Georg Kleiser

Einführung in die Strömungslehre

Fluidmechanik

Fluiddynamik

Einführung in die Strömungslehre

Fluidmechanik und Fluiddynamik

Georg Kleiser

2017

Einführung in die Strömungslehre
von Georg Kleiser

Autor: Georg Kleiser (Kleiser@hs-ulm.de)

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung und Grundbegriffe **5**
1.1. Aufgaben der Strömungslehre . . . 5
1.2. Physikalische Grundgrößen . . . 7
1.2.1. Masse, Volumen und Dichte . . . 7
1.2.2. Strömungsgeschwindigkeit und Kinematik . . . 8
1.2.3. Kräfte . . . 11
1.2.4. Druck . . . 12
1.3. Eigenschaften von Fluiden . . . 12
1.3.1. Viskosität oder der Widerstand gegen Formänderungen . . . 12
1.3.2. Oberflächenspannung . . . 15

2. Ruhende Fluide **19**
2.1. Druckverläufe in ruhenden Fluiden . . . 19
2.2. Kommunizierende Gefäße . . . 23
2.3. Druckkraft auf Behälterwände . . . 25
2.4. Hydrostatischer Auftrieb, Schweben und Schwimmen . . . 26
2.5. Druckkräfte an Phasengrenzflächen und Kapillarität . . . 29

3. Erhaltungssätze der Strömungsmechanik **35**
3.1. Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung . . . 35
3.2. Eulersche und Bernoullische Gleichung . . . 40
3.2.1. Druckbegriffe und Deutung der Bernoulli-Gleichung . . . 42
3.2.2. Anwendungen der Bernoulli-Gleichung . . . 45
3.3. Kraftwirkungen von Strömungen - Der Impulssatz . . . 47
3.3.1. Anwendungen des Impulssatzes . . . 50

4. Dynamik der reibungsbehafteten Fluide **55**
4.1. Rohrhydraulik . . . 55
4.1.1. Hagen-Poiseuille-Strömung . . . 55
4.1.2. Laminare und turbulente Rohrströmungen . . . 57
4.1.3. Berechnung des Druckverlusts von Einbauten in Rohrsystemen . . . 62
4.1.4. Leistungszufuhr und -entnahme an einer Strömungsmaschine . . . 64
4.1.5. Pumpen- und Anlagenkennlinie . . . 65
4.1.6. Rohrleitungsnetzwerke . . . 67
4.2. Umströmungsprobleme . . . 68

A. Stoffdaten **71**

B. Wichtige Formeln **79**
B.1. Grundgrößen 79
B.2. Hydrostatik 79
B.3. Bilanzgleichungen 80
B.4. Reibungsbehaftete Strömungen 80

1. Einführung und Grundbegriffe

1.1. Aufgaben der Strömungslehre

Die Strömungslehre stellt die mathematischen und physikalischen Grundlagen zu Lösung ingenieurtechnischer Probleme auf dem Gebiet von strömenden Flüssigkeiten und Gasen (gemeinsam auch als Fluide bezeichnet) zur Verfügung. Alternativ werden anstatt Strömungslehre auch die Begriffe Strömungsmechanik, Fluiddynamik oder sofern man sich nur auf Gase bzw. Flüssigkeiten bezieht auch Aerodynamik bzw. Hydrodynamik verwendet.

Prinzipiell lassen sich die ingenieurtechnischen Probleme in zwei große Themenfelder unterteilen:

1. Berechnung von Umströmungsvorgängen von Körpern
2. Berechnung von Durchströmproblemen

Bei den meisten Problemen von Umströmungsvorgängen geht es primär darum, die Wirkung der Kräfte zu berechnen, die das Fluid auf einen Festkörper ausübt. Diese können sowohl gewünscht sein (bspw. um in einer Turbine Bewegungsenergie des Fluids in mechanische Energie umzusetzen) oder unerwünscht (bspw. Widerstand des Fluids gegen die Fortbewegung eines Autos) sein. Je nach Aufgabenstellung resultieren hieraus andere Lösungsansätze.

Abbildung 1.1.: Beispiele für Umströmungsprobleme

Bei Durchströmungsproblemen geht es häufig darum, den Druckverlust in einem Leitungsnetz zu reduzieren bzw. die Strömungsgeschwindigkeiten und Massenströme in einem Leitungsnetz auszulegen. Diese Erkenntnisse wiederum sind fundamental für die Dimensionierung von Pumpen, Gebläsen, Ventilen und vieler weitere Geräte, die in Gas- bzw. Flüssigkeitsnetzen eingesetzt werden.

Abbildung 1.2.: Beispiele für Durchströmungsprobleme

Ein strömungstechnisches Problem kann dann als rechnerisch gelöst betrachtet werden, wenn zu jedem Zeitpunkt t an jeder Stelle im System der Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{w}$ bzw. dessen Einzelkomponenten w_x, w_y,w_z in die drei Raumrichtungen (x,y,z) sowie Druck, Dichte und Temperatur angegeben werden können. Was zunächst banal klingen mag, war jedoch bis noch vor wenigen Jahren überhaupt nicht und ist auch heute nur mittels vielen Vereinfachungen und hohem Rechneraufwand möglich. Aus den oben dargestellten Grundgrößen können dann alle weiteren physikalischen Vorgänge (bspw. Kräfte, Impulse, Wärmeaustausch) abgeleitet werden.

Da eine genaue, analytische Lösung der oben dargestellten Aufgabe für die meisten technischen Probleme nicht darstellbar war und teilweise immer noch ist, wurden in der Strömungslehre für viele immer wieder auftauchende Fragestellungen Modelle und Rechenansätze entwickelt, die die für den Ingenieur notwendigen Grundaussagen in ausreichender Qualität zur Verfügung stellen. Hierbei geht es dann oft um die summarische Berechnung von Strömungswiderständen, Druckverlusten oder Druckimpulsen ohne dass hierbei wirklich an jeder Stelle absolut exakt die Strömungssituation bekannt sein muss.

Es soll jedoch an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, dass gerade in der technischen Optimierung die Veranschaulichung und Darstellung von Strömungsvorgängen eine immer größer werdende Rolle spielt. Entsprechende Daten und Diagramme können durch Computational Fluid Dynamics (CFD) – Programme ermittelt werden. Die Erstellung, Bedienung und Auswertung von CFD-Modellen erfordert jedoch ein sehr tiefgreifendes Eindringen in die Mathematik und Physik der Strömungen, welches nur in Spezialvorlesungen erlangt werden kann.

Unter-Richtungen der Strömungslehre

Die gesamte Strömungstechnik bedient sich im Prinzip nur vierer Grundgleichungen, die in Tabelle 1.1 zusammengefasst sind.

Bei einfacheren strömungstechnischen Problemen kann die Anzahl der Gleichungen jedoch häufig reduziert werden. Die weißen Felder in Tabelle 1.2 kennzeichnen Größen in der jeweiligen Unter-Richtung der Strömungslehre, die entweder konstant sind (wie in einzelnen Fällen die Dichte) oder gar null sind (wie teilweise

Tabelle 1.1.: Grundgleichungen der Strömungsmechanik

	Aussage	Gleichungen	Gleichungsart
3 Erhaltungssätze	Kontinuität (Massenerhaltung)	1	skalar
	Kräftegleichgewicht (Impulserhaltung)	3	vektoriell
	Energieerhaltung	1	skalar
Fluideigenschaft	Thermische Zustandsgleichung (Kopplung zwischen Dichte, Temperatur, Druck)	1	skalar

die Geschwindigkeiten). In der Hydro- bzw. Aerostatik wird somit die Kräftesituation in Flüssigkeiten bzw. Gasen untersucht, die nicht in Bewegung sind. In der Hydrodynamik kann in den meisten Fällen die Dichte als konstant angenommen werden.

Tabelle 1.2.: Unter-Richtungen der Strömungslehre

	Hydrostatik	Aerostatik	Hydrodynamik	Aerodynamik
Druck	variabel	variabel	variabel	variabel
Dichte	konstant	variabel	konstant	variabel
Geschwindigkeit	null	null	variabel	variabel
Beispiel	ruhende Flüssigkeit im Gefäß	ruhende Atmosphäre	bewegte Flüssigkeit	bewegtes Gas

1.2. Physikalische Grundgrößen

1.2.1. Masse, Volumen und Dichte

Bei vielen strömungstechnischen Problemen ist es notwendig, dass wir das Volumen V , welches ein bestimmtes Massenelement m innerhalb einer Strömung einnimmt, berechnen können. Man bezeichnet den Quotienten aus Volumen dividiert durch die Masse auch als spezifisches Volumen v. Der Kehrwert hiervon ist die Dichte ϱ. Es gilt:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \tag{1.1}$$

In einfachen Fällen bleibt die Dichte über das Strömungsfeld konstant. In diesem kann man die Dichte oder spezifische Volumen entsprechenden Tabellenwerken entnehmen (siehe Kapitel). Bei Flüssigkeiten stellt dies auch die einzige Möglichkeit

dar, entsprechende Werte zu erhalten.

Bei Gasen ist die Dichte sehr stark von der Temperatur und dem Druck abhängig. Deshalb ist die Arbeit hier mit Tabellenwerken schwierig, da kleine Abweichungen von den Tabellenangaben bereits deutliche Dichteänderungen hervorrufen können. Die Thermodynamik stellt jedoch hierfür Gesetzmäßigkeiten zur Verfügung. Es gilt die folgende Abhängigkeit der Dichte vom Druck p und der Temperatur T für ideale Gase:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{R \cdot T} \tag{1.2}$$

Hierbei ist R der Proportionalitätsfaktor und wird als spezifische Gaskonstante bezeichnet. Das ideale Gasgesetz erlaubt somit die Berechnung der Dichte bei einem beliebigen Druck und einer beliebigen Temperatur. In vielen Fällen kann mit diesem Gesetz das Verhalten von Gasen hinreichend genau beschrieben werden.

Die Aufgabe der Strömungslehre ist es, den Ingenieuren die Methoden zur Berechnung von Fluidströmungen und deren Wirkung auf angrenzende Festkörper zur Verfügung zu stellen. Dem entsprechend beschäftigt sich die Strömungslehre vorrangig mit den Wechselwirkungen zwischen Geschwindigkeiten und Kräften sowie deren abgeleiteten Größen. Diese sollen im Folgenden nochmals etwas näher betrachtet werden.

1.2.2. Strömungsgeschwindigkeit und Kinematik

Unter der Geschwindigkeit $\vec{w}$ versteht man allgemein in der Physik die Ableitung einer Wegstrecke, die ein Körper oder im Falle der Strömungslehre ein Fluid zurücklegt, nach der Zeit. Im einfachsten Fall bewegt sich das Fluid auf einer Linie. Dann ist die Geschwindigkeit rein durch ihre Größe gekennzeichnet. In den meisten Fällen findet jedoch eine Strömung im dreidimensionalen Raum statt. Zur Beschreibung der Strömung muss man somit nicht nur wissen, welchen Betrag die Strömungsgeschwindigkeit besitzt sondern auch in welche Richtung sich die Strömung bewegt. Man spricht deshalb auch von einer vektoriellen Größe, die grundsätzlich zwei Angaben benötigt: Betrag und Richtung.

Zur Festlegung der Richtung muss ein Bezugssystem bekannt sein. Das gebräuchlichste Koordinatensystem ist das kartesische Koordinatensystem, welches den Raum in drei Raumrichtungen (x, y, z) aufteilt. Dementsprechend kann auch ein Geschwindigkeitsvektor so zerlegt werden, dass man seine Anteile in die jeweilige Raumrichtung separat betrachtet.

Die Wahl des Bezugssystems ist im Prinzip beliebig. In vielen Fällen werden Gesetzmäßigkeiten einfacher und leichter verständlich, wenn das Bezugssystem an die Geometrie der Problemstellung angepasst wird. So wird bei der Berechnung von Problemstellungen in Rohrleitungen (symmetrisch) häufig auch ein Zylinderkoordinatensystem verwendet, in dem der Radius und die Länge die entscheidenden Koordinaten darstellen.

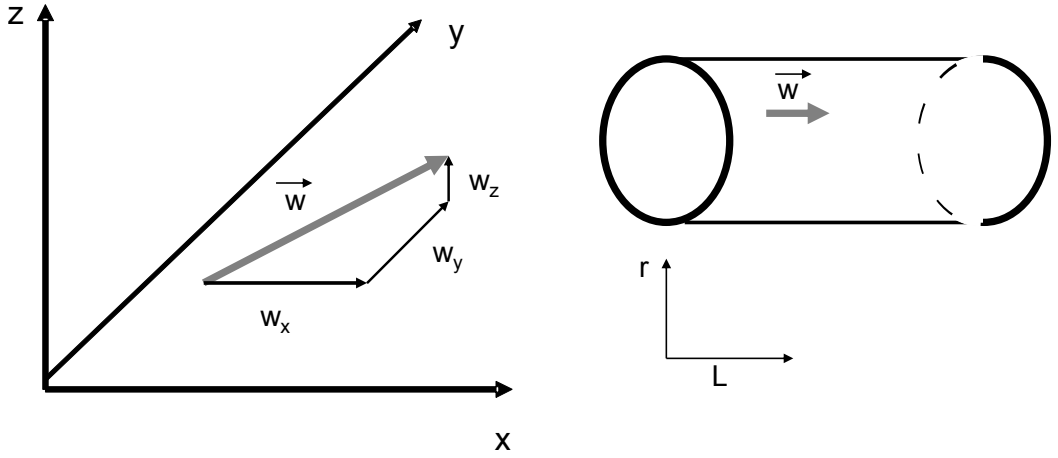


Abbildung 1.3.: Koordinatensysteme in der Strömungslehre (links: kartesisches Koordinatensystem, rechts: Zylinderkoordinaten)

Für viele Untersuchungen genügt es, Abhängigkeiten in nur eine Raumrichtung zu betrachten. In diesem Fall muss der Geschwindigkeitsvektor in seine räumlichen Anteile zerlegt werden. Man bezeichnet den Betrag der Anteile in die drei einzelnen Raumrichtungen entweder als w_x,w_y und w_z oder alternativ als u, v, w.

In den meisten Fällen interessiert in der Strömungslinie nicht ein einzelner Geschwindigkeitsvektor sondern die Summe aller Geschwindigkeitsvektoren innerhalb eines bestimmten Raumelements. Man spricht dann auch von einem Geschwindigkeitsfeld.

Eine häufige Aufgabe in der Strömungslehre ist es, die Änderung der Geschwindigkeitsvektoren bei einer Positionsänderung zu berechnen. Man will somit wissen, wie sich die Geschwindigkeit verändert, wenn man ein Stück weiter in x-, y- und z-Richtung wandert. Da jedoch eine gleichzeitige Veränderung in alle Raumrichtungen schwer zu berechnen ist, geht man in diesem Fall schrittweise vor. Man berechnet zunächst, wie sich die Geschwindigkeit verändert, wenn man einen Schritt weiter in x-Richtung läuft. Dann folgen anschließend die anderen Koordinaten. Die differenzielle Änderung der Geschwindigkeit in x-Richtung bezeichnet man dann als partielle Ableitung der Geschwindigkeit in x-Richtung und formelmäßig mit:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \tag{1.3}$$

Das gebogene ∂ symbolisiert hierbei, dass es sich nicht um eine vollständige Ableitung handelt, da w neben x auch noch von den anderen Ortskoordinaten y und z und ggf. weiterer Variablen abhängig ist.

Wichtig: Es ist strikt zwischen der partiellen Ableitung in x-Richtung ∂ w/ ∂ x, die die Änderung des Geschwindigkeitsvektors in x-Richtung symbolisiert und der x-Komponente der Geschwindigkeit w_x, die an einem bestimmten Ort den Anteil

von w, der in x-Richtung zeigt, zu unterscheiden.

Das totale Differenzial berechnet sich, wenn alle Variablen berücksichtigt sind, mit:

$$d\vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \cdot \mathrm{dx} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} \cdot \mathrm{dy} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} \cdot \mathrm{dz} \tag{1.4}$$

Es ist durch das normale „d“ gekennzeichnet, welches symbolisiert, dass nun die Veränderungen aller Variablen berücksichtigt sind.

Die Geschwindigkeitsvektoren in einem Raum können jedoch nicht nur von den Ortskoordinaten sondern auch von der Zeit abhängig sein. Ein Geschwindigkeitsssfeld, das sich nicht mit der Zeit ändert, bezeichnet man als stationär. Ist die Geschwindigkeit abhängig von der Zeit, spricht man von einer instationären Strömung. Die Geschwindigkeitsvektoren verändern sich mit Fortschreiten der Zeit.

In der Darstellung von Strömungsgeschwindigkeiten unterscheidet man zwischen Teilchenbahnen (oder Bahnkurven), Stromlinien und Stromröhren.

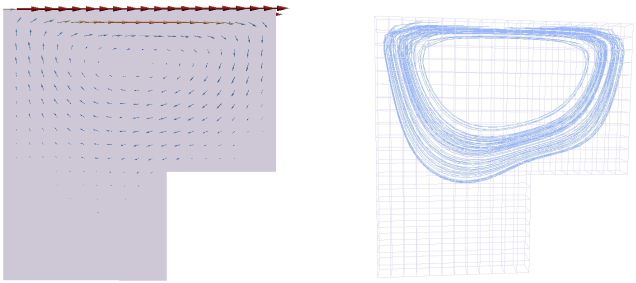


Abbildung 1.4.: Beispiel für Stromlinien (links) und Bahnkurven (rechts)

Bei einer Bahnkurve verfolgt man den Weg eines Teilchens oder mehrerer Teilchen, die gemeinsam zum Zeitpunkt t_o starten, über einen gewissen Zeitbereich. Man kann sich eine Bahnkurve so vorstellen, dass zum Zeitpunkt t_o ein Partikel an einer Stelle in der Strömung abgesetzt wird und nun mittels einer Videokamera die Wanderung dieses Partikels aufgezeichnet wird.

Stromlinien geben zu einem fixen Zeitpunkt t das Geschwindigkeitsfeld wieder. Man kann sich die Erstellung so vorstellen, dass eine Vielzahl von Partikel, die sich in der Strömung befinden, durch Auslösen einer Kamera mit einer relativ kurzen Blendenöffnungszeit fotografiert wird. Durch die Blendenöffnungszeit wird für einen kurzen Zeitraum der Weg der Partikel deutlich und man sieht quasi Betrag und Richtung der Geschwindigkeitsvektoren zu diesem Zeitpunkt.

Generell gilt: Stromlinien können sich nicht überschneiden. Bei stationären Strömungen sind Stromlinien und Bahnkurven identisch. Bei instationären Strömungen können sich Bahnkurven überschneiden, da ein langsameres Teilchen eventuell zu einem späteren Zeitpunkt bei geänderten Strömungsbedingungen (auf Grund des

Fortschreitens der Zeit) die gleiche Stelle passieren kann, die zuvor schon von einem schnelleren Teilchen durchflossen worden ist.

Eine Stromröhre fasst die Stromlinien, die am Anfang eine bestimmte Fläche A_1 durchlaufen, zusammen und verfolgt sie über den weiteren Strömungsverlauf. Eine derartige Betrachtung ist für Bilanzzwecke bei großen Strömungsfeldern häufig notwendig, wenn die Ausdehnung der Strömung nicht bereits seitens der Technik (Rohrleitung, Kanal, etc.) klar definiert ist.

Multipliziert man die Strömungsgeschwindigkeit mit der Fläche, die von der Strömung durchflossen wird, dann erhält man den Volumenstrom in m^3/s:

$$\dot{V} = w \cdot A \tag{1.5}$$

Der Punkt über dem Volumen V symbolisiert hierbei, dass es sich um eine nach der Zeit abgeleitete Größe handelt. Wird der Volumenstrom mit der Dichte multipliziert, dann erhält man die Masse, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche A fließt, oder den Massenstrom:

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot w \cdot A \tag{1.6}$$

1.2.3. Kräfte

Die Physik definiert eine Kraft als Produkt aus Masse und Beschleunigung. Die Beschleunigung wiederum ist jedoch nichts anderes als die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit. Es gilt somit:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{w}}{\mathrm{dt}} \tag{1.7}$$

Tritt also ein bestimmtes Massenelement zu einem Zeitpunkt t_0 in ein Strömungsfeld ein und ändert sich dessen Geschwindigkeit beim Durchlaufen des Strömungsfeldes entweder in Betrag oder Richtung, so kann dies nur durch die Wirkung von entsprechenden Kräften verursacht sein. Geschwindigkeiten und Kräfte stehen somit in direkter Wechselwirkung.

Ebenso wie die Geschwindigkeit ist auch die Kraft eine vektorielle Größe. Für die Zerlegung in die Raumrichtungen gelten die gleichen mathematischen Grundgesetze wie für die Geschwindigkeiten.

Wichtig: Aus der Tatsache, dass eine Strömung stationär also nicht zeitabhängig ist, darf nicht abgeleitet werden, dass keine Kräfte wirken. Eine stationäre Strömung heißt nur, dass sich die Geschwindigkeitsvektoren an jedem Punkt im Raum nicht mit der Zeit ändern. Die Geschwindigkeitsvektoren eines Massenteilchens, das sich im Raum bewegt, können sich aber dennoch zeitlich ändern. Auch auf ruhende Teilchen können Kräfte wirken. Allerdings muss in diesem Fall dann das Grundgesetz der Mechanik gelten, dass die Summe aller angreifenden Kräfte null ergeben muss.

In der Strömungslehre werden häufig noch zwei Arten von Kräften unterschieden. Massenkräfte wirken auf die Masse bzw. im Volumen eines Fluidelements. Hierzu zählen beispielsweise die Schwerkraft, elektrostatische Kräfte, Trägheitskräfte, Zentrifugalkräfte und viele weitere. Oberflächenkräfte wirken an den Grenzflächen zu den Nachbarvolumina. Hierzu gehören Reibungskräfte, Scherkräfte sowie Kräfte, die durch Grenzflächenphänomene (Oberflächenspannung) erzeugt werden.

1.2.4. Druck

Teilt man die Kraft F durch die Fläche A, über die die Kraft appliziert wird, so erhält man einen Druck p. Es gilt:

$$p = \frac{F}{A} \tag{1.8}$$

Der Druck nimmt dabei die gleich Dimension an, wie eine andere aus der Festkörper-Mechanik bekannte Größe: die Spannung. Die Dimension ist N/m^2. Es gibt jedoch einen wesentlichen Unterschied zwischen dem Druck in Fluiden und der Spannung in Festkörpern. Bei Betrachtung der Druckberechnung ist ersichtlich, dass wir eine vektorielle Größe (die Kraft) durch eine skalare Größe (Fläche) dividieren. Man erhält also rein mathematisch betrachtet wieder eine vektorielle (also richtungsabhängige) Größe. Fluide unterscheiden sich aber in einem wesentlichen Punkt von Festkörpern: Sie können in Ruhe keine Schubspannung aufnehmen. Das Applizieren von Schubspannungen würde, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, unweigerlich zu einem Fließvorgang führen. Eine Druckkraft tritt somit immer nur senkrecht zu einer Oberfläche auf und hat an der gleichen Stelle immer den gleichen Betrag unabhängig davon, wie diese Oberfläche im Raum positioniert ist. Damit ist der Druck in Fluiden aber (anders als die Spannung in Festkörpern) keine vektorielle sondern eine skalare (d.h. richtungs-unabhängige) Größe.

Die SI-Einheit des Druckes ist N/m^2=Pa. Häufig gebraucht wird auch noch die SI-konforme Einheit bar=10^5 Pa (bzw. mbar=10^2). Daneben gibt es noch viele historisch entwickelte Einheiten (mWS, Torr), die jedoch auf Grund ihrer fehlenden Konformität zum SI-System nicht mehr verwendet werden sollen.

1.3. Eigenschaften von Fluiden

1.3.1. Viskosität oder der Widerstand gegen Formänderungen

Ein Fluid verhält sich unter Krafteinwirkung anders als ein Festkörper. Wird an einem Festkörper eine Kraft appliziert, dann wird diese eine Auslenkung und damit eine Dimensionsänderung des Festkörpers hervorrufen. Als Modell hierfür kann die Auslenkung einer Feder herangezogen werden.

