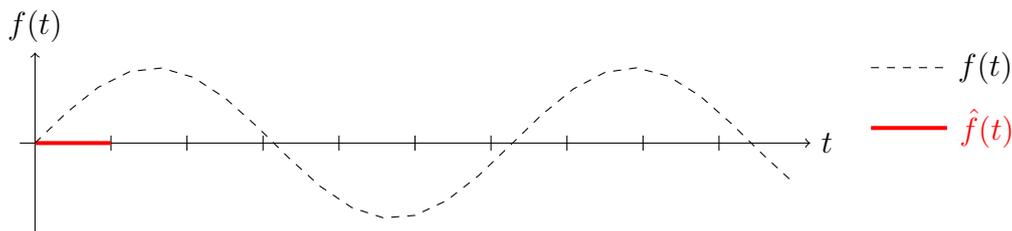
$$\tilde{J}(x, v) := \sum_{i=k-m}^{k+1} ((x(T_i) - \bar{x}(T_i))^2 + (v(T_i) - \bar{v}(T_i))^2) \quad (6.18)$$

zu lösen. Das erste Intervall $I_0 = [T_0, T_1]$ bildet hierzu eine Ausnahme, da zum Startzeitpunkt noch keine Informationen vorliegen. Im folgenden Beispiel 6.2.3 wird die Idee dieser Approximation veranschaulicht.

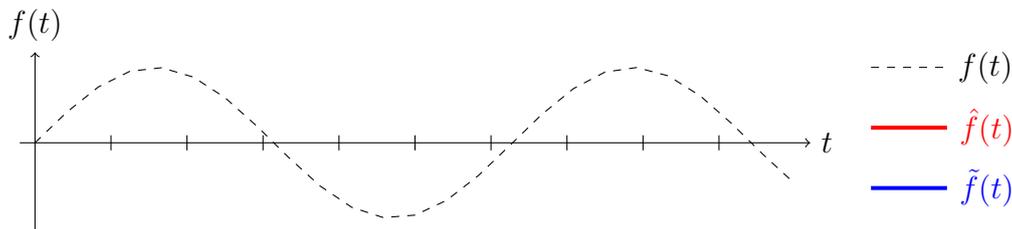
Beispiel 6.2.3 Sei die Differenzialgleichung (6.15) mit $f(t) = \sin(t)$ und einer Steuerung $u(t) = 0$ gegeben. Das Intervall $I := [0, T]$ mit $T = 10$ wird in die Intervalle $I_k := [T_k, T_{k+1}]$, $k = 0, \dots, 9$ mit $T_k = k$ unterteilt.

Zeitpunkt T_0 : Zum Startzeitpunkt sind in der Regel nur die aktuelle Position $\bar{x}(0)$ und $\bar{v}(0)$ bekannt. Daher kann keine Aussage zu f getroffen werden und die Approximation $\hat{f} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

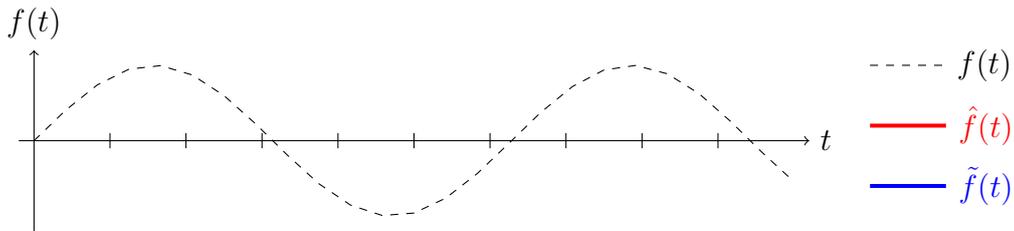
$$\hat{f}(t) := 0. \quad (6.19)$$



Zeitpunkt T_1 : Es gibt verschieden Möglichkeiten, die Messwerte $\bar{x}(T_1)$ und $\bar{v}(T_1)$ zu reproduzieren, deshalb wird die Funktion f_{est} auf dem Intervall $[T_0, T_1]$ mit linearen B-Splines approximiert.



Zeitpunkt T_k : Anstatt die Funktion f auf dem gesamten Intervall $[0, T_k]$ zu reproduzieren, reicht es aus, ein kleineres Intervall mit den aktuellsten Werte zu verwenden.



Fehler: Bei Betrachtung des Fehlers $\varepsilon_{error} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varepsilon_{error}(t) := |f(t) - \hat{f}(t)|. \quad (6.20)$$

Hierbei ist zu beachten, dass es sich um den Fehler der Fortsetzung der Lösung des Optimierungsproblems 6.2.2 handelt und nicht um die Fehler der Lösung selbst. Einen großen Einfluss auf die Approximationsgüte hat die Frequenz, in der die Messungen vorgenommen werden. In Abbildung 6.3 ist der Fehler über das gesamte Intervall

$$\int_0^{10} \varepsilon_{error}(t) dt \quad (6.21)$$

für unterschiedliche Messfrequenzen abgebildet. Es zeigt sich, dass je höher die Frequenz ist desto besser kann man die Funktion f approximieren.

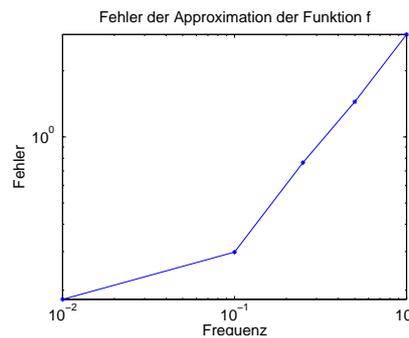


Abbildung 6.3: Fehler unterschiedlicher Messfrequenzen

Wahl der Zielfunktion

Die Wahl einer geeigneten Zielfunktion spielt aufgrund der Teilung des Intervalls I in N Intervalle eine wichtige Rolle. Um dies zu veranschaulichen, wird die Funktion f im Folgenden als bekannt mit

$$f(t) := 2 \quad (6.22)$$

angenommen. Die Startwerte sind durch $x(0) = 1$ und $v(0) = 0$ und die Sollposition durch $x_{\text{Soll}} = 0$ gegeben. Löst man nun das Problem 6.2.1 einmal auf I mit $T = 10$ und N -mal auf I_k , $k = 0, \dots, N - 1$, $N = 10$, so ergeben sich unterschiedliche Resultate (vgl. Abbildung 6.4). Durch das Lösen des Optimalsteuerungsproblems auf dem gesam-

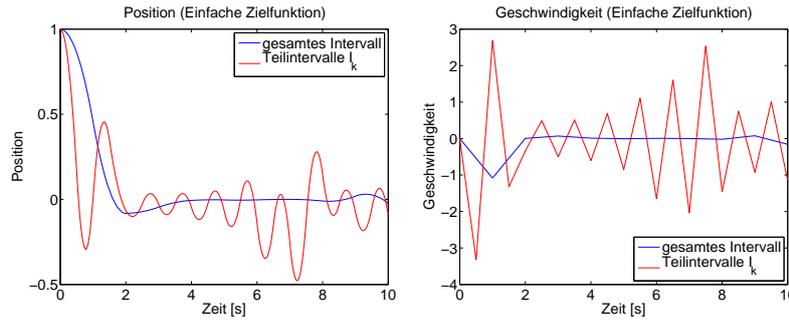


Abbildung 6.4: Einfache Zielfunktion

ten Intervall I hat die Minimierung der Zielfunktion (6.14) auch eine Minimierung der Geschwindigkeit zur Folge (vgl. Abbildung 6.4). Bei den Optimalsteuerungsproblemen über die einzelnen Teilintervalle I_k , $k = 1, \dots, N - 1$ kommt es dagegen an den Intervallgrenzen zu hohen Geschwindigkeiten, die im folgenden Intervall korrigiert werden müssen. Diese Gegebenheit verursacht die unerwünschten Schwingungen um die Sollposition. Um diesen negativen Effekt zu vermeiden, wird das Problem in zwei Schritten gelöst. Im ersten Schritt wird die Steuerung gesucht, die die Position und die Geschwindigkeit an der rechten Intervallgrenze minimiert, also

$$J_1 := (x(T_{k+1}) - x_{\text{Soll}})^2 + (v(T_{k+1}))^2. \quad (6.23)$$

In einem zweiten Schritt wird zuletzt die Steuerung gesucht, die sowohl die Position als auch die Geschwindigkeit über das Intervall minimiert, und zum Zeitpunkt T_{k+1} dieselbe Endposition und Endgeschwindigkeit erzeugt wie im ersten Schritt. Zusammenfassend erhält man wieder ein bikriterielles Optimalsteuerungsproblem.

Problem 6.2.4 *Finde eine Steuerung $u_1 : [T_k, T_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Zielfunktion*

$$J_1 := (x(T_{k+1}) - x_{\text{Soll}})^2 + (v(T_{k+1}))^2 \quad (6.24)$$

unter den Nebenbedingungen (6.15) minimal wird.

Seien $\hat{x}(T_{k+1})$ und $\hat{v}(T_{k+1})$ die zu der Lösung u_1 gehörenden Zustandsvariablen. Finde eine Steuerung $u_1 : [T_k, T_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Zielfunktion

$$J_2 := \int_{T_k}^{T_{k+1}} (x(t) - x_{\text{Soll}})^2 + (v(t))^2 dt \quad (6.25)$$

unter den Nebenbedingungen (6.15) und

$$x(T_{k+1}) = \hat{x}(T_{k+1}) \quad (6.26)$$

$$v(T_{k+1}) = \hat{v}(T_{k+1}) \quad (6.27)$$

minimal wird.

Durch diese Modifikation kann, wie in Abbildung 6.5 zu sehen, ein deutlich besseres Ergebnis erzielt werden.

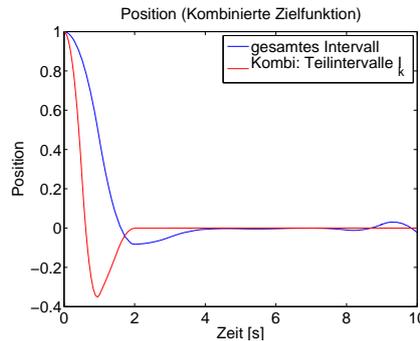


Abbildung 6.5: Kombinierte Zielfunktion

Vereinfachtes DP-System

Durch die Kombination der passenden Zielfunktion mit der Approximation der Funktion f lässt sich damit ein stark vereinfachtes DP-System formulieren.

Problem 6.2.5 (Vereinfachtes DP-System)

Seien $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Position und $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit. Weiter seien $T_k \in [0, T]$, $k = 0, \dots, N$, mit $T_k < T_{k+1}$ die Zeitpunkte an denen Messungen der Position und Geschwindigkeit stattfinden. Die externen Kräfte werden durch die Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und die Propellerkraft durch die Steuerung $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ersetzt. Position und Geschwindigkeit ergeben sich aus der Differenzialgleichung (6.15).

0. Sei $k := 0$. Seien $\bar{x}(0)$, $\bar{v}(0)$ die gemessene Startposition und Geschwindigkeit. Die Funktion f wird im Intervall $[T_0, T_1]$ ersetzt durch $\hat{f} : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\hat{f}(t) := 0. \quad (6.28)$$

1. Berechnung der Steuerung $\hat{u} : [T_k, T_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ durch Lösen des Problems 6.2.4 mit $t_0 = T_k$, $t_f = T_{k+1}$, $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$ und $v(t_0) = \bar{v}(t_0)$. Dabei sind \bar{x} und \bar{v} die Messungen zu den entsprechenden Zeitpunkten.
2. Reproduktion der Funktion f auf dem Intervall $[T_{k-1}, T_k]$ mit Problem 6.2.2.
3. Approximation der Funktion f auf $[T_{k+1}, T_{k+2}]$ durch die quadratische Fortsetzung der Lösung von Problem 6.2.2
4. Setze $k := k + 1$ und gehe zu 1.

Abbildung 6.6 zeigt beispielhaft die Position und Geschwindigkeit über dem Zeitintervall $I := [0, 30]$ mit $I_k := [k, k + 1]$ für $f(t) = \sin(t)$. Im ersten Fall ist die Steuerung $u : [0, 30] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $u(t) := 0$. Im zweiten Fall wird sie mit Problem 6.2.5

berechnet. Eine ausführliche Untersuchung bezüglich der Akkuratessse, vor allem im Vergleich zum PID-Regler, folgt in Abschnitt 6.3 dieses Kapitels. Für diese Untersuchungen muss das stark vereinfachte DP-System erweitert werden. Dafür muss zunächst die Schiffsbewegung modelliert werden.

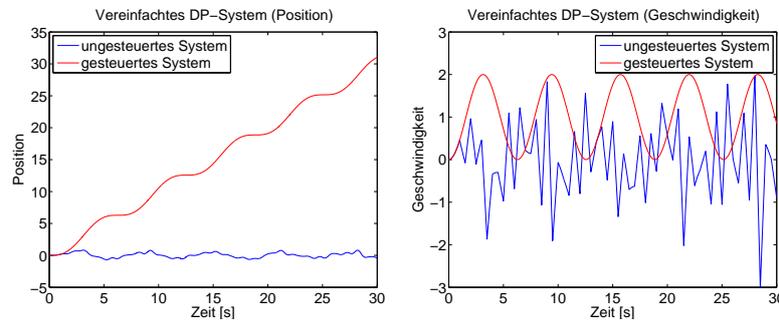


Abbildung 6.6: Beispiel: Vereinfachtes DP-System

6.2.2 Bewegungsgleichung - 6 Freiheitsgrade

Für die Simulation eines DP-Systems oder bei einer modellprädiktiven Regelung [34] ist ein Modell für die Schiffsbewegung notwendig. In der Bewegungsgleichung mit sechs Freiheitsgraden werden alle möglichen Freiheitsgrades eines Schiffes beachtet, (vgl. Abbildung 6.7). Da in einem DP-System nur die Position und die Ausrichtung eines Schif-

Aus urheberrechtlichen
Gründen wurde diese
Abbildung entfernt.

Abbildung 6.7: 6 Freiheitsgrade eines Schiffes (Quelle: Fossen [27])

fes relevant sind, reicht dort eine Bewegungsgleichung mit drei Freiheitsgraden aus. Die Lösungen der Bewegungsgleichung sind zum einen die Position $\eta = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)^T$ und zum anderen die Geschwindigkeit $\nu = (u, v, w, p, q, r)^T$. Die Geschwindigkeit wird bezüglich eines schiffsfesten Koordinatensystems angegeben, die Position hingegen bezüglich des NED-Systems (North-East-Down), [27, Kapitel 1]. Aufgrund dieser verschiedenen

Koordinatensysteme ist für die Berechnung der Position eine Transformation nötig. Es gilt nach [27]

$$\dot{\eta} = R(\eta)\nu \quad (6.29)$$

$$M_{\text{RB}}\dot{\nu} + M_{\text{A}}\dot{\nu}_r = \tau - C_{\text{RB}}(\nu)\nu - C_{\text{A}}(\nu_r)\nu_r - D(\nu_r)\nu_r - g(\eta) - g_0 \quad (6.30)$$

hierbei ist mit $c := \cos$, $s := \sin$ und $t := \tan$

$$R_{1,1}(\eta) := \begin{pmatrix} c(\psi)c(\theta) & -s(\psi)c(\phi) + c(\psi)s(\theta)s(\phi) & s(\psi)s(\phi) + c(\psi)c(\phi)s(\theta) \\ s(\psi)c(\theta) & c(\psi)c(\phi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi) & -c(\psi)s(\phi) + s(\theta)s(\psi)c(\phi) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{pmatrix},$$

$$R_{2,2}(\eta) := \begin{pmatrix} 1 & s(\phi)t(\theta) & c(\phi)t(\theta) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & s(\phi)/c(\theta) & c(\phi)/c(\theta) \end{pmatrix},$$

$$R(\eta) := \begin{pmatrix} & & 0 & 0 & 0 \\ & R_{1,1}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & R_{2,2}(\eta) & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix, beziehungsweise im Fall von drei Freiheitsgraden

$$R_3(\eta) := \begin{pmatrix} c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In $\tau \in \mathbb{R}^6$ werden die Kräfte der Umwelteinflüsse, Wellen und Wind sowie die Kräfte der Antriebe zusammengefasst. Die Gleichung (6.30) besteht aus vier einzelnen Komponenten der Starrkörper-, der hydrodynamischen und hydrostatischen Komponente sowie der Kräfte, die auf das Schiff wirken. Der Starrkörperanteil

$$M_{\text{RB}}\dot{\nu} + C_{\text{RB}}(\nu)\nu = \tau_{\text{RB}} \quad (6.31)$$

lässt sich aus den Gesetzen von Leonard Euler (1707-1783) und Isaac Newton (1643-1727) herleiten. Weiteres hierzu findet sich in [27, Kapitel 3]. Die konstante Matrix M_{RB} hat dann folgende Form

$$M_{\text{RB}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ 0 & m & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m & my_g & -mx_g & 0 \\ 0 & -mz_g & my_g & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_g & 0 & -mx_g & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_g & mx_g & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

wobei mit $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$ die Masse des Schiffes und mit $(x_g, y_g, z_g)^T$ der Schwerpunkt des Schiffes bezeichnet wird. Die Einträge I_x , I_y und I_z beschreiben die Trägheitsmomente um die jeweiligen Schiffsachsen x , y und z und die verbleibenden Einträge I_{xy} etc. die Produkte. Die Matrix $C_{RB}(\nu)$ ist die dazugehörige Coriolismatrix. Sie lässt sich direkt aus der Matrix M_{RB} und der Geschwindigkeit ν bestimmen.

Satz 6.2.6 (Coriolismatrix, [27])

Sei $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ die Massematrix des Schiffes und sei

$$M = M^T = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad (6.33)$$

mit $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Sei zudem der Kreuzproduktoperator S (vgl. [27, S.20 Def.2,2]) definiert mit

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Coriolismatrix $C(\nu)$

$$C(\nu) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & -S(M_{11}\nu_1 + M_{12}\nu_2) \\ -S(M_{11}\nu_1 + M_{12}\nu_2) & -S(M_{21}\nu_1 + M_{22}\nu_2) \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

mit $\nu_1 = (u, v, w)^T$ und $\nu_2 = (p, q, r)^T$.

Der hydrodynamische Teil besteht aus der Added Mass oder virtuellen Massematrix $M_A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ und ihrer dazugehörigen Coriolismatrix $C_A(\nu)$ sowie der Dämpfungsmatrix $D(\nu)$. Die Matrix M_A ist notwendig, da das Schiff während einer Beschleunigung nicht nur den Schiffskörper in Bewegung setzen muss, sondern auch das Wasser, welches das Schiff umgibt. Die Einträge dieser Matrizen lassen sich mit hydrodynamischen Programmen wie *Octopus* berechnen. Die hydrostatische Komponente $g(\eta) + g_0$ ist für das dynamische Positionieren irrelevant. $g(\eta)$ sind die Auftriebs- und Gravitationskräfte. Diese hängen bei Schiffen von deren transversen und longitudinalen metazentrischen Höhe GM_T und GM_L , deren Schwerpunkt $c_g \in \mathbb{R}^3$ als auch von der Schiffsform und der benästen Fläche A_{wp} ab. Einzelheiten hierzu und eine Definition zum Metazentrum finden sich in [27, Kapitel 4]. Die Auftriebskräften ergeben sich dann mit der Wasserdichte ρ und der Erdanziehungskraft \bar{g} durch

$$g(\eta) = \rho \bar{g} \begin{pmatrix} -A_{wp} z \theta \\ A_{wp} z \phi \\ A_{wp} z \end{pmatrix}, \quad (6.36)$$

wobei man bei der Approximation annimmt, dass die Winkel θ und ϕ sehr klein sind. Der Vektor $g_0 \in \mathbb{R}^6$ wird zur Stabilisierung hauptsächlich bei Plattformen verwendet. Hierbei wird Wasser in Ballasttanks der Plattform gepumpt, um sie damit bezüglich ihrer Roll- und Stampfbewegung zu stabilisieren. Der Vektor g_0 wird in Abhängigkeit von der

Anzahl der Ballasttanks, deren Position (x, y) und dem beinhalteten Wasservolumen V berechnet. Es gilt

$$g_0 = \rho g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^n V_i \\ -\sum_{i=1}^n y_i V_i \\ \sum_{i=1}^n x_i V_i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Sowohl $g(\eta)$ als auch g_0 sind in ihrer ersten, zweiten und sechsten Komponente Null und damit für die Bewegungsgleichung mit drei Freiheitsgraden, die bei DP-Systemen zum Einsatz kommt, irrelevant.

6.2.3 Umwelteinflüsse

Neben den Propellerkräften wirken auf das Schiff sowohl Wellen- und Windkräfte als auch die Meeresströmung (vgl. Bewegungsgleichung (6.30)). Diese lassen sich, wie auch die Bewegungsgleichung, beispielsweise für Simulationen modellieren.

Meeresströmung

Aufgrund von Tide, Wind oder auch unterschiedlichen Wassertemperaturen kann es zu Strömungen im Meer kommen [27, S. 221]. Die Fließgeschwindigkeit dieser Strömung $\nu_c = (u_c, v_c, w_c, 0, 0, 0)^T$ bildet zusammen mit der eigentlichen Schiffsgeschwindigkeit ν den relativen Geschwindigkeitsvektor

$$\nu_r := \nu - \nu_c, \quad (6.38)$$

der auf der linken Seite der Gleichung (6.30) eingeht.

Windkräfte

Als Wind wird die bewegte Luft über der Erde bezeichnet. Bei einem sich in Bewegung befindenden Schiff wird die Kraft, welche auf das Schiff wirkt, bezüglich der relativen Windgeschwindigkeit

$$V_{rw} = \sqrt{(u - u_w)^2 + (v - v_w)^2} \quad (6.39)$$

und dem Angriffswinkel γ_{rw} berechnet. Es gilt nach [27, S. 191]

$$\tau_{\text{Wind}} = \frac{1}{2} \rho_a V_{rw}^2 \begin{pmatrix} C_X(\gamma_{rw}) A_{F_w} \\ C_Y(\gamma_{rw}) A_{L_w} \\ C_Z(\gamma_{rw}) A_{F_w} \\ C_K(\gamma_{rw}) A_{L_w} H_{L_w} \\ C_M(\gamma_{rw}) A_{F_w} H_{F_w} \\ C_N(\gamma_{rw}) A_{L_w} L_{oa} \end{pmatrix}, \quad (6.40)$$

wobei ρ_a die Dichte der Luft bezeichnet, A_{F_w} und A_{L_w} die frontale und laterale Angriffsfläche des Windes, H_{L_w} und H_{F_w} den lateralen, beziehungsweise frontalen Schwerpunkt über der Wasserlinie und L_{oa} die gesamte Länge des Schiffes (length over all). Da die Dichte der Luft, wie auch die Dichte des Wassers, abhängig von ihrer Temperatur ist, wird im Folgenden von einer Lufttemperatur von $10^\circ C$ mit der dazugehörigen Luftdichte von $\rho_a = 1.247 \text{ kg/m}^3$ ausgegangen. Die Koeffizienten $C(\gamma_{rw})$ sind neben dem Angriffswinkel auch abhängig vom jeweiligen Schiff. Die zwei bekanntesten Methoden, diese Koeffizienten zu approximieren, stammen von Blendermann (1994) und Isherwood (1972). Für diese Arbeit ist es jedoch ausreichend, nur die Approximation der Koeffizienten nach Blendermann zu betrachten. Die Koeffizienten hängen von vier Parametern ab, welche für verschiedene Schiffstypen in einer Tabelle [7] hinterlegt sind. Zu diesen Parametern gehören die Widerstände längs als auch quer, CD_l und CD_t , der Faktor für das Rollmoment κ und der Parameter δ . Für die Windkoeffizienten ergeben sich daraus folgende Zusammenhänge:

$$C_X(\gamma_{rw}) = -CD_l \frac{A_{L_w}}{A_{F_w}} \frac{\cos(\gamma_{rw})}{1 - \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{CD_l}{CD_t}\right) \sin(2\gamma_{rw})^2} \quad (6.41)$$

$$C_Y(\gamma_{rw}) = CD_t \frac{\sin(\gamma_{rw})}{1 - \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{CD_l}{CD_t}\right) \sin(2\gamma_{rw})^2} \quad (6.42)$$

$$C_K(\gamma_{rw}) = \kappa C_Y(\gamma_{rw}) \quad (6.43)$$

$$C_N(\gamma_{rw}) = \left(\frac{s_L}{L_{oa}} - 0.18 \left(\gamma_{rw} - \frac{\pi}{2} \right) \right) C_Y(\gamma_{rw}). \quad (6.44)$$

Die Koeffizienten C_Z und C_M werden in [27] nicht approximiert, es wird jedoch angenommen, dass bei Schiffen die Windkraft in z -Richtung und das Windmoment um die y -Achse vernachlässigt werden kann, also $C_Z = C_M = 0$.