Bei vielen Flüssigkeit und Gasen (wir werden solche Medium später als newtonsches Fluide bezeichnen) hingegen erzeugt die Anwendung einer Kraft einen

Geschwindigkeitsgradienten im Fluid. Modellhaft entspräche dies einem Dämpfer. Im Spalt zwischen dem hier feststehenden Kolben und dem sich bewegenden Außenmantel könnte man einen linearen Geschwindigkeitsverlauf feststellen. Auf Grund von Haftung werden die Flüssigkeitsteilchen außen mit der Geschwindigkeit des Mantels nach unten geschoben. Die Flüssigkeitsteilchen in der Nähe des Innenkolbens haften hingegen an diesem und besitzen somit keine Geschwindigkeit.

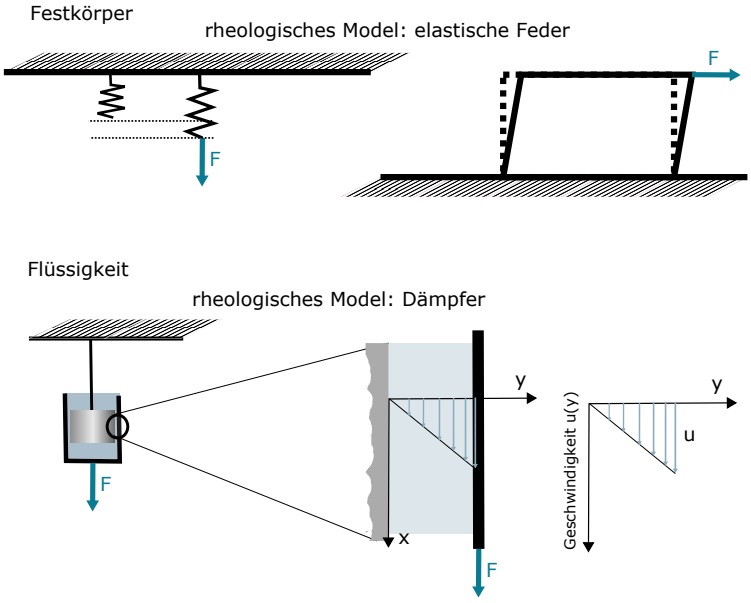


Abbildung 1.5.: Rheologisches Modell

Die Kraft, die in einem solchen Fall aufzuwenden ist, ist proportional zur Fläche A und zum Geschwindigkeitsgradienten. Es gilt somit:

$$F \sim A \cdot \frac{du}{dy} \tag{1.9}$$

Man kann die Kraft auch direkt durch die Fläche dividieren. Hieraus erhält man eine Spannung, die man auch als Schubspannung τ bezeichnet.

Man erhält dann:

$$\tau \sim \frac{du}{dy} \tag{1.10}$$

Zum endgültigen Ausrechnen der Formel benötigt man noch einen Proportionalitätsfaktor. Man kann sich leicht denken, dass dieser etwas mit den Eigenschaften des Stoffes zu tun haben muss. Eine zähflüssige Substanz (Honig) lässt sich sicher deutlich schwerer durch den Spalt fördern als beispielsweise Wasser. Die Stoffeigenschaft, die man hierzu benötigt, bezeichnet man als dynamische Viskosität η. Sie hat die Einheit Ns/m^2 oder Pa·s.

Tabelle 1.3.: Dynamische Viskosität η und kinematische Viskosität ν einiger Stoffe [5]

	η mPas	ν mm^2/s
Luft (20°C)	0,0182	15
Wasser (20°C)	1,005	1,007
Wasserdampf (100°C)	0,0172	29
Motorenöl (20°C)	20 ... 10.000	20 .... 10.000
Pech	$3 \cdot 10^{10}$	$2{,}5 \cdot 10^{10}$

Es gilt somit:

$$\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy} \tag{1.11}$$

Eine Substanz, die dieser Gesetzmäßigkeit gehorcht, heißt **Newtonsches Fluid**. Die Gesetzmäßigkeit wird von vielen Gasen und Flüssigkeiten mit guter Näherung erfüllt.

Die dynamische Viskosität selbst ist temperaturabhängig. Generell gilt: Bei Gasen steigt die dynamische Viskosität mit zunehmender Temperatur. Dies ist auf den zunehmenden Impulsaustausch durch die höhere kinetische Energie in den Gasteilchen bei zunehmender Geschwindigkeit zurückzuführen. Bei Flüssigkeiten hingegen sinkt sie, was auf das Abnehmen der anziehenden Kräfte mit zunehmender Temperatur zurückzuführen ist.

In vielen technischen Prozessen wird das Strömungsverhalten nicht nur durch die dynamische Viskosität sondern auch durch die Dichte beeinflusst. Deshalb wird häufig eine zusammengesetzte Größe, die sogenannte **kinematische Viskosität** oder Zähigkeit ν verwendet.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ Einheit: } m^2/s \tag{1.12}$$

Neben den klassischen newtonschen Fluiden gibt es auch noch nicht-newtonsche Fluide, die sich entsprechend durch ein anderes Strömungsverhalten bei Scherkraftbeanspruchung auszeichnen. Die Wissenschaftsrichtung, die sich mit der Verformung und der Bewegung von Materialien bei Kompressions- und Scherbeanspruchung auseinander setzt, wird allgemein als **Rheologie** bezeichnet. Man spricht deshalb auch von rheologischen Eigenschaften. Trägt man das newtonsche Fluid in einem Diagramm auf, bei dem die Schubspannung in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten gezeigt wird, dann ist dort ein linearer Anstieg zu verzeichnen. Dies entspricht bei direkter Auftragung der Viskosität in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten einem konstanten Wert (=horizontale Linie). Die meisten Gase, u.a auch Luft, Wasser und viele Öle verhalten sich entsprechend.

Eine Substanz, die sich wie die Kennlinie b verhält, bezeichnet man als Bingham-Medium oder als plastisches Medium. Es muss zunächst eine Grundschubspannung überwunden werden, bevor das Material zu fließen beginnt. Beispiele hierfür sind Zahnpasta, Industrieschlämme und häufiger auch Lebensmittel wie bspw. Quark.

Bei Medien nach Linie c nimmt die Viskosität mit zunehmendem Geschwindigkeitsgradienten ab. Das Material verhält sich am Anfang fast plastisch und wird bei höheren Geschwindigkeiten weniger viskos. Man spricht von einem pseudoplastischen oder strukturviskosen Medium. Hierzu gehören Emulsionen und Harze. Das Gegenteil ist bei einem Medium nach Kennlinie d der Fall. Dort ist die Viskosität am Anfang sehr klein, steigt aber bei zunehmendem Geschwindigkeitsgradienten an. Dieser Effekt wird oft bei Farben für Lackiervorgänge gewünscht.

An dieser Stelle sei auch noch auf einen weiteren Sonderfall hingewiesen. Ein Fluid nach e (beide Kurven verlaufen auf der x-Achse) wäre ein reibungsfreies Fluid. Ein solches Fluid existiert nicht. Es gibt jedoch in der Strömungslehre Grenzfälle, wo die Wirkung von Reibungseffekten vernachlässigt werden können. In diesem Fall kann mit dem Modell eines reibungsfreien bzw. viskositätslosem Fluid gearbeitet werden.

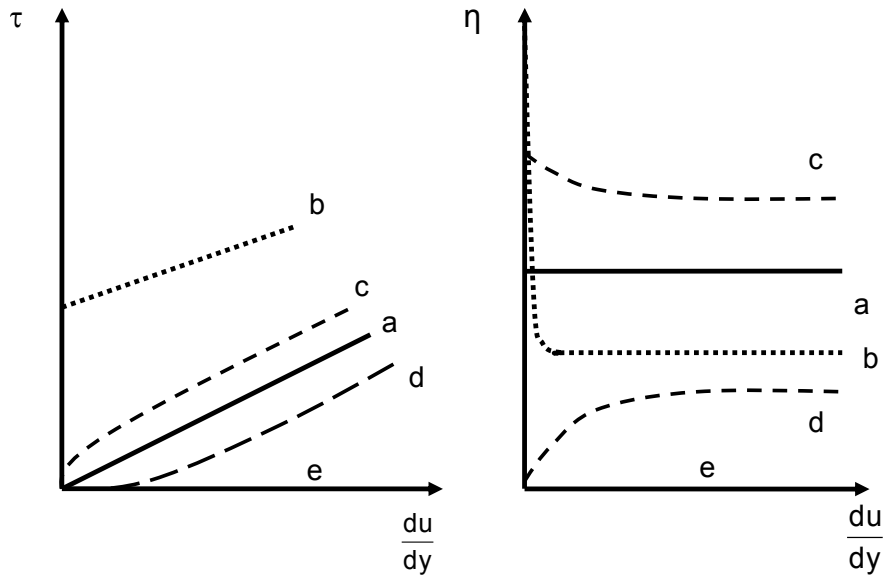


Abbildung 1.6.: Rheologisches Verhalten verschiedener Fluide

1.3.2. Oberflächenspannung

Wir haben uns bislang mit Eigenschaften von Fluiden beschäftigt, die im Fluid selbst zum Tragen kommen. In diesem Kapitel wenden wir uns Eigenschaften zu, die an Grenzflächen zu anderen Fluiden oder anderen Körpern entscheidend sind.

Im Inneren eines Fluids wirken anziehende Wechselwirkungen. Man bezeichnet

Abbildung 1.7.: Grenzflächenphänomene

diese auch als **Kohäsion**. Betracht man nun beispielsweise ein Flüssigkeitsteilchen im Inneren der Flüssigkeit, dann unterliegt dieses einem Kräftefeld, bei dem sich alle angreifenden Kräfte quasi neutralisieren. An der Grenzfläche zu anderen Materialien bleibt jedoch eine resultierende Kraft übrig. Man spricht in diesem Fall auch von **Adhäsion,** die also die Kraft zwischen zwei verschiedenartigen Materialien an der Grenzfläche widerspiegelt.

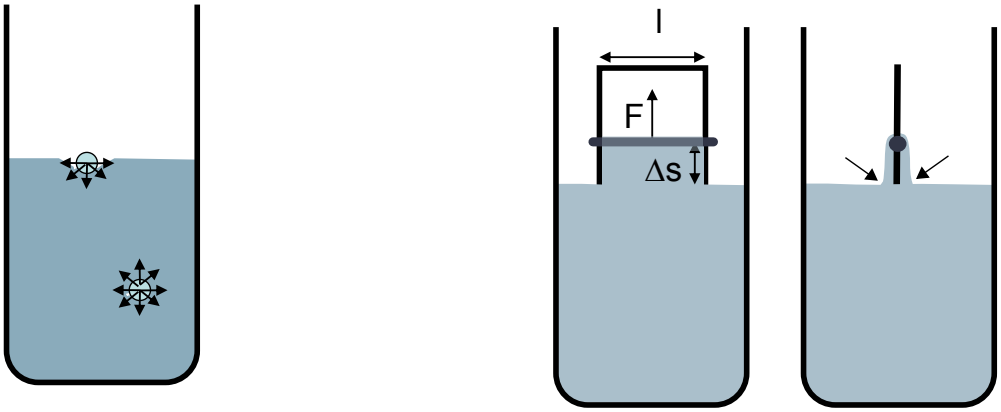


Abbildung 1.8.: Kräftebilanz im Innern und an der Grenzfläche eines Fluids (links) und Messung der Oberflächenspannung (rechts)

Dieses Kräfteungleichgewicht erzeugt einen sehr wichtigen physikalischen Effekt. Die resultierende Kraft nach innen bewirkt, dass Grenzflächen grundsätzlich danach streben, minimal zu werden. Bei gleichem Volumen wird bei einer Kugel das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen minimal. Aus diesem Grund nehmen Grenzflächensysteme (Blase, Tropfen) eine Kugelform an (die jedoch durch die Wirkung von weiteren Kräften, bspw. der Schwerkraft auch etwas deformiert sein kann).

Will man die Oberfläche vergrößern, so ist hierbei Arbeit aufzuwenden. Dieser Vorgang spielt bei vielen technischen Prozessen (Zerstäuber, Belüfter) eine entscheidende Rolle.

Man kann die Oberflächenspannung σ als Kraft F verstehen, die aufzuwenden ist bezogen auf die Länge über die eine neue Oberfläche geschaffen wird. Da die Oberfläche im Fall des rechts ersichtlichen Bildes (siehe Pfeilmarkierung) rechts und links des Drahtes erzeugt wird, ist insgesamt die Kraft auf die Länge 2 l zu beziehen. Es gilt somit:

Tabelle 1.4.: Oberfächenspannung in N/m verschiedener Materialien bei 20°C [5, 3]

	Oberflächenspannung
Qucksilber	0,47-0,49
Wasser	0,073
Benzol	0,028
Seifenlösung	0,025
Alkohol	0,023 - 0,025
Speiseöl	0,025 - 0,030

$$\sigma = \frac{F}{2 \cdot l} = \frac{\text{angreifende Kraft an einer Berandung}}{\text{Länge der Berandung}} \tag{1.13}$$

Einfacher aber der obigen Betrachtungsweise vollkommen identisch, ist es, die Oberflächenspannung als eine Energie E zu verstehen, die notwendig ist, um eine Fläche A neu zu schaffen. In unserem obigen Beispiel wäre dies:

$$\sigma = \frac{E}{A} = \frac{F \cdot \Delta s}{2 \cdot l \cdot \Delta s} = \frac{F}{2 \cdot l} = \frac{\text{Energie zur Vergrößerung der Oberfläche}}{\text{neu geschaffene Oberfläche}} \tag{1.14}$$

Wir sehen, dass in beiden Fällen das identische Ergebnis erzielt wird. Auch die Einheiten entsprechen sich. Die Oberflächenspannung hat die Einheit N/m (=Energie N·m/ Fläche m^2). Die Oberflächenspannung wird durch das Fluid vorgegeben. Typische Werte zeigt Tabelle 1.4. Mit steigender Temperatur nimmt die Oberflächenspannung ab.

2. Ruhende Fluide

In der Hydrostatik und Aerostatik wird der Einfluss von Kräften auf ruhende Flüssigkeiten bzw. Gase untersucht. Achtung: Man könnte unter den Begriffen „Hydro“ bzw „Aero“ auch verstehen, dass es sich hierbei ausschließlich um Wasser oder Luft handelt. Dies sind jedoch nur die zwei bedeutendsten Vertreter der jeweiligen Kategorie. Der Begriff „Hydrostatik“ wird gleichsam wie „Hydrodynamik“ auch verwendet für alle anderen Flüssigkeiten, also bspw. Schmieröle, Kohlenwasserstoffe, etc. Gleiches gilt in der Aerodynamik auch für andere Gase.

2.1. Druckverläufe in ruhenden Fluiden

Für ruhende Fluide gilt folgendes Grundgesetz (man spricht auch von einem Axiom oder Postulat, da es rein auf Erfahrungen beruht und nicht aus anderen Gesetzmäßigkeiten ableitbar ist):

Die Summe aller Kräfte in einem ruhenden Fluid ist Null.

Oder:

In einem ruhenden System stehen alle Kräfte im Gleichgewicht.

Man bezeichnet diese Aussage auch als Eulersches Grundgesetz der Hydrostatik.

Wir wollen die Bedeutung dieser verbalen Aussage mit Hilfe der Mathematik in eine Formel fassen. Hierzu betrachten wir ein beliebiges Volumenelement der Ausdehnung dx, dy und dz (siehe Abbildung 2.1).

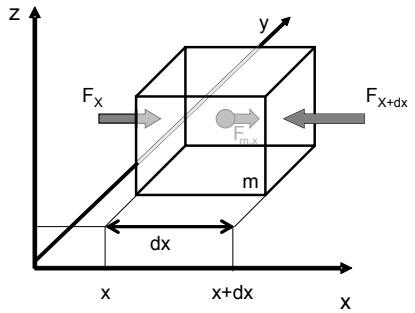


Abbildung 2.1.: Kräftebilanz an einem Volumenelement in x-Richtung

Da die Kraft eine vektorielle Größe darstellt, betrachten wir zunächst nur die Anteile, welchen in der x-Richtung wirken. In einem ruhenden Fluid können auf die Oberfläche des Volumenelements nur die jeweiligen Druckkräfte des Nachbar-

elements wirken. Somit ergibt sich für:

$$F_x = p_x \cdot A = p_x \cdot dy \cdot dz \tag{2.1}$$

$$F_{x+dx} = p_{x+dx} \cdot A = p_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \tag{2.2}$$

Mit Hilfe des Satz von Taylors gilt für den Druck p_{x+dx} bei infinitesimal kleinem dx.

$$p_{x+dx} = p_x + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \tag{2.3}$$

Neben den Druckkräften, die über die Oberflächen wirken, können weitere Kräfte existieren, die im Zentrum des Volumenelements angreifen. Man spricht dann auch von Feldkräften. Hierzu zählen insbesondere die Schwerkraft, elektrostatische Kräfte bei geladenen Fluiden, Zentrifugal- oder Trägheitskräfte. Wir wollen diese Kräfte als $\mathrm{F_m}$ bezeichnen. Den Quotienten aus der Kraft $\mathrm{F_m}$ und der Masse bezeichnen wir als Massenkraft $\mathrm{f_m}$. Es gilt:

$$F_m = f_m \cdot m = f_m \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \text{ mit } m = \rho \cdot V \text{ und } V = dx \cdot dy \cdot dz \tag{2.4}$$

$F_{m,x}$ soll den Anteil von F_m darstellen, der in Richtung der x-Achse wirkt. Gleichsam entspricht $f_{m,x}$ der in x-Richtung wirkenden Massenkraft.

Aus dem Postulat, dass beim ruhenden Fluid die Summe aller Kräfte gleich Null sein muss, lässt sich nun ableiten:

$$F_x - F_{x+dx} + F_{m,x} = 0 \tag{2.5}$$

oder

$$p_x \cdot dy \cdot dz - (p_x + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy \cdot dz + f_m \cdot \varrho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \tag{2.6}$$

Zusammengefasst ergibt sich nach Division mit $dx \cdot dy \cdot dz$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_{m,x} \cdot \varrho \tag{2.7}$$

Man kann natürlich die gleiche Vorgehensweise für die beiden anderen Raumrichtungen anwenden und erhält dann analog:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = f_{m,y} \cdot \varrho \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f_{m,z} \cdot \varrho \tag{2.9}$$

In vielen Veröffentlichungen wird das Ergebnis auch in der vektoriellen Form dar-

gestellt und lautet dann:

$$\text{grad}(p) = \rho \cdot \overrightarrow{f_m} \tag{2.10}$$

Wir wollen die praktischen Aussagen der von uns hergeleiteten Gesetzmäßigkeit an Beispielen diskutieren:

Fall 1:
Es gibt (zumindest in der gerade betrachteten Raumrichtung) keine an der Fluidmasse angreifenden Kräfte. Dann folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.11}$$

Das heißt: Der Druck ändert sich nicht in diese Raumrichtung (hier x-Richtung). Entsprechend kann man auch integrieren:

$$p(x) = \int_0^x 0 \cdot \mathrm{dx} + \text{const.} = \text{const.} \tag{2.12}$$

Der Druck entspricht somit einer Konstanten in x-Richtung.
Fall 2:
Eine typische Kraft, die auf ein Volumenelement wirkt, ist die Schwerkraft. Üblicherweise wirkt diese in z-Richtung, weshalb wir im Folgenden auch diese Koordinate für die Berechnung auswählen. Die Schwerkraft berechnet sich zu $F_{m,z}$= m · g. Somit ergibt sich für die Massenkraft $f_{m,z}$= - g. Das negative Vorzeichen ergibt sich dadurch, dass die Schwerkraft entgegen der z-Richtung wirkt.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f_{m,z} \cdot \varrho = -g \cdot \varrho \tag{2.13}$$

Beim Integrieren muss hier zunächst unterschieden werden, ob wir es mit einer Flüssigkeit zu tun haben (dann ist ϱ praktisch konstant) oder mit einem Gas, dessen Dichte deutlich vom Druck abhängt.
Betrachten wir zunächst die Flüssigkeit. Dort gilt:

$$dp = -g \cdot \varrho \cdot dz \tag{2.14}$$

$$p(z) = -g \cdot \varrho \cdot z + const \tag{2.15}$$

Betrachten wir die Situation in dem rechts dargestellten Flüssigkeitsbehälter, so können wir die Konstante const dadurch errechnen, dass wir bei z=0 den Referenzdruck auf dem Boden p_g als Leitgröße annehmen. Aus obiger Formel erhält man dann für den Druck in der Flüssigkeit:

$$p(z) = p_g - g \cdot \varrho \cdot z \tag{2.16}$$

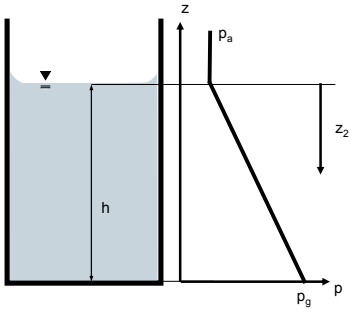


Abbildung 2.2.: Hydrostatischer Druckverlauf

Häufiger ist jedoch der Atmosphärendruck p_a über einer Flüssigkeitsoberfläche bekannt. Setzt man diese Bedingung zur Berechnung der Integrationskonstanten an, dann ergibt sich:

$$p(h) = p_a = -\varrho g h + \text{ const bzw. const } = pa + g \cdot \varrho \cdot h \tag{2.17}$$

Als Lösungsgleichung erhält man dann:

$$p(z) = p_a + g \cdot \varrho \cdot h - g \cdot \varrho \cdot z \tag{2.18}$$

Der Nachteil dieser beiden Lösungen ist, dass entweder der Druck auf dem Grund oder zumindest der Abstand von der Oberfläche zum Grund (h) bekannt sein müssen. Wenn wir den Druck bspw. 2 m unter der Wasseroberfläche wissen wollten, ohne die absolute (maximale) Wassertiefe zu kennen, könnten wir beide Gleichungen nicht verwenden. Auch diese Berechnung ist jedoch möglich. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. 1. Wir wechseln in ein neues Koordinatensystem, bei dem die Koordinate z nach unten zeigt, stellen die Differenzialgleichung dann entsprechend auf und integrieren erneut. 2. Wir definieren eine Hilfsvariable z_2=h-z, die somit entgegen der Koordinate z läuft. z_2 stellt damit geometrisch den Abstand zur Flüssigkeitsoberfläche dar. Eingesetzt in die obige Gleichung ergibt sich:

$$p(z_2) = p_a + g \cdot \varrho \cdot z_2 \tag{2.19}$$

Wichtig: **In einem Fluid, bei dem die Dichte konstant ist (Flüssigkeit), nimmt der Druck mit dem Abstand zur Oberfläche linear zu!**

Als nächstes wollen wir ein gasförmiges Fluid betrachten. Eine Berechnung kann nur dann erfolgen, wenn wir die Abhängigkeit der Dichte vom Druck kennen. Bei einem idealen Gas können wir das ideale Gasgesetz ansetzen. Es gilt:

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} \tag{2.20}$$

Wir gehen zunächst von einer konstanten Temperatur T_0 aus und setzen die

ideale Gasgleichung in die über die Kräftebilanz ermittelte Differenzialgleichung ein:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f_{m,z} \cdot \varrho = -g \cdot \frac{p}{R \cdot T_0} \tag{2.21}$$

Durch Trennung der Variabeln erhält man:

$$\frac{\mathrm{dp}}{p} = -g \cdot \frac{\mathrm{dz}}{R \cdot T_0} \tag{2.22}$$

oder integriert vom Druck p_0 an der Stelle z_0=0 bis zum Druck p an der Stelle z:

$$\ln\frac{p}{p_0} = -g \cdot \frac{z}{R \cdot T_0} + \mathrm{const.} \tag{2.23}$$

Da an der Stelle z=0 der Ausdruck $\ln(p/p_0)$=0 bzw. p/p_0=1 sein muss, muss const.= 0 werden.
Daraus folgt:

$$p = p_0 \cdot e^{\frac{-g \cdot z}{R \cdot T_0}} \tag{2.24}$$

Diese Formel wird als sogenannte barometrische Höhenformel bezeichnet. Der Druck nimmt bei einem Gas mit konstanter Temperatur mit steigender Höhe exponentiell ab. Anstatt der Temperatur T_0 kann auch die Anfangsdichte eingesetzt werden. Gemäß idealem Gasgesetz gilt:

$$\frac{\rho_0}{p_0} = \frac{1}{R \cdot T_0} \tag{2.25}$$

Eingesetzt in die barometrische Höhenformel ergibt sich:

$$p = p_0 \cdot e^{\frac{-g \cdot \rho_0 \cdot z}{p_0}} \tag{2.26}$$

Der tatsächliche Druckverlauf in der Erdatmosphäre kann nicht rein mit der barometrischen Höhenformel wiedergegeben werden, da die Temperatur nicht isotherm verläuft. Welchen Verlauf die Temperatur nimmt, ist abhängig von der Schichtung. Exaktere Modelle berücksichtigen nehmen der Druckabhängigkeit der Dichte auch einen Temperaturverlauf und damit die Temperaturabhängigkeit der Dichte.

2.2. Kommunizierende Gefäße

Wir haben im vorangegangenen Kapitel gesehen, dass in einer Flüssigkeit der hydrostatische Druck in allen Ebenen gleich groß sein muss. Diese Bedingung muss auch dann gelten, wenn über zwei miteinander in Verbindung stehenden Wassersäulen unterschiedliche Drücke appliziert werden.

Damit die Kräfte sich im Gleichgewicht befinden, muss in unserem Fall folgende Be-

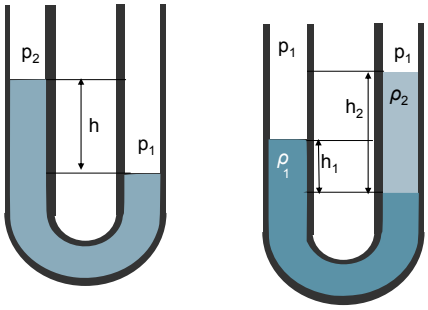


Abbildung 2.3.: Das U-Rohr als Messinstrument (links: Druckmessung, rechts: Dichtemessung)

dingung erfüllt sein:

$$p_1 = p_2 + \varrho \cdot g \cdot h \tag{2.27}$$

bzw.

$$\Delta p = \varrho \cdot g \cdot h \tag{2.28}$$

Derartige U-Rohre waren lange Zeit die bevorzugte Methode zur Messung von Differenz- und Absolutdrücken. Je nach Anwendung wurden sie entweder mit Wasser oder Quecksilber gefüllt. Die Dichte von Quecksilber beträgt ca. 13600 kg/m^3, die von Wasser 1000 kg/m^2. Somit können bei gleichen Höhenunterschieden mit Quecksilber deutlich größere Druckdifferenzen vermessen werden. Man findet heute noch an älteren Maschinen derartige U-Rohr-Manometer.

Aus dieser Anwendung heraus resultieren auch die Druckeinheiten m Wassersäule (m WS) bzw. Torr (= mm Quecksilbersäule). 1 m WS als Höhendifferenz entspricht somit 9,8 kPa, 1 Torr 133,3 Pa.

Neben der relativen Druckmessung kann diese Methode auch zur absoluten Druckmessung herangezogen werden. Hierbei muss der Druck in einem Schenkel konstant gehalten werden (dies ist z.B. möglich in dem sich dort theoretisch ein Vakuum bzw. in Realität der bei Raumbedingungen meist sehr geringen Dampfdruck der Flüssigkeit einstellt).

U-Rohre können auch zur Dichtebestimmung herangezogen werden. Bei gleichem Druck p_1 über den Flüssigkeitsoberflächen muss gelten:

$$\varrho_1 \cdot g \cdot h_1 = \varrho_2 cdot g \cdot h_2 \tag{2.29}$$

bzw.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1} \tag{2.30}$$

Ist eine Dichte bekannt, kann somit aus dem Höhenverhältnis auf die andere Dichte umgerechnet werden.

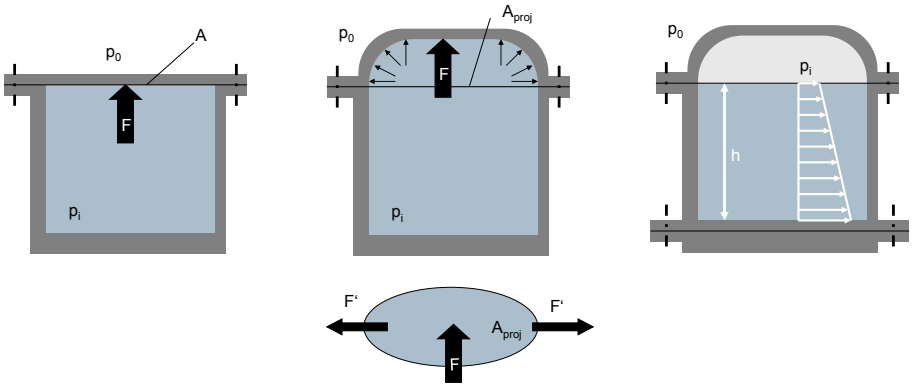


Abbildung 2.4.: Druckverläufe in Behälter

2.3. Druckkraft auf Behälterwände

Druckkräfte im vollständig gefüllten Behälter bei konstantem Überdruck Δp und vernachlässigbarem Schweredruck

Auf einen ebenen Deckel (siehe Abbildung 2.4, links) wirkt bei einem Überdruck $\Delta p = p_i - p_0$ die Kraft

$$F = A \cdot (p_\mathrm{i} - p_0) = A \cdot \Delta p \tag{2.31}$$

Bei einem gewölbten Deckel neutralisieren sich die Kräfte, die parallel zur Projektionsfläche wirken. Als wirksame Kraft auf den Deckel tritt somit nur die Druckdifferenz zwischen innen und außen multipliziert mit der Projektionsfläche A_proj. auf (siehe Abbildung 2.4, Mitte) . Es gilt somit:

$$F = A_\mathrm{proj} \cdot (p_\mathrm{i} - p_0) = A_\mathrm{proj} \cdot \Delta p \tag{2.32}$$

Druckkräfte bei Wirkung des Schweredrucks

Horizontale Platte

Auf den Boden eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Behälters wirkt die Druckkraft $(p_\mathrm{i} + \varrho \cdot g \cdot h) \cdot A$ (siehe Abbildung 2.4, rechts). Es ergibt sich insgesamt als resultierende Kraft auf den Boden:

$$F = (p_\mathrm{i} - p_0 + \varrho \cdot g \cdot h) \cdot A \tag{2.33}$$

Wie aus der Gleichung ersichtlich ist, ist somit die Kraft rein von der Höhe der Wassersäule, nicht jedoch von deren Volumen oder deren Masse abhängig. Auf die in Abbildung 3 -10 gezeigten Bodenplatten mit jeweils gleicher Fläche wirkt die identische Kraft. Dieser Effekt wird auch als hydrostatisches Paradoxon bezeichnet.

Da der Druck eine ungerichtete Kraft ist, gilt der gleiche Zusammenhang auch für die aufwärtsgerichtete Druckkraft.

Vertikale und geneigte Platte

Für eine beliebige Fläche an einer geneigten Platte gilt:

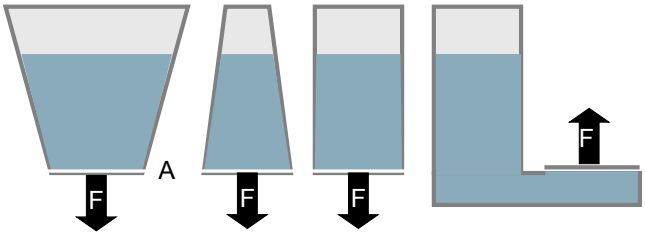


Abbildung 2.5.: Hydrostatisches Paradoxon: Die Kraft auf die Bodenplatte ist nur von der Flüssigkeitshöhe und nicht von der Gefäßform abhängig!

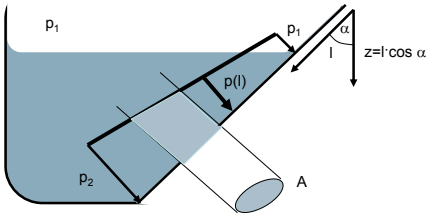


Abbildung 2.6.: Drucksituation an der geneigten Platte

$$F = \int_A \mathrm{pdA} = \int_A (p_1 + \rho \cdot g \cdot z) \cdot \mathrm{dA} = p_1 \cdot A + \rho \cdot g \cdot \cos\alpha \int_A l \cdot \mathrm{dA} = \\ p_1 \cdot A + \rho \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot l_s \cdot A = p_1 \cdot A + \rho \cdot g \cdot z_s \cdot A = p_s \cdot A \tag{2.34}$$

Die wirksame Kraft ist somit gleich dem Druck, der auf dem Schwerpunkt der Fläche A lastet multipliziert mit der Fläche A. Wird mit den Koordinaten l oder z gearbeitet, so ist auch jeweils der Abstand vom Schwerpunkt der Fläche A zur Flüssigkeitsoberfläche zu bestimmen (l_s bzw. z_s). Dies erscheint auch einleuchtend, da im Schwerpunkt der Mittelwert aus den geringeren Kräften im oberen Bereich und den größeren Kräften im unteren Bereich anzusiedeln ist.

Achtung: Dieser Zusammenhang gilt nur für die Kräftebilanz. Bei der Berechnung von Momenten werden die Zusammenhänge komplizierter, da hier nicht nur die Wegabhängigkeit des Druckes sondern auch die der Angriffslinie zu Tragen kommt. Zur Bestimmung des Schwerpunktes bei komplexeren Flächen sind entsprechende mathematische Formelsammlungen zu konsultieren.

2.4. Hydrostatischer Auftrieb, Schweben und Schwimmen

Auf ein schwebendes Teilchen wirken die in Abbildung 2.7 gezeigten Kräfte. Die

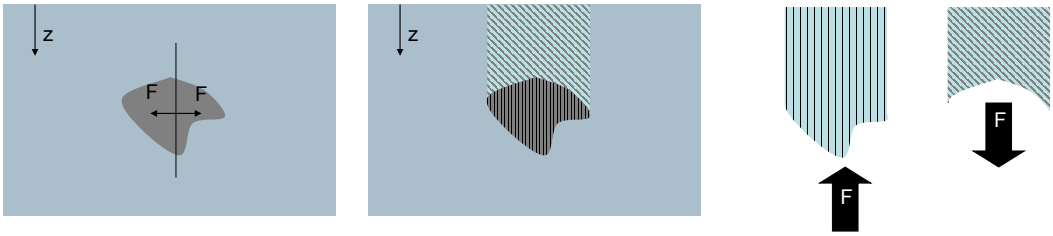


Abbildung 2.7.: Kräftebilanz für ein schwebendes Teilchen

Horizontalkräfte heben sich gegenseitig auf, da die Projektionsfläche der rechten und linken Hälfte ebenso wie die von rechts und links (bzw. von vorne und hinten) angreifenden Drücke identisch sind. Anders verhält es sich jedoch bei den Vertikalkräften. Auf die Unter- und Oberseite wirkt jeweils der Druck der auf ihr lastenden Wassersäule. Da jedoch die Unterseite weiter von der Flüssigkeitsoberfläche entfernt ist als die Oberseite, lastet auf ihr auch ein entsprechend höherer Druck. Hieraus resultiert eine Kraft nach oben, die man als Auftrieb bezeichnet. In Abbildung 2.7 ist die nach unten drückende Wassersäule schräg schraffiert, die nach oben drückende Wassersäule durch senkrechte Linien gekennzeichnet. Wie man aus der rechten Darstellung in Abbildung 2.7 erkennen kann, bleibt als Differenz die Fläche des Körpers (bzw. in einer dreidimensionalen Darstellung das Volumen) übrig. Dies führt zum Satz von Archimedes:

Auf einen untergetauchten Körper wirkt eine Kraft nach oben die gleich dem Gewicht des von ihm verdrängten Flüssigkeitsvolumens ist.

Somit gilt:

$$F_A = -\varrho_{Fluid} \cdot g \cdot V_{\text{Körper}} \tag{2.35}$$

Insgesamt wirkt auf den Körper die Auftriebskraft nach oben und die Gewichtskraft nach unten. Die komplette Kräftebilanz lautet

$$F = F_A + F_G = (\varrho_{\text{Körper}} - \varrho_{\text{Fluid}}) \cdot g \cdot V_{\text{Körper}} \tag{2.36}$$

Somit gilt:

Ist die Dichte $\varrho_{\text{Körper}} > \varrho_{\text{Fluid}}$ wird der Körper sinken, ist hingegen $\varrho_{\text{Körper}} < \varrho_{\text{Fluid}}$ zur Oberfläche hin aufsteigen. Ein Körper, dessen Dichte gleich der Fluiddichte ist, schwebt im Fluid.

Bei Gasen, bei denen die Dichte vom Druck und damit von der Höhe abhängt, wird der Körper so lange seine Position verändern, bis die Dichte des Körpers der entsprechenden Gasdichte in der jeweiligen Höhe entspricht (bspw. Gasluftballon).

Bei Flüssigkeiten, in denen die Dichte annähernd konstant bleibt, wird sich ein Gleichgewicht erst an der Flüssigkeitsoberfläche einstellen. Dieses ist dadurch gekennzeichnet, dass das Gewicht des Flüssigkeitsvolumens des dann noch eintauchenden Anteils des Körpers gleich dem Gesamtgewicht sein muss. Diesen Zustand

bezeichnet man als Schwimmen.

Der Angriffspunkt der Schwerkraft bei einem schwimmenden Körper liegt im Gewichtsschwerpunkt des Körpers. Der Angriffspunkt der Auftriebskraft liegt im Volumenschwerpunkt des unterhalb der Wasseroberfläche befindlichen Volumens. Liegen diese nicht auf einer Linie und ist F_G höher als F_A, dann erzeugen die Kräfte ein Drehmoment, welches zum Kippen des Körpers führt. Dies ist ein wichtiges Auslegekriterium für die Stabilität von Schiffen.

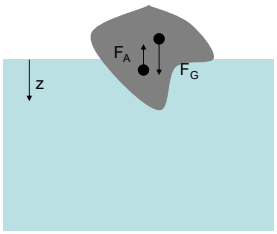


Abbildung 2.8.: Angriffspunkte von Schwer- und Auftriebskraft

Auftriebeffekte gibt es jedoch nicht nur bei Festkörpern, die sich in Fluiden befinden. Die Auftriebskraft wirkt natürlich auch auf Fluide in anderen Fluiden. So ist das Aufsteigen von Gasblasen in Wasser ebenfalls auf den Auftriebseffekt zurückzuführen.

Von großer Bedeutung in technischen Anwendungen ist auch der Auftriebseffekt, den ein Volumenelement innerhalb des gleichen Fluids erfährt, wenn dessen Temperatur höher und damit die Dichte an speziellen Stellen niedriger sind als die des umgebenden Fluids. Dieser Effekt ist in folgenden Systemen von Bedeutung:

- Schwerkraftheizung: Das warme Wasser strömt von selbst nach oben, kühlt in den Heizkörpern ab und fließt dann auf Grund der höheren Dichte wieder zum Heizkessel zurück. Da dies jedoch größere Temperaturdifferenzen erfordert als sie rein zum Heizen notwendig wären, werden heute Umwälzpumpen eingesetzt.

- Heißluftballon: Die warme Luft im Ballon erfährt auf Grund ihrer niedrigeren Dichte einen so großen Auftrieb, dass sie den gesamten Ballon anheben kann.

- Rauchgasabzug im Kamin: Die warme Luft strömt bei ausreichender Kaminhöhe nach oben ab und führt durch den so entstehenden Unterdruck automatisch der Feuerung wieder Frischluft zu.

- Freie Konvektion: Das Aufsteigen von erwärmter Luft ist ein wesentlicher Mechanismus in der Wärmeübertragung. Die dadurch induzierten Strömungen verbessern die Wärmeübertragung an scheinbar ruhende Fluide deutlich. Heizkörper, wie wir sie für die Raumheizung verwenden, würden bei Wegfall der Erdbeschleunigung (bspw. im Weltall) nicht funktionieren.

- Auftriebskraftwerke: Durch Überdeckung entsprechend großer Areale und Abgreifen der hierin erzeugten Luftströmungen kann elektrische Energie erzeugt werden

2.5. Druckkräfte an Phasengrenzflächen und Kapillarität

Die Oberflächenspannung führt dazu, dass in Tropfen und Blasen ein höherer Druck herrscht als in der Umgebung. An dieser Stelle sei auf die strikte Definition von Tropfen und Blasen hingewiesen. Ein Tropfen ist eine kugelförmig ausgedehnte Fluidmenge mit einer Grenzfläche zu einem anderen Fluid (also beispielsweise ein Wassertropfen in Luft oder ein Lufttropfen in Wasser, wobei letzteres umgangssprachlich als Blase bezeichnet wird). Wir wollen unter einer Blase jedoch strikt eine kugelförmige Fluidmenge verstehen, die von einem weiteren Fluid umhüllt wird, welches zwei Grenzflächen besitzt (siehe Zeichnung). Eine Blase ist also immer das, was man von klassischen Seifenblasen her kennt.

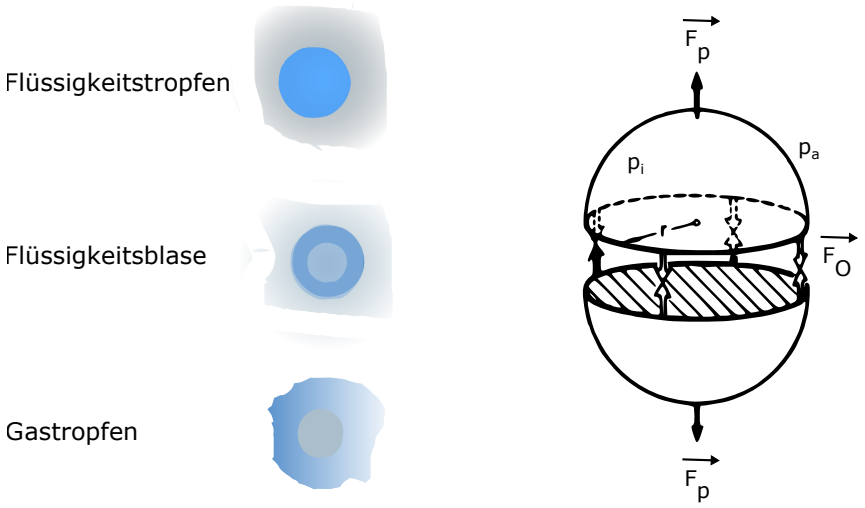


Abbildung 2.9.: Tropfen und Blasen

Will man nun eine Kräftebilanz für einen Tropfen aufstellen, so genügt es jeweils einen Halbraum der Kugel freizuschneiden. Im stationären Zustand müssen die durch die Oberflächenspannung erzeugten Kräfte Fo gleich den Kräften F_P sein, die aus der Druckdifferenz zwischen innen und außen resultieren. Gemäß den oben hergeleiteten Zusammenhängen zur Oberflächenspannung wirkt diese Kraft über die Länge der Oberfläche. In unserem Fall ist dies der Umfang der Halbkugel und somit 2 πr. Es gilt somit:

$$F_o = \sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \tag{2.37}$$

Die Druckkraft wirkt auf die gesamte freigeschnittene Fläche und errechnet sich

mit:

$$F_P = (p_i - p_a) \cdot \pi \cdot r^2 \tag{2.38}$$

Daraus ergibt sich für den Druckunterschied zwischen innen und außen:

$$\Delta p = p_i - p_a = \frac{2 \cdot \sigma}{r} \text{ (Tropfen)} \tag{2.39}$$

Dieser Zusammenhang ist für einen Tropfen gültig. Bei einer Blase hat man jeweils zwei Grenzflächen. Geht man von einer sehr dünnen Blasenhaut aus, dann kann man den obigen Ausdruck mit zwei multiplizieren und erhält:

$$\Delta p = p_i - p_a = \frac{4 \cdot \sigma}{r} \text{ (Blase)} \tag{2.40}$$

Man kann sich obiger Zusammenhang auch wieder über die energetische Betrachtung herleiten. Eine Kugel besitzt die Oberfläche von $4 \cdot \pi \cdot r^2$. Auf diese Oberfläche wirkt die Druckkraft $F = A \cdot \Delta p = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta p$. Energie ist Kraft mal Weg. Somit muss, um die Oberfläche um den Weg dr zu vergrößern, die differenzielle Energie $dE = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta p \cdot dr$ aufgewendet werden. Die Oberflächenspannung ist definiert als Energie, die notwendig ist, um die Oberfläche zu vergrößern. In unserem Fall wollen wir die Oberfläche um dA vergrößern.

Dies wird dadurch bewerkstelligt, dass wir den Radius um dr erhöhen. Die daraus resultierende Oberflächenänderung berechnet sich zu:

$$dA = \frac{dA}{dr} \cdot dr = 8 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \tag{2.41}$$

Eingesetzt in die Definitionsgleichung der Oberflächenspannung (Gleichung 1.14) erhält man:

$$\sigma = \frac{dE}{dA} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \Delta p \text{ bzw. } \Delta p = \frac{2\sigma}{r}. \tag{2.42}$$

Dies entspricht somit dem oben mittels Kräftebilanz hergeleiteten Ergebnis.

Man kann nun das oben dargestellte Ergebnis auf alle Formen von gekrümmten Oberflächen verallgemeinern (siehe hierzu Abbildung 2.11).

Für kleine Winkel (hier φ) gilt, dass der Sinus des Winkels ungefähr dem Winkel selbst entspricht. Ebenso ist bei kleinen Auslenkungen der Bogen ds_1 praktisch identisch mit der Länge einer Geraden, die die beiden Kraftangriffspunkte verbindet.

Aus diesen Überlegungen heraus gilt:

$$\frac{d\varphi_1}{2} = \frac{\frac{ds_1}{2}}{r_1} \text{ bzw: } d\varphi_1 = \frac{ds_1}{r_1} \tag{2.43}$$

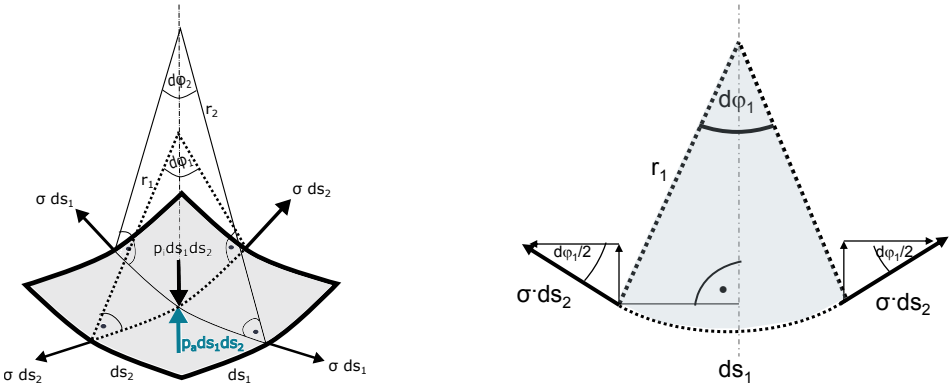


Abbildung 2.10.: Kräftebilanz an gekrümmten Oberflächen

An der Länge ds_2 greift die Kraft $\sigma\cdot$ ds_2 an. Bei Betrachtung beider Seiten neutralisieren sich jedoch die nach außen gerichteten Anteile. Hingegen wirken die nach innen gerichteten Anteile jeweils an beiden Schnittlinien. Da auch hier der Sinus von $\varphi/2$ ungefähr $\varphi/2$ entspricht, gilt insgesamt für die resultierende Kraft:

$$F_{O1} = 2 \cdot \sigma ds_2 \cdot \frac{d\varphi_1}{2} \tag{2.44}$$

Mit dem bereits hergeleiteten Zusammenhang für $d\varphi_1$ gilt:

$$F_{\mathrm{O1}} = \frac{\sigma \cdot ds_2 ds_1}{r_1} \tag{2.45}$$

In analoger Weise gilt für die Oberflächenspannung an den Schnittlinien ds_1:

$$F_{O2} = \frac{\sigma \cdot ds_1 \cdot ds_2}{r_2} \tag{2.46}$$

Im Gleichgewicht gilt:

$$F_{\mathrm{o1}} + F_{\mathrm{o2}} = F_{\mathrm{p}} \tag{2.47}$$

oder

$$\frac{\sigma \cdot \mathrm{ds}_1 \cdot \mathrm{ds}_2}{r_1} + \frac{\sigma \cdot \mathrm{ds}_1 \cdot \mathrm{ds}_2}{r_2} = \Delta p \cdot \mathrm{ds}_1 \cdot \mathrm{ds}_2 \tag{2.48}$$

Woraus sich der allgemeingültige Zusammenhang

$$\Delta p = \sigma \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \tag{2.49}$$

herleiten lässt.