Wellenkräfte

Aufgrund der Komplexität der Wellenkräfte beschränkt sich dieser Abschnitt auf die grundlegenden Eigenschaften der Wellen.

Die Kräfte, die aufgrund von Wellen auf das Schiff wirken, lassen sich in Kräfte erster und zweiter Ordnung unterteilen. Dabei sind die Kräfte erster Ordnung stark oszillierend. Die Kräfte zweiter Ordnung werden auch als Driftkräfte bezeichnet, die sich im Gegensatz zu den Kräften erster Ordnung sehr wenig ändern. Gesamt berechnen sich die Wellenkräfte in Abhängigkeit des Schiffes, der Wellenhöhe, ihrer Richtung und ihrer Frequenz. Der exakte Einfluss der Wellen auf das jeweilige Schiff muss über hydrodynamische Programme in Modellversuchen ermittelt werden.

6.2.4 Problemformulierung

Während des DP-Betriebs stehen das Halten der Ausrichtung und der Position des Schiffes sowie die Energieeffizienz im Vordergrund. Diese unterschiedlichen Forderungen zusammen mit der Bewegungsgleichung (6.29) und dem Allokationsproblem 3.0.2 ergeben ein multikriterielles Optimalsteuerungsproblem.

Problem 6.2.7 (Optimalsteuerungsproblem für DP)

Sei $\eta : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^6$ die Position mit $\eta = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)^T$ und $\nu : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^6$ die Geschwindigkeit mit $\nu = (u, v, w, p, q, r)^T$ des Schiffes. Sei die Sollposition o.B.d.A. gegeben durch $\hat{\eta} := (0, 0, 0)^T$. Die Sollposition beschränkt sich dabei auf die drei Komponenten, x - und y -Position und Ausrichtung, also die erste, zweite und sechste Komponente des sechsdimensionalen Positionsvektors η . Die externen Umwelteinflüsse werden durch $\tau_{env} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^6$ beschrieben. Die verwendete Propelleranordnung besteht aus insgesamt $K \in \mathbb{N}$ Antrieben, deren Schub mit $\tau_{thr} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^6$ beschrieben wird. Die multikriterielle Zielfunktion ist gegeben durch

$$J(\eta, \nu, z) := (J_1(\eta, \nu), J_2(\eta, \nu), J_3(z)). \quad (6.45)$$

Die einzelnen Zielfunktionen beschreiben dabei das Halten der Ausrichtung

$$J_1(\eta, \nu) := \int_{t_0}^{t_f} \psi(t)^2 + r(t)^2 dt, \quad (6.46)$$

das Halten der Position

$$J_2(\eta, \nu) := \int_{t_0}^{t_f} (x(t)^2 + y(t)^2) + (u(t)^2 + v(t)^2) dt \quad (6.47)$$

und die Energieeffizienz

$$J_3(z) := \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^K (P_i(z(t)))^2 dt. \quad (6.48)$$

Gesucht ist nun eine Steuerung $\omega : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$, sodass die multikriterielle Zielfunktion $J(\eta, \nu)$ minimal wird und die Nebenbedingungen für $t \in [t_0, t_f]$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= R(\eta(t))\nu(t), \\ M_{RB}\dot{\nu}(t) + M_A\dot{\nu}_r(t) &= -C_{RB}(\nu(t))\nu(t) - C_A(\nu_r(t))\nu_r(t) - D(\nu_r(t))\nu_r(t) \\ &\quad - g(\eta(t)) - g_0 + \tau_{env}(t) + \tau_{thr}(z(t)), \\ \dot{z}(t) &= \tilde{z}\omega, \\ C(z(t)) &\leq 0, \\ \|\omega\|_\infty &\leq 1, \\ \eta(0) &= \eta_0, \quad \nu(0) = \nu_0, \quad z(0) = z_0, \end{aligned} \quad (6.49)$$

erfüllt sind. Die Zustandsvariable z beschreibt, wie im Allokationsproblem 4.1.9, die Steuerung der einzelnen Antriebe. Mit \tilde{z} wird deren Änderungsrate beschrieben und in der Funktion $C(z(t))$ werden alle propellerspezifischen Einschränkungen, wie beispielsweise die Leistungsrestriktion

$$P_{\min} \leq P(z(t)) \leq P_{\max} \quad (6.50)$$

zusammengefasst.

Wegen der klaren Priorisierung der einzelnen Zielfunktionen wird zur Lösung dieses multikriteriellen Problems die lexikographische Optimierung verwendet. Dabei wird zunächst Zielfunktion J_1 , dann Zielfunktion J_2 und zuletzt Zielfunktion J_3 minimiert. Wobei zu beachten ist, dass die ersten beiden Zielfunktionen wiederum in

$$J_{1,1}(\eta, \nu) := \psi(t_f)^2 + r(t_f)^2 \quad (6.51)$$

und

$$J_{1,2}(\eta, \nu) := \int_{t_0}^{t_f} \psi(t)^2 + r(t)^2 dt \quad (6.52)$$

aufgeteilt werden (vgl. Wahl der Zielfunktion in Abschnitt 6.2.1). Die Formulierung der zweiten Zielfunktion folgt analog.

Kombiniert mit der Approximation der Kraft lässt sich nun ein DP-System mit optimaler Steuerung aufstellen. Die Approximation der externen Kräfte erfolgt dabei analog zum eindimensionalen Fall.

Problem 6.2.8 (DP-System mit optimaler Steuerung)

Seien $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^6$ die Position und $\nu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^6$ die Geschwindigkeit. Weiter seien $T_k \in [0, T]$, $k = 0, \dots, N$, mit $T_k < T_{k+1}$ die Zeitpunkte, an denen Messungen der Position und Geschwindigkeit stattfinden. Die externen Kräfte werden durch die Funktion $\tau_{env} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^6$ beschrieben. Die Propelleranordnung besteht aus K Antrieben, deren Schub $\tau_{thr}(z(t))$ abhängig von der Propellersteuerung $z(t)$ ist.

0. Sei $k := 0$. Seien $\bar{\eta}(0)$, $\bar{\nu}(0)$ die gemessene Startposition und Geschwindigkeit und sei $z(0) = z_0$ die Startsteuerung der Antriebe. Die externe Kraft τ_{env} wird im Intervall $[T_0, T_1]$ durch $\hat{\tau}_{env} : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\hat{\tau}_{env} := (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (6.53)$$

ersetzt.

1. Berechnung der Steuerung $\hat{\omega} : [T_k, T_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ durch Lösen des Problems 6.2.7 mit $t_0 = T_k$, $t_f = T_{k+1}$, $\eta(t_0) = \bar{\eta}(t_0)$ und $\nu(t_0) = \bar{\nu}(t_0)$. Dabei sind $\bar{\eta}$ und $\bar{\nu}$ die Messungen zu den entsprechenden Zeitpunkten.
2. Reproduktion der externen Kraft τ_{env} auf dem Intervall $[T_{k-1}, T_k]$ analog zu Problem 6.2.2.
3. Approximation der Funktion τ_{env} auf $[T_{k+1}, T_{k+2}]$ durch die quadratische Fortsetzung der Lösung von Problem 6.2.2

4. Setze $k := k + 1$ und gehe zu 1.

Beispiel 6.2.9 (DP-Betrieb mit konstanter externer Kraft)

Sei das Schiff und die Propelleranordnung aus Beispiel 6.1.1 gegeben. Sei die externe Kraft konstant mit $\tau_{env} := (250, 0, 0, 0, 0, 0)^T \text{ kN}$. Untersucht werden in diesem Beispiel die maximale Abweichung von der Sollposition und die Abweichung sowie die Leistung über das gesamte Zeitintervall von einer halben Stunde. Im Vergleich stehen dabei das dynamische Positionieren mit einem PID-Regler und mit optimaler Steuerung. Dabei ist beim dynamischen Positionieren mit optimaler Steuerung einmal die externe Kraft bekannt und einmal muss sie approximiert werden. Da die y -Komponente sowie die Ausrichtung und Rollbewegung in diesem Fall irrelevant sind, zeigt Abbildung 6.9a nur die Position in x -Richtung für alle drei Varianten. Man sieht, dass das Schiff mit der optimalen Steuerung deutlich besser die Position halten kann als mit dem PID-Regler. Während die maximale Abweichung mit dem PID-Regler 9.04 m beträgt, ist sie mit optimaler Steuerung bei 0.08 m , beziehungsweise bei Approximation der externen Kraft 0.33 m . Vergleicht man nur die Varianten mit Optimalsteuerung miteinander, so zeigt sich, dass sich die Ergebnisse nur ein der ersten halben Minute voneinander unterscheiden. Aufgrund der konstanten externen Kraft kann schon nach wenigen Iterationsschritten die externen Kraft exakt vorhergesagt werden. Abbildung 6.8 zeigt den diesen direkten

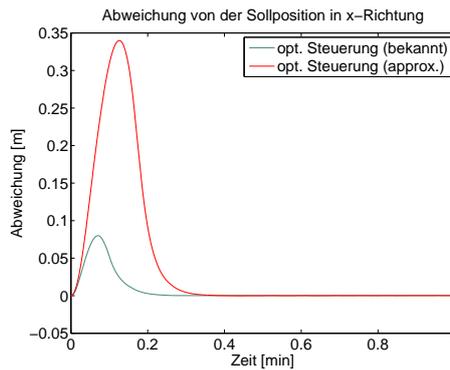


Abbildung 6.8: Vergleich: externe Kraft bekannt und approximiert

Vergleich für die erste simulierte Minute. Die Leistung, zu sehen in Abbildung 6.9b, liegt in allen drei Fällen sehr nah beieinander. Während der gesamten 30 min benötigt aber das Schiff mit dem PID-Regler mit 1.89 GJ und das Schiff mit optimaler Steuerung 1.88 GJ , beziehungsweise 1.89 GJ .

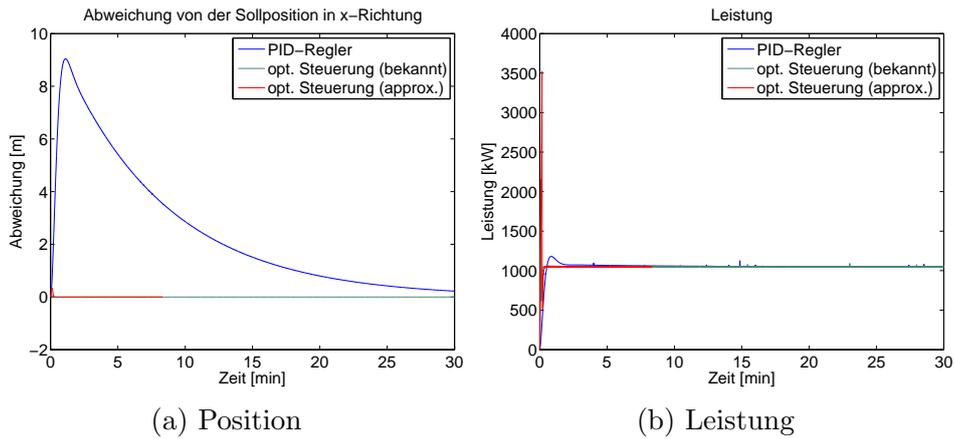


Abbildung 6.9: Beispiel: Vergleich PID-Regler mit optimaler Steuerung

Zusammenfassend zeigt Beispiel 6.2.9, dass es mit dem selben Energieaufwand möglich ist mit der optimalen Steuerung, ob nun mit Kenntnis der exakten externen Kraft oder einer Approximation, eine deutlich bessere Akkuratess zu erreichen ist, als mit dem PID-Regler.

6.3 Analyse des DP-Verhaltens von VSP und Azimutpropeller

Beim dynamischen Positionieren werden sowohl VSP als auch Azimutpropeller eingesetzt. Wie in den Untersuchungen in der Allokation schon gesehen, haben beide Antriebe ihre Vor- und Nachteile. Um eine Analyse des DP-Verhaltens beider Antriebe durchführen zu können, wird ein viertelstündiger DP-Betrieb mit realistischen Umweltbedingungen auf der Nordsee simuliert.

6.3.1 Durchschnittliche Wetterbedingungen auf der Nordsee

Für eine möglichst realistische Situation werden Durchschnittswerte der Forschungsplattform *Fino 2* verwendet. Die Forschungsplattform liegt 33 km nördlich der Insel Rügen im Dreiländereck Dänemark-Deutschland-Schweden am Südrand der Untiefe Kriegers Flak [8]. An dieser Stelle wird über ein Jahr eine durchschnittliche Windgeschwindigkeit von 9.4 m/s gemessen. Dies entspricht einer Windstärke 5, also einem frischen Wind. Die Wellen, die bedingt durch diesen Wind erzeugt werden, haben bei dieser Windgeschwindigkeit eine Höhe von 1.53 – 1.97 m und eine Periodendauer von 4.5 – 5 s. Für die Simulation wurde jeweils der höhere der beiden Werte verwendet. Des Weiteren wird angenommen, dass die Wellenrichtung der Windrichtung entspricht. Neben den Wellen wird auch die Meeresströmung vom Wind beeinflusst. Messungen ergaben eine durchschnittliche Strömungsgeschwindigkeit in Windrichtung von 0.8 m/s aufgrund des Windes. Neben der winderzeugten Strömung existiert zudem noch die tidenerzeugte Strömung von etwa 0.1 m/s. In den folgenden Simulationen wird davon ausgegangen, dass diese von Nord nach Süd strömt und ihre Richtung während der Simulation nicht ändert. Abbildung 6.10a zeigt, wie weit sich ein Schiff, in diesem Fall das Supply Vessel aus Beispiel 6.1.1, nur durch Umwelteinflüsse von seiner Startposition entfernen kann. Für die Analyse wurden acht (Nord, Nord-Ost, Ost, Süd-Ost, Süd, Süd-West, West, Nord-West) verschiedenen Windrichtungen und damit auch die Wellen- und Strömungsrichtungen simuliert. Exemplarisch zeigt Abbildung 6.10b den Verlauf der Schiffsausrichtung bei Wind in nordwestlicher, nord-östlicher und süd-östlicher Richtung.

6.3.2 DP-Verhalten von VSP und Azimutpropeller

Für die Analyse des DP-Verhaltens der beiden Antriebe besteht aus zwei Untersuchungen. In der ersten Untersuchung wird das klassische DP-System mit einem PID-Regler verwendet um das DP-Verhalten der Antriebe zu vergleichen. Die zweite Untersuchung basiert auf der Problemformulierung 6.2.8, also der Optimalsteuerung. In der zweiten Untersuchung kann damit sichergestellt werden, dass beide Antriebe gleich behandelt werden. Da die Optimalität der PID-Koeffizienten für den VSP und den Azimutpropeller nicht sichergestellt werden kann, liefert hier ein Vergleich zwar eine Tendenz über das DP-Verhalten, jedoch keine sichere Aussage.

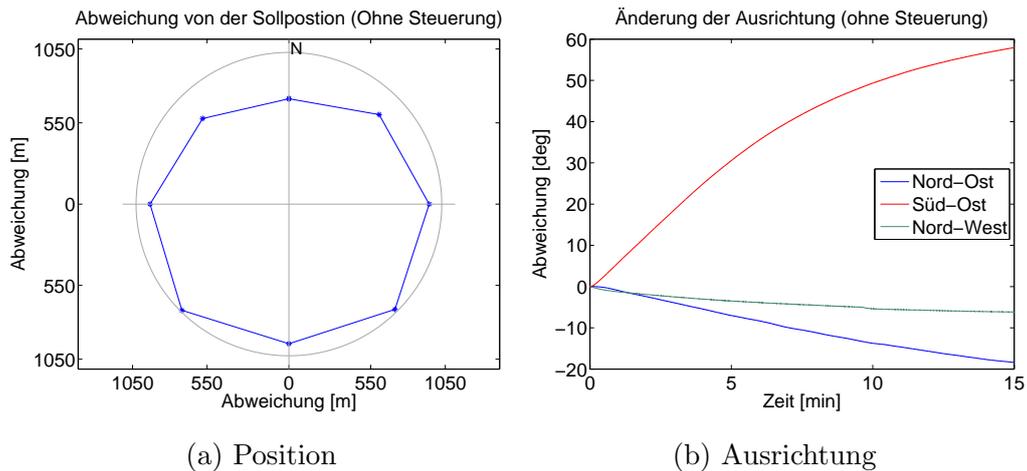


Abbildung 6.10: Abweichung von der Sollposition durch Umwelteinflüsse

DP-Analyse mit einem PID-Regler

Die DP-Analyse wurden die PID-Koeffizienten aus Kapitel 6.1 sowohl für den VSP als auch den Azimutpropeller verwendet. Hier kann also nicht gewährleistet werden, dass für beide Antriebe die optimalen Koeffizienten vorliegen. Wie auch schon in Kapitel 6.1 sind zwei Hauptantriebe, also VSP oder Azimutpropeller, am Heck des Schiffes angebracht. Unterstützt werden diese Antriebe durch einen Bugstrahler.

In der Analyse des DP-Verhaltens wird zunächst untersucht wie und ob sich die beiden Antriebe, VSP und Azimutpropeller, bezüglich ihrer Akkuratess und Energieeffizienz voneinander unterscheiden. Abbildung 6.11 zeigt exemplarisch die Änderung der Schiffsposition in x-Richtung bei Wind in nördlicher und nordöstlicher Richtung. In beiden

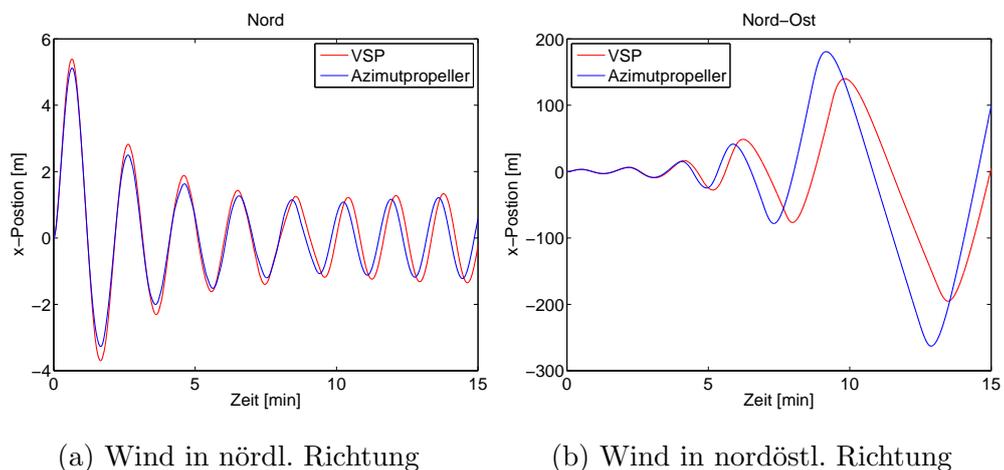


Abbildung 6.11: Änderung der x-Position, PID-Regler

Fällen ist die Schiffsposition, beziehungsweise deren Verlauf, des mit VSP betriebenen Schiffes ähnlich des mit Azimutpropeller betriebenen Schiffes. Diese Eigenschaft findet

sich auch in der Ausrichtung und y-Position der Schiffe wieder. Zusammenfassend zeigt Abbildung 6.12 jeweils die durchschnittliche Abweichung des Schiffes von der Sollposition und Ausrichtung der gesamten DP-Analyse. Die beste Akkuratess bezüglich Ausrich-

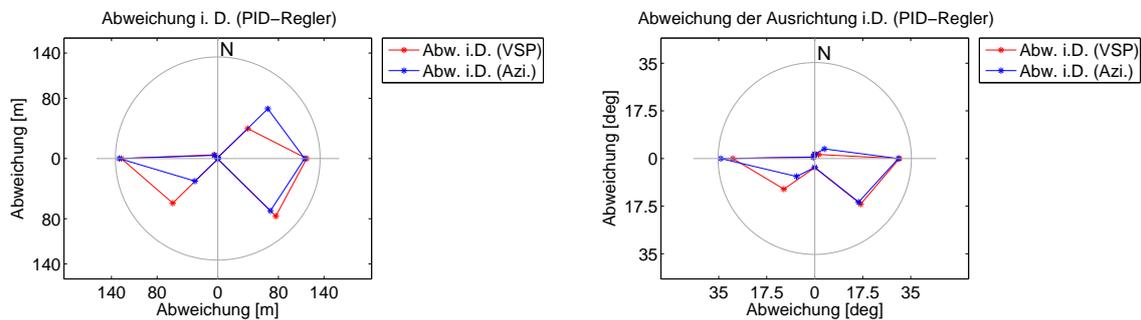


Abbildung 6.12: DP-Analyse: DP-Analyse: durchschnittl. Abweichung, PID-Regler

ung und Position ergibt sich bei beiden Schiffen bei Wind in nördlicher oder südlicher Richtung. Aufgrund der Propelleranordnung fällt es den Antrieben bei Wind von der Seite oder schräg vorne, beziehungsweise hinten, deutlich schwerer die Position und Ausrichtung zu halten. Während bei Wind in westliche oder östliche Richtung die Propeller nicht stark genug sind die Position zu halten, lässt sich bei einem Wind von schräg vorne oder hinten ein „aufschaukeln“ des Schiffes beobachten (vgl. Abbildung 6.11b). Dieses Verhalten lässt auf darauf schließen, dass die hier verwendeten PID-Koeffizienten, zwar geeignet sind das Schiff bei Wind und Wellen in nördliche und südliche Richtung auf Position zu halten, nicht jedoch bei schräg auf das Schiff wirkendem Wind und Wellen. Zusammengefasst ergibt sich folgendes Resultat: Bei Verwendung derselben PID-Koeffizienten für den Azimutpropeller und den VSP ergeben sich ähnliche Ergebnisse, wobei beide Propeller nicht optimal genutzt werden können. Zudem sind die hier verwendeten Koeffizienten nicht für jede Umweltbedingung geeignet. Die Wahl von sogenannten optimalen Koeffizienten ist nicht trivial und bedarf noch einiger Forschung. Die einzelnen Resultate der gesamten DP-Analyse finden sich im Anhang.

DP-Analyse mit optimaler Steuerung

Die DP-Analyse mit optimaler Steuerung wurde unter den selben Voraussetzungen, also Umweltbedingungen und Propelleranordnung durchgeführt, wie die Analyse mit dem PID-Regler. Das Verhalten des Schiffes wird exemplarisch für drei Windrichtungen veranschaulicht.

Wind in nördliche Richtung: Obwohl in diesem Fall schon mit dem PID-Regler relativ gute Ergebnisse erzielt werden konnten, reduziert sich mit Optimalsteuerung die Abweichung des Schiffes von der Sollposition auf maximal 20 cm (vgl. Abbildung 6.13).