Sind die beiden Krümmungsradien gegenläufig (Sattelpunkt), so ist ein Radius mit entsprechend negativem Vorzeichen einzusetzen.

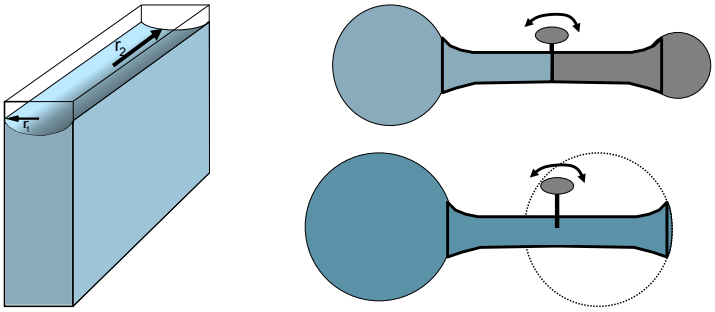


Abbildung 2.11.: Oberflächenspannung bei größeren Radien

Man erkennt auch, dass der oben beschriebene Sonderfall der Kugel durch die Formel abgedeckt wird. Bei einer Kugel gilt: $r_1 = r_2$ und somit $\Delta p = 2 \cdot \sigma / r$ (s.o.).
Im Falle eines langen Zylinders (siehe Abbildung 2.11links) gilt: $r_2 >> r_1$ und somit $\Delta p = \sigma / r_1$.

Eine praktische Auswirkung der oben dargestellten Sachverhalte zeigt Abbildung 2.11 rechts. Werden zwei gasgefüllte Blasen (wovon eine größer als die andere ist) miteinander in Kontakt gebracht, dann bewirkt der höhere Druck in der kleineren Blase, dass das Gas in die größere Blase überströmt. Dieser Vorgang setzt sich solange fort, bis in beiden Blasen sich ein identischer Krümmungsradius einstellt.

Abschließend wollen wir noch einen weiteren durch die Oberflächenspannung erzeugten Effekt besprechen. Es handelt sich hierbei um die Kapillarkraft. Hierbei handelt es sich um einen Effekt an dem drei Medien, in der Regel zwei Fluide und ein Feststoff oder drei Fluide, beteiligt sind.

An der Grenzfläche von zwei Fluiden zu einer festen Wand stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Adhäsion (der Anziehung des Fluids durch die Wand) und der Kohäsion (der Anziehung der Fluidteilchen durch sich selbst) ein.

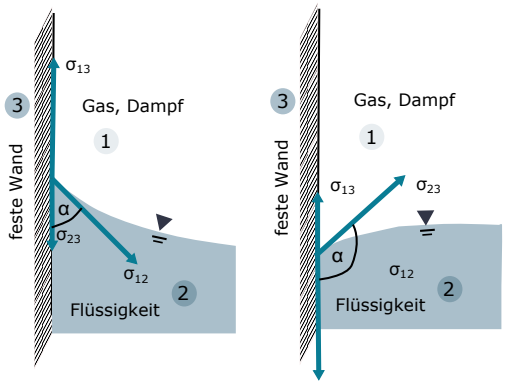


Abbildung 2.12.: Wechselwirkung von Adhäsion und Kohäsion an der Grenzfläche Festkörper / Fluide

Oberflächenspannung Gas (Dampf) $\rightarrow$ Wand σ_{13}

Oberflächenspannung Flüssigkeit → Wand σ_{23}
Oberflächenspannung Flüssigkeit → Gas (Dampf) σ_{12}
Hierbei bezeichnen die Indices: 1: gasförmig, 2: flüssig, 3: fest
Die Flüssigkeitsoberfläche bildet mit der festen Wand den Benetzungswinkel (Randwinkel, Kontaktwinkel). Nach der Abbildung kann folgendes Spannungsgleichgewicht im Berührungspunkt B angesetzt werden:

$$\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cdot \cos\alpha \tag{2.50}$$

Somit ergibt sich für den Grenzwinkel:

$$\cos\alpha = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}} \tag{2.51}$$

Überwiegt die Oberflächenspannung Gas-Wand, dann tritt eine Benetzung der Wand ein (System Wasser / Luft / Glas). Überwiegt hingegen die Oberflächenspannung Flüssigkeits-Wand, dann ist die Flüssigkeit nicht benetzend (Quecksilber – Luft – Glas). Typische Werte zeigt Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1.: Oberflächenspannung verschiedener Grenzflächen [2]

Fluid	Festkörper	σ N/m	α °
Wasser	Glas	≤0,073	~8
	Grafit	0,005	86
	Kupfer	≥0,073	~0
Quecksilber	Glas	0,35	135..140
	Stahl	0,43	154
Glycerin	Glas	≥67	~0
	Platin	≥67	~0
Benzol	Glas	28	6
	Kohle	61	0
Luft	Glas	0,9..0,1	
Wasser / Quecksilber		0,39...0,43	
Wasser / Benzol		0,034	
Wasser / Toluol		0,036	
Wasser / Quecksilber		0,038	

Die große Bedeutung dieses Effektes liegt in der sogenannten kapillaren Steigwirkung. In Kapillaren kommt es auf Grund der Oberflächenspannung zu einer Reduzierung oder Vergrößerung des effektiven Druckes, was zu einem Heben oder Senken des Flüssigkeitsspiegels führen kann.

Die Berechnung der Steighöhe gelingt durch Freischneiden und Aufstellen der Kräftebilanz. Die Oberflächenspannung erzeugt eine Kraft F_σ nach oben. Diese

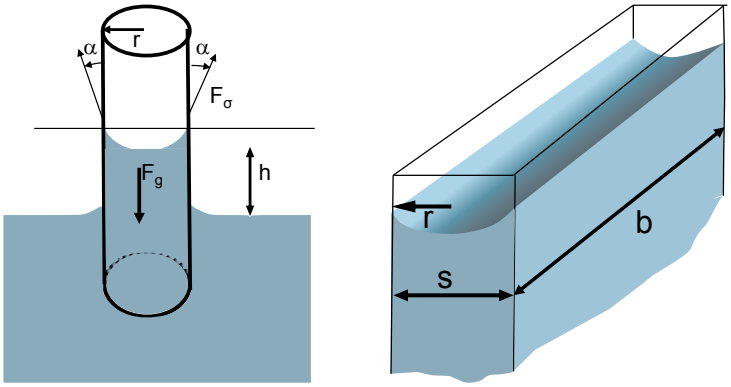


Abbildung 2.13.: Kapillarkraft bei einer runden Kapillare (links) und im Rechteck-Spalt (rechts)

steht im Gleichgewicht mit der Schwerkraft F_g, die die gehobene Flüssigkeitsmasse wieder nach unten zu drücken versucht.

Somit gilt:

$$F_g = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \tag{2.52}$$

$$F_\sigma = \sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos\alpha \tag{2.53}$$

Damit lässt sich die Steighöhe h berechnen mit:

$$h = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot g \cdot r} = \frac{4 \cdot \sigma \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot g \cdot d} \tag{2.54}$$

Für einen dünnen Spalt zwischen zwei Platten gilt entsprechend (s: Plattenabstand):

$$F_g = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot b \cdot r \cdot h \tag{2.55}$$

$$F_\sigma = 2 \cdot \sigma \cdot b \cdot \cos\alpha \tag{2.56}$$

$$h = \frac{\sigma \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot g \cdot r} = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot g \cdot s} \tag{2.57}$$

Beispiel: Wie groß ist der Überdruck in einem 1 mm (Durchmesser) großen Regentropfen?

Es gilt die folgende Grundgleichung für den Überdruck in einer Kugel:

$$\Delta p = p_i - p_a = \frac{2 \cdot \sigma}{r} = \frac{2 \cdot 0,073}{0,0005} \frac{N}{m \cdot m} = 292\mathrm{N/m^2} = 2,92\mathrm{mbar}$$

3. Erhaltungssätze der Strömungsmechanik

3.1. Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung

Zur Beschreibung und mathematischen Berechnung von Strömungen werden wir häufig auf so genannte Bilanzgleichungen zurückgreifen. Bilanzgleichungen können für physikalische Größen aufgestellt werden, deren absoluter Wert in einem abgeschlossenen System nicht veränderbar ist. Hierzu zählen die Masse, der Impuls und die Energie. Dabei sind Bilanzgleichungen nicht auf abgeschlossene System beschränkt: Im Prinzip können sie für jedes System angewendet werden, so lange die jeweils über die Systemgrenzen zu- und abfließenden Anteile mit eingerechnet werden.

Bilanzgleichungen lassen sich sowohl für Systeme mit endlicher Ausdehnung (integrale Form bspw. Rohrleitung, Tank, Becken) wie auch für ein unendlich kleines, virtuelles System (differenzielle Form wie bspw. ein festes Volumenelement in der Strömung oder ein mitwanderndes Volumenelement in einer Stromröhre) anwenden.

In der Kontinuitätsgleichung wird die physikalische Größe „Masse“ bilanziert. Wir betrachten die Kontinuitätsgleichung zuerst in ihrer allgemeinen, mathematischen Form, um uns auch etwas an die in der Strömungsmechanik üblichen Schreibweisen zu gewöhnen. Im Laufe des Kapitels werden wir dann die verschiedenen Ableitungen von dieser allgemeinen Form anzuwenden lernen.

Für ein raumfestes Volumen gilt: **Die Zunahme an Masse im Volumen ist gleich dem Zufluss an Masse in das Volumen.**

Mathematisch wird dies durch folgenden Ausdruck dargestellt:

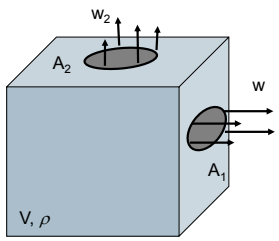


Abbildung 3.1.: Massenbilanz an einem Quader

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} = \frac{d(\rho \cdot V)}{\mathrm{dt}} = -\int_A \rho \cdot w \cdot \mathrm{dA} \tag{3.1}$$

w stellt hierbei ein Strömungsgeschwindigkeitsvektor (m/s) dar, der senkrecht zur Fläche A und nach außen ausgerichtet ist. Bei Ausrichtung nach innen dreht sich das Vorzeichen.

Welche Aussagen können wir aus dieser Gleichung ziehen: In einem geschlossenen Behälter kann sich die Masse nur dann ändern, wenn eine Strömung w senkrecht zur Begrenzungsfläche A zu verzeichnen ist. Die Änderung der Masse kann über zwei Methoden erfolgen: Die Änderung der Dichte (1.), wenn das Behältervolumen konstant bleibt (nur möglich bei kompressiblen Medien) oder (2.) die Änderung des Behältervolumens selbst.

Bei einem inkompressiblen Medium und isothermen Vorgang (ϱ = const.) vereinfacht sich die Gleichung, da in diesem Fall die Dichte herausgekürzt werden kann und es gilt:

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = -\int_A w \cdot \mathrm{dA} \tag{3.2}$$

Wir betrachten im Folgenden einige Anwendungen:

Fall 1: Befüllung und gleichzeitige Entleerung eines Wassertanks

In einen Vorratstank mit einer Grundfläche von 1 m^2 fließt aus einer Wasserleitung mit einer Geschwindigkeit w_{zu} von 10 m/s über eine Rohrleitung mit Innen-Durchmesser $\mathrm{d_{zu}}$=10 cm kontinuierlich Wasser zu. Gleichzeitig wird eine Minute lang über eine zweite Rohrleitung mit $\mathrm{d_{ab}}$=7 cm Durchmesser Wasser entnommen. Die Fließgeschwindigkeit beträgt w_{ab}= 15 m/s. Das Wasser darf als inkompressible Flüssigkeit mit 1.000 kg/m^2 betrachtet werden. Wie ändert sich der Füllstand während der Wasserentnahme über eine Minute?

Wir wenden in diesem Fall die für inkompressible Medien abgeleitete Form der Kontinuitätsgleichung an:

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = -\int_A w \cdot \mathrm{dA} \tag{3.3}$$

Als Bilanzraum nehmen wir das im Behälter gespeicherte Wasservolumen $\mathrm{V_{Speicher}}$. Dieses errechnet sich aus der Grundfläche $\mathrm{A_{GF}}$ multipliziert mit der Füllstandshöhe h zu:

$$V_{Speicher} = A_{GF} \cdot h \tag{3.4}$$

Die zu- und abfließenden Geschwindigkeiten sind gegeben. Die jeweiligen Flächen ergeben sich aus den Rohrleitungsdurchmessern. Damit ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung:

$$A_{\mathrm{GF}} \cdot \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} = w_{\mathrm{zu}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\mathrm{zu}^2}}{4} - w_{\mathrm{ab}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\mathrm{ab}^2}}{4} \tag{3.5}$$

bzw.:

$$A_{\mathrm{GF}} \cdot \int_{h_1}^{h_2} \mathrm{dh} = \int_{0}^{60s} \left(w_{\mathrm{zu}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\mathrm{zu}^2}}{4} - w_{\mathrm{ab}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\mathrm{ab}^2}}{4} \right) \cdot \mathrm{dt} \tag{3.6}$$

und somit:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{60s}{1m^2} \cdot \left(10\frac{m}{s} \cdot 7,85 \cdot 10^{-2} m^2 - 15\frac{m}{s} \cdot 3,84 \cdot 10^{-2} m^2 \right) = 1,25m \tag{3.7}$$

Fall 2: Gastank

Aus einem Drucklufttank (ideales Gas,V=5 m³, p=10 bar, T=298 K) strömt über ein Loch mit 1 mm Durchmesser Luft aus. Die Geschwindigkeit kurz vor der Austrittsöffnung beträgt 60 m/s. Welche Menge an Druckluft geht innerhalb von 5 min verloren und wie hoch ist der Druck nach dieser Zeit im Tank? Hinweis: Die Temperatur im Drucklufttank kann als konstant angenommen werden.

In diesem Fall handelt es sich um ein kompressibles Medium. Als Bilanzgrenze nehmen wir den gesamten Drucklufttank. Zunächst muss die Abhängigkeit der Dichte ermittelt werden. Für ein ideales Gas gilt:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{R_L \cdot T}$$

Ändern wird sich im Tank der Druck, da das Tankvolumen und gemäß Aufgabenstellung auch die Temperatur sich nicht ändern. Durch Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung ergibt sich:

$$\frac{V}{R_L \cdot T} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dt}} = -\frac{p}{R_L \cdot T} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot w \tag{3.8}$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{dp}}{p} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot w \cdot \mathrm{dt}$$

Integriert ergibt sich:

$$\ln\left(\frac{p_{\mathrm{Ende}}}{p_{\mathrm{Anfang}}}\right) = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot w \cdot \Delta t = -\frac{1}{5m^3} \cdot 7,85 \cdot 10^{-7} m^2 \cdot 60\frac{m}{s} \cdot 300s$$

=-0,0028

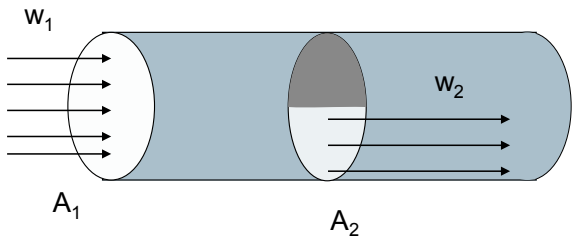


Abbildung 3.2.: Massenbilanz an einem Rohrleitungselement

und somit p_{Ende}=9,97 bar

Die Berechnung der Masse kann an Hand des idealen Gasgesetzes erfolgen:

$$\Delta m = \frac{(p_{\text{Ende}} - p_{\text{Anfang}}) \cdot V}{R_L \cdot T} = \frac{(10 - 9,97) \cdot 10^5 \cdot 5}{287 \cdot 298}\text{kg} = 5,87\text{kg}$$

Fall 3: Rohrleitung

Durch eine Rohrleitung wird eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit 10 m/s gepumpt (stationäre Strömung). Die Rohrleitung wird an einer Stelle (Ventil) auf die Hälfte ihres normalen Querschnitts verengt. Wie verändert sich die Strömungsgeschwindigkeit?

Als Bilanzraum wählen wir in diesem Fall am besten den vorderen Teil der Rohrleitung. Da es sich um eine stationäre Strömung handelt, werden die Ableitungen nach der Zeit zu Null. Die linke Hälfte der Kontinuitätsgleichung entfällt somit. Übrig bleibt nur der rechte Teil mit:

$$0 = -\int_A \rho \cdot w \cdot \mathrm{dA} = -\rho_1 \cdot w_1 \cdot A_1 + \rho_2 \cdot w_2 \cdot A_2 \tag{3.9}$$

bzw.

$$\rho_1 \cdot w_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot A_2 \tag{3.10}$$

Wenn der Vorgang als isotherm angenommen werden kann, gilt weiterhin $\varrho_1 = \varrho_2$ und somit:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{A_1}{A_2} \tag{3.11}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit verdoppelt sich also in der Engstelle!

Anmerkung: Wir haben bislang die Kontinuitätsgleichung unter der Kapitelüberschrift „Einfache Strömungen ohne Reibung“ kennengelernt. Da es sich jedoch um eine Massenbilanz handelt, ist diese natürlich ohne Einschränkung auch für reibungsbehaftete Strömungen anwendbar. Man muss dann jedoch beachten, dass die oben angenommenen einheitlichen (d.h. über eine Fläche A gleichen) Geschwindig-

keiten w im Randbereich andere Werte annehmen werden als in der Mitte der Strömung. In diesem Fall muss man die Geschwindigkeit w als Durchschnittswert auffassen.

Wir wollen zum Abschluss unsere Kenntnisse über die Kontinuitätsgleichung nochmals etwas erweitern und wenden diese auf ein infinitesimal kleines Volumenelement innerhalb einer Strömung an.

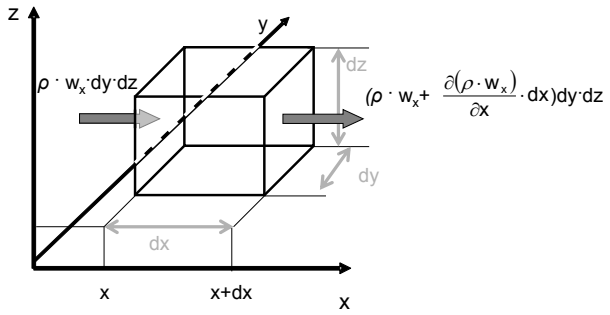


Abbildung 3.3.: Strömungssituation (x-Richtung) in ein infinitesimal kleines Volumenelement

In ein vordefiniertes Volumenelement V=dx·dy·dz strömt an der Stelle x aus der x-Richtung über die Fläche dy·dz der Massenstrom $\varrho w_x \cdot dy \cdot dz$ ein. Dieser kann im Volumen gespeichert oder umgelenkt werden. An der Stelle $x + dx$ strömt dann der Massenstrom

$$\left(\varrho \cdot w_x + \frac{\partial(\varrho \cdot w_x)}{\partial x} dx\right) \cdot dy \cdot dz \tag{3.12}$$

wieder aus dem Volumenelement aus (Satz von Taylor). Betrachten wir die Differenz zwischen Ein- und Austritt, dann hat sich der Massenstrom um

$$\frac{\partial \varrho \cdot w_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{3.13}$$

beim Durchlaufen des Volumenelements geändert. Befindet sich dieses Volumenelement an einer beliebigen Stelle in einer Strömung, so fließt nicht nur Masse aus der x-Richtung zu oder ab, sondern es kann natürlich auch über die y- und z-Richtung Masse zu- und abfließen. Wir können in identischer Weise wie für die x-Richtung auch für die anderen Raumrichtungen die Ströme aufstellen und erhalten:

$$\left(\varrho \cdot w_x + \tfrac{\partial(\varrho \cdot w_x)}{\partial x} dx\right) \cdot dy \cdot dz$$

$$-\frac{\partial\left(\rho \cdot w_x\right)}{\partial x} \cdot \mathrm{dx} \cdot \mathrm{dy} \cdot \mathrm{dz} - \frac{\partial\left(\rho \cdot w_y\right)}{\partial y} \cdot \mathrm{dy} \cdot \mathrm{dx} \cdot \mathrm{dz} - \frac{\partial\left(\rho \cdot w_z\right)}{\partial z} \cdot \mathrm{dz} \cdot \mathrm{dx} \cdot \mathrm{dy} = V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$= \mathrm{dx} \cdot \mathrm{dy} \cdot \mathrm{dz} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Was in das Volumen hineinfließt aber nicht wieder heraus fließt, muss dort gespeichert werden. Dies ist der rechte Term der Gleichung. Da sich das Volumen nicht ändert, ist eine Speicherung nur durch die Veränderung der Dichte mit der Zeit möglich.

Durch Division durch das Volumen erhält man:

$$-\frac{\partial\left(\rho \cdot w_x\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\rho \cdot w_y\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\rho \cdot w_z\right)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Diese differenzielle Form der Kontinuitätsgleichung ist eine wichtige Grundinformation für CFD-Programme, die einen Strömungsraum in eine Vielzahl von kleinen Zellen (analog zu unserem oben dargestellten Quader) aufteilen und bei ihrer Strömungsberechnung diese Art von Bilanz-Gleichungen von Quader zu Quader zu lösen versuchen.

Wir wollen die Bedeutung wiederum an Hand eines Beispiels diskutieren. Wir betrachten hierzu eine inkompressible Flüssigkeit. Die Dichte kann sich dort weder mit der Zeit noch dem Weg ändern. Somit wird der rechte Ausdruck der obigen Gleichung 0 und man kann außerdem durch die Dichte dividieren. Unsere Strömung soll außerdem in y-Richtung (nach vorne und hinten) immer identisch aussehen. Wenn sich die Strömung in y-Richtung nicht ändert, muss $\partial\, \mathrm{w_y} / \partial\, \mathrm{y}{=}0$ sein. Unsere Gleichung heißt dann:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Was bedeutet dies in der Praxis? Falls wir in x-Richtung die Strömung reduzieren (weil die Strömung bspw. auf eine Wand zuläuft oder aber irgendeine Kraft versucht, die Strömung abzubremsen), dann gelingt dies nur, wenn im Gegenzug die Strömung in z-Richtung vergrößert wird (negatives Vorzeichen!). Ansonsten würden wir die Massenerhaltung verletzen.

Gleiches gilt im stationären Fall auch für ein kompressibles Medium (Gas). Im instationären Fall (bspw. eine gerade beginnende Strömung in einem Gas; $\partial\varrho/\partial t \neq 0$) könnte die Masse jedoch auch durch eine Erhöhung der Dichte gespeichert werden.

3.2. Eulersche und Bernoullische Gleichung

Ebenso wie die Masse kann auch über eine zweite Größe bilanziert werden: den Impuls. Für ein Volumenelement gilt: Die zeitliche Zunahme an Impuls in einem Volumenelement ist gleich den daran von außen angreifenden Kräften.

Die Änderung (Zu-/Abnahme) eines Impulses ist Masse · Beschleunigung und somit eine Kraft.

Für ein differenziell kleines Massenelement im Stromfaden gilt (siehe Abbildung 3.4: Kräftebilanz entlang eines Stromfadens):

$$\text{Masse } dm = \varrho \cdot dA \cdot ds \tag{3.14}$$

Die Beschleunigung ist die Geschwindigkeit nach der Zeit abgeleitet. Für unser Massenelement, das entlang des Strömungsfadens läuft, setzt sich die Ableitung aus zwei Anteilen zusammen: 1. der direkten partiellen Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, falls sich die Geschwindigkeit mit der Zeit ändert (instationärer Vorgang) und 2. der Änderung der Geschwindigkeit mit dem Weg, da wir uns ja ein Stückchen weiter auf dem Stromfaden bewegen:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \tag{3.15}$$

Als angreifende Kräfte wollen wir nur die Druckkraft und die Schwerkraft berücksichtigen. Die Strömung ist reibungsfrei und frei von weiteren Feldkräften außer der Schwerkraft:

$$\text{Druckkraft} = -\frac{\partial p}{\partial s} \cdot \mathrm{ds} \cdot \mathrm{dA} \tag{3.16}$$

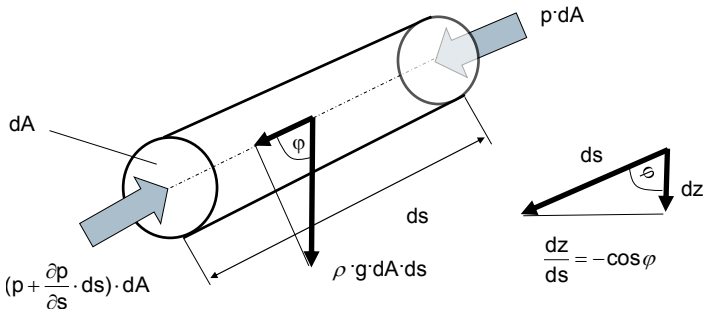


Abbildung 3.4.: Strömungssituation (x-Richtung) in ein infinitesimal kleines Volumenelement - Kräftebilanz entlang eines Stromfadens

Damit ergibt sich als komplette Gleichung (wobei bereits durch die Masse dividiert wurde):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial s} = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g \cdot \frac{\partial z}{\partial s}\right) \tag{3.17}$$

Diese Gleichung ist die **Eulersche Gleichung** für den Stromfaden.

Betrachtet man nun rein eine stationäre Größe, dann fällt der zeitabhängige Term $\frac{\partial w}{\partial t}$ weg, da die Geschwindigkeit nicht von der Zeit abhängt. Wir können

den Rest der Gleichung zwischen einem Punkt 1 und einem Punkt 2 auf dem Stromfaden integrieren und erhalten:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(w_2^2 - w_1^2\right) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{dp}}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) = 0 \tag{3.18}$$

bzw. bei variablem Endzustand muss für jeden Punkt gelten:

$$\frac{1}{2} \cdot w^2 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{dp}}{\rho} + g \cdot z = \text{const.} \tag{3.19}$$

Diese Gleichung heißt **Bernoulli-Gleichung**.

Etwas komplex ist in dieser Gleichung noch der Druckterm, der für jeden Einzelfall integriert werden muss, wenn die Dichte vom Druck abhängt.

Beschränkt man sich jedoch wieder auf ein inkompressibles Medium (also keine Druckabhängigkeit der Dichte) dann vereinfacht sich die Bernoulli-Gleichung zu:

$$\frac{1}{2} \cdot w^2 + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{const.} \tag{3.20}$$

$$\text{oder: } \frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \tag{3.21}$$

$$\text{oder: } \frac{1}{2} \cdot \left(w_2^2 - w_1^2\right) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) = 0 \tag{3.22}$$

Wichtig ist, dass man sich nochmals die Bedingungen vor Augen führt, die wir im Laufe der Herleitung angenommen hatten. Diese Form der Bernoulli-Gleichung ist nur anzuwenden bei:

1. stationären Strömungen
2. inkompressiblen Medien
3. reibungsfreien Fluiden
4. keine Feldkräfte außer der Schwerkraft

3.2.1. Druckbegriffe und Deutung der Bernoulli-Gleichung

Wenn wir die Bernoulli-Gleichung nochmals betrachten, so erscheinen uns die einzelnen Ausdrücke vielleicht aus der Thermodynamik bekannt vorzukommen. Tatsächlich ähnelt die Bernoulli-Gleichung sehr stark dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik. Die einzelnen Terme entsprechen von der Dimension her einer spezifischen Energie. Manchmal wird auch die Bernoulli-Gleichung als Energiebilanz bezeichnet. Dies ist jedoch falsch. Die Herleitung erfolgte über eine Kräftebilanz

und konnte nur mit den oben beschriebenen Annahmen in die Endform überführt werden. Eine Energiebilanz wäre aber immer gültig (auch für kompressible Medien und auch im instationären Zustand), was hier definitiv nicht der Fall ist.

Wir können die Bernoulli-Gleichung auch noch in eine andere Darstellung überführen. Durch Multiplikation mit der Dichte erhalten wir:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot w^2 + p + \rho \cdot g \cdot z = \text{const.}$$

Auch diese Ausdrücke erscheinen uns zumindest teilweise sofort bekannt. Alle Terme haben jetzt die Dimension eines Druckes. Man definiert:

- den dynamischen Druck $\mathrm{p_{dyn}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot w^2$
- den statischen Druck $\mathrm{p_{stat}} = \mathrm{p}$
- den Schweredruck $\mathrm{p_{schwer}} = \rho \cdot g \cdot z$

Alternativ könnte man dann schreiben:

$$p_{\mathrm{dyn}} + p_{\mathrm{stat}} + p_{\mathrm{schwer}} = const. = p_{\mathrm{ges}} \tag{3.23}$$

Diese Form der Betrachtung und Darstellung hat sich als sehr praktisch erwiesen. Wir können uns damit vorstellen, dass jede reibungsfreie, inkompressible Strömung aus drei Druckanteilen besteht, die in der Summe immer einen konstanten Wert annehmen. Wird eine waagrechte Strömung bspw. an einer Stelle abgebremst, dann wird der dynamische Druck sinken. Im Gegenzug muss der statische Druck ansteigen.

Den typischen Verlauf der Stromlinien an einem umströmten Körper zeigt die rechts stehende Abbildung. Dort wo die Strömung schnell ist (im eingeengten Bereich) wird sich ein hoher dynamischer Druck ausbilden. Dort hingegen, wo die Strömung abbricht, also direkt vor oder hinter dem Körper, wir der Gesamtdruck praktisch nur durch den statischen Anteil bestimmt. Dieser Effekt kann für die Strömungsmessung ausgenutzt werden. Dies zeigt Abbildung 3.6. Im linken Bild wird der statische Druck durch Anbohren einer Wand gemessen. Auf Grund des hohen dynamischen Anteils in diesem Bereich ist der statische Druck relativ klein. Im rechten Teilbild wird die Strömung an der Rohrspitze aufgestaut (Pitot-Rohr). Es gibt dort keine Strömung. Der so gemessene statische Druck entspricht dem Gesamtdruck.

Man kann durch eine Differenzmessung (beide Methoden vereint) auch direkt den dynamischen Druck messen. Dies ermöglicht das Prandtlsche Staurohr (siehe Abbildung 3.7).

Kavitation

Aus der Bernoulli-Gleichung wird ersichtlich, dass bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten der statische Druck sinkt. Dies kann dazu führen, dass der Dampfdruck der Flüssigkeit unterschritten wird, wodurch diese zu verdampfen beginnt. Es entstehen in der Folge Gasblasen im Fluid. Sinkt im weiteren Verlauf, beispielsweise

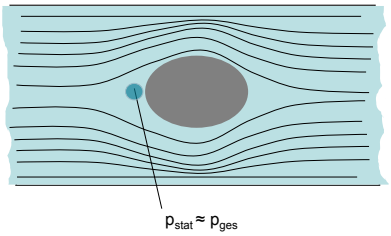


Abbildung 3.5.: Druckbegriffe bei einem umströmten Körper

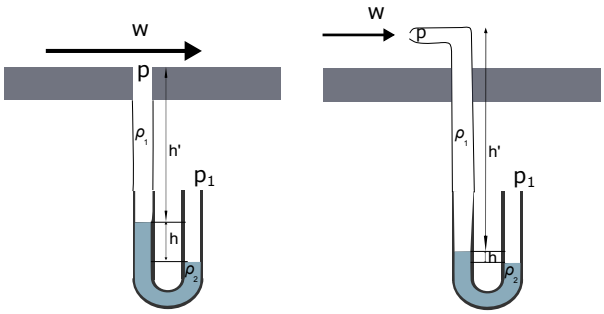


Abbildung 3.6.: Messung des statischen Drucks durch Wandbohrungen und des Gesamtdrucks

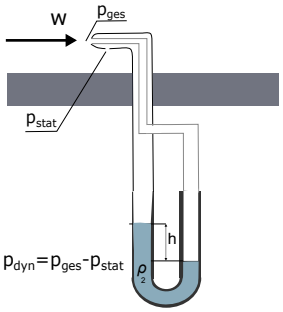


Abbildung 3.7.: Messung des dynamischen Drucks mit dem Prandtlschen Staurohr

bei Aufweitung der durchströmten Fläche, die Geschwindigkeit, dann steigt der statische Druck wieder. Dies führt zu einem spontanen Kollabieren der Gasblasen, wodurch extreme lokale Geschwindigkeits- und Druckgradienten entstehen. Diese bewirken häufig eine Erosion beim Wandungsmaterial und sind damit vielfach Ursache von Materialversagen im Strömungsmaschinenbau. Kavitation macht sich meist auch akustisch durch ratternde Geräusche bemerkbar.

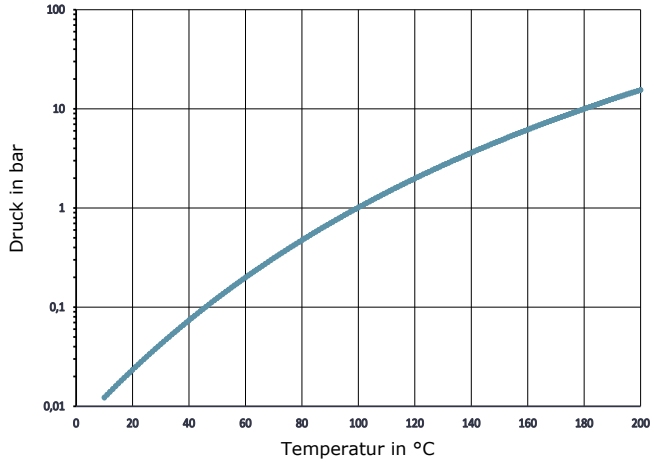
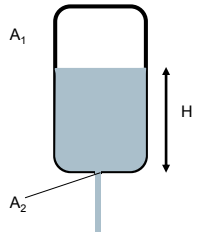


Abbildung 3.8.: Dampfdruckkurve von Wasser

3.2.2. Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

Fall 1: Aus einem großen, oben offenen Wasserreservoir ($A_1 >> A_2$) strömt durch ein kleines Loch im Boden (Fläche A_2) Wasser aus. Wie hoch ist die Strömungsgeschwindigkeit in der Austrittsöffnung und welcher Volumenstrom fließt aus dem Behälter?



Bei der Anwendung der Bernoulli-Gleichung sind grundsätzlich zwei Punkte zu suchen, von denen man bis auf einen fehlenden Druckterm alle weiteren Angaben kennt. In diesem Fall bietet sich als Startpunkt die Wasseroberfläche an. Wir kennen von dieser die Position (Höhe H über Ausfluss), die Strömungs-geschwindigkeit (praktisch null, da $A_1 >> A_2$) und den Druck (oben offen = Umgebungs-druck). Als zweiten Punkt nehmen wir den austretenden Wasserstrahl direkt nach der Austrittsöffnung. Dort fließt das Wasser im freien Strahl (Freistrahl = statischer Druck ist wieder der Atmosphärendruck) ab. Die Position ist über die Höhe H definiert. Unbekannt ist lediglich die Strömungsgeschwindigkeit (bzw. der dynamische Druck). Diese muss jedoch gemäß Aufgabenstellung errechnet werden.

Somit gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(w_2^2 - w_1^2\right) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) = 0 \tag{3.24}$$

Die Differenz z_2-z_1 ist die Höhe H (negativ). w_1 ist gemäß obiger Ausführung 0.

Da wir uns oben und unten auf Atmosphärendruck befinden, muss p_2-p_1=0 sein. Daraus folgt:

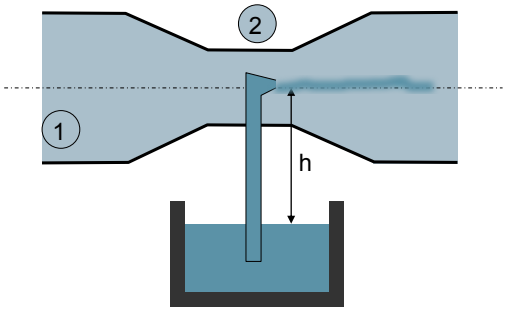
$$w_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \tag{3.25}$$

Diese Formel wurde bereits 1644 von Torricelli angegeben und heißt deswegen auch **Torricellische Ausflussformel**.

Der Volumenstrom ergibt sich mit:

$$\dot{V} = w_2 \cdot A_2 = A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \tag{3.26}$$

Fall 2: Wasserstrahlpumpe: Durch eine Wasserstrahlpumpe wird am Eingang (Punkt 1) Wasser (Dichte ϱ, Fläche A_1, Druck p_1, Geschwindigkeit c_1) gefördert. Es soll ein weiteres Fluid mit der Dichte ϱ_2 angesaugt werden, welches beim Druck p_0 in einem offenen Gefäß vorliegt. Welche maximale Ansaughöhe ist in Abhängigkeit von A_2 möglich? (Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass das anzusaugende Fluid bei maximaler Ansaughöhe in der Leitung gerade noch steht – $w_{Fluid} = 0$)



Damit ein Ansaugen möglich wird muss am Punkt 2 der statische Druck des Wassers immer noch etwas kleiner sein als der hydrostatische Druck in der Ansaugleitung am Punkt 2.

Für den hydrostatischen Druck in der Ansaugleitung gilt:

$$p_{2,\text{Saugleitung}} = p_0 - g \cdot \varrho_2 \cdot h \tag{3.27}$$

Der Druck des Wassers kann aus der Kontinuitäts- und der Bernoulli-Gleichung ermittelt werden. Die Kontinuitätsgleichung liefert die Strömungsgeschwindigkeit am Punkt 2 mit:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{A_1}{A_2} \text{ bzw: } w_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot w_1 \tag{3.28}$$

Der statische Druck kann dann mittels Bernoulligleichung ermittelt werden (kein Schwerkraftanteil, da die Pumpe gemäß Zeichnung horizontal liegt):

$$\frac{1}{2} \cdot \left(w_2^2 - w_1^2\right) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \tag{3.29}$$

Durch Einsetzen der Kontinuitätsgleichung in die Bernoulli-Gleichung ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \cdot w_1^2 \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \tag{3.30}$$

bzw.

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot w_1^2 \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) \tag{3.31}$$

Für den Fall, dass beide Ausdrücke p_2 und $p_{2,\text{Saugleitung}}$ gleich werden (maximal mögliche Höhe), gilt:

$$h = \frac{p_0 - p_1}{g \cdot \rho_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot w_1^2}{g \cdot \rho_2} \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) \tag{3.32}$$

Anwendungsgrenzen für die Bernoulligleichung

Es gibt keine klare Vorgabe, wann die Bernoulligleichung zu große Fehler erzeugt und von daher nicht mehr zur Beschreibung eines realen Stoffes verwendet werden sollte. Hier kommt es häufig auf das Gefühl des Ingenieurs und dessen Wünsche an die Genauigkeit der Berechnung an. Generell liefert die Bernoulli-Gleichung gute Ergebnisse, wenn

- die Viskosität des Fluids niedrig ist
- der betrachtete Stromfaden nur über kurze Distanzen untersucht wird
- das Strömungs-Volumen sehr groß gegenüber seitlichen Oberflächen ist

Selbst bei Gasen liefert die Bernoulligleichungen (Berechnung mit konstanter Dichte) noch zuverlässige Lösungen, so lange die Geschwindigkeit kleiner als 20% bis 30% der Schallgeschwindigkeit ist.

3.3. Kraftwirkungen von Strömungen - Der Impulssatz

Wir haben bereits im Kapitel das Aufstellen der Impulsbilanz kennengelernt. Allerdings sind wir dort im gedanklichen Ansatz von einem Massenelement ausgegangen, welches quasi ein kurzes Stück auf dem Stromfaden mitläuft.

Wir stellen die Impulsbilanz für ein ortsfestes Volumenelement auf, welches von der Stromröhre ummantelt wird.

In allgemeiner Form lautet die Impulsbilanz:

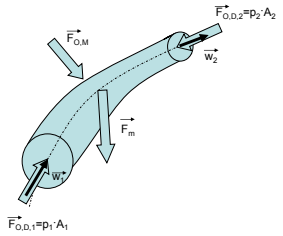


Abbildung 3.9.: Kräftebilanz zur Aufstellung des Impulssatzes

$$\text{Änderung des Impulses} = \text{Summe der Massenkräfte} \cdot \text{Masse} + \text{Summe der Oberflächenkräfte} \cdot \text{Oberfläche} \tag{3.33}$$

oder mathematisch in formuliert:

$$\frac{d}{\mathrm{dt}} \int \rho \cdot \vec{w} \cdot \mathrm{dV} = \int \rho \cdot \vec{F}_m \mathrm{dV} + \int_A \vec{F}_O \mathrm{dA} \tag{3.34}$$

Wir können den linken Term folgendermaßen verändern:

$$\frac{d}{\mathrm{dt}} \int \rho \cdot \vec{w} \cdot \mathrm{dV} = \frac{d}{\mathrm{dt}} \int \rho \cdot \vec{w} \cdot A \cdot \mathrm{ds} = \int_V \frac{\partial \rho \cdot \vec{w}}{\partial t} \cdot \mathrm{dV} + \int_A \rho \cdot \vec{w} \cdot (\vec{w} \cdot \vec{n}) \mathrm{dA} \tag{3.35}$$

$\vec{n}$ ist hierbei ein Einheitsvektor mit der Größe 1, der senkrecht und nach außen gerichtet auf der Fläche A steht.

Gemäß Kontinuitätsgleichung gilt jedoch:

$$\dot{m} = \rho \cdot \vec{w} \cdot A \text{ und}$$

$$w = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} \tag{3.36}$$

und somit wird der linke Ausdruck der Gleichung (einschränkend davon ausgehend, dass w_2 senkrecht zur Austrittsfläche und w_1 senkrecht zur Eintrittsfläche stehen):

$$\frac{d}{\mathrm{dt}} \int \rho \cdot \vec{w} \cdot \mathrm{dV} = \int \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} \cdot \mathrm{ds} + \dot{m}_2 \cdot \vec{w}_2 - \dot{m}_1 \cdot \vec{w}_1 \tag{3.37}$$

Betrachten wir nun noch die rechte Seite: Als Massenkräfte kommen hierbei

wieder die uns schon bekannten Möglichkeiten (Gravitation, Zentrifugalkräfte oder elektrostatische Kräfte bei geladenen Teilchen) in Frage, wobei uns die Gravitation am meisten beschäftigen wird. Oberflächenkräfte können sowohl auf den Mantel $\mathrm{F_{O,M}}$ als auch auf die vordere und hintere Deckelfläche des Volumenelementes $\mathrm{F_{O,D}}$ wirken. Die Kraft auf die Deckelflächen setzt sich rein aus dem Druckunterschied zusammen, der vor und hinter dem Volumenelement herrscht. Für den Betrag der Druckkraft gilt:

$$F_{\mathrm{O,D1}} = p_1 \cdot A_1 \mathrm{und} F_{\mathrm{O,D2}} = p_2 \cdot A_2 \tag{3.38}$$

Die Gesamtgleichung ergibt sich dann zu:

$$\int \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} \cdot \mathrm{ds} + \dot{m}_2 \cdot \vec{w}_2 - \dot{m}_1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{F}_m + \vec{F}_{O,M} + \vec{F}_{O,D1} - \vec{F}_{O,D2} \tag{3.39}$$

Im stationären Fall entfallen die Ableitungen nach der Zeit und es folgt:

$$w_1 = \vec{F}_m + \vec{F}_{O,M} + \vec{F} \tag{3.40}$$

Auf der linken Seite erscheint somit der Impuls durch die zu- und abströmenden Massen, auf der rechten Seite die Kräfte. Zu beachten ist, dass dies eine vektorielle Gleichung ist. Für eine Berechnung muss eine Einordnung in ein Koordinatensystem erfolgen.

Ziel dieses Ansatzes ist es, die Kräfte auf den Mantel zu berechnen, da alle anderen Größen bereits über die Kontinuitäts- oder Bernoulligleichung abzuleiten sind. Wir lösen also zunächst die Gleichung nach $\vec{F}_{O,M}$ auf und erhalten:

$$\vec{F}_{O,M} = \dot{m}_2 \cdot \vec{w}_2 - \dot{m}_1 \cdot \vec{w}_1 - \vec{F}_m - \vec{F}_{O,D1} + \vec{F}_{O,D2} \tag{3.41}$$

Die Kraft $\vec{F}_{O,M}$ stellt die Kraft dar, den die Mantelfläche auf das Fluid ausübt. Bei den meisten technischen Betrachtungen wollen wir jedoch eher die Kraft berechnen, die ein Fluid auf eine Hüllfläche (Rohrleitung, Flansch, Turbinenrad, etc.) ausübt. Diese wollen wir als $\vec{F_{Fluid}}$ bezeichnen. Diese muss nach den Grundsätzen der Mechanik jedoch vom Betrag her identisch mit $\vec{F}_{O,M}$ allerdings umgekehrt gerichtet sein. Somit gilt:

$$\vec{F}_{O,M} = -\vec{F}_{Fluid} \tag{3.42}$$

Und somit:

$$\vec{F}_{Fluid} = \dot{m}_1 \cdot \vec{w}_1 - \cdot \dot{m}_2 \cdot \vec{w}_2 + \vec{F}_m + \vec{F}_{O,D1} - \vec{F}_{O,D2} \tag{3.43}$$

Für eine weitere Berechnung in einem kartesischen Koordinatensystem muss eine Zerlegung in die drei Raumrichtungen erfolgen. Wir nehmen weiterhin zunächst an, dass als einzige Massenkraft die Schwerkraft entgegen der z-Richtung wirkt.

Es gilt dann für die 3 Raumrichtungen:

$$F_{Fluid,x} = \dot{m}_1 \cdot w_{1,x} - \dot{m}_2 \cdot w_{2,x} + p_1 \cdot A_{1,x} - p_2 \cdot A_{2,x} \tag{3.44}$$

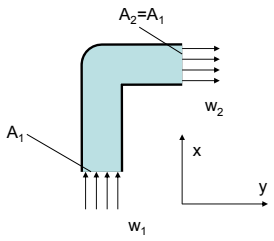
$$F_{Fluid,y} = \dot{m}_1 \cdot w_{1,y} - \dot{m}_2 \cdot w_{2,y} + p_1 \cdot A_{1,y} - p_2 \cdot A_{2,y} \tag{3.45}$$

$$F_{Fluid,z} = \dot{m}_1 \cdot w_{1,z} - \dot{m}_2 \cdot w_{2,z} + p_1 \cdot A_{1,z} - p_2 \cdot A_{2,z} - \rho \cdot g \cdot V \tag{3.46}$$

Der Index x,y oder z bei einer Kraft oder Geschwindigkeit symbolisiert hierbei den Anteil der Kraft oder Geschwindigkeit in der jeweiligen Raumrichtung, der Index x,y oder z bei der Fläche A symbolisiert die Projektionsfläche in die jeweilige Raumrichtung.

3.3.1. Anwendungen des Impulssatzes

Fall 1: Rohrleitung mit Kniestück: In ein waagrecht verlegtes Kniestück einer Rohrleitung strömt über die Querschnittsfläche A_1 ein inkompressibles Fluid mit der Dichte ρ und der Strömungsgeschwindigkeit w_1 ein. Auf die Fläche A_1 wirkt der Druck p_1. Der Austrittsquerschnitt A_2 ist gleich dem Eintrittsquerschnitt. Die in Gegenrichtung zur z-Achse wirkende Schwerkraft kann vernachlässigt werden.
Welche Kraft wirkt auf die Rohrleitung in Richtung der x- und y-Achse?