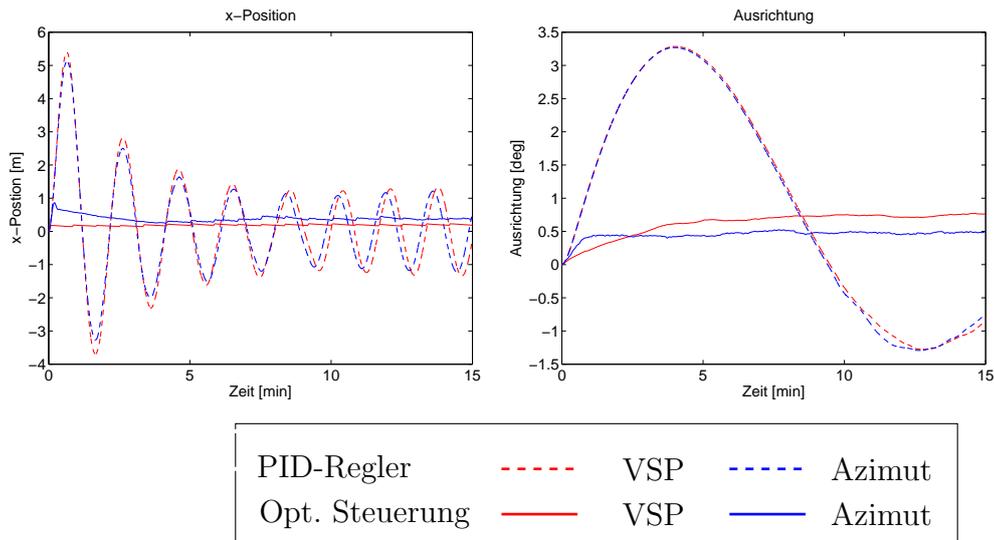


Abbildung 6.13: DP-Analyse: Optimale Steuerung (Nord)

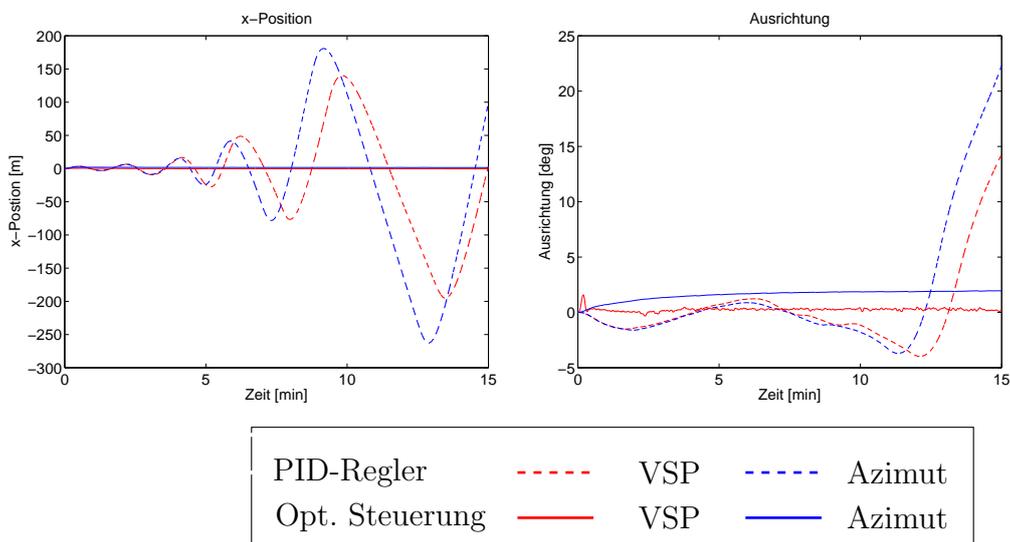


Abbildung 6.14: DP-Analyse: Optimale Steuerung (Nord-Ost)

Wind in nordöstliche Richtung: An diesem Fall lässt sich sehr schön zeigen (vgl. Abbildung 6.14), dass es nicht zwangsweise an den Antrieben liegen muss, wenn die Position nicht gehalten werden kann. Während man beim PID-Regler ein aufschaukeln beobachten kann, ist es mit Optimalsteuerung möglich, sowohl die Ausrichtung als auch die Position zu halten.

Wind in östliche Richtung: Aufgrund der Propelleranordnung und Stärke der Propeller ist es nicht möglich das Schiff auf Position zu halten, falls der Wind direkt von der Seite auf das Schiff wirkt. Allerdings kann mittels Optimalsteuerung dafür gesorgt werden, dass die Ausrichtung die höchste Priorität hat und so gut wie möglich gehalten

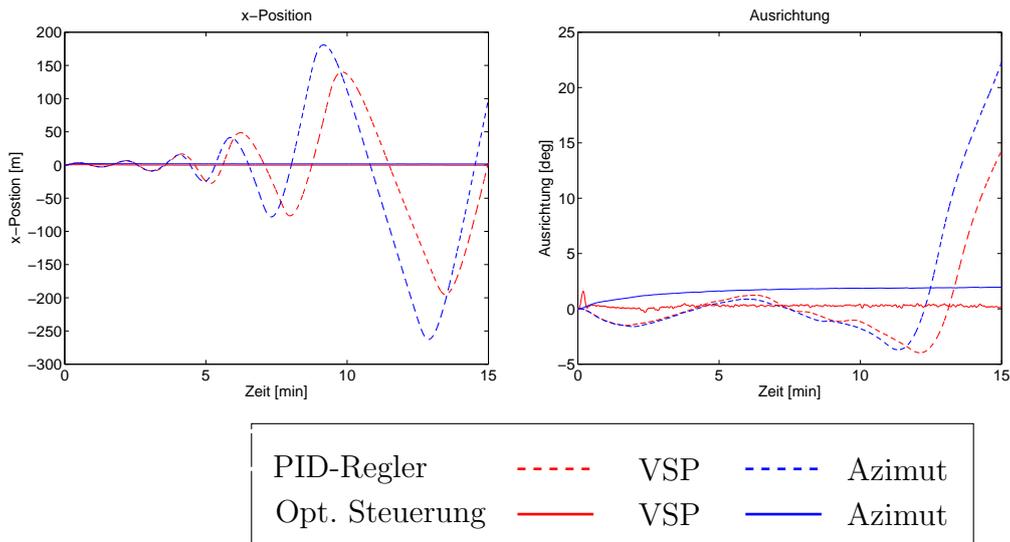


Abbildung 6.15: DP-Analyse: Optimale Steuerung (Ost)

wird, während mit dem PID-Regler weder Position noch Ausrichtung gehalten werden konnten. In Abbildung 6.15 wird dies veranschaulicht.

Vergleich von VSP und Azimutpropeller im DP-Betrieb: Im direkten Vergleich von VSP und Azimutpropeller zeigt sich, dass der VSP um 85% besser seine Ausrichtung und zu 15% besser seine Position halten kann als der Azimutpropeller. In Abbildung 6.16 finden sich hierzu die durchschnittlichen Abweichung von der Sollposition und der Ausrichtung. Daraus erschließt sich, dass der VSP, falls er optimal, sowohl in der Allokation

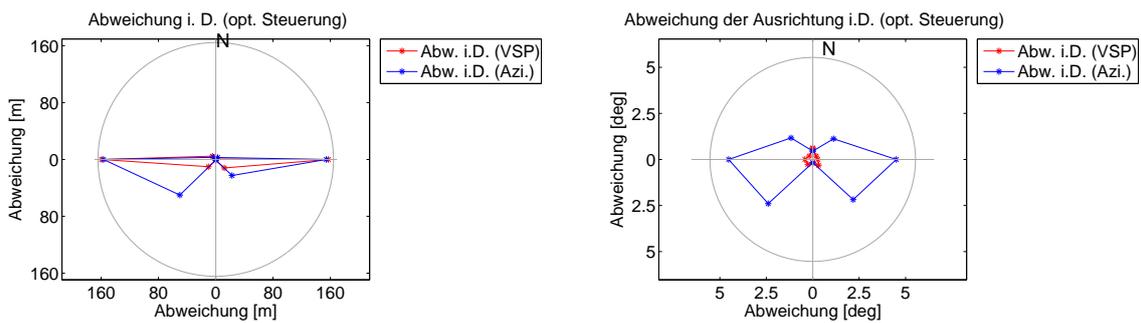


Abbildung 6.16: DP-Analyse: durchschnittl. Abweichung, Optimalsteuerung

tion als auch in der Regelung ausgenutzt wird, aufgrund seiner Steuerlogik etwas besser für den DP-Betrieb geeignet ist als der Azimutpropeller.

Wahl des Startwertes

Beim dynamischen Positionieren mit optimaler Steuerung spielt die Wahl des Startwertes eine große Rolle. In der folgenden Abbildung 6.17 wird der Einfluss dieses Startwertes auf die Leistung veranschaulicht. Exemplarisch werden hierfür die ersten 30 s eines DP-Betriebs mit Nordwind simuliert. Als Startwerte dienen drei verschiedene Werte. Zum einen der Nullvektor und zum anderen die Lösung der lexikographischen Optimierung des Allokationsproblems. Dabei wird einmal die Lösung des ersten Optimierungsproblems, also das Erzeugen der geforderten Kraft, und einmal die Lösung des zweiten Optimierungsproblems, also das leistungsminimale Erzeugen der geforderten Kraft, verwendet. Als geforderte Kraft wird hierbei die negative Approximation externen Kraft verwendet

$$\hat{\tau}(t) := -\hat{f}(t). \quad (6.54)$$

In der Analyse wurde als Startwert die Lösung des ersten Optimierungsproblem der Allokation verwendet. Es zeigt sich, dass mit dem Nullvektor die Optimierungsprobleme

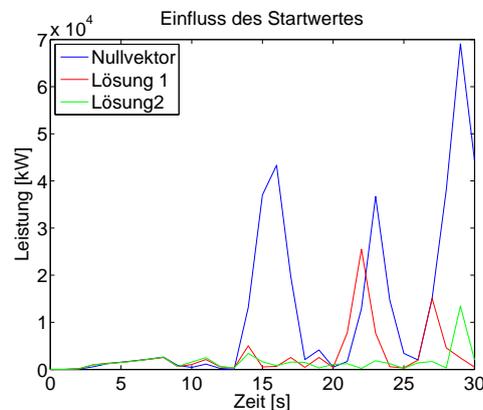


Abbildung 6.17: Einfluss des Startwertes

weder bezüglich der Akkuratessse noch bezüglich der Leistung zufriedenstellend gelöst werden konnten. Bei Verwendung der Lösung des ersten Optimierungsproblems wurde zwar die Position gut gehalten, jedoch unter starken Leistungsschwankungen. Mit der Lösung des zweiten Optimierungsproblems, das schon an sich eine Leistungsminimierung beinhaltet, sind sowohl Halten der Position als auch ein geringer Energieverbrauch möglich. Dies lässt vermuten, dass die Analyse, durchgeführt mit einem besser gewählten Startwert für Optimierung, neben der sehr guten Akkuratessse auch einen geringen Energieverbrauch ermöglicht.

Rechenzeit

Ein großer Nachteil der optimalen Steuerung ist die Rechenzeit. Aufgrund der vielen zu lösenden Optimierungsprobleme erhöht sich die Rechenzeit im Vergleich zum PID-Regler vor allem wegen der Approximation der externen Kraft. Im Schnitt benötigt man für eine Simulationssekunde ohne eine Steuerung 0.79 s, mit einer PID-Regelung 2.3 s

und mit optimaler Steuerungen 7 min . Dabei nimmt die Approximation der externen Kraft mit 80% am meisten Zeit in Anspruch. Bei einem Verzicht auf die Approximation der Kraft kann man also einiges an Rechenzeit einsparen, benötigt jedoch immer noch 35-mal länger als mit dem PID-Regler. Zusätzlich muss mit einer schlechteren Akkuratess gerechnet werden, da das System nur noch auf eine Abweichung reagieren kann. Eine weitere Reduktion der Rechenzeit ist sicherlich durch die Wahl von verbesserten Algorithmen möglich, steht aber nicht im Fokus dieser Arbeit.

6.4 Ausblick: Integration von Rollstabilisierung in das DP-System mit VSP

Aufgrund von Wind und Wellen kann es während des DP-Betriebes zu einer Rollbewegung, also einer Bewegung um die Längsachse des Schiffes kommen. Je nach Stärke der Rollbewegung kann sich dabei beispielsweise die Ladung verschieben. Um dadurch für die Arbeiter auftretende gefährliche Situationen zu vermeiden, wird versucht, die Rollbewegung so gering wie möglich zu halten. Eine weitere Motivation, die Rollbewegung zu reduzieren, liefert eine typische Anwendung eines Plattformversorgers. Eine wichtige Aufgabe des Versorgers ist es, sich neben einer Plattform zu positionieren, um Güter auf oder von der Plattform zu verladen. Kommt es dabei zu einer starken Rollbewegung, so kann zum einen nicht sicher gewährleistet werden, dass die Güter ohne Schaden transportiert werden und zum anderen kann das Schiff mit seinem meist hohem Aufbau am Bug (vgl. Abbildung der North Sea Giant 1.1) die Plattform beschädigen. Um dies zu vermeiden, sind die Plattformversorger neben einem DP-System zusätzlich mit einer Rollstabilisierung ausgestattet. Abbildung 6.18 zeigt deren Prinzip. Vereinfacht formuliert erzeugen die Antriebe bei der Rollstabilisierung ein Moment um die x-Achse des Schiffes, das dem Moment, welches beispielsweise durch Wellen induziert wird, entgegen wirkt.

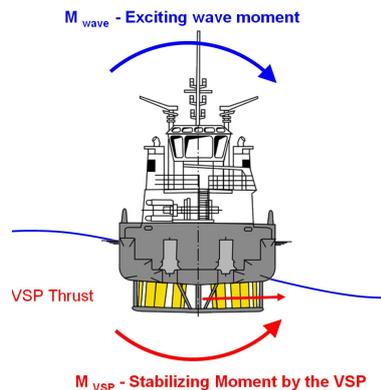


Abbildung 6.18: Prinzip der Rollstabilisierung (Quelle [38])

In Anwendungen, bei denen dynamisches Positionieren und Rollstabilisierung miteinander kombiniert werden, hat das dynamische Positionieren höchste Priorität. Das heißt, während des Positionierens wird über die Allokation eine Kraftanforderung auf die Antriebe verteilt. Der Rollstabilisierung stehen nach dieser Verteilung nur noch 40% der noch verbleibenden Schubkraft der einzelnen Propeller zur Verfügung [33]. Ohne eine entsprechende Rückkopplung kann es dabei zu unerwünschten Nebeneffekten, wie eine unkontrollierte Änderung der Ausrichtung beim dynamischen Positionieren kommen.

Alternativ kann die Rollstabilisierung auch in das Problem 6.2.7 mit die Zielfunktion

$$J_4(\eta, \nu) := \int_{t_0}^{t_f} \phi(t)^2 + r(t)^2 dt, \quad (6.55)$$

eingebunden werden.

In der lexikographischen Optimierung folgt die Optimierung dieser Zielfunktion dann nach der Optimierung von Ausrichtung und Position. Somit wird die Priorität des dynamischen Positionierens erhalten und zusätzlich eine optimale Rollstabilisierung erreicht. Im folgenden Beispiel 6.4.1 wird die Integration der Rollstabilisierung in ein DP-System veranschaulicht. Die Kräfte und Momente, die in diesem Fall auf das Schiff wirken, dienen zur Veranschaulichung und sind nicht von realen Umweltbedingungen motiviert.

Beispiel 6.4.1 (Rollstabilisierung) Sei das Schiff aus Beispiel 6.1.1 mit einer Propelleranordnung von 3 VSP, zwei im Heck einer im Bug gegeben. Die Kräfte und Momente, die 10 min auf das Schiff wirken, induzieren dabei neben der Änderung von Position und Ausrichtung auch eine Rollbewegung. Sei $\hat{\tau} : [0, 600] \rightarrow \mathbb{R}^6$ die externe Kraft definiert durch

$$\hat{\tau}(t) := (250, 100, 0, 2 \cdot 10^4 \sin(\pi/10t), 0, -500)^T \text{ kN}. \quad (6.56)$$

Reduktion der Rollbewegung: Bei einer Beschränkung auf die Rollreduktion mittels optimaler Steuerung ist mit dieser Antriebskonstellation eine Rollreduktion um 41% möglich. Abbildung 6.19 zeigt die Rollbewegung des Schiffes mit und ohne Rollreduktion.

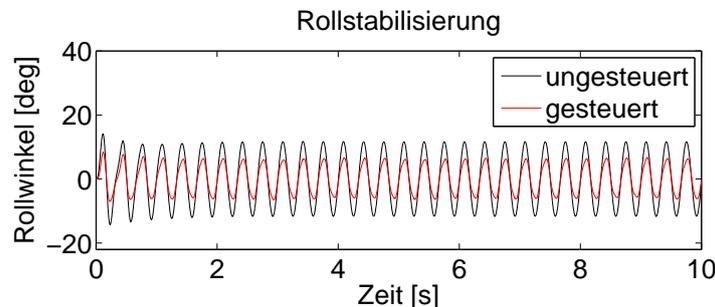


Abbildung 6.19: Beispiel: Rollstabilisierung

Rollstabilisierung und DP: Bei der Kombination von Rollstabilisierung mit dynamischem Positionieren wird zunächst versucht, die Ausrichtung zu halten (vgl. Abbildung 6.20). Es zeigt sich, dass in diesem Fall eine Stabilisierung der Ausrichtung auch das Schiff auf seine Sollposition bringt und die Rollbewegung minimal um 4.3% reduziert. In einem zweiten Schritt wird die Abweichung von der Sollposition so weit wie möglich unter der Voraussetzung reduziert, dass die Ausrichtung gehalten wird. Da in diesem Fall die Sollposition schon im ersten Schritt erreicht wurde, tritt im zweiten Schritt keine Veränderung zum ersten auf.

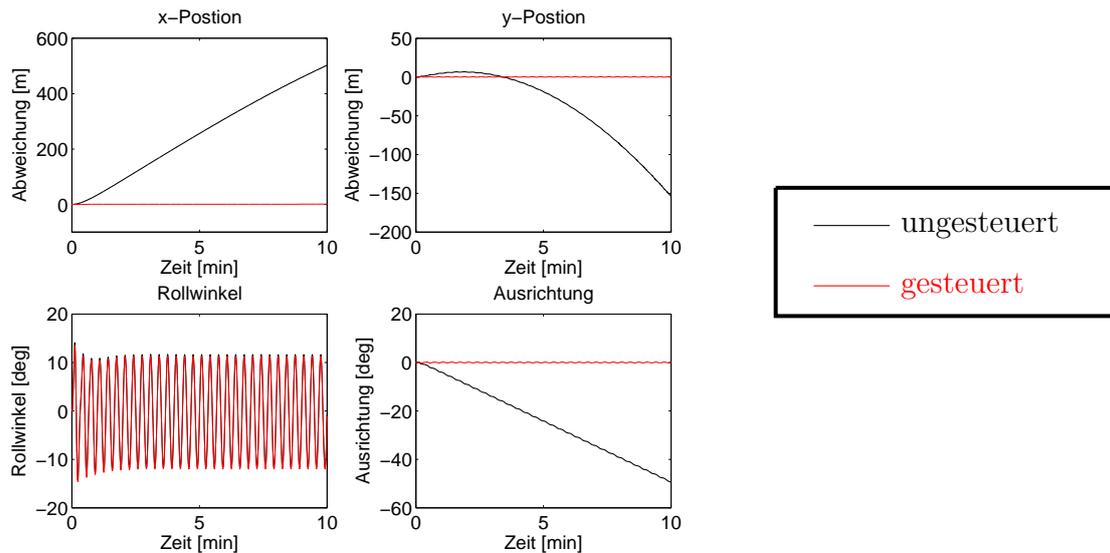


Abbildung 6.20: Beispiel: Rollstabilisierung mit DP (1)

Aufgrund der höheren Priorität des dynamischen Positionierens im Gegensatz zur Rollstabilisierung folgt nun die Rollstabilisierung unter den Voraussetzungen, dass zum einen die Ausrichtung und zum anderen die Position gehalten wird. Mit diesen Voraussetzungen kann die Rollbewegung um insgesamt 4.8% reduziert werden (vgl. Abbildung 6.21).

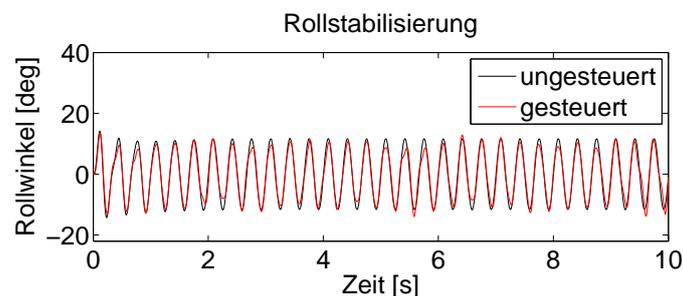


Abbildung 6.21: Beispiel: Rollstabilisierung mit DP (2)

Das Beispiel 6.4.1 zeigt, dass sich die Rollstabilisierung gut in ein DP-System integrieren lässt ohne dabei negative Effekte, beispielsweise in der Ausrichtung des Schiffes, auszulösen und trotzdem die Schubkraft und Flexibilität der Propeller optimal ausgenutzt werden. Rückblickend lässt sich zusammenfassen, dass der VSP durch eine auf ihn abgestimmte Ansteuerung noch effizienter im DP-Betrieb eingesetzt werden kann. Eine weitere Verbesserung im DP-Betrieb lässt sich in der Akkuratess und im Energieverbrauch durch eine optimale Steuerung im DP-System, die Allokation und Regler kombiniert, erzielen. Aufgrund der multikriteriellen Formulierung können beliebig Schwerpunkte gesetzt und weitere Komponenten hinzugefügt werden. Neben dem normalen DP-Betrieb ist damit auch eine einfache Kombination mit der Rollstabilisierung möglich.

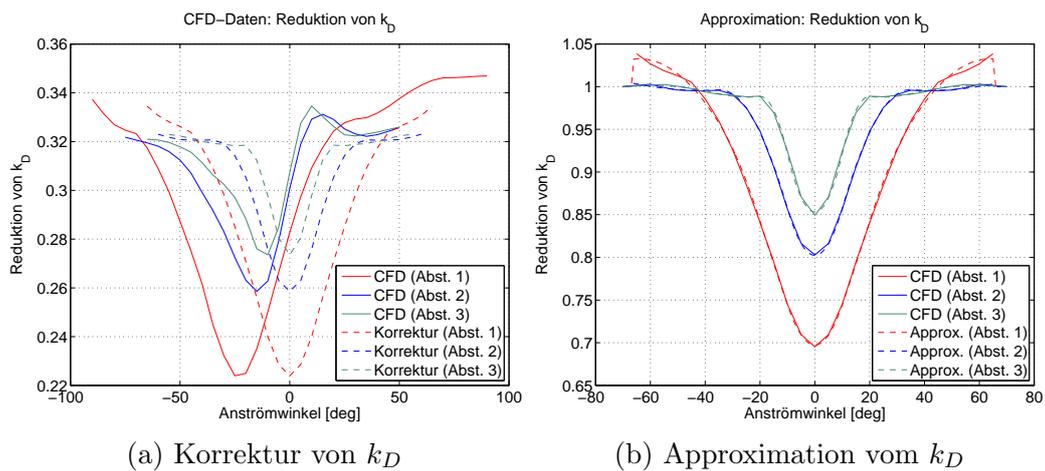
Anhang A

Interaktionen

Neben der Interaktion von Propeller und Schiff und der Interaktion Propeller und Anströmung wurde auch ein Modell für der Propeller-Propeller-Interaktion aufgestellt. In Kapitel 4.1 wurden hierfür schon die Daten für den k_S Wert und den Schubwinkel abgebildet.

Propeller-Propeller-Interaktion

CFD-Ergebnisse, Korrektur und Approximation des Einflusses der Propeller-Propeller-Interaktion auf die Leistung.