Bevor der Impulssatz angewendet werden kann, müssen zunächst die Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse am Ausgang geklärt werden. Hierfür sind die Kontinuitäts- und die Bernoulli-Gleichung zu verwenden. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt für unseren Fall (A_2=A_1):

$$w_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot w_1 = w_1 \tag{3.47}$$

Den Druck p_2 am Ausgang liefert die Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \tag{3.48}$$

Da in unserem Fall w_1=w_2 und z_1=z_2 muss auch p_2=p_1 sein.
Für die Kraft in x-Richtung gilt gemäß Herleitung:

$$F_{Fluid,x} = \dot{m}_1 \cdot w_{1,x} - \dot{m}_2 \cdot w_{2,x} + p_1 \cdot A_{1,x} - p_2 \cdot A_{2,x} \tag{3.49}$$

Die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung von w_2 ist null. Ebenso ist die Projektionsfläche in x-Richtung von A_2 null. Da w_1 nur in x-Richtung fließt, gilt: $w_{1,x}=w_1$. Gleiches gilt für die Projektionsfläche von A_1. Somit ergibt sich für die Kraft in x-Richtung:

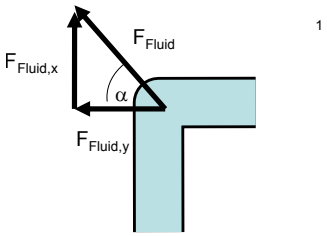
$$F_{Fluid,x} = \dot{m}_1 \cdot w_1 + p_1 \cdot A_1 = A_1 \cdot (\rho \cdot w_1^2 + p_1) \tag{3.50}$$

Das Fluid drückt die Rohrleitung somit in Richtung der x-Achse nach hinten.

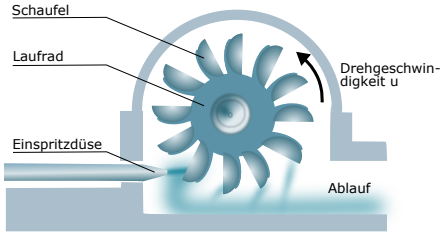
Für die y-Richtung gilt analog dass sowohl die Projektionsfläche von A_1 wie auch die Geschwindigkeitskomponente von w_1 in y-Richtung null sind. Damit ergibt sich für die Kraft in y-Richtung:

$$F_{Fluid,y} = -\dot{m}_2 \cdot w_2 - p_2 \cdot A_2 = -\dot{m}_1 \cdot w_1 + p_1 \cdot A_1) = -A_1 \cdot (\rho \cdot w_1^2 + p_1) \tag{3.51}$$

Da die Kräfte des Fluids in x- und in y-Richtung vom Betrag her identisch sind, übt das Fluid auf das Rohrleitungsknie somit eine resultierende Gesamtkraft aus, die mit α=45° an der Kniestelle angreift.



Fall 2: Eine sich mit der Geschwindigkeit u bewegende Peltonturbinenschaufel wird von einem Freistrahl mit der Geschwindigkeit w_1 angeströmt. Die Richtung des aus der Schaufel abströmenden Fluidstrahls w_2 soll exakt entgegen gesetzt zu der des zuströmenden Fluids sein, wohingegen die Geschwindigkeitsvektoren u und w_1 parallel ausgerichtet sind. Die Reaktionskraft auf die Schaufel ist zu berechnen unter Vernachlässigung von Schwerkraft und Reibungseffekten.
Welche Leistung führt das Fluid der Schaufel zu?



Diese Aufgabenstellung erfordert zunächst die Definition eines geeigneten Koordinatensystems. Damit wir die Bernoulli- und Impulsgleichung in der uns gewohnten Form einsetzen können, benötigen wir stationäre Strömungsverhältnisse.

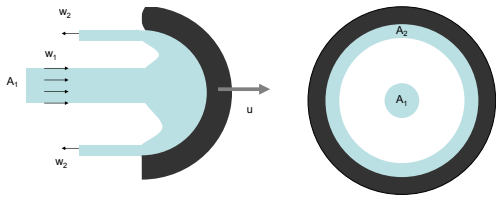
Diese erreichen wir dann, wenn wir das Koordinatensystem mit der Schaufel mitwandern lassen.

In diesem relativen Koordinatensystem hat dann der auftreffende Strahl die Geschwindigkeit $w_1{}'$ von:

$$w_1{}' = w_1 - u \tag{3.52}$$

Der abgehende Strahl hat entsprechend die Geschwindigkeit

$$w_2{}' = w_2 + u \tag{3.53}$$



Da die Schaufel zur Atmosphäre offen ist, haben wir es hier mit einem Freistrahl zu tun und es gilt für die Drücke im zu- und abfließenden Strahl $p_1 = p_2$.

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, dass die zu- und abfließenden Massenströme identisch sein müssen. Somit gilt:

$$\dot{m} = w_1{}' \cdot A_1 \cdot \varrho = w_2{}' \cdot A_2 \cdot \varrho \tag{3.54}$$

Aus der Bernoulli-Gleichung folgt:

$$\frac{1}{2} \cdot w_1'^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot w_2'^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \tag{3.55}$$

und somit:

$$w_2{}' = w_1{}' \tag{3.56}$$

Somit muss auch $A_1 = A_2$ sein.

Wir kommen jetzt zur Anwendung des Impulssatzes. An dieser Stelle muss man vorsichtig sein mit der Vorzeichenkonvention. Die Kontinuitäts- und Bernoulligleichungen basieren auf Bilanzgleichungen. Dabei wird nur beachtet, welche Massen- bzw. Impulsströme senkrecht zu einer Ein- und Austrittsfläche in ein Kontrollvolumen (hier die Strömungsröhre) gelangen. Wird eine Geschwindigkeit errechnet, so ist diese immer als Betrag senkrecht zur Oberfläche anzusehen. Wir haben zunächst keine Information über die Richtung.

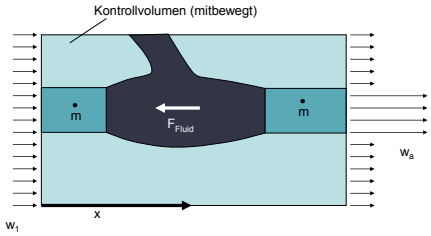
Bei der Anwendung des Impulssatzes muss jedoch die Richtung strikt beachtet werden. w_1 strömt in positiver x-Achsen-Richtung. Somit ist $w_{1,\mathrm{x}} = w_1{}'$. $w_2{}'$ strömt entgegen der x-Achse. Somit ist $w_{2,\mathrm{x}} = -w_1{}'$. Damit ergibt sich der Impulssatz zu:

$$F_{Fluid,x} = \dot{m}_1 \cdot w_1' + \dot{m}_1 \cdot w_1' = 2 \cdot \dot{m}_1 \cdot w_1' = 2 \cdot \rho \cdot (w_1 - u)^2 \cdot A_1 \tag{3.57}$$

Leistung ist Arbeit pro Zeiteinheit. Die Arbeit wiederum kann errechnet werden aus dem Produkt von Kraft multipliziert mit der Strecke entlang der die Kraft wirkt. Die Ableitung der Strecke nach der Zeit entspricht der Geschwindigkeit u und somit ergibt sich:

$$P = \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = F_{\mathrm{Fluid},x} \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = F_{\mathrm{Fluid},x} \cdot u = 2 \cdot \rho \cdot u \cdot (w_1 - u)^2 \cdot A_1 \tag{3.58}$$

Fall 3: Flugzeugtriebwerk: Es soll die Schubleistung eines Flugzeugtriebwerkes bestimmt werden, das einen Luftmassenstrom $\dot{m}$ ansaugt und auf die Geschwindigkeit w_a beschleunigt. Das Flugzeug bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit w_1.



Auch hier gilt es zunächst wieder, ein geeignetes Kontrollvolumen zu wählen. Stationäre Zustände im Kontrollvolumen erhält man nur dann, wenn man das Kontrollvolumen mit dem Triebwerk mitfliegen lässt. Somit bewegt sich das Kontrollvolumen im Vergleich zu einem stehenden Beobachter mit der Geschwindigkeit w_1. Im Kontrollvolumen selbst strömt somit die an sich ruhende Luft mit der gleichen Geschwindigkeit, also w_1, ein.

Mit dieser Geschwindigkeit wird die Luft auch die Kontrollfläche verlassen. Eine Ausnahme hiervon stellt jedoch die Luft dar, die im Triebwerk beschleunigt wurde. Diese besitzt eine Geschwindigkeit von w_a. Der Druck vor und hinter dem Kontrollvolumen entspricht jeweils dem Außendruck. Unter Anwendung der Impulsgleichung erhält man:

$$F_{Fluid} = \dot{m} \cdot (w_1 - w_a) \tag{3.59}$$

Da w_a größer ist als w_1 erhält die Kraft ein negatives Vorzeichen und wirkt somit entgegen der x-Achse des Koordinatensystems.

Für die Leistung gilt:

$$P = \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = |F_{\mathrm{Fluid}}| \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = |F_{\mathrm{Fluid}}| \cdot w_1 \tag{3.60}$$

4. Dynamik der reibungsbehafteten Fluide

4.1. Rohrhydraulik

Wir wollen uns zunächst, da hier die geometrische Situation am einfachsten zu beschreiben und zu verstehen ist, der Behandlung von reibungsbehafteten Rohrströmungen in zylindrischen Rohrleitungen zuwenden. Bislang spielten in unseren Betrachtungen Reibungsvorgänge keine Rolle. Wir haben deswegen eine wesentliche Größe der Strömungslehre, die wir ganz am Anfang kennengelernt hatten, in den letzen Kapiteln nicht benötigt: die Viskosität. Überall da, wo wir jedoch Reibungsvorgänge berücksichtigen müssen, spielt diese eine entscheidende Rolle.

4.1.1. Hagen-Poiseuille-Strömung

Wir betrachten ein newtonsches Fluid, welches durch einen kreisförmigen Rohrleitungsquerschnitt transportiert wird. Aus diesem schneiden wir gedanklich ein Teilsegment mit dem Radius r und der Länge dx aus und erstellen die Kräftebilanz.

Auf unser Segment wirkt an der Stelle x der Druck p und an der Stelle x+dx der Druck p+ ∂ p/ ∂ x·dx.

Der Druck wirkt jeweils auf die Vorderfront unseres Segments mit der Fläche πr^2. Zusätzlich wirkt jetzt aber die Schubspannung τ über die Oberfläche $2 \cdot \pi \cdot r$ des Zylindermantels.

Daraus folgt die Kräftebilanz:

$$p \cdot \pi \cdot r^2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \mathrm{dx}\right) \cdot \pi \cdot r^2 + \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mathrm{dx} = 0 \tag{4.1}$$

Und hieraus:

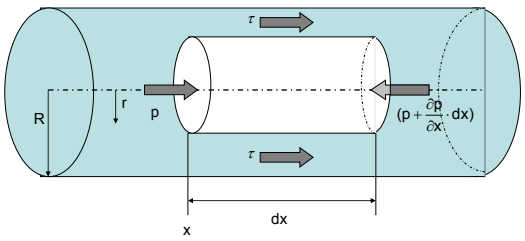


Abbildung 4.1.: Kräftebilanz bei einer reibungsbehafteten Strömung

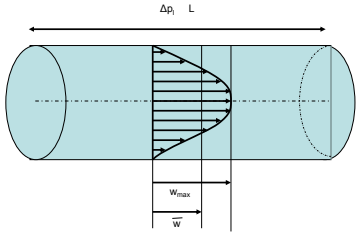


Abbildung 4.2.: Geschwindigkeitsfeld bei einer laminaren Rohrströmung

$$\tau = \frac{r}{2} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \tag{4.2}$$

Gemäß der Definition eines newtonschen Fluids gilt:

$$\tau = \eta \cdot \frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}} \tag{4.3}$$

Unter Vereinigung dieser beiden Ansätze erhält man:

$$\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}} = \frac{r}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \tag{4.4}$$

Integriert ergibt sich:

$$w(r) = \frac{r^2}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{const.} \tag{4.5}$$

Wir müssen nun noch die Integrationskonstante ermitteln. Direkt am Rohrmantel (r=R) wird die Strömungsgeschwindigkeit 0 werden. Es gilt somit w(R)=0. Und damit:

$$\mathrm{const.} = -\frac{R^2}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \tag{4.6}$$

Dies wieder eingesetzt ergibt:

$$w(r) = \frac{(r^2 - R^2)}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} = \frac{R^2}{4 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}}\right) \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{4.7}$$

Wir erhalten somit einen quadratischen Geschwindigkeitsverlauf. Das Maximum befindet sich in der Mitte des Rohres und die Geschwindigkeit nimmt zum Mantel hin ab.

Den Volumenstrom erhalten wir, in dem wir über das gesamte Geschwindigkeitsfeld integrieren.

Es ergibt sich dann:

$$\dot{V} = \int_A w \cdot \mathrm{dA} = \int_0^R w(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mathrm{dr} = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \eta} \left(-\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \right) \tag{4.8}$$

Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich durch Division des Volumenstroms durch die Fläche zu:

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot R^2} = \frac{R^2}{8 \cdot \eta} \left(-\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \right) \tag{4.9}$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist somit halb so groß wie die maximale Geschwindigkeit am Punkt r=0.

Der Ausdruck dp/dx ist innerhalb einer Rohrleitung eine Konstante. Anstatt dp/dx können wir somit ebenso den Gesamtwert über die Rohrleitungslänge Δp/L schreiben. Δp ist aber nichts anderes als der Druckverlust Δp_v, den wir über die Rohrleitungslänge L auf Grund von Reibungsvorgängen haben. Dieser berechnet sich unter Anwendung der oben hergeleiteten Formeln dann direkt zu:

$$\Delta p_v = \left(-\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \right) \cdot L = \frac{8 \cdot \eta \cdot \bar{w} \cdot L}{R^2} = \frac{32 \cdot \eta \cdot \bar{w} \cdot L}{D^2} = \frac{8 \cdot \eta \cdot \dot{V} \cdot L}{\pi \cdot R^4} = \frac{128 \cdot \eta \cdot \dot{V} \cdot L}{\pi \cdot D^4} \tag{4.10}$$

4.1.2. Laminare und turbulente Rohrströmungen

Die Hagen-Poiseuille-Formel liefert für langsame Strömungen eine gute Übereinstimmung mit gemessenen Druckverlusten in der Rohrleitung. Es zeigte sich jedoch, dass bei höheren Geschwindigkeiten das Ergebnis dieser Formel nicht mehr mit Messwerten übereinstimmte. Von Osborn Reynolds (1842 – 1912) wurde entdeckt, dass es offensichtlich zwei unterschiedliche Arten von Strömungen gibt. Im Bereich langsamer Geschwindigkeiten verhaltet sich die Strömung so, wie es durch das Hagen-Poisseuilsche Modell beschrieben wird. Ein einzelnes Teilchen, welches in einen Stromfaden hinein gelangt, wandert quasi über die gesamte Rohrleitungslänge auf diesem Stromfaden. Man nennt eine derartige Strömung laminar. Bei höheren Geschwindigkeiten bricht diese ruhige, durch einzelne Schichten gekennzeichnete Strömungsform jedoch ab. Es kommt zu einer willkürlichen, chaotischen Quervermischung zwischen den einzelnen Schichten. Diese Form der Strömung wird als turbulent bezeichnet.

In turbulenten Strömungen tritt eine erhöhte Quervermischung auf. Das, was in Abbildung 4.3 durch die Farbe visualisiert wird, findet auch mit allen anderen physikalischen Größen statt. In turbulenten Strömungen findet ein deutlich schnellerer Austausch von Impuls, Energie und Masse zwischen einzelnen Fluidschichten

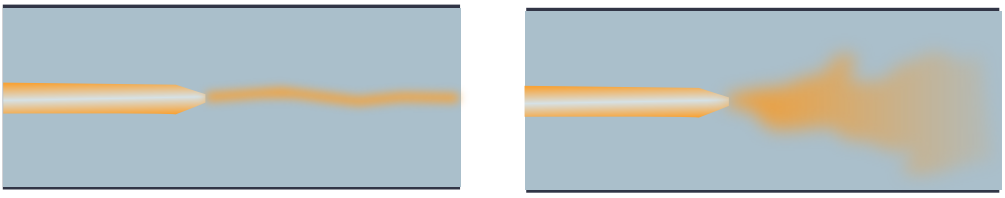


Abbildung 4.3.: Visualisierung der laminaren (links) und turbulenten (rechts) Strömung mit Hilfe eines Farbsstrahls

statt als in laminaren Strömungen.

Der erhöhte Impulsaustausch zwischen den Fluidschichten führt über einen längeren Zeitraum gemittelt zu einer Vergleichmäßigung des Geschwindigkeitsprofils in Querrichtung (siehe Abbildung 5 -21).

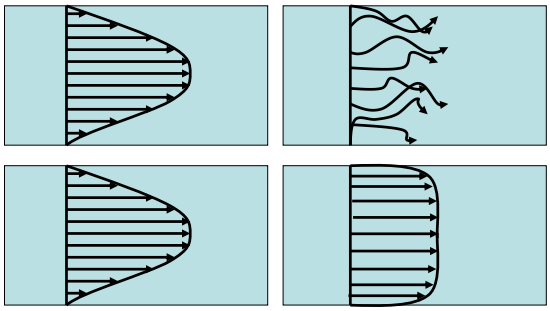


Abbildung 4.4.: Vergleich von laminar (links) und turbulenter Strömung (rechts); oben: Weg einzelner Fluidelemente, die zum Zeitpunkt t_0 die Startlinie passieren; unten: Weg von Fluidelementen gemittelt über einen längeren Zeitraum

Man kann sich diesen Effekt folgendermaßen vorstellen: Folgen wir exakt einem einzelnen Flüssigkeitsteilchen, dann nehmen wir eine sehr chaotische Bewegung wahr, wobei das Teilchen überwiegend in Strömungsrichtung fließt, hierbei aber auch deutliche Seitwärtsbewegungen (quer zur Strömungsrichtung) ausführt (obere Reihe in Abbildung 4.4). Im Mittel über sehr viele Teilchen neutralisieren sich die chaotischen Seiten-bewegungen und die Querströmungen werden nicht mehr sichtbar. Die Existenz dieser Querströmungen führt jedoch dazu, dass das gemittelte Strömungsprofil in Strömungsrichtig vergleichmäßigt wird. Man verzeichnet jetzt nur noch im absolut randnahen Bereich einen Geschwindigkeitsgradienten, wohingegen in der Rohrmitte der Geschwindigkeitsunterschied zwischen den einzelnen Kreisbahnen komplett verschwindet.

Da sich beim Übergang von laminarer auf turbulente Strömung nicht nur die Strömungsform selbst sondern auch viele andere technisch bedeutsamen Prozesse (bspw. Diffusions- und Stoffaustauschvorgänge, Wärmeübertragungsprozesse) ändern, ist es von großer Bedeutung, dass man möglichst genau vorhersagen kann,

welche Strömungsform bei einem technischen Problem vorherrscht. Hierbei hat sich gezeigt, dass dies nicht nur von der Geschwindigkeit als solcher, sondern auch von der Viskosität des Fluids abhängt. Zur Kennzeichnung wurde eine dimensionslose Kenngröße, die Reynolds-Zahl (Re) eingeführt. Diese ist folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{Re} = \frac{w \cdot D}{\nu} = \frac{w \cdot D \cdot \rho}{\eta} = \frac{\text{Trägheit}}{\text{innereReibung}} \tag{4.11}$$

Anstatt der Viskosität wird bei der Reynoldszahl die Zähigkeit eingesetzt, die sich mit Hilfe der Dichte aus der Viskosität errechnen lässt. Anschaulich stellt die Re-Zahl ein Verhältnis von Trägheitskräften (Dichte · Geschwindigkeit) zu Reibungskräften dar, die über die Viskosität gekennzeichnet werden. Damit der Berechnungsausdruck dimensionslos wird, ist er mit einer sinnvollen geometrischen Größe zu erweitern. Im Falle der Rohrleitung ist dies der Durchmesser. Man hätte jedoch auch eine andere Größe (bspw. den Radius) verwenden können, was allerdings dann zu einem anderen Zahlenwert für den Umschlagspunkt laminar – turbulent geführt hätte.

Die Reynoldszahl am Umschlag zwischen laminarer und turbulenter Strömung bezeichnet man als kritische Reynoldszahl $\mathrm{Re}_{\mathrm{krit}}$. Hierbei ist anzumerken, dass $\mathrm{Re}_{\mathrm{krit}}$ nicht wirklich einen exakten Zahlenwert annimmt, sondern viel mehr als Umschlagsbereich anzusehen ist. Strömungen können bei sehr glatten Oberflächen und bei „störungsfreier“ Anströmung länger laminar gehalten werden als bei rauen Oberflächen und beim Vorhandensein von Umlenkungen bzw. Störgrößen im Anströmungsbereich.

Bei Rohrleitungen gilt unabhängig vom Fluid:

$$Re_{krit} \approx 2300 \tag{4.12}$$

Unterhalb von $\mathrm{Re}_{\mathrm{krit}}$ ist die Strömung laminar, darüber turbulent.

Achtung: Dieser Zahlenwert gilt nur für Rohre mit kreisförmigem Querschnitt. Bei anderen geometrischen Formen (Platten, etc.) gelten andere Zahlenwerte!

Berechnung des Druckverlusts bei turbulenter Rohrströmung

Betrachten wir nochmals die Bernoulligleichung für den stationären Fall. Wir haben bereits gelernt, dass diese durch folgenden Ausdruck darzustellen ist:

$$\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \tag{4.13}$$

Was würde nun passieren, wenn zwischen dem Zustandspunkt 1 und dem Zustandspunkt 2 Energie durch Reibungsvorgänge dissipiert würde?

Die Werte für z können sich hierbei nicht ändern, da diese allein durch die Position der Messpunkte 1 und 2 bzw. durch die Höhendifferenz des Stromfadens zwischen diesen beiden Punkten festgelegt sind. Auch die Geschwindigkeit w_2 kann sich nicht ändern, da diese durch w_1 und die Kontinuitätsgleichung festgelegt ist. Somit muss sich die Druckänderung in einem geringeren Enddruck p_2 bemerk-

bar machen. Man könnte also auch ein zunächst willkürliches weiteres Druckglied Δp_v in die Bernoulligleichung aufnehmen, welches den durch Reibung verursachten Druckverlust auffangen würde.

Die so erweiterte Bernoulli-Gleichung würde dann folgendermaßen aussehen:

$$\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + \frac{\Delta p_v}{\rho} \tag{4.14}$$

Zur Verwendung dieses Ansatzes muss nun eine Möglichkeit gefunden werden, den Ausdruck $\Delta \mathrm{p_v}/\rho$ zu berechnen. Aus vielen experimentellen Ergebnissen heraus hat sich folgender Ansatz etabliert:

$$\frac{\Delta p_v}{\rho} = \lambda \frac{L \cdot w^2}{D \cdot 2} \tag{4.15}$$

Der Vorteil der oben gefundenen Darstellung ist es, dass der Ausdruck $\frac{\Delta p_v}{\rho}$ die gleiche Dimension wie der Ausdruck $\frac{L \cdot w^2}{D \cdot 2}$ hat. Somit muss λ dimensionslos sein. Man bezeichnet diesen dimensionslosen Koeffizienten λ als Rohrreibungszahl.

Setzt man mehrere verschiedene Rohrleitungsstücke zusammen, dann können die Druckverluste addiert werden. Für den Gesamtdruckverlust gilt dann:

$$\frac{\Delta p_v}{\varrho} = \sum_i \lambda_i \frac{L_i \cdot w_i^2}{D_i \cdot 2} \tag{4.16}$$

Damit der Ausdruck verwendet werden kann, müssen wir die Rohrreibungszahl ermitteln. Diese ist, wie bereits oben ausgeführt wurde, dimensionslos. Es hat sich bei komplexen Zusammenhängen, die nicht mehr rein analytisch sondern nur noch durch Anpassung von Kurven an experimentelle Ergebnisse gelöst werden können, bewährt, derartige dimensionslose Kennzahlen wiederum als Funktion weiterer dimensionsloser Kennzahlen aufzutragen. In die Rohrreibungszahl geht hierbei einerseits die Re-Zahl ein, die ihrerseits wiederum die Geschwindigkeit, die Viskosität und eine Geometriegröße enthält. Aus Erfahrung weiß man jedoch auch, dass der Druckverlust von der Rauigkeit des Rohrmaterials abhängig ist. Die Rauigkeit wird in der Regel durch einen Parameter gekennzeichnet, der entweder die mittlere Höhe der aus der Wand herausstehenden Unebenheiten (ε) kennzeichnet oder die Äquivalenz zur Sandkornrauigkeit ($\mathrm{k_S}$) herstellt. Beide Parameter haben die Dimension Meter. Um auch hier wiederum eine dimensionslose Darstellung zu bekommen, muss man den Rauigkeitsparameter durch einen weiteren geometrischen Parameter dividieren, der ebenfalls die Dimension Meter hat. Hierzu benutzt man sinnvollerweise den Radius oder Durchmesser. Somit gilt:

$$\lambda = \lambda \left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \tag{4.17}$$

oder

$$\lambda = \lambda\left(\mathrm{Re}, \frac{R}{k_S}\right) \tag{4.18}$$

Die Strömungsverhältnisse im laminaren Fall haben wir schon bei der Herleitung der Hagen-Poisseuilleschen Strömung kennengelernt. Die Rauigkeit taucht dort als Parameter nicht auf. Wir können das Hagen-Poisseuillesche auch in oben gezeigter Darstellung ausdrücken. Für den laminaren Bereich gilt:

$$\lambda = \lambda\left(\mathrm{Re}\right) = \frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{4.19}$$

Im turbulenten Bereich nimmt der Parameter Rauigkeit eine bedeutsame Rolle bei der Berechnung des Rohrreibungswertes ein. Die Ermittlung von λ erfolgt entweder über Näherungsformeln oder mittels Diagramme (siehe hierzu Abbildung 4.5).

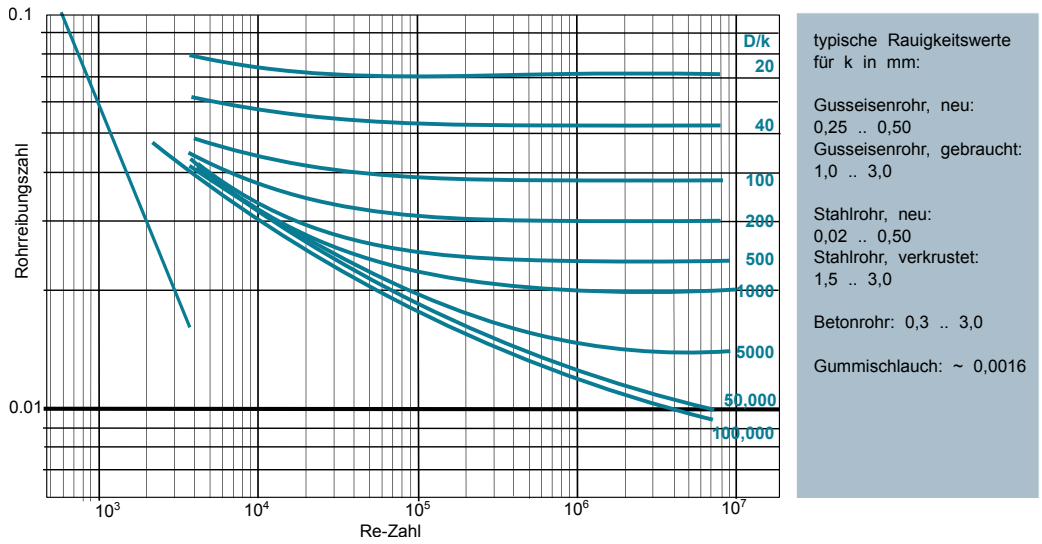


Abbildung 4.5.: Rohrreibungszahl in Abhängigkeit der Reynoldszahl und der Rauigkeit (Moody-Diagramm)

Mit oben beschriebenen Ansätzen können auch die Druckverluste bei nicht kreisförmigen Rohrquerschnitten ermittelt werden. Hierzu muss jedoch ein hydraulischer Ersatzdurchmesser berechnet werden, für den dann die gleichen Gesetze gelten wie für den normalen Kreisdurchmesser.

Bei einem kreisförmigen Rohrquerschnitt gilt (siehe Herleitung)

$$\tau = \frac{r}{2} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \tag{4.20}$$

und somit:

$$\frac{\Delta p_v}{L} = 4 \cdot \frac{\tau}{D} \tag{4.21}$$

Allgemein gilt: Die Schubspannung wirkt über die Mantelfläche (=Umfang U · Länge L), wohingegen die Druckdifferenz über die vordere bzw. hintere Querschnittsfläche A wirkt. Für die Kräftebilanz gilt somit allgemein:

$$U \cdot L \cdot \tau = A \cdot \Delta p_V \tag{4.22}$$

Somit gilt für den Druckverlust bezogen auf die Länge:

$$\frac{\Delta p_V}{L} = \frac{\tau}{A/U} \tag{4.23}$$

Durch gleichsetzen mit dem kreisförmigen Querschnitt ergibt sich:

$$D = \frac{4 \cdot A}{U} = D_{\text{hydraulisch}} \tag{4.24}$$

Wir können also für einen geometrisch anders geformten Querschnitt (Quadrat, Rechteck, Trapez, etc.) einen hydraulischen Ersatzdurchmesser $D_{\text{hydraulisch}}$ errechnen, der die gleiche Schubspannungs- und Druckkraftsituation aufweist wie ein kreisförmiger Querschnitt.

4.1.3. Berechnung des Druckverlusts von Einbauten in Rohrsystemen

Es gibt eine Vielzahl von Einbauten in Rohrleitungssysteme, deren exakte strömungstechnische Vermessung und Beschreibung nochmals deutlich komplexer ist als diejenige von geraden Rohrleitungen. Nur für wenige Einzelfälle (siehe bspw. Borda-Mündung in der weiterführenden Literatur) gelingt eine exakte Berechnung.

In den meisten Fällen ist man bei der Berechnung auf experimentelle Erfahrungswerte angewiesen. Man geht hier zunächst von der Berechnungsgleichung für den Druckverlust in einer geraden Rohrleitung

$$\frac{\Delta p_v}{\rho} = \lambda \frac{L \cdot w^2}{D \cdot 2} \tag{4.25}$$

aus. Hierbei sind L, D und λ spezifische Angaben, in die die Geometrie bzw. Rauigkeit der Rohrleitung eingehen. Diese lassen sich für komplexere Strukturen so nicht übernehmen. Man definiert eine neue Größe ζ (Widerstandsbeiwert Zeta), die alle geometrie- und oberflächenspezifischen Besonderheiten eines Einbauteils aufnehmen sollen. Gemäß der früheren Überlegungen sollte auch dies wiederum eine dimensionslose Größe werden. Dies gelingt mit dem Ansatz:

$$\frac{\Delta p_v}{\rho} = \zeta \frac{w^2}{2} \tag{4.26}$$

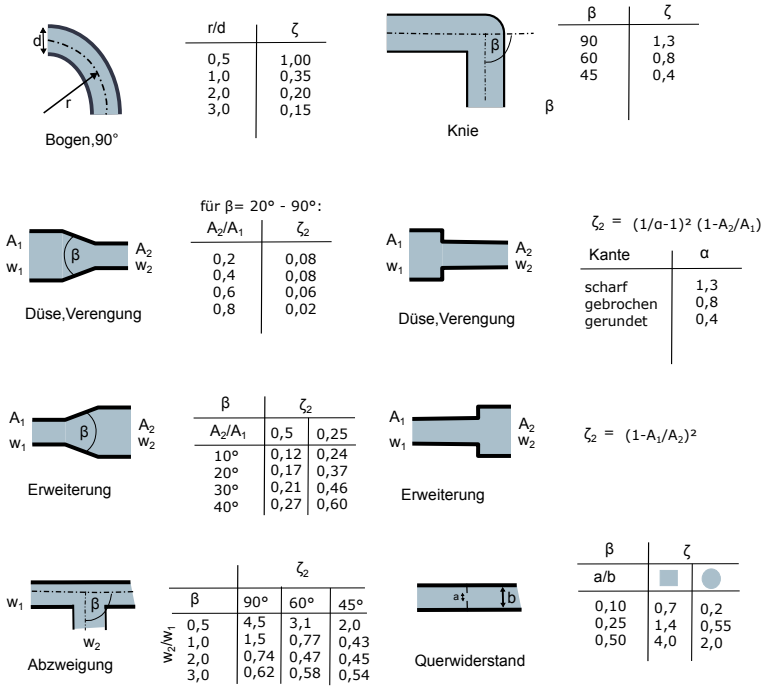


Abbildung 4.6.: Druckverlustsbeiwert bei verschiedenen Einbauten[6, 4]

w ist hierbei definitionsgemäß die mittlere Geschwindigkeit hinter dem Einbauteil.

Die Werte für ζ müssen entsprechenden Tabellenwerken entnommen werden (siehe Abbildung 4.6).

Sind mehrere Einbauten hintereinander geschaltet, dann gilt:

$$\frac{\Delta p_v}{\rho} = \sum_i \zeta_i \frac{w_i^2}{2} \tag{4.27}$$

Diese Formel liefert einem direkt den Druckverlust. Alternativ kann auch eine gleichwertige Rohrlänge bestimmt werden. Man berechnet hierzu, wie lange eine Rohrleitung wäre, damit sich der gleiche Druckverlust ergibt. Die gleichwertige Rohrlänge L_{gl} berechnet sich zu:

$$L_{\mathrm{gl}} = \zeta \cdot \frac{d}{\lambda} \tag{4.28}$$

Der Gesamtdruckverlust bei einer Leitung der Länge L und bei mehreren Einbauten mit je einer gleichwertigen Rohrlänge $L_{\mathrm{gl,i}}$ ergibt sich

$$L_{\mathrm{ges}} = L + \sum_i L_{\mathrm{gl},i} \tag{4.29}$$

und damit:

$$\frac{\Delta p_{v,\text{ges}}}{\rho} = \lambda \frac{L_{\text{ges}} \cdot w^2}{D \cdot 2} \tag{4.30}$$

ODER:

$$\frac{\Delta p_{v,\text{ges}}}{\rho} = \sum_i \lambda_i \frac{L_i \cdot w_i^2}{D_i \cdot 2} + \sum_i \zeta_i \frac{w_i^2}{2} \tag{4.31}$$

4.1.4. Leistungszufuhr und -entnahme an einer Strömungsmaschine

Ebenso wie in der Bernoulli-Gleichung ausgangsseitig ein Druckverlust abgezogen werden kann, kann eingangsseitig eine Leistungszufuhr mitbilanziert werden.

$$\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 + \frac{\Delta p_{\text{zu}}}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + \frac{\Delta p_v}{\rho} \tag{4.32}$$

Wir hatten bereits bei der Behandlung der Bernoulli-Gleichung gesehen, dass die einzelnen Terme spezifischen Energiemengen entsprechen. Δp_{zu} wäre somit eine Druckerhöhung, die eine am Eingang (Punkt 1) positionierte Pumpe erzeugen würde. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lehrt uns hierbei, dass dies der spezifischen (pro kg gefördertem Fluid) Arbeit entspricht, die die Pumpe am Fluid verrichtet. Man kann also analog schreiben:

$$\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 + \omega_{\text{Pumpe}} = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + \frac{\Delta p_v}{\rho} \tag{4.33}$$

Anmerkung: In der Thermodynamik wird das kleine w üblicherweise für die spezifische Arbeit verwendet. In der Strömungslehre ist dies jedoch bereits für die Geschwindigkeit benutzt. Um jedoch nicht einen neuen Buchstaben für die spezifische Arbeit einführen zu müssen, werden wir die spezifische Arbeit in der Strömungslehre im Folgenden mit dem kleinen *omega* ω symbolisieren! In der rein strömungstechnischen Literatur wird auch häufig der Buchstabe Y verwendet.

Löst man obige Gleichung nach ω_{Pumpe} auf so erhält man:

$$\omega_{\text{Pumpe}} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) + \frac{\Delta p_v}{\rho} \tag{4.34}$$

Dies ist die ideale spezifische Arbeit die eine Pumpe verrichten muss, um ein inkompressibles Medium vom Zustand 1 auf den Zustand 2 zu fördern. Betrachtet man den Zustand direkt vor und nach der Pumpe, so ergibt sich:

$$\omega_{\text{Pumpe}} = \frac{w_d^2 - w_s^2}{2} + \frac{p_d - p_s}{\varrho} + g \cdot (z_d - z_s) \tag{4.35}$$

d steht hier für die Druckseite und s für die Saugseite. Der Druckverlust auf Grund von Rohrleitungswiderständen wird an der Stelle vernachlässigt, da die

Zustände ja direkt auf der Saug- und Druckseite der Pumpe sein sollten und die Druckverluste dann auf Grund der Kürze der Anschlussleitungen vernachlässigbar sind.

Anstatt der spezifischen Arbeit kann auch eine fiktive Förderhöhe ermittelt werden. Diese stellt eine fiktive Höhe H_{fiktiv} dar, die die Pumpe das Fluid fördern würde, wenn die Pumpe nur gegen das Schwerefeld arbeiten würde (also keine Druck- und Geschwindigkeitsunterschiede realisieren würde). Die fiktive Förderhöhe ergibt sich mit:

$$H_{fiktiv} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + (z_2 - z_1) + \frac{\Delta p_v}{\rho \cdot g} \tag{4.36}$$

Die Berechnung der hydraulischen Leistung der Pumpe erfolgt dann mit:

$$P_{\text{hydr}} = \dot{m} \cdot \omega_{\text{Pumpe}} = \dot{V} \cdot \varrho \cdot \omega_{\text{Pumpe}} = \dot{V} \cdot \rho \cdot g \cdot H_{\text{fiktiv}} \tag{4.37}$$

Zur Berechnung der elektrischen oder mechanischen Leistung der Pumpe ist der Wirkungsgrad η_{Pumpe} mit zu berücksichtigen. Es gilt:

$$P_{\text{el,Pumpe}} = \frac{P_{\text{hydr}}}{\eta_{\text{Pumpe}}} \tag{4.38}$$

In vollkommen analoger Weise können die oben dargestellten Zusammenhänge auch für eine Flüssigkeitsturbine verwendet werden. In diesem Fall erscheint die spezifische Arbeit als negativer Wert, da er vom System abgegeben wird.

$$\omega_{\text{Turbine}} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) + \frac{\Delta p_v}{\rho} \tag{4.39}$$

Bei der Weiterverarbeitung der Leistung reduziert sich diese auf Grund von Umwandlungsverlusten. Es gilt bei der Turbine:

$$P_{\text{el,Turbine}} = P_{\text{hydr}} \cdot \eta_{\text{Turbine}} \tag{4.40}$$

4.1.5. Pumpen- und Anlagenkennlinie

Beim Betrieb einer Anlage wird nie fortwährend ein absolut konstanter Volumenstrom bzw. eine konstante Druckänderung eingestellt werden können. In technischen Einrichtungen kommt es auf Grund von zeitlich variablen Nutzungswünschen oder aber auch nur kleinen, unvermeidbaren Prozessschwankungen zu Variationen entweder im Volumenstrom, der durch die Anlage gefördert werden soll, oder in der Druckdifferenz.

Zur Abschätzung der Konsequenzen einer Volumenstromänderung kann die Gleichung zur Berechnung der fiktiven Förderhöhe herangezogen werden.

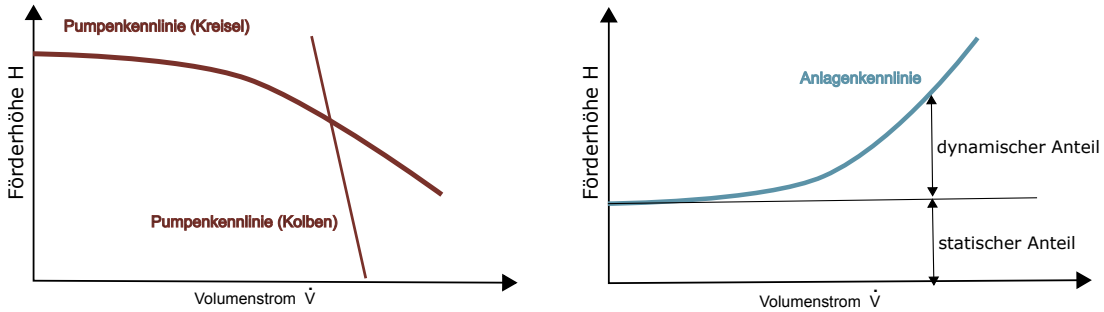


Abbildung 4.7.: Pumpen- und Anlagenkennlinie

$$H_{fiktiv} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + (z_2 - z_1) + \frac{\Delta p_v}{\rho \cdot g} \tag{4.41}$$

Wie wirkt sich bei der fiktiven Förderhöhe eine Vergrößerung des Volumenstroms aus. Eine Vergrößerung des Volumenstroms lässt sich nur erreichen, wenn in gleichem Maße die Strömungsgeschwindigkeit w_2 am Ausgang vergrößert wird. Diese wirkt sich direkt im Geschwindigkeitsterm $({w_2}^2 - {w_1}^2)$ und auch im Druckverlustterm Δp_v aus. Bei beiden besteht ein annähernd quadratischer Zusammenhang zur Geschwindigkeit und damit zum Volumenstrom. Hingegen sind der Ausdruck $p_2 - p_1$ sowie $z_2 - z_1$ annähernd statisch also nicht vom Volumenstrom abhängig. Die Anlagenkennlinie, die sich hieraus ergibt, besteht somit aus einem nicht vom Volumenstrom abhängigen statischen und einem dynamischen Anteil.

Der durch die Anlage geförderte Volumenstrom muss auch gleichsam durch die Pumpe gefördert werden. Ebenso muss die Pumpe energetisch für den Volumenstrom, der durch die Anlage gefördert werden soll, die entsprechende Förderhöhe bereit stellen. Der Zusammenhang zwischen Förderhöhe (und damit quasi saug- zu druckseitiger Druckdifferenz) der Pumpe und dem durch die Pumpe durchgesetzten Volumenstrom nennt man Pumpenkennlinie. Das Aussehen der Pumpenkennlinie ist vom Pumpentyp abhängig. Kolbenpumpen liefern einen nahezu konstanten Fördervolumenstrom unabhängig von der Druckdifferenz, gegen die sie arbeiten müssen. Bei Kreiselpumpen sinkt die Druckdifferenz, wenn der Volumenstrom steigt.

Den tatsächlichen Betriebspunkt einer Anlage findet man am Schnittpunkt zwischen Pumpen- und Anlagenkennlinie.

Für ein gegebenes technisches System gibt es nur einen möglichen Betriebspunkt.

Will man von diesem abweichende Volumenströme einstellen, dann kann dies durch verschiedene Maßnahmen erreicht werden. Dies kann ein Eingriff in die Pumpe (Drehzahl, Laufraddurchmesser) sein, welcher die Pumpenkennlinie verschieben wird. Möglich ist jedoch auch ein Eingreifen in die Anlagenkennlinie durch Installation einer Drossel (Ventil) oder eines Bypass zur Pumpe. Die gewählte Regelungsvariante hat entscheidenden Einfluss auf die Energieeffizienz einer Gesamtanlage.

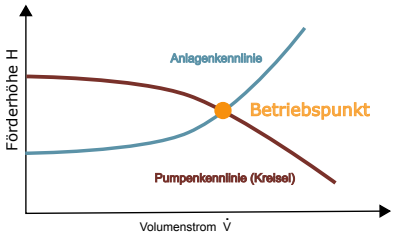


Abbildung 4.8.: Betriebspunkt als Schnittpunkt von Pumpen- und Anlagenkennlinie

4.1.6. Rohrleitungsnetzwerke

Anlagen können auch sehr komplex mit vielen Abzweigungen aufgebaut sein. Man spricht in diesem Fall von einem Rohrleitungsnetz. Diese kann wiederum mehrere Pumpen und Speicher umfassen.

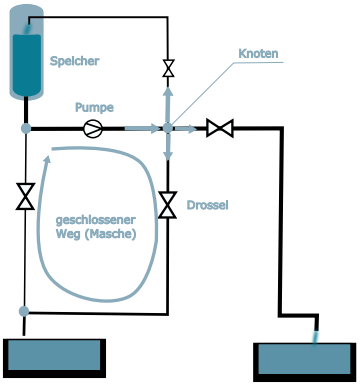


Abbildung 4.9.: Beispiel für ein Rohrleitungsnetz

Innerhalb des Rohrleitungsnetzes gelten folgende Richtlinien:

- Knotenpunte: An einem Knotenpunkt gilt die Massenbilanz, d.h. die zu- und abfließenden Ströme müssen gleich groß sein.
- Rohrstränge: Innerhalb eines Rohrstranges bleibt der Volumenstrom konstant. Widerstände in einem Rohrstrang können aufaddiert werden.
- Wege: Für jeden geschlossenen WeKraftg von einem Knoten weg und zu ihm wieder zurück (Masche) muss die Summe aller Druckänderungen Null sein.
- Für Pumpen muss die Pumpenkennlinie und bei Zu- und Abflüssen die Drucksituation bekannt sein

Mit den oben dargestellten Bedingungen kann für jeden Rohrstrang der Volumenstrom und für jeden Knotenpunkt der Druck berechnet werden.

Bei komplexen Rohrleitungssystemen entsteht eine große Anzahl an Gleichungen. Es empfiehlt sich dann der Einsatz entsprechender Optimierungsprogramme (Trinkwasseranlagen, etc.).

4.2. Umströmungsprobleme

Bei der Anströmung eines Körpers verrichtet das Fluid auf den Körper eine Kraft F_{Fluid}. Gleichzeitig muss von der Körperwand die Gegenkraft F_W aufgebracht werden. Hierbei ist es unerheblich, ob der Körper mit einer konstanten Geschwindigkeit angeströmt wird, oder aber der Körper mit einer konstanten Geschwindigkeit gegen die ruhende Luft fährt.

Abbildung 4.10.: Kräftesituation bei der Anströmung eines Körpers

Die Kraft F_W kann in zwei Bestandteile aufgeteilt werden. Senkrecht zur Körperoberfläche wirkt als Kraft die Druckkraft F_P. Tangential zur Oberfläche wirkt als Kraft die Reibkraft auf Grund der Zähigkeit des Fluids F_R. Es gilt:

$$F_W = F_P + F_R = \int_A p \cdot \sin\alpha \cdot \mathrm{dA} + \int_A \tau \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{dA} \tag{4.42}$$

Eine Vergrößerung des Winkels gegenüber der Strömungsrichtung führt somit zu einer Abnahme der Reibungskräfte aber zu einer Zunahme der Druckkräfte. Bei der Optimierung von Formen besteht häufig die Aufgabe, eine Bauform zu finden, bei der F_W minimal wird.

Methodisch wird hier wiederum auf die dimensionslosen Kennzahlen zurückgegriffen. Man definiert einen Widerstandsbeiwert c_W aus dem Verhältnis von tatsächlich wirksamer Kraft zur Druckkraft (errechnet aus dem dynamischen Druck der Anströmung). Die Fläche A kann hierbei unterschiedlich definiert sein. In der Regel bezieht sie sich auf die Projektionsfläche des Körpers in Strömungsrichtung.

$$c_W = \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot A} \tag{4.43}$$

Tabelle 4.1.: Beispiele für c_w-Werte [7]

Wert	Form
1,33	Halbkugelschale, konkave Seite, Fallschirm
1,1	runde Scheibe, quadratische Platte
0,8	LKW
0,78	Mensch, stehend
0,7	Motorrad, unverkleidet
0,6	Gleitschirm im Normalflug
0,55	Moderner Lkw-Sattelzug mit Aeropaket (40 t), Stand 2010
0,5	Cabrio offen, Motorrad verkleidet
0,45	Kugel (Re $1{,}7 \cdot 10^5$)
0,18	Kugel (Re $4{,}1 \cdot 10^5$
0,34	Halbkugelschale, konvexe Seite
0,3	moderner, geschlossener PKW
0,186	stark optimiertes Fahrzeug
0,08	Tragflügel beim Flugzeug
0,05	Tropfenform, Stromlinienform
0,03	Pinguin

Gemäß dem Kennzahlenkonzept werden c_W-Werte experimentell bestimmt und die Ergebnisse als Funktion weiterer Kennzahlen dargestellt. Dabei ist der c_W-Wert immer als Funktion der Reynoldszahl darzustellen. Je nach Aufgabenstellung bieten sich weitere Geometriekenngrößen an, bspw. ein Verhältnis von Projektionsfläche zur tangentialen Oberfläche.