(a) Korrektur von k_D

(b) Approximation vom k_D

Abbildung 6.22: Prop.-Prop.-Interaktion: Leistung (Daten → Quelle: Voith Turbo)
(Abstand 1: 11.2 m, Abstand 2: 8 m, Abstand 3: 4.8 m)

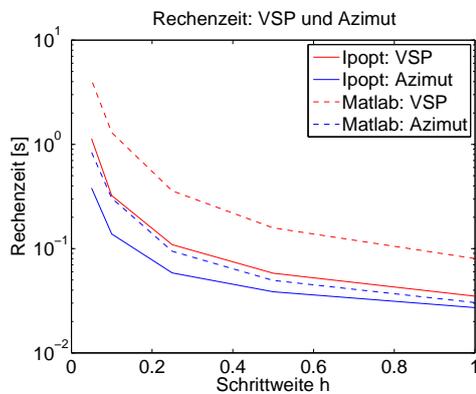
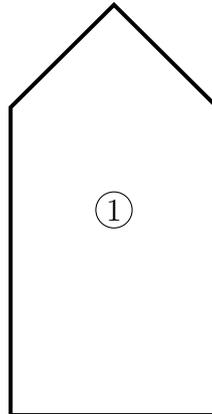
Fall- und Parameterstudien

Als Test des Allokationsmoduls wurden eine Reihe an Parameterstudien durchgeführt. Insgesamt wurden neun verschiedene Antriebskonstellationen (vgl. Tabelle 6.1) untersucht. Als Hauptpropeller werden dabei VSP und Azimutpropeller bezeichnet, Nebenantrieb ist der Bugstrahler. Vergleichend werden in jedem Fall die Rechenzeiten von Ipopt und Matlab gegenübergestellt. Zudem kommt es wegen der unterschiedlichen Anzahl an Variablen zu einem Vergleich von VSP und Azimutpropeller. Wegen ihrer unterschiedlichen Komplexität werden die Berechnungen ohne Interaktionen, mit Propeller-Schiff-Interaktion und die Berechnungen mit Propeller-Propeller-Interaktion und Propeller-Anströmung bezüglich ihrer Rechenzeit, Fehler und ihrer Anzahl an erfolgreichen Berechnungen gegenübergestellt.

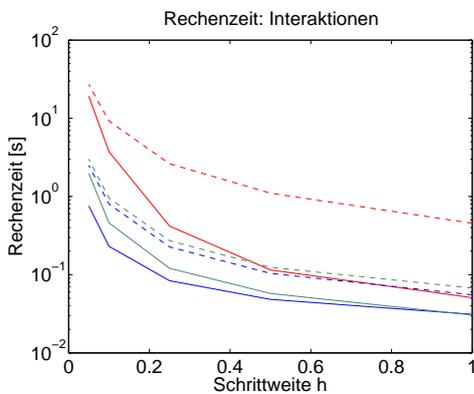
Fall	Haupt	Neben	Position Hauptantriebe [m]	Position Bugstrahler [m]
1	1	0	(0, 0)	–
2	2	0	(-28, ± 4)	–
3	2	0	(±28, 0)	–
4	2	1	(-28, ± 4)	(35.5, 0)
5	3	0	((-28, ± 4), (35.5, 0))	–
6	4	0	((-28, ± 4), (37.4, 1.6), (33.8, -1.6))	–
7	2	2	(-28, ± 4)	((37.4, 1.6), (33.8, -1.6))
8	5	1	((-28, ± 3.2), (-31.5, 0) (37.4, 1.6), (33.8, -1.6))	(42, 0)
9	8	0	((±26.5, ± 49.5), (±32, ±44))	–

Tabelle 6.1: Parameterstudie: Propelleranordnungen

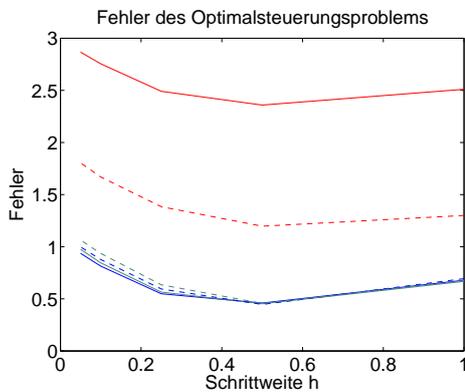
Fall 1: Ein Hauptantrieb



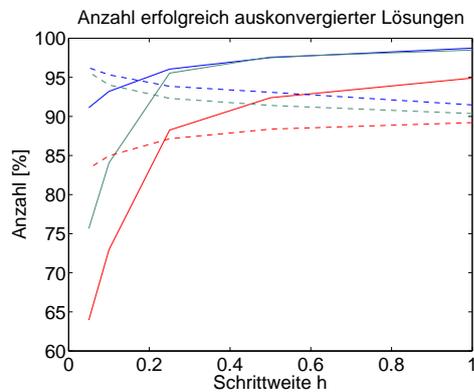
(a) Fall 1: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 1: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 1: Fehler

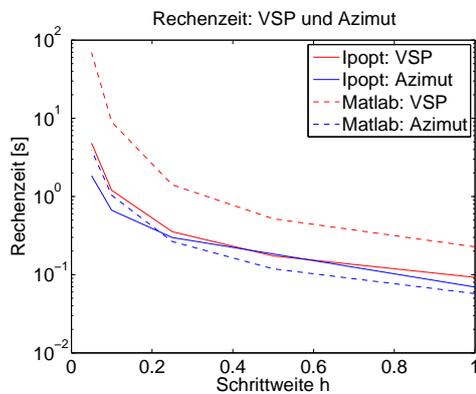
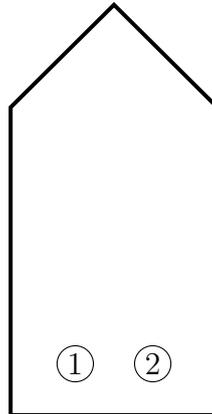


(d) Fall 1: # optimaler Lösungen

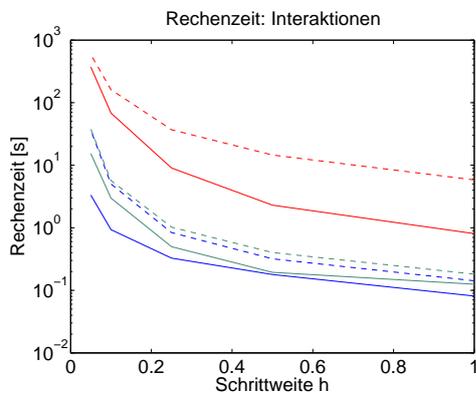
Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.23: Parameterstudie: Fall 1

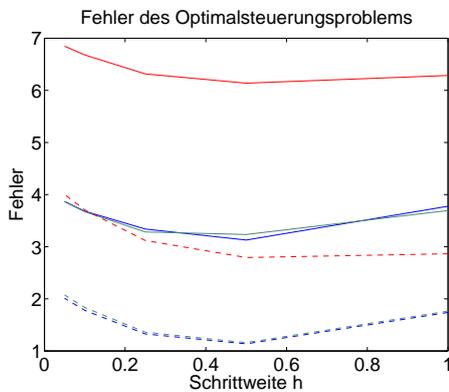
Fall 2: Zwei Hauptantriebe



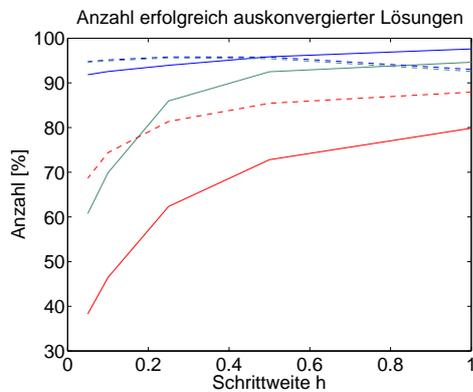
(a) Fall 2: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 2: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 2: Fehler

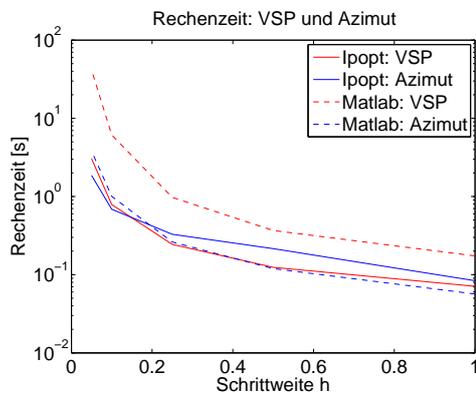
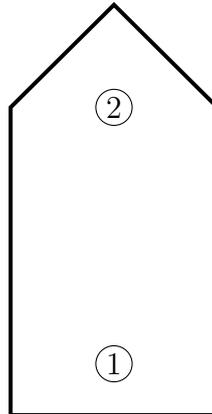


(d) Fall 2: # optimaler Lösungen

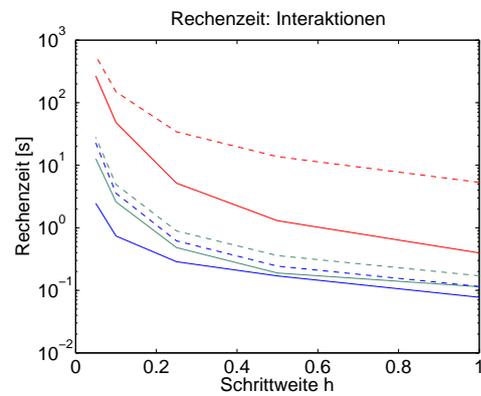
Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.24: Parameterstudie: Fall 2

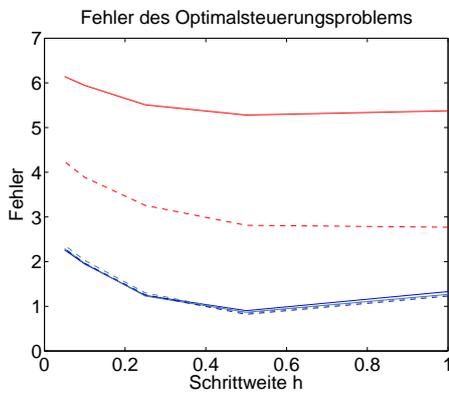
Fall 3: Zwei Hauptantriebe



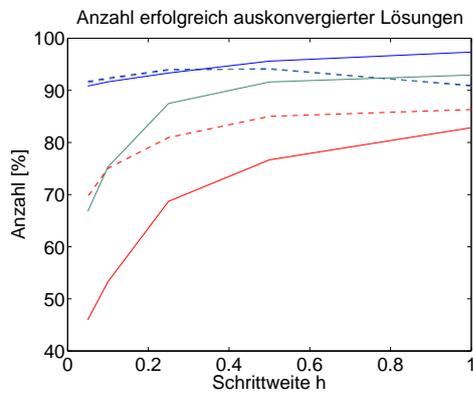
(a) Fall 3: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 3: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 3: Fehler

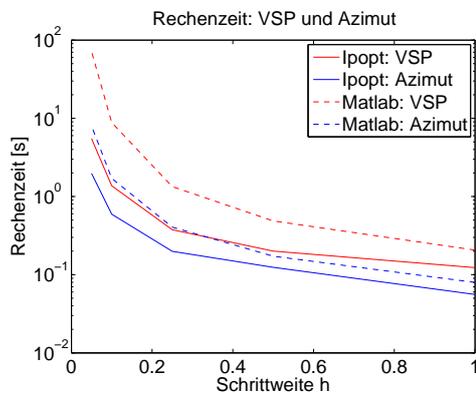
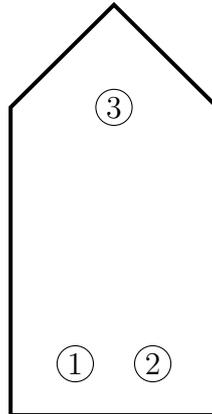


(d) Fall 3: # optimaler Lösungen

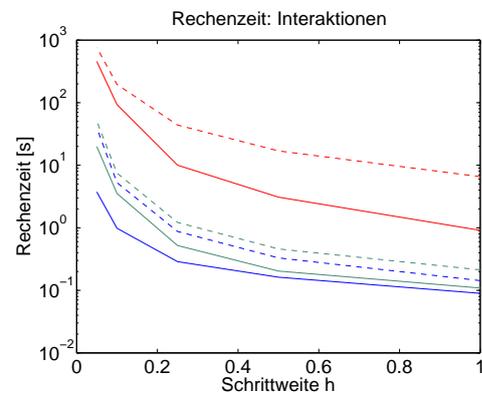
Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.25: Parameterstudie: Fall 3

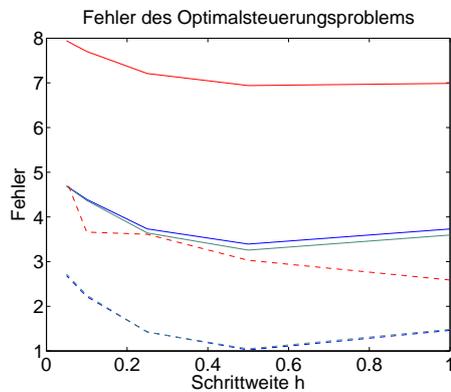
Fall 4: Zwei Hauptantriebe und ein Bugstrahler



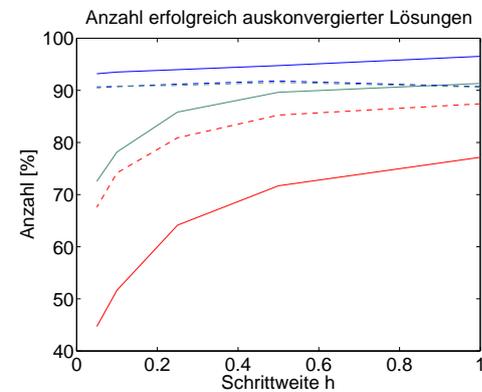
(a) Fall 4: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 4: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 4: Fehler

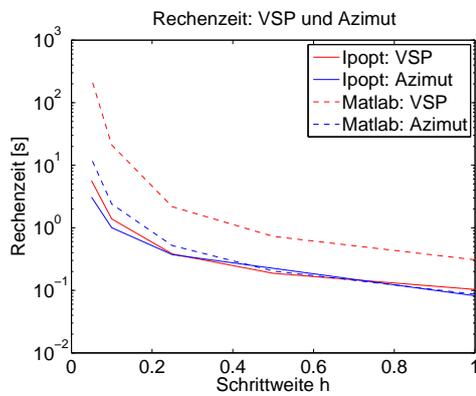
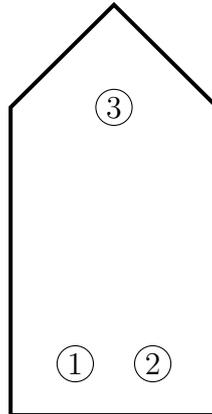


(d) Fall 4: # optimaler Lösungen

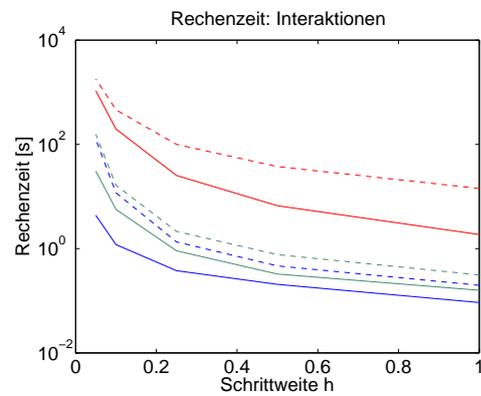
Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.26: Parameterstudie: Fall 4

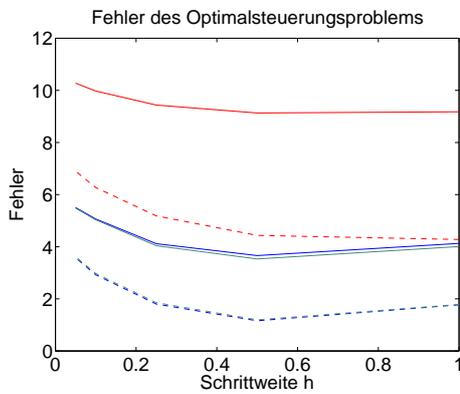
Fall 5: Drei Hauptantriebe



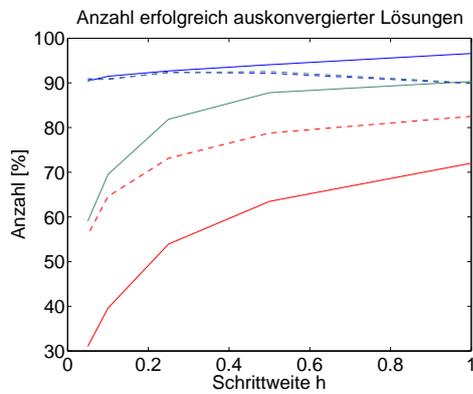
(a) Fall 5: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 5: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 5: Fehler

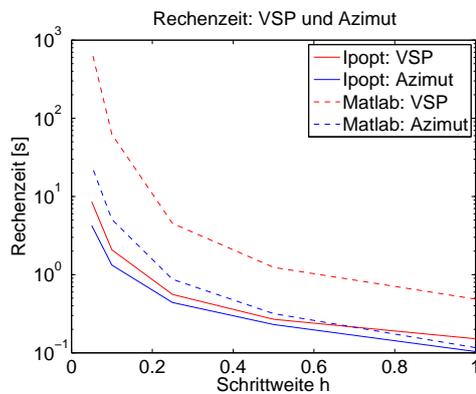
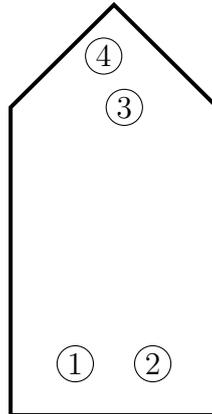


(d) Fall 5: # optimaler Lösungen

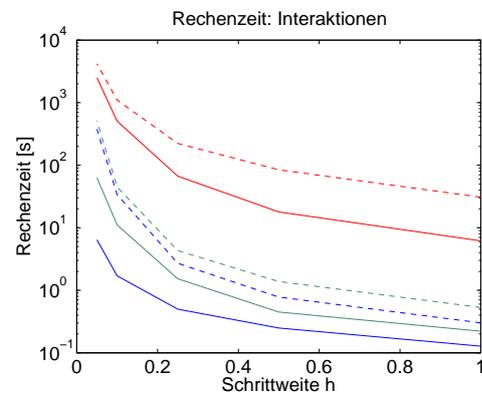
Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.27: Parameterstudie: Fall 5

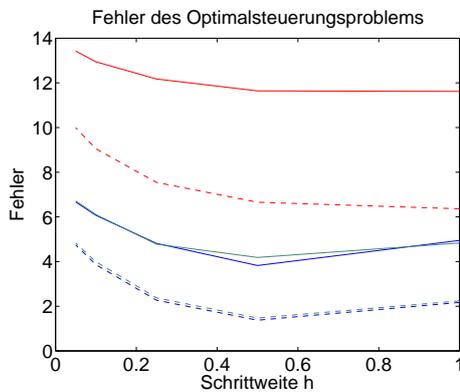
Fall 6: Vier Hauptantriebe



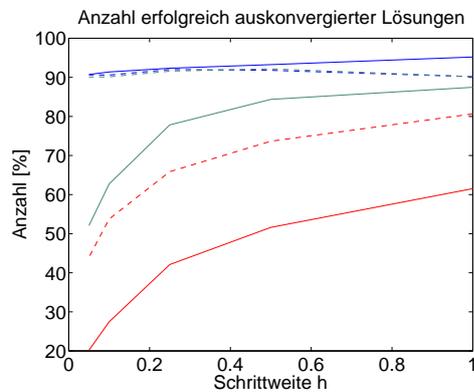
(a) Fall 6: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 6: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 6: Fehler

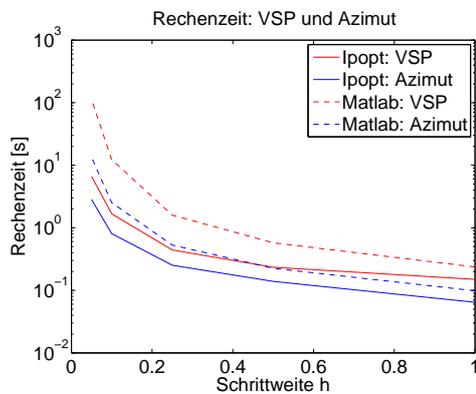
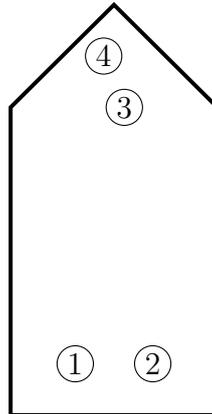


(d) Fall 6: # optimaler Lösungen

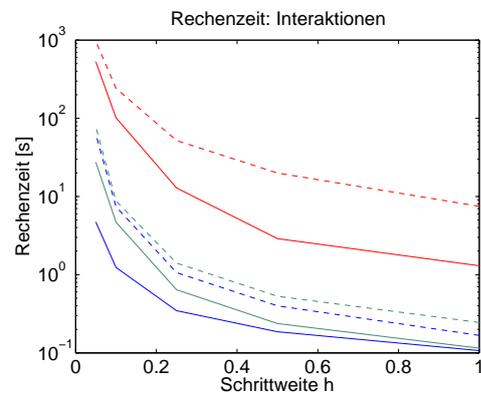
Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.28: Parameterstudie: Fall 6

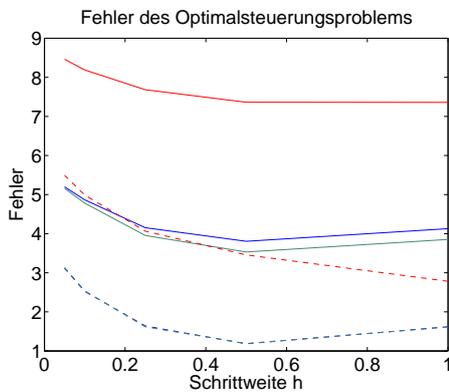
Fall 7: Zwei Hauptantriebe und ein Bugstrahler



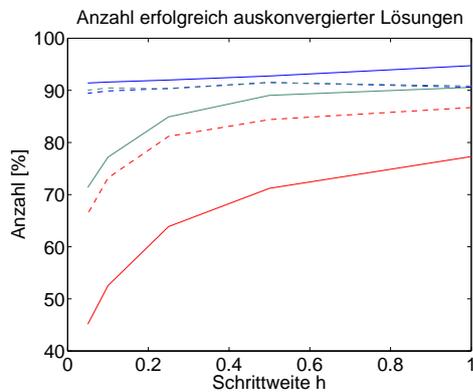
(a) Fall 7: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 7: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 7: Fehler

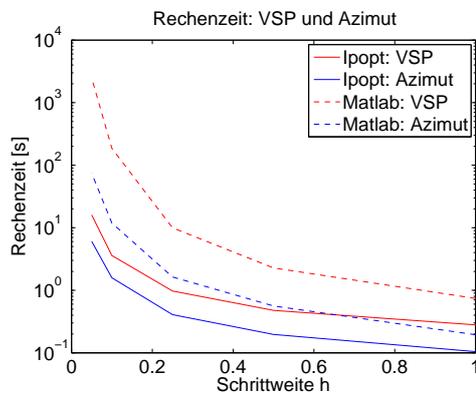
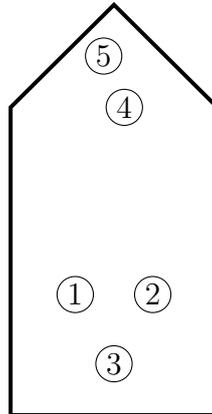


(d) Fall 7: # optimaler Lösungen

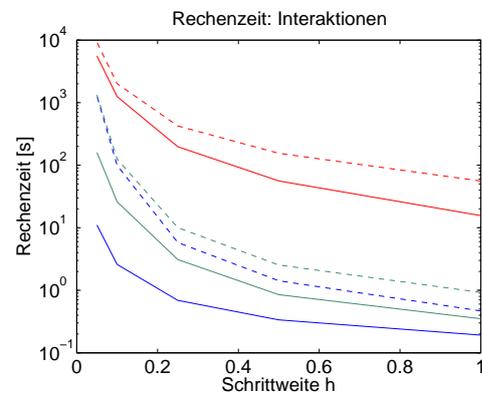
Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.29: Parameterstudie: Fall 7

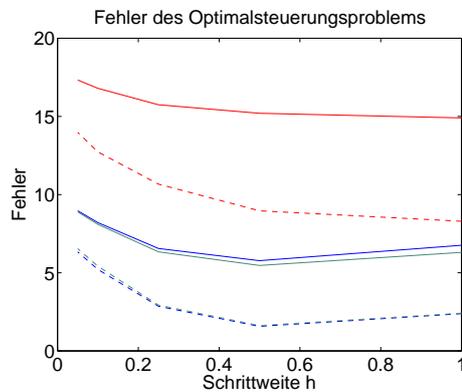
Fall 8: Fünf Hauptantriebe und ein Bugstrahler



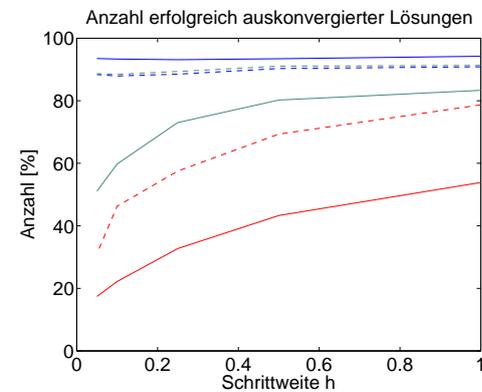
(a) Fall 8: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 8: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 8: Fehler

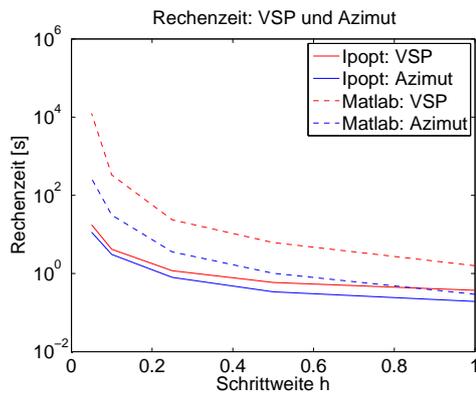
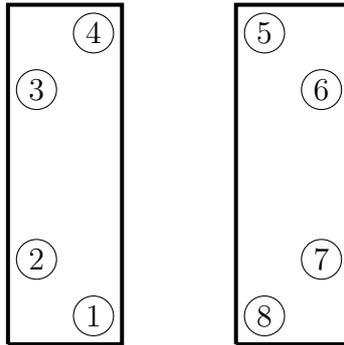


(d) Fall 8: # optimaler Lösungen

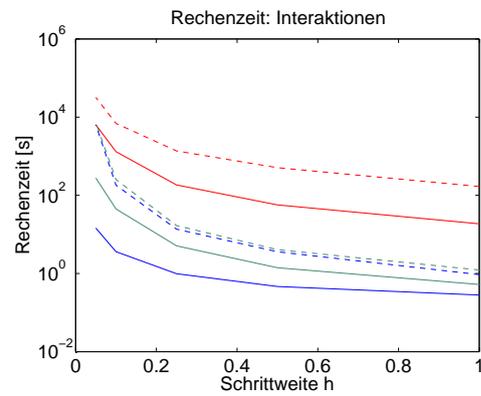
Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.30: Parameterstudie: Fall 8

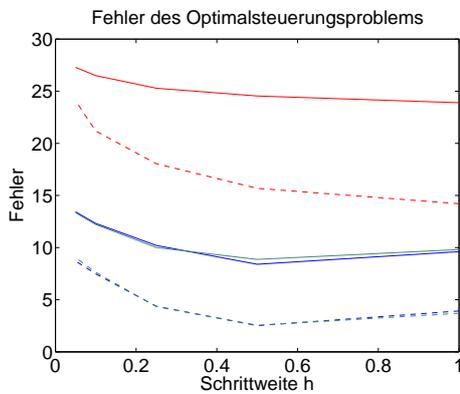
Fall 9: Acht Hauptantriebe



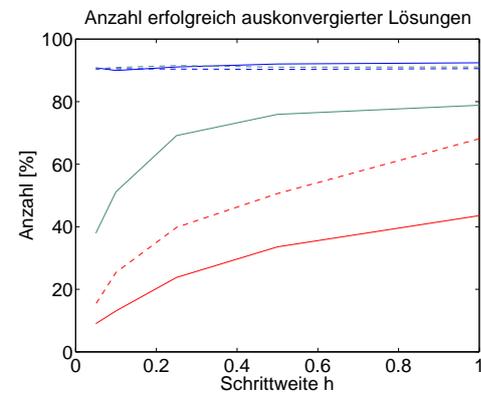
(a) Fall 9: Rechenzeit: Propeller



(b) Fall 9: Rechenzeit: Interaktionen



(c) Fall 9: Fehler



(d) Fall 9: # optimaler Lösungen

Keine Interaktion	— Ipopt	- - - Matlab
Prop.-Schiff-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab
Strömung+Prop.-Prop.-Inter.	— Ipopt	- - - Matlab

Abbildung 6.31: Parameterstudie: Fall 9

Echtzeitapproximation mit POD

In Kapitel 5 wurden zwei Echtzeitapproximationen vorgestellt. Die Auswertung der Parameterstudie für den POD-Ansatz bezüglich Fehler und Rechenzeit beschränkte sich auf vierten Fall mit zwei Hauptantrieben und einem Nebenantrieb. Alle weiteren Ergebnisse der Parameterstudie folgen in diesem Abschnitt, dabei entsprechen die Fälle 1 – 8 den Fällen aus der Parameterstudie von Kapitel 4.

Fall 1: Ein Hauptantrieb

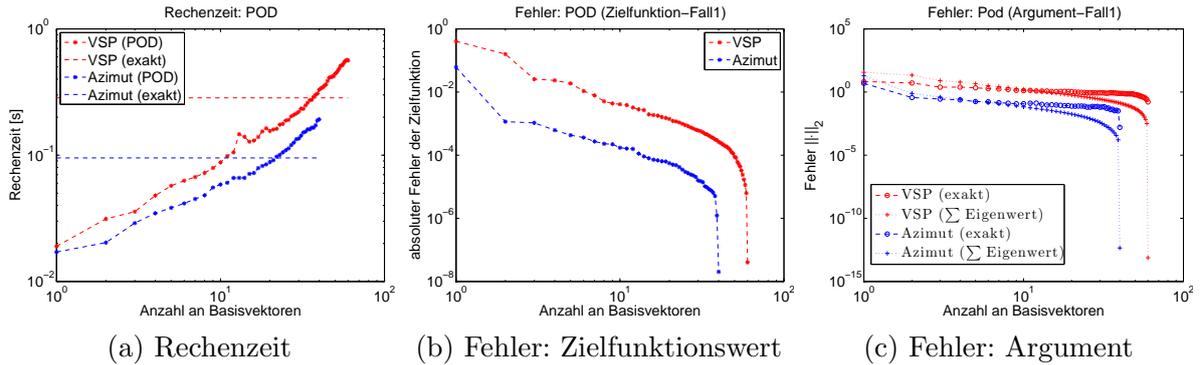


Abbildung 6.32: POD-Approximation: Fall 1

Fall 2: Zwei Hauptantriebe

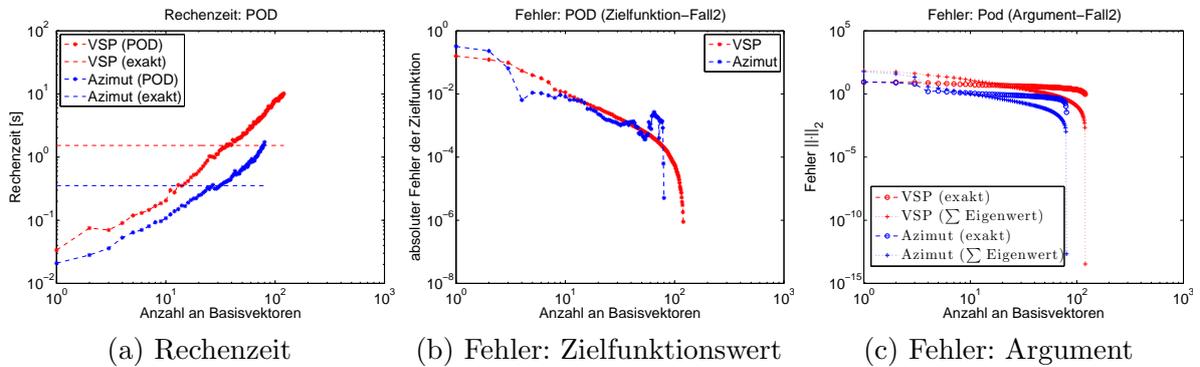


Abbildung 6.33: POD-Approximation: Fall 2

Fall 3: Zwei Hauptantriebe

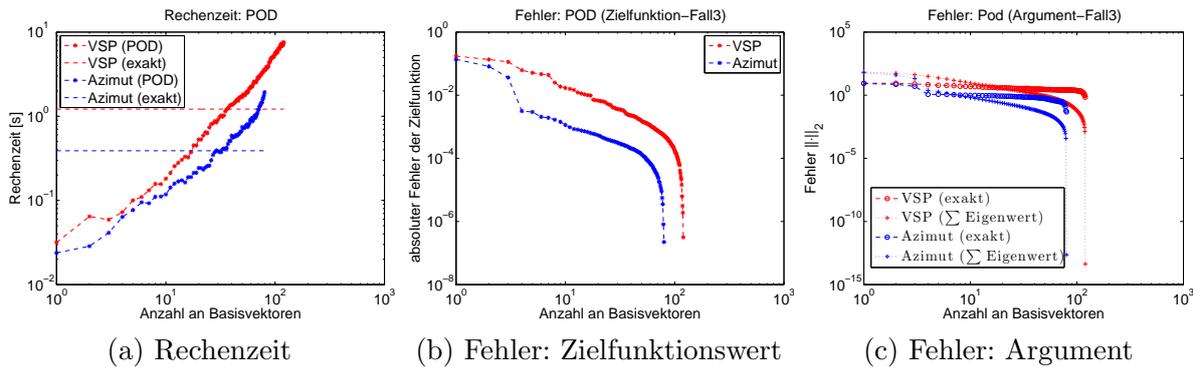


Abbildung 6.34: POD-Approximation: Fall 3

Fall 5: Drei Hauptantriebe

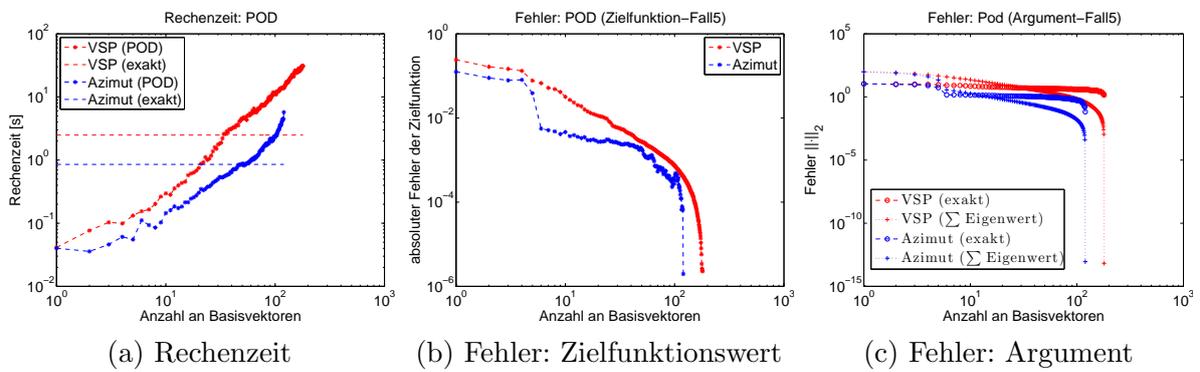


Abbildung 6.35: POD-Approximation: Fall 5

Fall 6: Vier Hauptantriebe

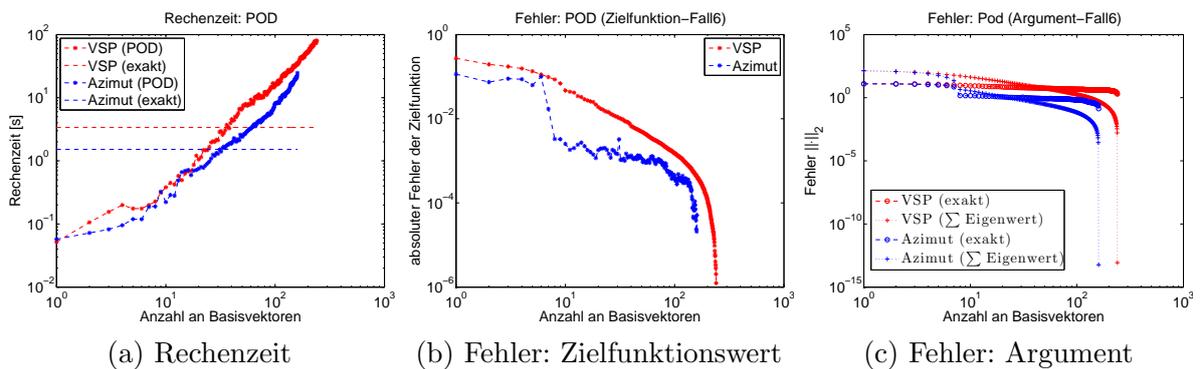


Abbildung 6.36: POD-Approximation: Fall 6

Fall 7: Zwei Hauptantriebe und zwei Bugstrahler

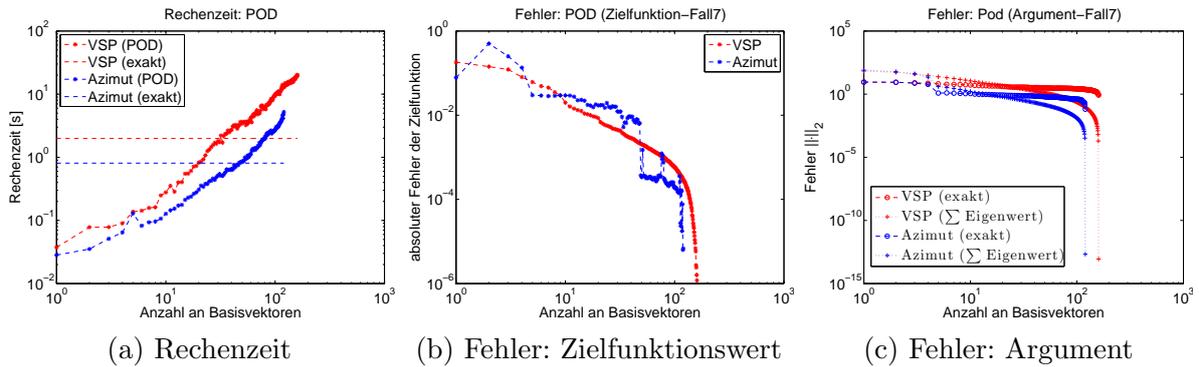


Abbildung 6.37: POD-Approximation: Fall 7

Fall 8: Fünf Hauptantriebe und ein Bugstrahler

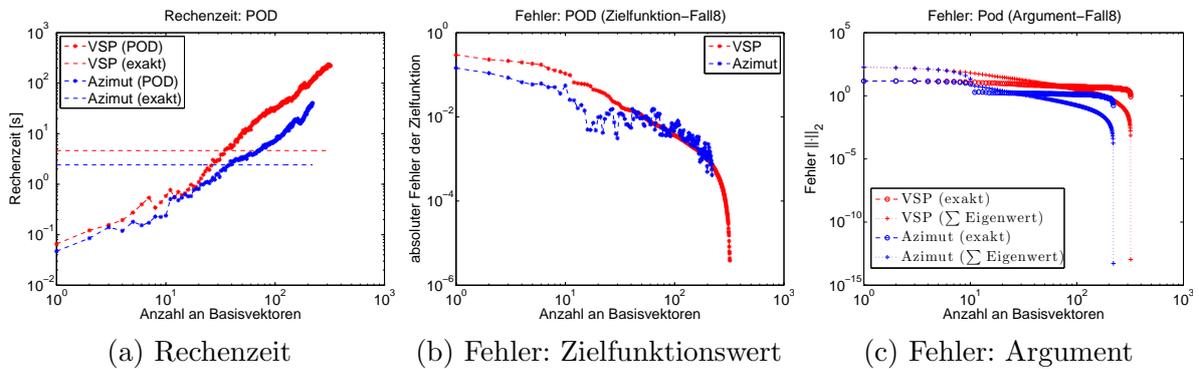


Abbildung 6.38: POD-Approximation: Fall 8

Analyse des DP-Verhaltens von VSP und Azimutpropeller

In Kapitel 6 wurde eine Analyse des DP-Verhaltens von VSP im Vergleich zu Azimutpropeller durchgeführt. Dabei wurde untersucht wie gut es mit den Antrieben möglich ist, das Schiff unter dem Einfluss von den Umweltbedingungen Wind, Wellen und Strömung auf Position zu halten. Dabei wurde angenommen, dass Wind, Wellen und Strömung immer aus der selben Richtung kommen. Für eine umfassende Analyse wurden alle acht Windrichtungen, Nord, Nord-Ost, Ost, Süd-Ost, Süd, Süd-West, West und Nord-West verwendet um das DP-Verhalten zu untersuchen. Die Bewertungskriterien unterteilten sich in die maximale und durchschnittliche Abweichung von der Sollposition und Ausrichtung.

Im Folgenden ist neben den tabellarisch zusammengefassten Bewertungskriterien, auch der zeitliche Verlauf von Position in x- und y-Richtung, Ausrichtung und Leistung abgebildet. Neben einem Vergleich von VSP und Azimutpropeller ist hier auch ein direkter Vergleich von PID-Regler zu optimaler Steuerung möglich.

DP-Analyse: Nord

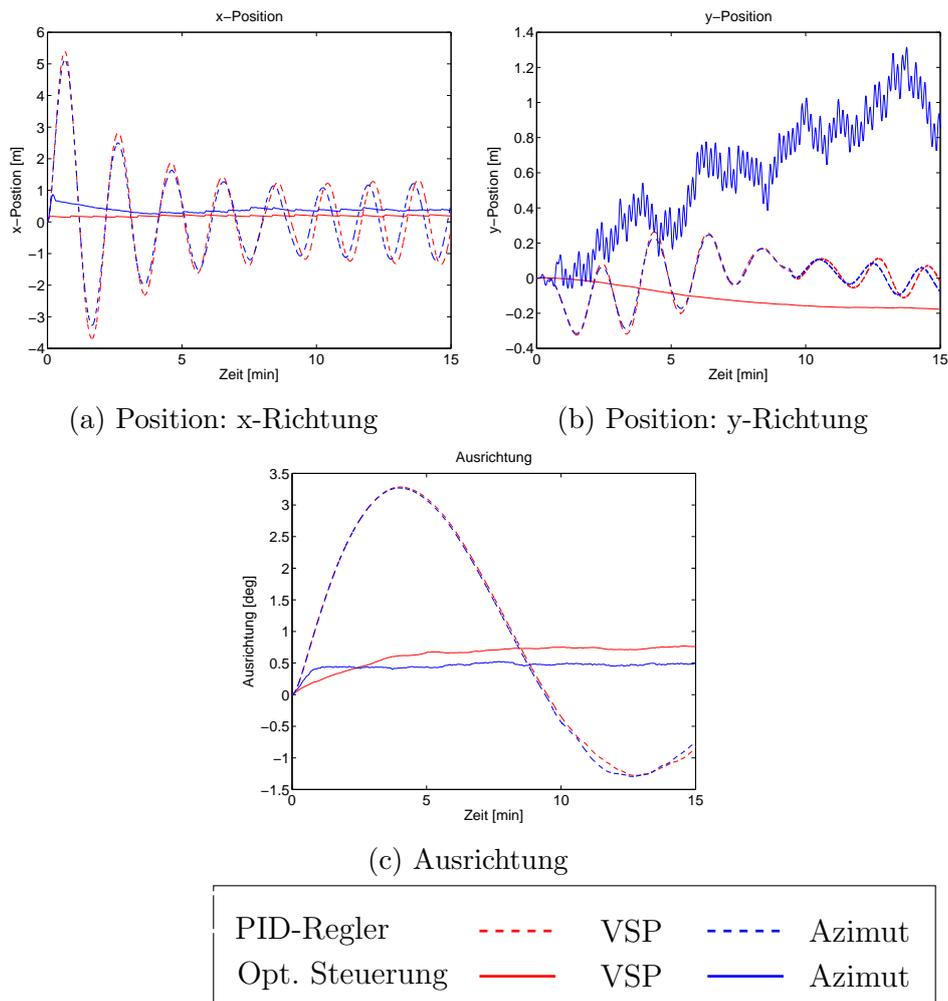


Abbildung 6.39: DP-Analyse: Nord

	opt. Steuerung		PID-Regler	
	VSP	Azimut	VSP	Azimut
max. Abweichung (Position [m])	0.28	1.36	5.39	5.11
max. Abweichung (Ausrichtung [deg])	0.77	0.52	3.28	3.26
Abweichung i.D. (Position [m])	0.22	0.72	1.24	1.12
Abweichung i.D. (Ausrichtung [deg])	0.61	0.45	1.61	1.60

Tabelle 6.2: DP-Analyse: Nord

DP-Analyse: Nord-Ost

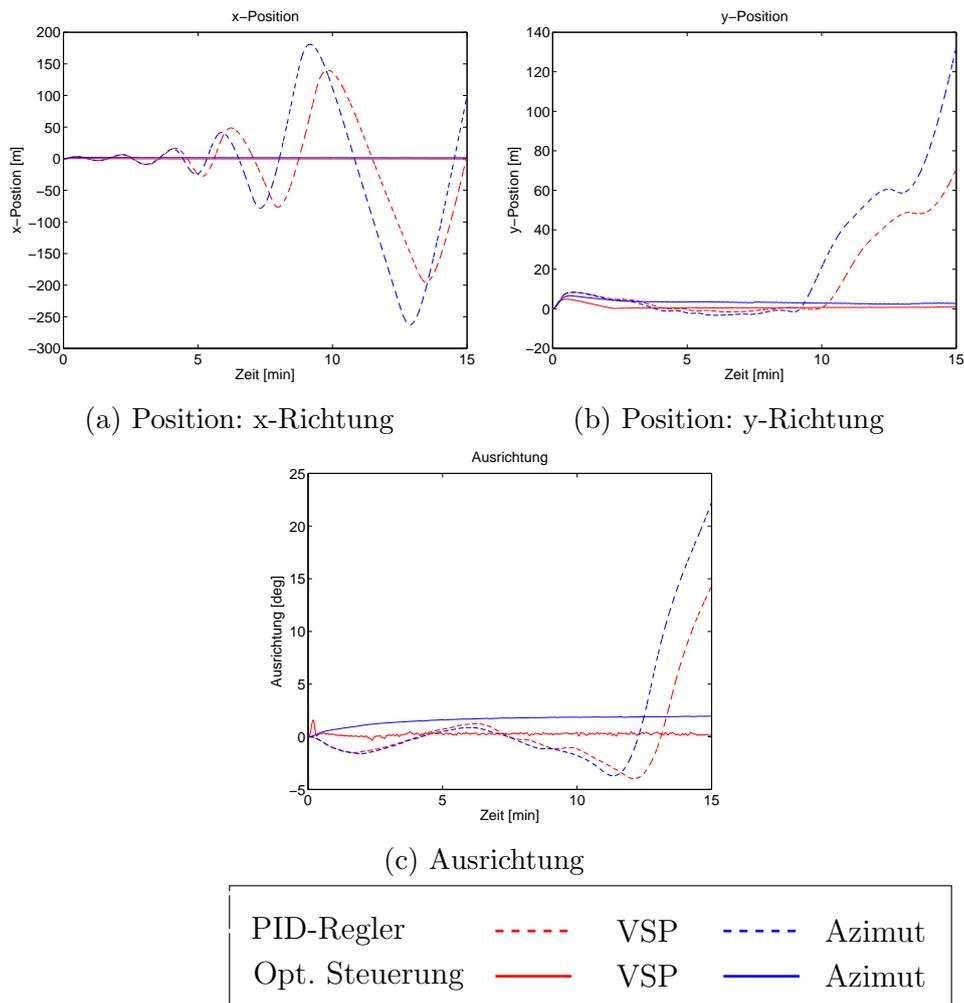


Abbildung 6.40: DP-Analyse: Nord-Ost

	opt. Steuerung		PID-Regler	
	VSP	Azimut	VSP	Azimut
max. Abweichung (Position [m])	4.92	6.91	201.06	368.18
max. Abweichung (Ausrichtung [deg])	1.58	1.95	14.29	31.63
Abweichung i.D. (Position [m])	0.99	3.79	56.12	93.31
Abweichung i.D. (Ausrichtung [deg])	0.25	1.58	2.07	4.96

Tabelle 6.3: DP-Analyse: Nord-Ost

DP-Analyse: Ost

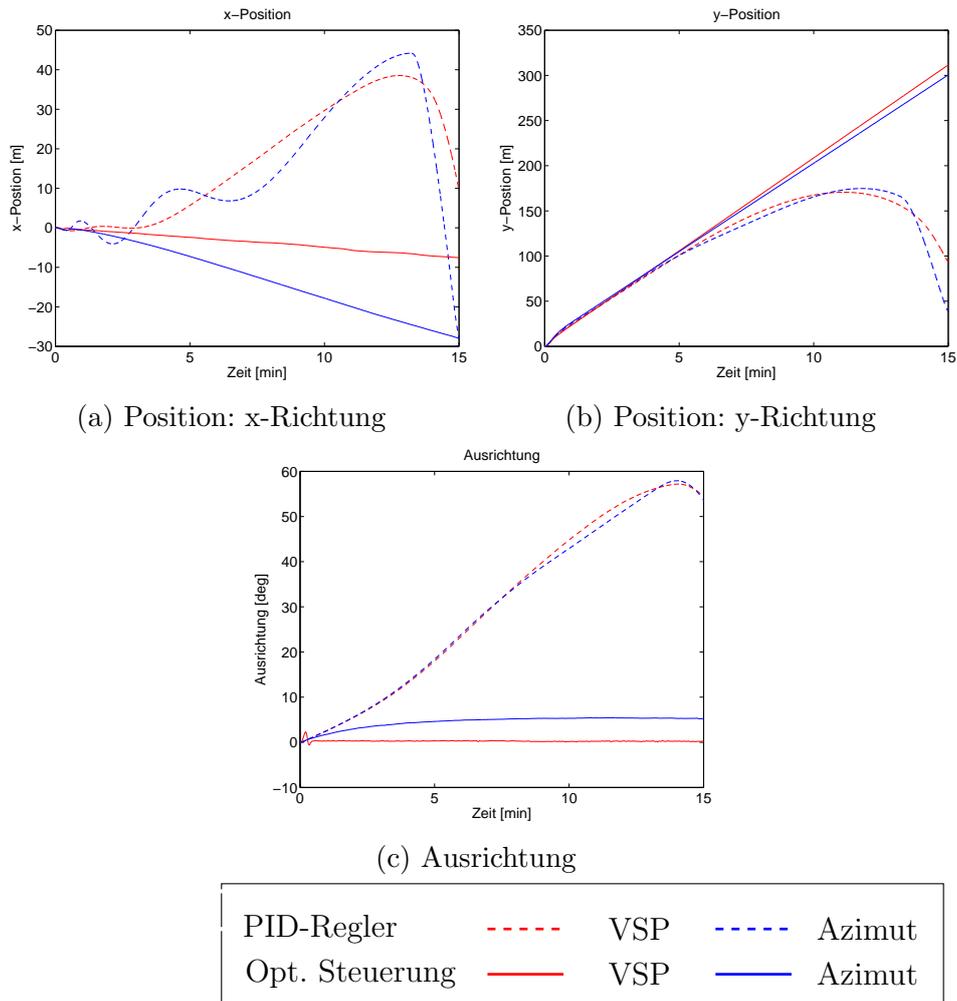


Abbildung 6.41: DP-Analyse: Ost

	opt. Steuerung		PID-Regler	
	VSP	Azimut	VSP	Azimut
max. Abweichung (Position [m])	311.68	301.89	174.13	179.38
max. Abweichung (Ausrichtung [deg])	2.28	5.43	57.19	57.91
Abweichung i.D. (Position [m])	157.20	154.199	117.19	114.41
Abweichung i.D. (Ausrichtung [deg])	0.27	4.49	30.88	30.48

Tabelle 6.4: DP-Analyse: Ost

DP-Analyse: Süd-Ost

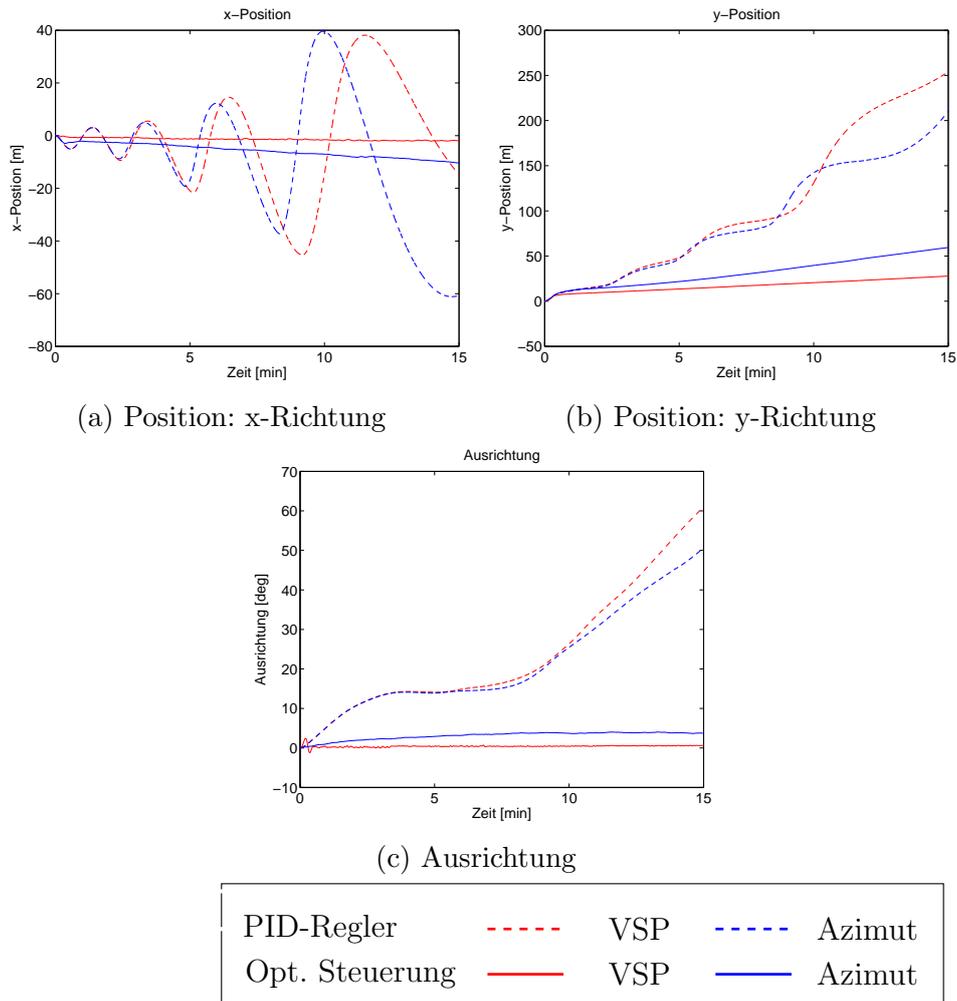
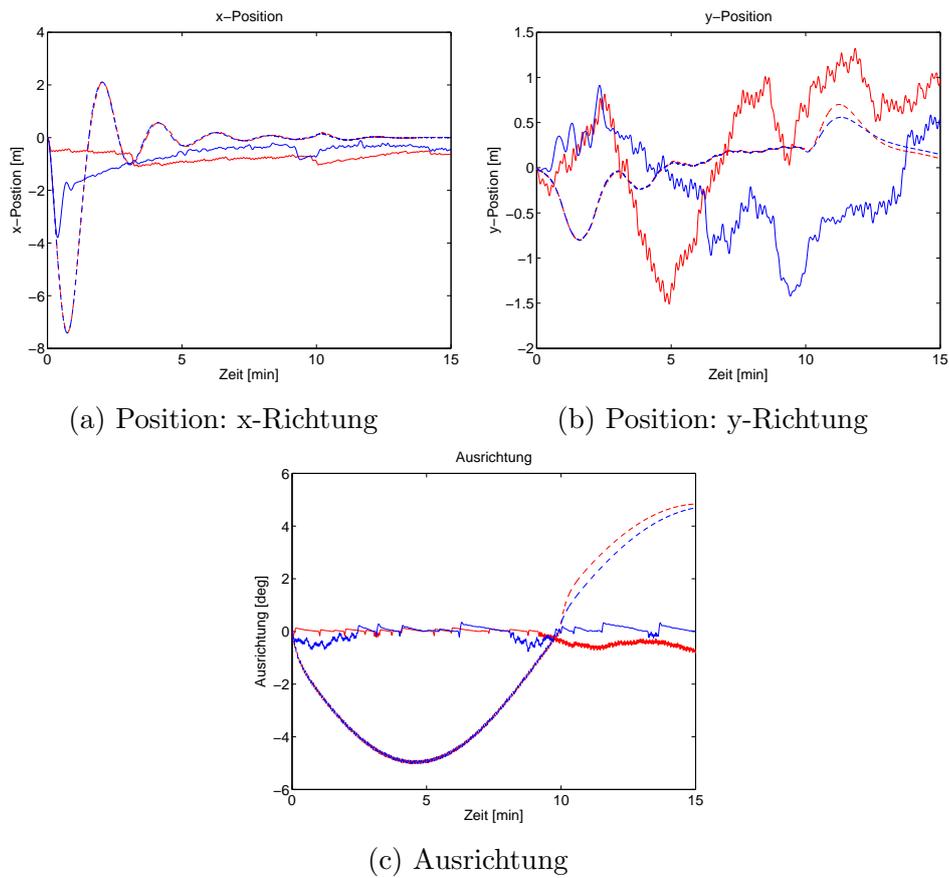


Abbildung 6.42: DP-Analyse: Süd-Ost

	opt. Steuerung		PID-Regler	
	VSP	Azimut	VSP	Azimut
max. Abweichung (Position [m])	27.84	60.38	254.51	229.70
max. Abweichung (Ausrichtung [deg])	2.44	4.04	60.98	52.38
Abweichung i.D. (Position [m])	17.00	32.08	108.23	98.10
Abweichung i.D. (Ausrichtung [deg])	0.44	3.08	23.71	22.62

Tabelle 6.5: DP-Analyse: Süd-Ost

DP-Analyse: Süd



PID-Regler	---	VSP	---	Azimut
Opt. Steuerung	—	VSP	—	Azimut

Abbildung 6.43: DP-Analyse: Süd

	opt. Steuerung		PID-Regler	
	VSP	Azimut	VSP	Azimut
max. Abweichung (Position [m])	1.75	3.79	7.38	7.42
max. Abweichung (Ausrichtung [deg])	0.83	0.76	5.02	5.01
Abweichung i.D. (Position [m])	1.01	0.91	0.79	0.79
Abweichung i.D. (Ausrichtung [deg])	0.20	0.17	3.36	3.24

Tabelle 6.6: DP-Analyse: Süd

DP-Analyse: Süd-West

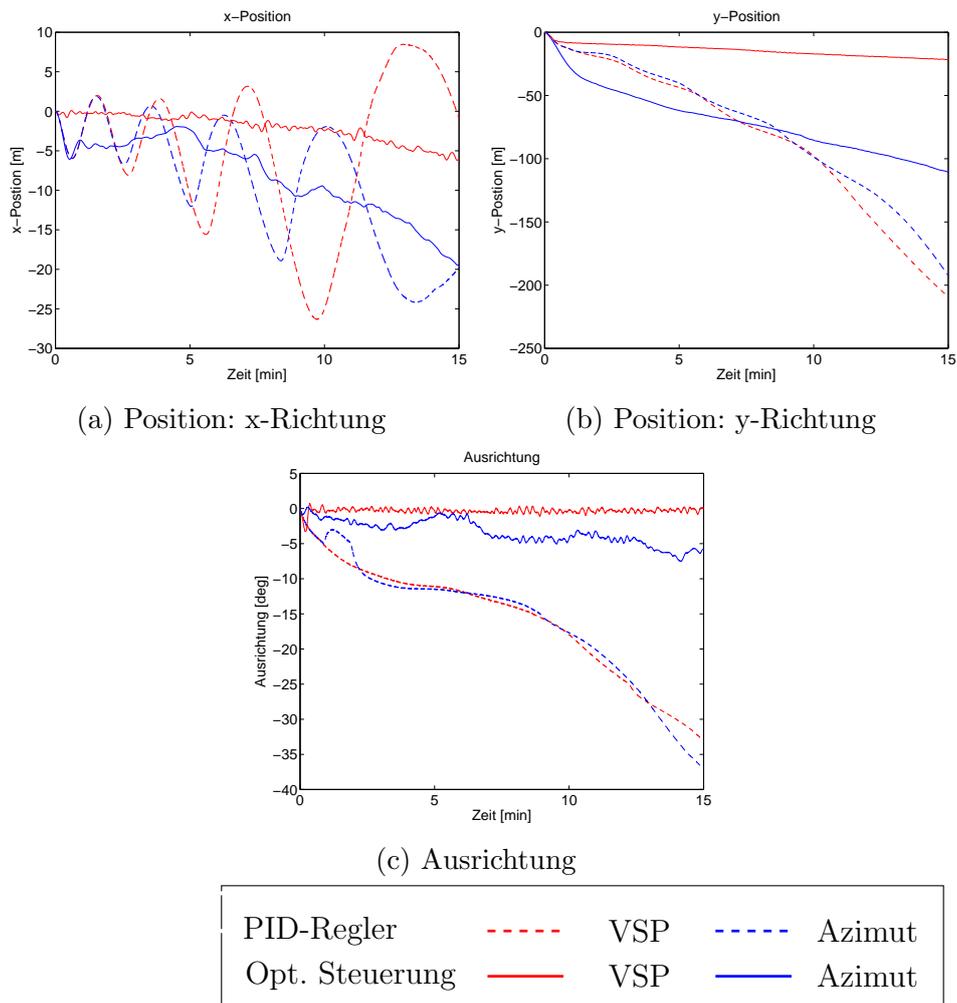


Abbildung 6.44: DP-Analyse: Süd-West

	opt. Steuerung		PID-Regler	
	VSP	Azimut	VSP	Azimut
max. Abweichung (Position [m])	22.46	112.37	209.12	120.86
max. Abweichung (Ausrichtung [deg])	3.28	7.53	33.11	22.44
Abweichung i.D. (Position [m])	14.44	70.82	83.85	42.50
Abweichung i.D. (Ausrichtung [deg])	0.37	3.38	15.90	9.35

Tabelle 6.7: DP-Analyse: Süd-West

DP-Analyse: West

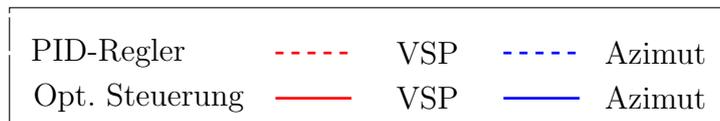
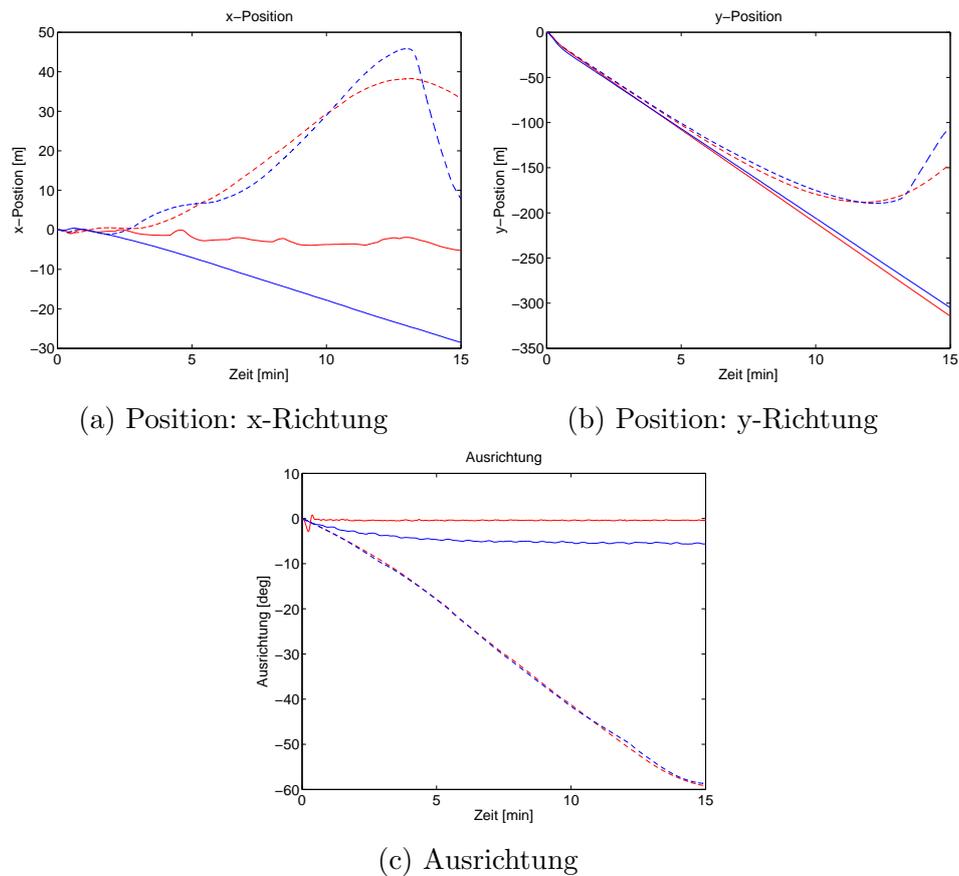


Abbildung 6.45: DP-Analyse: West

	opt. Steuerung		PID-Regler	
	VSP	Azimut	VSP	Azimut
max. Abweichung (Position [m])	314.40	306.34	191.73	194.39
max. Abweichung (Ausrichtung [deg])	2.88	5.65	59.19	58.74
Abweichung i.D. (Position [m])	159.39	156.70	127.09	129.84
Abweichung i.D. (Ausrichtung [deg])	0.42	4.53	29.85	34.24

Tabelle 6.8: DP-Analyse: West

DP-Analyse: Nord-West

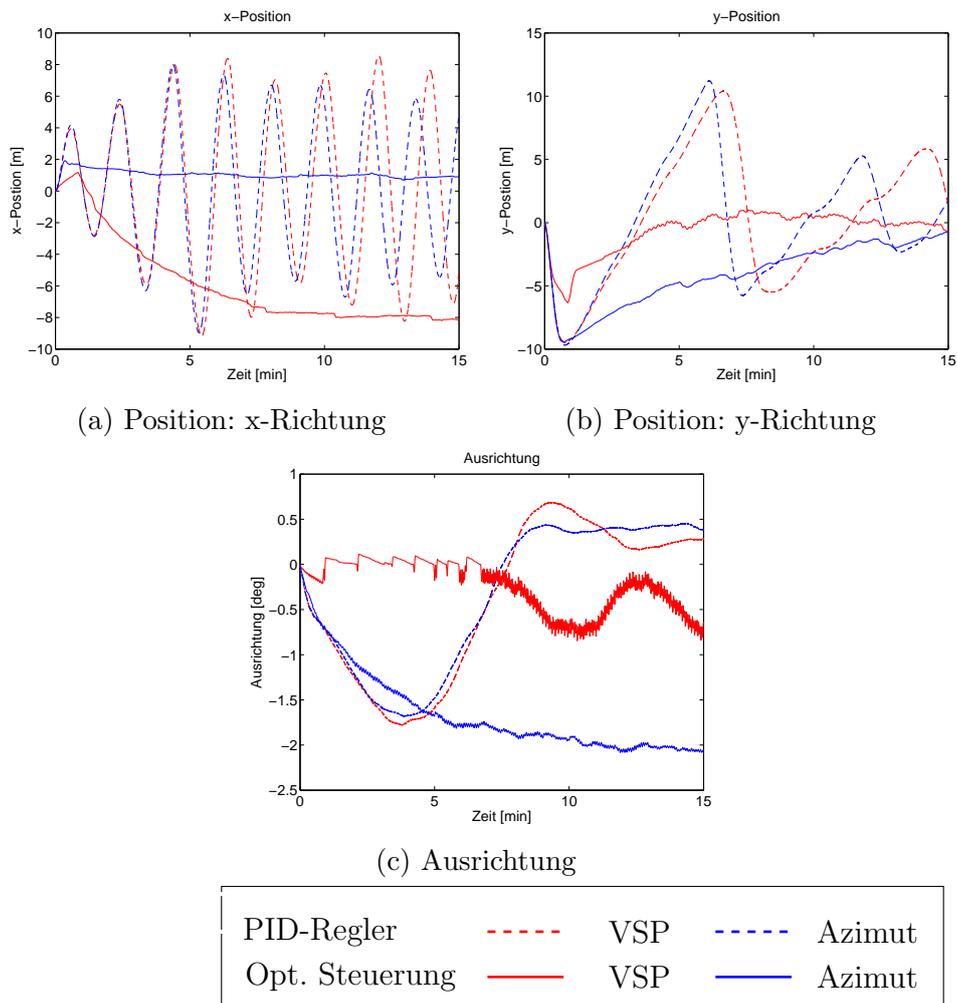


Abbildung 6.46: DP-Analyse: Nord-West

	opt. Steuerung		PID-Regler	
	VSP	Azimut	VSP	Azimut
max. Abweichung (Position [m])	8.20	9.57	13.11	13.20
max. Abweichung (Ausrichtung [deg])	0.84	2.09	1.77	1.68
Abweichung i.D. (Position [m])	6.49	4.23	6.77	5.97
Abweichung i.D. (Ausrichtung [deg])	0.26	1.65	0.75	0.71

Tabelle 6.9: DP-Analyse: Nord-West

Anhang B

Dokumentation des Allokationsmoduls für VSP und Azimutpropeller

Einleitung

Das Allokationsmodul entstand im Rahmen eines Promotionsvorhaben, weshalb sich diese Dokumentation in einigen Teilen auf die Dissertation bezieht. Das Allokationsmodul ist darauf ausgelegt, eine Steuerung für die am Schiff vorhandenen Antriebe zu finden, sodass eine von einem Regler oder einem Masterjoystick geforderte Kraft so gut wie möglich und energieeffizient erzeugt wird. Des Weiteren können nach Belieben Interaktionen, wie Propeller-Strömung-Interaktion, Propeller-Propeller-Interaktionen und Propeller-Schiff-Interaktion bei der Berechnung der Steuerung einbezogen werden.

Theoretische Grundlagen

Mathematisch lässt sich das Allokationsproblem als Optimalsteuerungsproblem mit multikriterieller Zielfunktion beschreiben (vgl. Kapitel 3):

Minimiere

$$\left(\int_0^T \|\hat{\tau} - \tau_{thr}(z(t))\|^2 dt, \|P(z(t)) - P_{\min}\|^2 dt \right),$$

sodass die Nebenbedingungen für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{z}\omega(t), \\ z_{\min} &\leq z(t) \leq z_{\max}, \\ M_{\min} &\leq M(z(t)) \leq M_{\max}, \\ P_{\min} &\leq P(z(t)) \leq P_{\max}, \\ \|\omega(t)\|_{\infty} &\leq 1, \\ z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Nach einer Diskretisierung des Problems erhält man ein nichtlineares Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen.

Methoden der multikriteriellen Optimierung

Allgemein lässt sich ein multikriterielles bzw. ein bikriterielles Optimierungsproblem wie folgt formulieren:

$$f(x) := (f_1(x), f_2(x)) \rightarrow \min.$$

Es gibt verschiedene Methoden, diese Probleme zu lösen. Die beiden im Modul verwendeten Methoden werden nun kurz vorgestellt. Einzelheiten lassen sich in Kapitel 3 nachlesen.

Lexikographische Optimierung

Die beiden Zielfunktionen werden hier nacheinander optimiert, d.h. :

Erste Optimierung:

$$\tilde{x} = \min f_1(x).$$

Sei nun \mathcal{X}_1 die Menge der Lösungen der ersten Optimierung.

Zweite Optimierung:

$$\hat{x} = \min_{x \in \mathcal{X}_1} f_2(x), \hat{x} \in \mathcal{X}_1.$$

Elastic-Constraint Methode (Modifikation)

Bei der Elastic-Constraint Methode wird eine Zielfunktion minimiert und die andere als „Strafterm“ hinzugefügt.

$$\int_0^T \|P(z(t)) - P_{\min}\|^2 dt + \mu \int_0^T (\|\hat{\tau} - \tau_{thr}(z(t))\|^2 - \varepsilon)_+ dt \longrightarrow \min$$

Software

Zur Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems wird Ipopt, ein Innere-Punkte-Löser, von A. Wächter und L. T. Biegler verwendet. Dieses Programm kann unter <https://projects.coin-or.org/Ipopt> heruntergeladen werden. Dort befindet sich auch eine Dokumentation zur Installation des Programms. Das Allokationsmodul wurde mit der Version 11.3.5 getestet.

Inhalt des Allokationsmoduls

Propellertypen

- Voith-Schneider Propeller (VSP)
- Azimutpropeller
- Bugstrahlruder

Methoden der multikriteriellen Optimierung

- Lexikographische Optimierung
- Elastic-Constraint Methode (Modifikation)

Diskretisierungen

- Explizites Euler-Verfahren
- Runge-Kutta-Verfahren (klassisch, vierstufig)

Interaktionen

- Propeller-Anströmung
- Propeller-Propeller
- Propeller-Schiff

Struktur des Moduls

Konfigurationsdatei

Die Konfigurationsdatei enthält alle für die Allokation wichtigen Informationen. Diese Informationen ändern sich während der Berechnungen im Gegensatz zur Propellersteuerung und der geforderten Kraft nicht. Diese Datei befindet sich im Ordner „Konfigurationen“ und wird als Textdatei, `Datei.txt`, gespeichert.

Allgemeine Informationen

Eingangssignal: 1
Ausgangssignal: 1
Wiederholungen: 20
DP: 0

Das Eingangssignal gibt an, in welcher Häufigkeit eine neue Kraftforderung an das Modul gesendet wird. In der theoretischen Formulierung entspricht das Eingangssignal dem Endzeitpunkt T im Optimalsteuerungsproblem. Dieses gibt an, wie oft ein neues Steuersignal an die Propeller gesendet wird. In der mathematischen Formulierung entspricht dies der Diskretisierung der Differenzialgleichung. Sowohl das Eingangssignal als auch das Ausgangssignal werden in der Einheit Sekunden angegeben. Für den Fall, dass Parameterstudien durchgeführt werden sollen, bei denen über mehrere Zeitintervalle die selbe Kraft gefordert wird, kann bei Wiederholungen eingestellt werden, wie oft die Allokation mit dieser Kraft durchgeführt werden soll. Hiermit kann beispielsweise untersucht werden, wie sich die Antriebe bei konstanten Kräften verhalten. Zuletzt wird bei DP

eingestellt, ob die geforderte Kraft skaliert wird oder nicht. Skalierungen sind vor allem dann notwendig, wenn die geforderte Kraft nicht durch die Antriebe erzeugt werden kann und eine zeitoptimale Steuerung verwendet werden soll.

Zusammenfassend gilt:

- Eingangssignal : $T > 0$ [s]
- Ausgangssignal: $0 < h \leq T$ [s]
- Wiederholung: $WDH > 0$, $WDH \in \mathbb{N}$
- - DP: 0, 1, 2
 - DP: 0 → die geforderte Kraft wird nicht skaliert
 - DP: 1 → der gesamte Kraftvektor wird skaliert
 - DP: 2 → das Moment wird (falls möglich) erzeugt und die geforderte Kraft wird in der x- und der y-Komponente skaliert.

Anzahl der Propeller

In diesem Block wird angegeben, wie viele Propeller jedes Anriebstyps verwendet werden sollen. Die Anzahl der einzelnen Propeller ist dabei eine natürliche Zahl.

```
Anzahl_VSP: 2  
Anzahl_Azimuth: 1  
Anzahl_Bugstrahler: 1
```

Interaktionen

Eine Interaktion wird mit 1 aktiv und mit 0 nicht beachtet. In diesem Fall wird nur die Propeller-Propeller-Interaktion aktiv.

```
Interaktion_Anstroemung: 0  
Interaktion_Propeller_Propeller: 1  
Interaktion_Propeller_Schiff: 0
```

Zielfunktion der multikriteriellen Optimierung und Diskretisierung

Bei der Zielfunktion kann zwischen der lexikographischen Optimierung, der zeitoptimalen Optimierung und der Elastic-Constraint Methode gewählt werden

```
Zielfunktion: Lexiko/Lexiko_zeit/Elastic
```

Die Gewichte

```
Gewicht_x: 1.e0  
Gewicht_y: 1.e0  
Gewicht_Mz: 1.e0
```

gewichten die drei Kraftkomponenten der geforderten Kraft in der Zielfunktion.

Anmerkung: Bei der lexikographischen Optimierung sollten die Gewichte zwischen 0 und 10 gewählt werden. Bei der Elastic-Constraint Methode müssen sie aufgrund der Leistung, die ebenfalls Einfluss auf die Zielfunktion hat, im Bereich von $1.e10$ gewählt werden.

Die Toleranz hat je nach ausgewählter Zielfunktion eine unterschiedliche Bedeutung.

- Lexikographische Optimierung: zusätzliche Nebenbedingung mit der Propellerkraft τ_{thr1} aus der ersten Optimierung

$$(\tau_{thr1}(z(t)) - \tau_{thr}(z(t)))^2 \leq tol$$

- Elastic-Constraint Methode: Zielfunktion

Toleranz: 10^{-6}

Für das Diskretisierungsverfahren der Differenzialgleichung kann wahlweise zwischen dem explizitem Eulerverfahren und dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren (vierter Ordnung) gewählt werden.

Diskretisierung: Euler/Runge

Propellerbeschreibung

Um die verschiedenen Propeller unterscheiden zu können, werden die Durchmesser, minimalen Drehzahlen usw. der Antriebe mit dem Propellernamen kombiniert, z.B.

Name: Azi1

Durchmesser_Azi1: 3

Jeder Name eines VSP beginnt mit VSP, eines Azimutpropellers mit Azi und eines Bugstrahlers mit Bug.

Voith-Schneider-Propeller

- Durchmesser: `Durchmesser` [m]
- Flügellänge: `Fluegellaenge` [m]
- minimale/maximale Drehzahl: `n_min`, `n_max` [rpm]
- maximale Steigung: `Pitch_max` [%]
- minimales/maximales Moment: `Moment_min`, `Moment_max`
- minimale/maximale Leistung: `Power_min`, `Power_max` [kW]
- Verstellzeit der Drehzahl von 0% auf 100%: `Verstellzeit_n` [s]

- Verstellzeit der Steigung von -100% auf 100% : `Verstellzeit_Pitch` [s]
- Position des Propellers bzgl. des Schiffsschwerpunktes: `x_Position, y_Position` [m]
- Drehrichtung des Antriebes: `Drehrichtung` rechts $\rightarrow -1$, links $\rightarrow 1$

Azimutpropeller

- Durchmesser: `Durchmesser` [m]
- minimale/maximale Drehzahl: `n_min, n_max` [rpm]
- minimales/maximales Moment : `Moment_min, Moment_max`
- minimale/maximale Leistung : `Power_min, Power_max` [kW]
- Verstellzeit der Drehzahl von 0% auf 100% : `Verstellzeit_n` [s]
- Verstellzeit des Azimutwinkels von 0° auf 180° : `Verstellzeit_Winkel` [s]
- Position des Antriebs am Schiff bzgl. des Schwerpunktes: `x_Position, y_Position` [m]
- Schubbeiwert ohne Interaktionen : `KT`
- Momentenbeiwert ohne Interaktionen: `KQ`

Bugstrahlruder

- Durchmesser: `Durchmesser` [m]
- maximaler Schub des Bugstrahlers: `Fmax` [kN]
- Wirkungsgrad: `Wirkungsgrad` $\in [0, 1]$
- minimale/maximale Leistung: `Power_min, Power_max` [kW]
- Verstellzeit der Steuerung von -100% auf 100% : `Verstellzeit_n` [s]
- Position des Antriebs am Schiff bzgl. des Schwerpunktes: `x_Position` [m]

Bei einer potenziellen Anströmung wird der Winkel β zwischen Anströmung und Propellerstrahl betrachtet.

- maximale Schubreduktion für $\beta \in [0, \pi]$: `Anstroemung_1` $\in [0, 1]$
- maximale Schubreduktion für $\beta \in [-\pi, 0]$: `Anstroemung_2` $\in [0, 1]$
- Ab Winkel 1 $\beta \in [0, \pi]$ ist die max. Schubreduktion erreicht: `Winkel_1` [deg]
- Ab Winkel 2 $\beta \in [-\pi, 0]$ ist die max. Schubreduktion erreicht: `Winkel_2` [deg]

Anmerkung: Beginnt eine Zeile mit einer Raute `#`, so wird sie als Kommentar gewertet.

Eingabedaten

Die Eingabedaten haben den selben Dateinamen wie die Konfigurationsdatei und enden mit `.dat`, `Datei.dat`. Während des DP-Betriebes besteht diese Datei aus einer Zeile, die mit jeder neuen Kraftanforderung aktualisiert wird. Für Fall- und Parameterstudien ist es möglich, mehrere Zeilen in diese Datei zu schreiben und damit unterschiedliche Kraftanforderungen direkt zu untersuchen. Die Einträge in der Zeile werden durch Strichpunkte „;“ getrennt. Beendet wird eine Zeile ebenfalls durch einen Strichpunkt.

Die ersten drei Einträge sind die geforderten Kräfte in x- und y-Richtung sowie das Moment um die z-Achse; jeweils in Newton bzw. Newtonmeter. Dann folgt die aktuelle Steuerung der Propeller: (x-Steuerung aller VSP $\in [-0.8, 0.8]$, y-Steigung aller VSP $\in [-0.8, 0.8]$, Drehzahl aller VSP in [rps], Azimutwinkel aller Azimutpropeller in [rad], Drehzahl aller Azimutpropeller in [rps], Steuerung aller Bugstrahler $\in [-1, 1]$). Im Anschluss folgt für jeden einzelnen Propeller die Anströmung in x- und y Richtung, angegeben in [m/s]. Bei einer aktiven Interaktion zwischen Propeller und Schiff folgt zuletzt für jeden einzelnen Propeller, außer für die Bugstrahler, der prozentuale Restschub bei Schub in diskrete Richtungen. Dabei ist darauf zu achten, dass die diskreten Schubrichtungen, in denen die Schubreduktion gemessen wird, äquidistante Abstände haben.

Folgendes Beispiel zeigt eine Eingabe mit einem VSP, einem Azimutpropeller und einem Bugstrahler mit einer aktiven Propeller-Schiff-Interaktion:

```
0; 0; -8000000; 0.2; 0.3; 0.6; 0; 1; 0.5; 0; 0; -1; -1; 2; 0; 80; 85; 90; 85; 80; 85; 90; 85;
```

Es wird also $\hat{\tau} = (0, 0, -8000)^T$ kN gefordert. Die Startsteuerung der Antriebe ist für

- Steigung in x-Richtung: 0.2
- Steigung in y-Richtung: 0.3
- Drehzahl des VSP: 0.6 rpm
- Azimutwinkel: 0
- Drehzahl des Azimutpropelles: 1 rpm
- Steuerung des Bugstrahlers: 0.5

Der VSP wird nicht angeströmt, der Azimutpropeller mit $(-1, -1) \text{ m/s}$ und der Bugstrahler mit $(2, 0) \text{ m/s}$. Insgesamt folgen nun acht weitere Einträge für die Schubreduktion bei der Propeller-Schiff-Interaktion. Da es insgesamt zwei Hauptantriebe (VSP, Azimutpropeller) gibt, werden jedem Antrieb vier Einträge zugeteilt.

Aufgrund der Wahl von äquidistanten Schubrichtungen gilt für beide Antriebe:

- Restschub bei Schub in Richtung 0° : 80%
- Restschub bei Schub in Richtung 90° : 85%
- Restschub bei Schub in Richtung 180° : 90%
- Restschub bei Schub in Richtung 270° : 85%

Ergebnisse

Die Ergebnisse werden in zwei Dateien im Ordner „Ergebnisse“ gespeichert. Die Datei [Ergebnis_Datei_Auswertung.dat](#) enthält Informationen wie Propellerschub und Leistung aller Antriebe. Die Lösung des Optimalsteuerungsproblems, also die Änderung der Propellersteuerung, findet sich in der Datei [Ergebnis_Datei_Steuerung.dat](#), wobei sich die Ergebniszeile wie folgt aufbaut:

- Änderungen der Steigung in x-Richtung aller VSP
- Änderungen der Steigung in y-Richtung aller VSP
- Änderungen der Drehzahl aller VSP
- Änderungen des Azimutwinkels aller Azimutpropeller
- Änderungen der Drehzahl aller Azimutpropeller
- Änderungen der Steuerung aller Bugstrahlruder

Zusätzliche Daten

Die Modelle für die Schub- und Leistungsberechnung im Allokationsmodul basieren auf CFD-Daten. Für einen flexiblen Datentausch im Modul stehen m-Files im Ordner „Daten_Konfigurationen_Ipopt“ zur Verfügung, welche neue CFD-Daten in die für das Modul notwendige Form bringen.

- CFD-Daten: Hier sind die notwendigen CFD-Daten gespeichert.
- Funktion: Mit dieser Funktion werden die Koeffizienten für das Modul geändert.
- Speicher: Hier werden die Koeffizienten gespeichert.

Dabei ist der Speicher so gewählt, dass bei einer Aktualisierung die Daten sofort im Allokationsmodul geändert werden. Eine Kompilierung ist nach einer Datenaktualisierung nicht notwendig.

Voith-Schneider Propeller

Allgemein:

- CFD-Daten: [CFD_Daten_Keine_Interaktion](#)
- Funktion: [VSP_Keine_Interaktion](#)
- Speicher:
 - [Daten/Koef_ks_VSP_0.dat](#)
 - [Daten/Koef_kd_VSP_0.dat](#)

Anströmung:

- CFD-Daten: [Koeffizienten erzeugen/CFD_Daten_bearbeitet](#)
- Funktion: Interaktion [Anstroemung_Ipopt](#)
- Speicher:
 - [Daten/Koef_kd.dat](#)
 - [Daten/Koef_ksx.dat](#)
 - [Daten/Koef_ksy.dat](#)

Propeller-Propeller Interaktion:

- CFD-Daten: [Daten_Propeller_Propeller_Interaktion](#)
- Funktion: [Propeller_Propeller_Interaktion_Ipopt](#)
- Speicher:
 - [Daten/Koef_PPI_kd.dat](#)
 - [Daten/Koef_PPI_ks.dat](#)
 - [Daten/Koef_PPI_Winkel.dat](#)

Azimut:

Der Azimutpropeller unterscheidet sich vom VSP bei den Interaktionen in diesem Modul nur bei der Interaktion Anströmung-Propeller. Die Daten hier sind Fourierkoeffizienten basierend auf Messungen.

- Daten: [Daten_Anstroemung_Azimut](#)
Diese Daten bestehen aus 12 Spalten mit je 21 Zeilen. Die ersten beiden Spalten sind die Koeffizienten für den Fortschrittsgrad $J = 0$, die Spalten drei und vier enthalten die Koeffizienten für den Fortschrittsgrad $J = 0.2$. Dieses Schema wird analog für die Fortschrittsgrade $J = 0.4, 0.6, 0.8, 1$, fortgesetzt.
- Funktion: [Azimut_Anstroemung.m](#)
- Speicher:
 - [Daten/KTx_VA](#)
 - [Daten/KTy_VA](#)
 - [Daten/KQ_VA](#)

Anwendung des Allokationsmoduls

1. **Informationen.txt**: Hier werden die Konfigurationsdateien eingetragen, die mit dem Allokationsmodul gerechnet werden sollen. Da die Eingabedatei den selben Namen hat wie die Konfigurationsdatei, reicht es aus, nur den Namen ohne .txt/.dat dieser Dateien an das Modul zu übergeben.

```
Datei
```

Falls für Fallstudien mehrere Konfigurationen verwendet werden, können weitere Dateien in jeweils einer neuen Zeile hinzugefügt werden. Diese Konfigurationen werden dann von dem Modul nacheinander ausgewertet.

```
Datei1  
Datei2  
Datei3
```

2. Starten des Programms: Das Programm kann über die Kommandozeile mit

```
./Allokation_lpopt
```

gestartet werden.

Implementierung

Allokation_main.cpp

Einlesen der Dateinamen der Konfigurationsdatei und der Eingabedaten:

```
ifstream Infos(„Informationen.txt“,ios::in);
```

Einlesen dieser Konfigurationsdateien und Eingabedaten:

```
Propeller_Informationen=Einlesen_Informationen::Einlesen_Propellerinformationen(...);
```

Überprüfung der Konfigurationsdaten auf Korrektheit mit `FehlercheckKonfig(...)`, z.B. $n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$. Falls die Konfigurationsdaten nicht korrekt sind, bricht das Programm ab.

Die für die Interaktion nötigen Daten werden nur dann eingelesen, falls Interaktionen beachtet werden.

```
if(Propeller_Informationen.Interaktion_bool){  
    Daten=Interaktionen::Einlesen_Propellerdaten();  
}
```

Initialisierung der Eingabewerte: geforderte Kraft (unskaliert/skaliert)

```

if(Propeller_Informationen.DP==0){ //Keine Änderung der Eingabekraft
    tau_hat[0]=Propeller_Informationen.tau1_hat[k];
    tau_hat[1]=Propeller_Informationen.tau2_hat[k];
    tau_hat[2]=Propeller_Informationen.tau3_hat[k];
}
else if(Propeller_Informationen.DP==1){ //Reduktion der gesamten Kraft
    tau_hat[0]=Propeller_Informationen.tau1_hat[k];
    tau_hat[1]=Propeller_Informationen.tau2_hat[k];
    tau_hat[2]=Propeller_Informationen.tau3_hat[k];
}

```

Initialisierung der Eingabewerte - Startsteuerung: Verwendung der Startsteuerung aus der Eingabedatei, bzw. der resultierenden Steuerung aus dem vorherigen Durchlauf.

```

//VSP
for (int l=0; l<Propeller_Informationen.m_VSP;l++){
    x_pitch_init[l]=Startkonfiguration[l];
    y_pitch_init[l]=Startkonfiguration[Propeller_Informationen.m_VSP+l];
    n_VSP_init[l]=Startkonfiguration[2*Propeller_Informationen.m_VSP+l];
}

```

Überprüfung auf Zulässigkeit des Startwertes. Die Verwendung von unzulässigen Startwerten führt zu einem Abbruch des Programms.

```

if((*Test_Startwert)[k]<0|(*Test_Startwert)[k]>1){
    cout << „Achtung: Unzulässiger Startwert!“ << endl;
}

```

Lösen des Optimierungsproblems

```

status = app->OptimizeTNLP(mynlp);
if (status == Solve_Succeeded){
    std::cout << std::endl << std::endl << „*** The problem solved!„ << std::endl;
}
else{
    std::cout << std::endl << std::endl << „*** The problem FAILED!“ << std::endl;
}

```

Zuletzt werden die Ergebnisse der Allokation, sowie die Kräfte und die Leistung der einzelnen Antriebe gespeichert.

Allokation_nlp

In [Allokation_nlp.cpp](#) wird das Optimierungsproblem aufgestellt.

Methode: [get_nlp_info](#)

```
bool Allokation_nlp::get_nlp_info(Index& n, Index& m, Index& nnz_jac_g, Index&
nnz_h_lag, IndexStyleEnum& index_style))
```

Anzahl der Variablen des Optimierungsproblems:

```
n>(*DMO).Anzahl_Variablen();
```

Die Anzahl der Optimierungsvariablen berechnet sich in Abhängigkeit von der Diskretisierungsgenauigkeit $z = T/h$ und der Anzahl der einzelnen Propellertypen:

```
int n=z*(3*m_VSP+2*m_Azi+1*m_Bug);
```

Eine Ausnahme bildet die zeitoptimale Optimierung in [Euler_lexiko_zeitoptimal.cpp](#)

```
int n=z*(3*m_VSP+2*m_Azi+1*m_Bug)+1;
```

wobei $z = 5$ hier fix ist. Die zusätzliche Variable ist dabei der variable Endzeitpunkt.

Anzahl der Nebenbedingungen des Optimierungsproblems:

```
m = (*DMO).Anzahl_Nebenbedingungen();
```

Die Anzahl der Nebenbedingungen ist neben der Diskretisierungsgenauigkeit und Anzahl der Antriebe auch abhängig von der jeweiligen Methode zur Lösung des multikriteriellen Optimierungsproblems.

- Elastic-Constraint (Modifikation) und Lexikographisch (erstes Optimierungsproblem)

```
int m=z*(4*m_VSP+3*m_Azi+2*m_Bug);
```

- Lexikographisch (zweites Optimierungsproblem)

```
int m=z*(4*m_VSP+3*m_Azi+2*m_Bug+3);
```

In diesem Fall muss neben den ursprünglichen Restriktionen, wie Leistungsbeschränkungen usw. auch der Schub zu jedem diskreten Zeitpunkt aus dem ersten Optimierungsproblem beachtet werden.

- zeitoptimale Optimierung

```
int m=z*(4*m_VSP+3*m_Azi+2*m_Bug)+3;
```

Die drei zusätzlichen Nebenbedingungen ergeben sich aus der Restriktion, dass die Propeller zum Endzeitpunkt die geforderte Kraft erzeugen müssen.

Anzahl der Nicht-Null-Einträge in der Jacobi-Matrix:

```
nnz_jac_g = (*DMO).Anzahl_Nicht_Null_Jacobi();
```

Wie auch die Anzahl der Variablen und der Nebenbedingungen, hängt auch die Anzahl der Nicht-Null-Einträge der Jacobimatrix von der Art und der Anzahl der Antriebe, der Diskretisierungsgenauigkeit und der Methode der multikriteriellen Optimierung ab. Zudem ergeben sich Unterschiede bei Beachtung von Interaktionen und Nichtbeachtung derer.

- Keine Beachtung von Interaktionen:
 - Elastic-Constraint (Modifikation) und Lexikographisch (erstes Optimierungsproblem)


```
int Anzahl=(9*m_VSP+3*m_Azi+2*m_Bug)*z*(z+1)/2;
```
 - Lexikographisch (zweites Optimierungsproblem)


```
int Anzahl=(18*m_VSP+9*m_Azi+5*m_Bug)*z*(z+1)/2;
```
 - zeitoptimale Steuerung


```
int Anzahl=(9*m_VSP+3*m_Azi+2*m_Bug)*z*(z+1)/2
          +3*Anzahl_Variablen()+Anzahl_Nebenbedingungen()-3;
```
- Beachtung von Interaktionen: Sei $Z := \frac{z(z+1)}{2}$
 - Elastic-Constraint (Modifikation) und Lexikographisch (erstes Optimierungsproblem)


```
int Anzahl=((3+6*m_VSP)*m_VSP+(1+4*m_Azi)*m_Azi+2*m_Bug)*Z;
```
 - Lexikographisch (zweites Optimierungsproblem)


```
int Anzahl=((3+6*m_VSP+9)*m_VSP+(1+4*m_Azi+6)*m_Azi+5*m_Bug)*Z;
```

Methode: `get_bounds_info`

```
bool Allokation_nlp::get_bounds_info(Index n, Number* x_l, Number* x_u, Index m,
Number* g_l, Number* g_u)
```

Beschränkung der Optimierungsvariablen:

```
vector<double>* Variable_low=(*DMO).Grenze_low_Variablen();
vector<double>* Variable_up=(*DMO).Grenze_up_Variablen();
```

Die Optimierungsvariablen sind beschränkt auf dem Intervall $[-1, 1]$

```
for (int i = 0; i < n; i++){
    (*Grenze_low_Var)[i]=-1;
}
for (int i = 0; i < n; i++){
    (*Grenze_up_Var)[i]=1;
}
```

Die Ausnahme hierzu bildet wieder die zeitoptimale Optimierung mit der Beschränkung der Variable, die den Endzeitpunkt beschreibt:

```
(*Grenze_low_Var)[n-1]=0;
(*Grenze_up_Var)[n-1]=1000;
```

Beschränkung der Nebenbedingungen: Aufgrund einer Transformation der Nebenbedingungen g von $g_l \leq g \leq g_u$ auf $0 \leq \frac{(g-g_l)}{(g_u-g_l)} \leq 1$ sind die Grenzen fix bei 0 und 1.

```
for (Index i = 0; i < m; i++){
    g_l[i]=0;
    g_u[i]=1;
}
```

Methode: [get_starting_point](#)

```
bool Allokation_nlp::get_starting_point(Index n, bool init_x, Number* x, bool init_z,
Number* z_L, Number* z_U, Index m, bool init_lambda, Number* lambda)
```

```
vector<double>* Initial=(*DMO).Initial_Variablen();
```

Der Startwert für die Optimierung hängt von dem jeweiligen Optimierungsproblems ab und wird so gewählt, dass er bis auf den Sonderfall der zeitoptimalen Optimierung sicher zulässig ist.

- Elastic-Constraint (Modifikation) , Lexikographisch (erste Optimierung)

```
for (int i=0; i<n;i++){
    (*Initial_Var)[i]=0;
}
```

Aufgrund der zulässigen Startsteuerung ist dieser Startwert immer zulässig.

- Lexikographisch zweite Optimierung: Um für diese Optimierung die Zulässigkeit des Startwertes zu gewährleisten, wird das Ergebnis des ersten Optimierungsproblem in „Zwischenergebnisse/Steuerung.dat“ gespeichert und als Initialwert für die zweite Optimierung verwendet.

- zeitoptimale Optimierung: Aufgrund der Problemformulierung ist hier ein zulässiger Startwert kaum möglich.

```
for (int i=0; i<n-1;i++){
    (*Initial_Var)[i]=0;
}
(*Initial_Var)[n-1]=1;
```

Methode: [eval_f](#)

```
bool Allokation_nlp::eval_f(Index n, const Number* x, bool new_x, Number&
obj_value)
```

```
obj_value=(*DMO).Zielfunktion(x);
```

Die Zielfunktion unterscheidet sich je nach Wahl der Methode zur Lösung des multikriteriellen Optimierungsproblems und je nach Diskretisierung. Einzelheiten hierzu finden sich in Kapitel 3.

Methode: [eval_grad_f](#)

```
bool Allokation_nlp::eval_grad_f(Index n, const Number* x, bool new_x, Number*
grad_f)
```

```
vector<double>* Gradient_F=(*DMO).Gradient_Zielfunktion(x);
```

Der Gradient wird im Allokationsmodul auf zwei Weisen berechnet:

1. Keine Interaktion: Wird keine Interaktion beachtet, wird der Gradient direkt analytisch berechnet.
2. Beachtung von Interaktionen: Aufgrund der sehr komplexen Zusammenhänge, die bei der Beachtung der unterschiedlichen Interaktionen entstehen können, müssen hier finite Differenzen zur Bestimmung des Gradienten verwendet werden. Dies führt bei einer hohen Anzahl von Variablen zu einer höheren Rechenzeit im Vergleich zu dem Fall, in dem keine Interaktionen beachtet werden.

Methode: [eval_g](#)

```
bool Allokation_nlp::eval_g(Index n, const Number* x, bool new_x, Index m, Number*
g)
```

Die Nebenbedingungen enthalten die Restriktionen der Antriebe; beispielsweise bezüglich ihrer Leistung.

```
vector<double>* Nebenbedingung_g=(*DMO).Nebenbedingung(x);
```

Methode: `eval_jac_g`

```
bool Allokation_nlp::eval_jac_g(Index n, const Number* x, bool new_x, Index m, Index  
nele_jac, Index* iRow, Index *jCol, Number* values)
```

Hier wird zunächst die Struktur der Jacobimatrix festgelegt, also die Zeile und Spalten in denen ein Eintrag ungleich Null steht.

```
vector<double>* Jacobi_ROW=(*DMO).Struktur_Jacobi_ROW();  
vector<double>* Jacobi_COL=(*DMO).Struktur_Jacobi_COL();
```

Aufgrund der Modellierung der Steuerung durch konstante B-Splines ergibt sich eine dünnbesetzte Jacobimatrix. Die Dreiecksstruktur der Matrix ergibt sich aus der Berechnung der Zustandsvariablen, wie beispielsweise der Drehzahl

$$n_{k+1} = n_0 + h\tilde{n} \sum_{i=0}^k \omega_i$$

mit der Ableitung nach ω_j

$$n_{k+1,\omega_j} = h\tilde{n}\chi_{j\leq k}. \quad (6.57)$$

Für die Berechnung der Jacobimatrix werden die Nebenbedingungen zunächst nach ihren Zustandsvariablen und dann nach ihren Steuervariablen abgeleitet.

Beispiel: Leistung eines Azimutpropellers

Die Nebenbedingungen, die die Leistung des Azimutpropellers zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 beschränken haben die Form:

$$g(t_k) = \frac{c_{Azi}n(t_k)^3 - P_{\min}}{P_{\max} - P_{\min}}, \quad k = 1, 2.$$

Die Konstante c_{Azi} ist dabei die propellerspezifische Konstante für die Leistung (vgl. Kapitel 4). Abgeleitet nach den Zustandsvariablen des Azimutpropellers gilt:

$$g(t_k)_\alpha = 0, \quad k = 1, 2$$
$$g(t_k)_n = \frac{3c_{Azi}n(t_k)^2}{P_{\max} - P_{\min}}, \quad k = 1, 2.$$

Weiter gilt für die Zustandsvariablen abgeleitet nach den Steuervariablen:

$$n(t_k)_{\omega_0} = 1, \quad k = 1, 2$$
$$n(t_1)_{\omega_1} = 0,$$
$$n(t_2)_{\omega_1} = 1.$$

$$\Rightarrow J_g := \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

Alle Nebenbedingungen sind ausführlich in Kapitel 4 beschrieben. Die Struktur der Jacobimatrix wird nun am Beispiel von je zwei VSP, zwei Azimutpropellern und zwei Bugstrahler dargestellt. Die roten Dreiecke entstehen, falls Interaktionen verwendet werden.

	VSP						Azimut				Bugstrahler	
	x_1	x_2	y_1	y_2	n_1	n_2	α_1	α_2	n_1	n_2	n_1	n_2
Steigung: VSP 1	\triangleleft	0	\triangleleft	0			0	0	0	0	0	0
Steigung: VSP 2	0	\triangleleft	0	\triangleleft			0	0	0	0	0	0
Drehzahl: VSP 1					\triangleleft	0	0	0	0	0	0	0
Drehzahl: VSP 2					0	\triangleleft	0	0	0	0	0	0
Moment: VSP 1	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	0	0	0	0	0	0
Moment: VSP 2	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	0	0	0	0	0	0
Leistung: VSP 1	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	0	0	0	0	0	0
Leistung: VSP 2	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	0	0	0	0	0	0
Drehzahl: Azi 1									\triangleleft	0	0	0
Drehzahl: Azi 2									0	\triangleleft	0	0
Moment: Azi 1							\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	0	0
Moment: Azi 2							\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	0	0
Leistung: Azi 1							\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	0	0
Leistung: Azi 2							\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	\triangleleft	0	0
Drehzahl: Bug 1											\triangleleft	0
Drehzahl: Bug 2											0	\triangleleft
Leistung: Bug 1											\triangleleft	0
Leistung: Bug 2											0	\triangleleft
Zusatz1 (Lexiko 2)	\triangleleft											
Zusatz2 (Lexiko 2)	\triangleleft											
Zusatz3 (Lexiko 2)	\triangleleft											

Danach werden die Einträge der Matrix berechnet.

```
vector<double>* Jacobi_value=(*DMO).Jacobi_Inhalt(x);
```

Wie bei der Berechnung des Gradienten der Zielfunktion werden auch hier die Einträge analytisch bestimmt, falls keine Interaktionen beachtet werden; ansonsten erfolgt die Berechnung über finite Differenzen.

Methode: `finalize_solution`

```
void Allokation_nlp::finalize_solution(SolverReturn status, Index n, const Number* x, const Number* z_L, const Number* z_U, Index m, const Number* g, const Number* lambda, Number obj_value, const IpoptData* ip_data, IpoptCalculatedQuantities* ip_cq)
```

Für eine Folge an Allokationsauswertungen muss nach jeder Optimierung die aktuelle Steuerung zwischengespeichert werden.

```
(*DMO).Save_Startwerte(x);
```

Im Falle der lexikographischen Optimierung ist zudem das Speichern der Lösung nach der ersten Optimierung notwendig um einen zulässigen Startwert in der zweiten Optimierung zu gewährleisten.

```
(*DMO).Save_Steuerung(x);
```

Des Weiteren muss der Propellerschub aus der ersten Optimierung gesichert werden, um die zusätzliche Nebenbedingung in der zweiten Optimierung aufstellen zu können.

```
(*DMO).Save_Tau_thruster(x);
```

All diese Ergebnisse befinden sich im Ordner „Zwischenergebnisse“ und werden nach der Optimierung wieder überschrieben. Zuletzt werden noch Resultate wie Propellerschub der einzelnen Antriebe, Leistung, Moment usw. gespeichert. Diese sind hauptsächlich bei Simulationen von Interesse.

```
(*DMO).Save_Ergebnisse(x);
```

Zusätzliche Funktionen

Die für die Zielfunktion und die Nebenbedingungen notwendigen Propellerschübe und Momente bzw. Leistung, werden mit den Funktionen

```

Thrust_VSP(vector<double> pitch_x, vector<double> pitch_y,
           vector<double> n_VSP)
Moment_VSP(vector<double> pitch_x, vector<double> pitch_y,
           vector<double> n_VSP)
Power_VSP(vector<double> pitch_x, vector<double> pitch_y,
          vector<double> n_VSP)
Thrust_Azimuth(vector<double> alpha, vector<double> n_Azi)
Moment_Azi(vector<double> n_Azi)
Power_Azi(vector<double> n_Azi)
Thrust_Bug(vector<double> n_Bug)
Power_Bug(vector<double> n_Bug)

```

berechnet. Dabei unterscheiden sich die Funktionen im Falle einer Interaktion von den Funktionen in denen keine Interaktion beachtet wird. Die genaue Modellierung der Funktionen findet sich in Kapitel 4.

Variante des Allokationsmoduls

Das Ziel in der Allokation ist die Verteilung einer geforderten Kraft auf die Antriebe, so dass die geforderte Kraft möglichst gut und schnell und zudem leistungseffizient erzeugt wird. Dabei kann leistungseffizient bedeuten, dass die Gesamtleistung der Antriebe minimal werden soll, oder dass jeder einzelne Propeller möglichst wenig Leistung benötigt. Um beiden Interpretationen gerecht zu werden, gibt es neben dem Ordner „Allokationsmodul“ auch „Allokationsmodul_Variante“. Führt man die Datei [Allokation_Ipopt](#) im Ordner „Allokationsmodul“ aus, so wird die Leistung jedes einzelnen Propellers minimiert, im Ordner „Allokationsmodul_Variante“, dagegen kommt es zu einer Minimierung der Gesamtleistung.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Versorgungsschiff: North Sea Giant	2
2.1	DP-System	6
2.2	Voith-Schneider Propeller	9
2.3	Voith-Schneider Propeller	10
2.4	Steuerung des VSP	10
2.5	Azimutpropeller	11
2.6	Bugstrahlruder	12
4.1	Propelleranordnung	44
4.2	Schub- und Momentenbeiwerte	48
4.3	Propelleranordnung und Strahlrichtung für CFD-Untersuchungen der Propeller-Propeller-Interaktion	49
4.4	Korrektur der CFD-Daten	49
4.5	Approximation der CFD-Daten	51
4.6	Beispiel: Propeller-Propeller-Interaktion	54
4.7	Schubreduktion: Propeller-Schiff-Interaktion	55
4.8	Azimut: Schub- und Momentenbeiwerte	58
4.9	Schubreduktion: Bugstrahlruder	61
4.10	Aufbau: Allokationsmodul	64
4.11	Verschiedene Methoden der multikrit. Optimierung	67
4.12	Beispiel 1: Zeitoptimale Steuerung	68
4.13	Beispiel 2: Zeitoptimale Steuerung	69
4.14	Beispiel: Energieeffizienz	71
4.15	Beispiel: Auswirkung von Interaktionen	71
4.16	Nichtbeachtung von Interaktionen	72
4.17	Fall 4: Rechenzeit	73
4.18	Fall 4: Fehler	74
4.19	Fall 9: Auswertung	74
4.20	Erzeugen einer konstanten Kraft	75
4.21	Maximaler Schub	76
4.22	Periodische Kräfte	77
5.1	Numerische Umsetzung: Sensitivitätsanalyse	83
5.2	Rechenzeit: Sensitivitätsanalyse	91
5.3	Fehler: Sensitivitätsanalyse	91
5.4	Rechenzeit: POD	92

5.5	Fehler: POD	93
5.6	Beispiel: Sensitivitätsanalyse	93
5.7	Beispiel: POD	94
5.8	Beispiel: Rechenzeit	95
6.1	Beispiel: PID-Koeffizienten	100
6.2	Schema: Feedback-Steuerung	102
6.3	Fehler unterschiedlicher Messfrequenzen	104
6.4	Einfache Zielfunktion	105
6.5	Kombinierte Zielfunktion	106
6.6	Beispiel: Vereinfachtes DP-System	107
6.7	6 Freiheitsgrade eines Schiffes	107
6.8	Vergleich: externe Kraft bekannt und approximiert	114
6.9	Beispiel: Vergleich PID-Regler mit optimaler Steuerung	115
6.10	Abweichung von der Sollposition durch Umwelteinflüsse	117
6.11	Änderung der x-Position, PID-Regler	117
6.12	DP-Analyse: DP-Analyse: durchschnittl. Abweichung, PID-Regler	118
6.13	DP-Analyse: Optimale Steuerung (Nord)	119
6.14	DP-Analyse: Optimale Steuerung (Nord-Ost)	119
6.15	DP-Analyse: Optimale Steuerung (Ost)	120
6.16	DP-Analyse: durchschnittl. Abweichung, Optimalsteuerung	120
6.17	Einfluss des Startwertes	121
6.18	Prinzip der Rollstabilisierung	123
6.19	Beispiel: Rollstabilisierung	124
6.20	Beispiel: Rollstabilisierung mit DP (1)	125
6.21	Beispiel: Rollstabilisierung mit DP (2)	125
6.22	Propeller-Propeller-Interaktion: Leistung	127
6.23	Parameterstudie: Fall 1	129
6.24	Parameterstudie: Fall 2	130
6.25	Parameterstudie: Fall 3	131
6.26	Parameterstudie: Fall 4	132
6.27	Parameterstudie: Fall 5	133
6.28	Parameterstudie: Fall 6	134
6.29	Parameterstudie: Fall 7	135
6.30	Parameterstudie: Fall 8	136
6.31	Parameterstudie: Fall 9	137
6.32	POD-Approximation: Fall 1	138
6.33	POD-Approximation: Fall 2	138
6.34	POD-Approximation: Fall 3	139
6.35	POD-Approximation: Fall 5	139
6.36	POD-Approximation: Fall 6	139
6.37	POD-Approximation: Fall 7	140
6.38	POD-Approximation: Fall 8	140
6.39	DP-Analyse: Nord	142

6.40 DP-Analyse: Nord-Ost	143
6.41 DP-Analyse: Ost	144
6.42 DP-Analyse: Süd-Ost	145
6.43 DP-Analyse: Süd	146
6.44 DP-Analyse: Süd-West	147
6.45 DP-Analyse: West	148
6.46 DP-Analyse: Nord-West	149

Literaturverzeichnis

- [1] <http://www.swp.de/goeppingen/lokales/goeppingen/Anti-Atom-Mahnwache-auf-dem-Goeppinger-Marktplatz;art5583,900490>, Abruf: 26.07.2014
- [2] <http://www.bmwi.de/DE/Themen/Energie/Erneuerbare-Energien/erneuerbare-energien-auf-einen-blick.html>, Abruf: 05.07.2014
- [3] <http://www.offshore-windenergie.net/windparks#nordsee>, Abruf: 15.07.2014
- [4] http://www.voith.com/de/presse/pressemitteilungen-99_21813.html, Abruf: 16.07.2014
- [5] <http://www.voith.com/de/produkte-leistungen/antriebstechnik/voith-schneider-propeller-10002.html>, Abruf: 23.05.2014
- [6] <http://www.nord-ostsee-kanal-info.de/glossar.html>, Abruf: 23.05.2014
- [7] <http://www.marinecontrol.org/>, Abruf: 06.07.2014
- [8] <http://www.fino2.de/de/Projekt.php>, Abruf: 4.9.2014
- [9] *Voith Schneider Propeller für Versorgungsschiffe der Offshore-Industrie*. Voith Turbo Marine, Heidenheim, September 2006
- [10] *Voith Water Tractor*. Voith Turbo Marine, Heidenheim, März 2007
- [11] *Voith Schneider Propeller*. Voith Turbo Marine, Heidenheim, 2009
- [12] *Querstrahlanlagen, Unverzichtbare Manövrierhilfen*. Schottel GmbH, 2010
- [13] *Schottel Ruderpropeller, Das überlegene Antriebssystem*. Schottel GmbH, 2010
- [14] ARDITTI, F. ; TANNURI, E. A.: Experimental Analysis of a Thruster Allocation Algorithm for DP Systems Considering the Interference between Thrusters and Thruster-Hull. (2012)
- [15] BENEDICT, K. ; WAND, C.: *Handbuch Nautik 2, Technische und betriebliche Schiffsführung*. Seehafen Verlag, 2011
- [16] BLUM, B.: Interaktion zweier VSPs bei Querschub / Voith Turbo Marine, Heidenheim. 2011. – Forschungsbericht

- [17] BOLAY, L.: *Spline-Approximation des Schub- und Momentenbeiwertes eines Voith Schneider Propellers anhand CFD-Daten*, Universität Ulm, Diplomarbeit, 2013
- [18] BRANDNER, A.: Allokationsmodul für Voith-Schneider und Azimutpropeller / Universität Ulm and Voith Turbo Marine, Heidenheim. 2014. – Forschungsbericht
- [19] BRANDNER, A. ; JÜRGENS, D. ; PALM, M.: Comparative investigation of the influence of thrusters positioning time on DP accuracy. In: *Ship and Offshore* (2013), March/April, Nr. 2, S. 54–59
- [20] BRIX, J.: *Manoeuvring Technical Manual*. Seehafen Verlag GmbH, Hamburg, 1993
- [21] CARLTON, J.: *Marine Propellers and Propulsion*. 2. Elsevier Ltd., 2007
- [22] DANG, J. ; DUIJN, R.: A pulling type generic thruster; two sets of 6-component open water model tests in inclined conditions - static mean loads / Marin, Wageningen. 2013. – Forschungsbericht
- [23] DEUFLHARD, P. ; BORNEMANN, F.: *Numerische Mathematik 2, Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 1994
- [24] EHRGOTT, M.: *Multicriteria Optimization*. 2. Springer Berlin Heidelberg New York, 2005
- [25] FAY, H.: *Dynamic Positioning Systems, Principles, Design and Applications*. Editions Technip, Paris, 1990
- [26] FÖLLINGER, O.: *Optimale Regelung und Steuerung, Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik*. Oldenbourg, 1994
- [27] FOSSEN, T. I.: *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. John Wiley and Sons, Ltd, 2011
- [28] GEIGER, K. ; KANZOW, C.: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer Berlin Heidelberg, 2002
- [29] GERDTS, M.: *Optimierung*. Vorlesungsskript, 2008
- [30] GERDTS, M.: *Optimale Steuerung*. Vorlesungsskript, 2009/2010
- [31] GERDTS, M.: *Optimal Control od ODEs and DAEs*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012
- [32] HAASDONK, B.: *Reduzierte-Basis-Methoden*. Vorlesungsskript, Juli 2011
- [33] HEILMANN, R.: Description of Voith Roll Stabilisation Work together with DP, Testing Program and FMEA / Voith Turbo Marine, Heidenheim. 2011. – Forschungsbericht

- [34] HOLVIK, J.: Basics of Dynamic Positioning. In: *Basics of DP* Dynamic Positioning Committee, 1998
- [35] JOHANSEN, T. A. ; FOSSEN, T. I. ; BERGE, S. P.: Constraint Nonlinear Control Allocation with Singularity Avoidance using Sequential Quadratic Programming. In: *Control Systems Technology, IEEE Transactions* 12 (2004)
- [36] JÜRGENS, B. ; FORK, W.: *The Fascination of the Voith-Schneider Propeller: History and Engineering*. Koehlers Verlagsgesellschaft GmbH Hamburg, 2002
- [37] JÜRGENS, D.: *Voith Schneider Propeller Effiziente Antriebe für Doppelendfähren*. Schiff und Hafen, Juli 2005
- [38] JÜRGENS, D. ; PALM, M.: Voith Schneider Propeller - An Efficient Propulsion System for DP Controlled Vessels. In: *Thrusters* Dynamic Positioning Committee, 2009
- [39] LEAVITT, J.: Optimal Thrust Allocation in DP Systems. In: *Thrusters* Dynamic Positioning Committee, Marine Technology Society, 2008
- [40] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1, Systemtheoretische Grundlagen Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer Vieweg, 2005
- [41] NAKAYAMA, H. ; YUN, Y. ; YOON, M.: *Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computation Intelligence*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2009
- [42] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S. J.: *Numerical Optimization*. second. Springer Science+Business Media, 2006
- [43] QUARTERONI, A. ; SACCO, R. ; SALERI, F.: *Numerische Mathematik 2*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2002
- [44] SINGER, S.: Nachbildung der Interaktionseffekte von VSPs für Manövriersimulationen / Voith Turbo Marine, Heidenheim. 2013 (1671). – Forschungsbericht
- [45] STOER, J. ; BURLISCH, R.: *Numerische Mathematik 2*. 3. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990
- [46] TIESTE, K. ; ROMBERG, O.: *Keine Panik vor Regelungstechnik*. Springer Vieweg, 2012
- [47] VOLKWEIN, S.: *Model Reduction using Proper Orthogonal Decomposition*. Vorlesungsskript, 2011
- [48] WÄCHTER, A. ; BIEGLER, L. T.: Global and Local Convergence of Line Search Filter Methods for Nonlinear Programming / Department of Chemical Engineering Carnegie Mellon University. 2002. – Forschungsbericht

- [49] WÄCHTER, A. ; BIEGLER, L. T.: On the Implementation of an Interior-Point Filter Line-Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming. In: *Mathematical Programming* (2006), S. 25–57
- [50] WIT, C.: *Optimal Thrust Allocation Methods for Dynamic Positioning of Ships*, Delft University of Technology, Diplomarbeit, 2009

Erklärung

Ich, Anke Brandner, versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Ich erkläre außerdem, dass die von mir vorgelegte Dissertation bisher nicht im In- oder Ausland in dieser oder ähnlicher Form in einem anderen Promotionsverfahren vorgelegt wurde. Ich versichere ferner die Richtigkeit der im Lebenslauf gemachten Angaben.

Ulm, den 19. März 2015

(Anke Brandner)

Anke Brandner

— Persönliche Angaben

Name: Anke Brandner
Geburtsdatum: 29.12.1986
Geburtsort: Stuttgart

— Ausbildung und Qualifikation

2006 **Abitur**, *St. Agnes-Gymnasium*, Stuttgart.
2006-2011 **Studium**, *Mathematik (Diplom)*, Universität Ulm.
06/2010-10/2010 **Diplomarbeit**, *Universität Ulm in Kooperation mit der Firma Voith*, Heidenheim.
Titel: Entwicklung eines Prognoseverfahrens für die hydromechanischen Kennwerte von Voith-Schneider Propellern
seit 9/2011 **Promotionsstudium**, *Institut für Numerische Mathematik der Universität Ulm in Kooperation mit der Firma Voith*, Heidenheim.

— Sonstige Erfahrungen

2008-2011 **Studentische Hilfskraft**, *Institut für Numerische Mathematik*, Universität Ulm.

— Publikation

2013 A. Brandner, D. Jürgens, M. Palm, Comparative investigation of the influence of thrusters positioning time on DP accuracy, *Ship and Offshore*, März/April, Nr. 2, S. 54-59

Ulm, den 1. Oktober 2014

(Anke Brandner)