A. Stoffdaten

Dichte von Luft in kg/m³ [1]

T [°C]	1 bar	5 bar	10 bar	20 bar	30 bar	40 bar	50 bar	100 bar	500 bar	1000 bar
-50	1,5636	7,8664	15,853	32,181	48,968	66,194	83,824	175,75	573,24	719,91
-25	1,4053	7,0535	14,173	28,6	43,258	58,121	73,16	149,62	523,71	681,64
0	1,2761	6,3955	12,826	25,783	38,849	52,003	65,223	131,43	480,76	646,59
25	1,1688	5,8514	11,72	23,498	35,316	47,16	59,011	117,81	443,78	614,52
50	1,0782	5,3936	10,793	21,6	32,409	43,207	53,981	107,11	411,98	585,22
75	1,0006	5,0029	10,004	19,997	29,967	39,906	49,804	98,409	384,52	558,44
100	0,9335	4,6654	9,3249	18,622	27,882	37,1	46,268	91,161	360,65	533,94
125	0,87482	4,3709	8,7331	17,428	26,08	34,681	43,229	85,006	339,75	511,48
150	0,82309	4,1115	8,2128	16,382	24,503	32,571	40,584	79,697	321,32	490,87
175	0,77714	3,8814	7,7516	15,457	23,111	30,713	38,258	75,061	304,95	471,9
200	0,73606	3,6758	7,34	14,632	21,873	29,062	36,194	70,971	290,3	454,4
225	0,6991	3,4909	6,9702	13,892	20,764	27,584	34,35	67,33	277,12	438,21
250	0,66569	3,3239	6,6361	13,225	19,764	26,253	32,69	64,065	265,18	423,2
275	0,63532	3,1721	6,3328	12,619	18,858	25,048	31,188	61,118	254,32	409,25
300	0,6076	3,0336	6,0562	12,067	18,033	23,951	29,822	58,443	244,38	396,25
325	0,5822	2,9068	5,8028	11,562	17,277	22,948	28,573	56,002	235,26	384,1
350	0,55885	2,7901	5,5699	11,098	16,584	22,027	27,426	53,764	226,85	372,73
375	0,53729	2,6825	5,3551	10,67	15,945	21,178	26,37	51,705	219,07	362,05
400	0,51734	2,5829	5,1562	10,274	15,353	20,393	25,394	49,803	211,84	352,02
425	0,49881	2,4904	4,9717	9,9067	14,805	19,665	24,488	48,04	205,11	342,57
450	0,48157	2,4044	4,8	9,5648	14,294	18,988	23,646	46,401	198,82	333,64
475	0,46548	2,3241	4,6397	9,2459	13,818	18,357	22,861	44,873	192,94	325,2
500	0,45043	2,2489	4,4899	8,9477	13,373	17,766	22,127	43,446	187,41	317,21
525	0,43632	2,1786	4,3495	8,6682	12,956	17,213	21,439	42,108	182,22	309,63
550	0,42307	2,1124	4,2175	8,4057	12,564	16,694	20,794	40,852	177,32	302,42
575	0,4106	2,0502	4,0934	8,1588	12,196	16,205	20,186	39,67	172,69	295,57
600	0,39885	1,9916	3,9764	7,926	11,849	15,744	19,613	38,556	168,31	289,04
625	0,38775	1,9362	3,8659	7,7061	11,521	15,309	19,072	37,504	164,16	282,81
650	0,37725	1,8838	3,7614	7,4982	11,21	14,898	18,561	36,509	160,22	276,86
675	0,36731	1,8342	3,6624	7,3013	10,916	14,508	18,076	35,566	156,48	271,17
700	0,35787	1,7871	3,5685	7,1144	10,638	14,138	17,616	34,672	152,91	265,72
750	0,34039	1,6998	3,3945	6,7681	10,121	13,453	16,764	33,013	146,27	255,49
800	0,32453	1,6207	3,2366	6,454	9,6522	12,831	15,991	31,507	140,2	246,07
850	0,31009	1,5486	3,0928	6,1679	9,2252	12,265	15,287	30,134	134,64	237,35
900	0,29687	1,4827	2,9613	5,9061	8,8345	11,746	14,642	28,877	129,51	229,25
950	0,28474	1,4222	2,8405	5,6657	8,4756	11,27	14,05	27,721	124,77	221,71
1000	0,27356	1,3664	2,7292	5,4441	8,1448	10,831	13,504	26,656	120,38	214,68

Dynamische Viskosität von Luft in µPa s [1]

T [°C]	1 bar	5 bar	10 bar	20 bar	30 bar	40 bar	50 bar	100 bar	500 bar	1000 bar
-50	14,614	14,684	14,78	15,004	15,267	15,571	15,916	18,221	45,191	72,146
-25	15,942	16,008	16,097	16,296	16,523	16,778	17,059	18,829	40,197	64,233
0	17,218	17,28	17,363	17,544	17,745	17,966	18,205	19,653	36,974	58,348
25	18,448	18,506	18,583	18,749	18,931	19,127	19,337	20,568	34,94	53,922
50	19,635	19,69	19,762	19,916	20,082	20,259	20,447	21,521	33,706	50,581
75	20,783	20,836	20,904	21,047	21,2	21,361	21,532	22,488	33,013	48,058
100	21,896	21,946	22,01	22,144	22,286	22,435	22,591	23,455	32,694	46,163
125	22,977	23,024	23,085	23,211	23,344	23,482	23,626	24,415	32,635	44,752
150	24,027	24,072	24,129	24,249	24,374	24,503	24,637	25,364	32,762	43,72
175	25,049	25,092	25,147	25,26	25,378	25,5	25,625	26,299	33,022	42,986
200	26,046	26,087	26,139	26,247	26,358	26,473	26,591	27,221	33,38	42,487
225	27,019	27,058	27,108	27,211	27,317	27,425	27,537	28,128	33,811	42,175
250	27,97	28,007	28,055	28,153	28,254	28,357	28,463	29,02	34,296	42,015
275	28,9	28,936	28,982	29,076	29,172	29,27	29,37	29,897	34,821	41,977
300	29,811	29,845	29,89	29,98	30,071	30,165	30,261	30,761	35,377	42,038
325	30,703	30,737	30,779	30,866	30,954	31,044	31,135	31,611	35,957	42,18
350	31,579	31,611	31,652	31,735	31,82	31,906	31,994	32,448	36,553	42,389
375	32,439	32,47	32,51	32,59	32,671	32,754	32,838	33,272	37,163	42,654
400	33,284	33,314	33,352	33,429	33,508	33,587	33,668	34,084	37,783	42,964
425	34,115	34,144	34,181	34,255	34,331	34,408	34,485	34,885	38,41	43,312
450	34,932	34,961	34,996	35,068	35,141	35,215	35,29	35,675	39,042	43,693
475	35,737	35,765	35,799	35,869	35,94	36,011	36,083	36,454	39,677	44,1
500	36,53	36,557	36,591	36,658	36,726	36,796	36,865	37,223	40,314	44,529
525	37,312	37,338	37,371	37,436	37,502	37,569	37,637	37,982	40,952	44,978
550	38,084	38,109	38,14	38,204	38,268	38,333	38,398	38,732	41,59	45,443
575	38,845	38,869	38,9	38,962	39,024	39,087	39,15	39,474	42,228	45,921
600	39,597	39,621	39,65	39,71	39,771	39,832	39,893	40,207	42,865	46,411
625	40,339	40,363	40,392	40,45	40,509	40,568	40,628	40,932	43,5	46,911
650	41,073	41,096	41,124	41,181	41,238	41,296	41,354	41,649	44,134	47,419
675	41,799	41,821	41,849	41,904	41,96	42,016	42,072	42,359	44,766	47,934
700	42,517	42,538	42,565	42,619	42,674	42,728	42,783	43,062	45,396	48,454
725	43,227	43,248	43,275	43,327	43,38	43,433	43,487	43,758	46,023	48,98
750	43,931	43,951	43,977	44,028	44,08	44,132	44,184	44,448	46,648	49,51
775	44,627	44,647	44,672	44,722	44,773	44,823	44,874	45,132	47,27	50,043
800	45,317	45,337	45,361	45,41	45,459	45,509	45,558	45,81	47,89	50,579
825	46,001	46,02	46,044	46,092	46,14	46,188	46,237	46,482	48,508	51,118
850	46,679	46,698	46,721	46,768	46,815	46,862	46,909	47,149	49,122	51,658
875	47,351	47,369	47,392	47,438	47,484	47,53	47,576	47,81	49,735	52,2
900	48,018	48,036	48,058	48,103	48,148	48,193	48,238	48,467	50,344	52,744
925	48,679	48,697	48,719	48,763	48,807	48,851	48,895	49,119	50,951	53,288
950	49,336	49,353	49,374	49,417	49,46	49,504	49,547	49,766	51,556	53,833
975	49,988	50,004	50,025	50,067	50,11	50,152	50,194	50,409	52,158	54,379
1000	50,635	50,651	50,672	50,713	50,754	50,796	50,837	51,047	52,758	54,925

Kinematische Viskosität von Luft in cm^2/s [1]

T [°C]	1 bar	5 bar	10 bar	20 bar	30 bar	40 bar	50 bar	100 bar	500 bar	1000 bar
-50	0,0935	0,0187	0,0093	0,0047	0,0031	0,0024	0,0019	0,0010	0,0008	0,0010
-25	0,1134	0,0227	0,0114	0,0057	0,0038	0,0029	0,0023	0,0013	0,0008	0,0009
0	0,1349	0,0270	0,0135	0,0068	0,0046	0,0035	0,0028	0,0015	0,0008	0,0009
25	0,1578	0,0316	0,0159	0,0080	0,0054	0,0041	0,0033	0,0017	0,0008	0,0009
50	0,1821	0,0365	0,0183	0,0092	0,0062	0,0047	0,0038	0,0020	0,0008	0,0009
75	0,2077	0,0416	0,0209	0,0105	0,0071	0,0054	0,0043	0,0023	0,0009	0,0009
100	0,2346	0,0470	0,0236	0,0119	0,0080	0,0060	0,0049	0,0026	0,0009	0,0009
125	0,2626	0,0527	0,0264	0,0133	0,0090	0,0068	0,0055	0,0029	0,0010	0,0009
150	0,2919	0,0585	0,0294	0,0148	0,0099	0,0075	0,0061	0,0032	0,0010	0,0009
175	0,3223	0,0646	0,0324	0,0163	0,0110	0,0083	0,0067	0,0035	0,0011	0,0009
200	0,3539	0,0710	0,0356	0,0179	0,0121	0,0091	0,0073	0,0038	0,0011	0,0009
225	0,3865	0,0775	0,0389	0,0196	0,0132	0,0099	0,0080	0,0042	0,0012	0,0010
250	0,4202	0,0843	0,0423	0,0213	0,0143	0,0108	0,0087	0,0045	0,0013	0,0010
275	0,4549	0,0912	0,0458	0,0230	0,0155	0,0117	0,0094	0,0049	0,0014	0,0010
300	0,4906	0,0984	0,0494	0,0248	0,0167	0,0126	0,0101	0,0053	0,0014	0,0011
325	0,5274	0,1057	0,0530	0,0267	0,0179	0,0135	0,0109	0,0056	0,0015	0,0011
350	0,5651	0,1133	0,0568	0,0286	0,0192	0,0145	0,0117	0,0060	0,0016	0,0011
375	0,6038	0,1210	0,0607	0,0305	0,0205	0,0155	0,0125	0,0064	0,0017	0,0012
400	0,6434	0,1290	0,0647	0,0325	0,0218	0,0165	0,0133	0,0068	0,0018	0,0012
425	0,6839	0,1371	0,0688	0,0346	0,0232	0,0175	0,0141	0,0073	0,0019	0,0013
450	0,7254	0,1454	0,0729	0,0367	0,0246	0,0185	0,0149	0,0077	0,0020	0,0013
475	0,7678	0,1539	0,0772	0,0388	0,0260	0,0196	0,0158	0,0081	0,0021	0,0014
500	0,8110	0,1626	0,0815	0,0410	0,0275	0,0207	0,0167	0,0086	0,0022	0,0014
525	0,8552	0,1714	0,0859	0,0432	0,0289	0,0218	0,0176	0,0090	0,0022	0,0015
550	0,9002	0,1804	0,0904	0,0455	0,0305	0,0230	0,0185	0,0095	0,0023	0,0015
575	0,9461	0,1896	0,0950	0,0478	0,0320	0,0241	0,0194	0,0100	0,0024	0,0016
600	0,9928	0,1989	0,0997	0,0501	0,0336	0,0253	0,0203	0,0104	0,0025	0,0016
625	1,0403	0,2085	0,1045	0,0525	0,0352	0,0265	0,0213	0,0109	0,0026	0,0017
650	1,0888	0,2182	0,1093	0,0549	0,0368	0,0277	0,0223	0,0114	0,0028	0,0017
675	1,1380	0,2280	0,1143	0,0574	0,0384	0,0290	0,0233	0,0119	0,0029	0,0018
700	1,1881	0,2380	0,1193	0,0599	0,0401	0,0302	0,0243	0,0124	0,0030	0,0018
725	1,2389	0,2482	0,1244	0,0625	0,0418	0,0315	0,0253	0,0129	0,0031	0,0019
750	1,2906	0,2586	0,1296	0,0651	0,0436	0,0328	0,0264	0,0135	0,0032	0,0019
775	1,3431	0,2691	0,1348	0,0677	0,0453	0,0341	0,0274	0,0140	0,0033	0,0020
800	1,3964	0,2797	0,1402	0,0704	0,0471	0,0355	0,0285	0,0145	0,0034	0,0021
825	1,4505	0,2906	0,1456	0,0731	0,0489	0,0368	0,0296	0,0151	0,0035	0,0021
850	1,5054	0,3015	0,1511	0,0758	0,0507	0,0382	0,0307	0,0156	0,0036	0,0022
875	1,5610	0,3127	0,1566	0,0786	0,0526	0,0396	0,0318	0,0162	0,0038	0,0022
900	1,6175	0,3240	0,1623	0,0814	0,0545	0,0410	0,0329	0,0168	0,0039	0,0023
925	1,6747	0,3354	0,1680	0,0843	0,0564	0,0425	0,0341	0,0174	0,0040	0,0024
950	1,7327	0,3470	0,1738	0,0872	0,0584	0,0439	0,0353	0,0180	0,0041	0,0024
975	1,7914	0,3588	0,1797	0,0902	0,0603	0,0454	0,0364	0,0185	0,0043	0,0025
1000	1,8510	0,3707	0,1857	0,0932	0,0623	0,0469	0,0376	0,0192	0,0044	0,0026

Dichte von Wasser in kg/m³ [1]

T [°C]	1 bar	5 bar	10 bar	20 bar	30 bar	40 bar	50 bar	100 bar	500 bar	1000 bar
5	999,97	1000,2	1000,4	1000,9	1001,4	1001,9	1002,4	1004,8	1023,2	1044,1
10	999,7	999,89	1000,1	1000,6	1001,1	1001,6	1002	1004,4	1022,3	1042,8
15	999,1	999,29	999,52	999,99	1000,5	1000,9	1001,4	1003,7	1021,2	1041,3
20	998,21	998,39	998,62	999,08	999,53	999,99	1000,4	1002,7	1019,9	1039,6
25	997,05	997,23	997,45	997,9	998,35	998,8	999,25	1001,5	1018,4	1037,9
30	995,65	995,83	996,05	996,49	996,94	997,38	997,82	1000	1016,8	1036
35	994,03	994,21	994,43	994,87	995,31	995,75	996,19	998,36	1015	1034
40	992,22	992,39	992,61	993,05	993,48	993,92	994,36	996,52	1013	1031,9
45	990,21	990,39	990,61	991,04	991,48	991,91	992,34	994,49	1010,9	1029,7
50	988,03	988,21	988,43	988,86	989,3	989,73	990,16	992,31	1008,7	1027,4
55	985,69	985,87	986,09	986,52	986,95	987,39	987,82	989,97	1006,3	1025
60	983,2	983,37	983,59	984,02	984,46	984,89	985,33	987,48	1003,9	1022,6
65	980,55	980,73	980,95	981,38	981,82	982,26	982,69	984,85	1001,3	1020
70	977,76	977,94	978,16	978,6	979,04	979,48	979,92	982,08	998,57	1017,3
75	974,84	975,02	975,24	975,69	976,13	976,57	977,01	979,19	995,77	1014,6
80	971,79	971,97	972,19	972,64	973,09	973,53	973,97	976,17	992,86	1011,8
85	968,61	968,79	969,02	969,47	969,92	970,37	970,82	973,04	989,85	1008,9
90	965,31	965,49	965,72	966,18	966,63	967,09	967,54	969,78	986,75	1005,9
95	961,89	962,07	962,3	962,77	963,23	963,69	964,14	966,41	983,56	1002,9
100	0,58967	958,54	958,77	959,24	959,71	960,17	960,63	962,93	980,27	999,76
110	0,57315	951,12	951,36	951,84	952,32	952,8	953,28	955,65	973,43	993,31
120	0,55767	943,26	943,51	944,01	944,5	945	945,49	947,94	966,24	986,58
130	0,54311	934,95	935,21	935,73	936,25	936,76	937,28	939,81	958,72	979,59
140	0,52936	926,21	926,48	927,02	927,56	928,1	928,63	931,28	950,87	972,34
150	0,51636	917,02	917,31	917,87	918,44	919	919,56	922,32	942,7	964,85
160	0,50402	2,6064	907,68	908,27	908,87	909,46	910,05	912,95	934,2	957,1
170	0,49229	2,5364	897,58	898,21	898,84	899,46	900,08	903,14	925,39	949,12
180	0,48113	2,4712	5,1431	887,67	888,33	888,99	889,65	892,88	916,25	940,9
190	0,47048	2,4102	4,9916	876,61	877,31	878,02	878,72	882,16	906,78	932,44
200	0,46031	2,3528	4,8539	865	865,76	866,51	867,26	870,94	896,97	923,74
225	0,43678	2,2225	4,5526	9,6329	834,16	835,08	835,99	840,44	870,9	900,96
250	0,4156	2,1078	4,2965	8,9689	14,159	798,92	800,09	805,7	842,41	876,66
275	0,39642	2,0055	4,0735	8,4272	13,137	18,313	24,132	765,13	811,12	850,76
300	0,37895	1,9135	3,8762	7,9677	12,318	16,987	22,053	715,29	776,48	823,17
325	0,36298	1,83	3,6994	7,5682	11,633	15,928	20,495	50,308	737,63	793,75
350	0,34832	1,7539	3,5398	7,215	11,043	15,044	19,242	44,564	693,25	762,34
375	0,3348	1,6842	3,3945	6,8988	10,524	14,284	18,193	40,719	641,18	728,78
400	0,3223	1,6199	3,2615	6,6131	10,062	13,618	17,29	37,827	577,79	692,93
450	0,29992	1,5056	3,0262	6,1146	9,269	12,493	15,792	33,578	402,04	614,16
500	0,28046	1,4066	2,824	5,6921	8,6062	11,568	14,581	30,478	257,07	528,28

Dynamische Viskosität von Wasser in in µPa s [1]

T [°C]	1 bar	5 bar	10 bar	20 bar	30 bar	40 bar	50 bar	100 bar	500 bar	1000 bar
5	1518,2	1517,6	1516,9	1515,5	1514,1	1512,7	1511,3	1504,7	1463,3	1437,9
10	1305,9	1305,5	1305,1	1304,2	1303,3	1302,4	1301,6	1297,4	1272,2	1259,3
15	1137,6	1137,3	1137,1	1136,5	1136,0	1135,5	1135,0	1132,4	1118,1	1113,6
20	1001,6	1001,5	1001,3	1001,0	1000,7	1000,4	1000,1	998,8	992,0	993,1
25	890,0	890,0	889,9	889,8	889,6	889,5	889,4	888,8	887,2	892,4
30	797,2	797,2	797,2	797,2	797,2	797,2	797,2	797,1	799,2	807,1
35	719,1	719,2	719,2	719,3	719,3	719,4	719,5	719,9	724,5	734,4
40	652,7	652,8	652,8	653,0	653,1	653,2	653,4	654,0	660,6	671,8
45	595,8	595,8	595,9	596,1	596,3	596,4	596,6	597,5	605,4	617,5
50	546,5	546,6	546,7	546,9	547,1	547,3	547,5	548,5	557,4	570,1
55	503,6	503,7	503,8	504,1	504,3	504,5	504,7	505,9	515,4	528,5
60	466,0	466,1	466,3	466,5	466,7	467,0	467,2	468,4	478,4	491,7
65	432,9	433,0	433,1	433,4	433,6	433,9	434,1	435,4	445,7	459,2
70	403,6	403,7	403,8	404,0	404,3	404,6	404,8	406,1	416,6	430,1
75	377,4	377,5	377,7	377,9	378,2	378,5	378,7	380,0	390,7	404,1
80	354,1	354,2	354,3	354,6	354,8	355,1	355,4	356,7	367,4	380,8
85	333,1	333,2	333,3	333,6	333,9	334,1	334,4	335,8	346,4	359,8
90	314,2	314,3	314,4	314,7	315,0	315,2	315,5	316,9	327,5	340,7
95	297,1	297,2	297,3	297,6	297,9	298,1	298,4	299,8	310,4	323,4
100	12,2	281,7	281,8	282,1	282,4	282,6	282,9	284,3	294,8	307,7
110	12,6	254,7	254,8	255,1	255,4	255,6	255,9	257,2	267,6	280,2
120	13,0	232,1	232,3	232,5	232,8	233,0	233,3	234,6	244,8	257,1
130	13,4	213,0	213,1	213,4	213,7	213,9	214,2	215,5	225,5	237,5
140	13,8	196,7	196,8	197,1	197,3	197,6	197,8	199,1	209,0	220,7
150	14,2	182,6	182,7	183,0	183,3	183,5	183,8	185,0	194,7	206,2
160	14,6	14,4	170,5	170,8	171,0	171,3	171,5	172,8	182,3	193,5
170	15,0	14,8	159,8	160,1	160,3	160,6	160,8	162,1	171,5	182,5
180	15,4	15,2	15,0	150,6	150,9	151,1	151,4	152,6	162,0	172,8
190	15,8	15,6	15,4	142,2	142,5	142,7	143,0	144,2	153,5	164,2
200	16,2	16,1	15,9	134,7	135,0	135,2	135,5	136,7	146,0	156,5
225	17,2	17,1	17,0	16,7	119,0	119,3	119,6	120,9	130,3	140,6
250	18,2	18,2	18,1	17,8	17,6	106,3	106,6	108,0	117,8	128,1
275	19,3	19,2	19,1	19,0	18,8	18,7	18,5	96,9	107,5	118,0
300	20,3	20,3	20,2	20,1	20,0	19,9	19,8	86,4	98,7	109,6
325	21,3	21,3	21,3	21,2	21,1	21,1	21,0	20,9	90,7	102,4
350	22,4	22,4	22,3	22,3	22,2	22,2	22,2	22,2	83,2	95,9
375	23,4	23,4	23,4	23,4	23,3	23,3	23,3	23,4	75,8	90,1
400	24,5	24,4	24,4	24,4	24,4	24,4	24,4	24,6	68,1	84,6
425	25,5	25,5	25,5	25,5	25,5	25,5	25,5	25,7	59,6	79,5
450	26,5	26,5	26,5	26,5	26,5	26,6	26,6	26,8	51,0	74,6
475	27,5	27,5	27,6	27,6	27,6	27,6	27,6	27,9	44,4	70,1
500	28,6	28,6	28,6	28,6	28,6	28,7	28,7	29,0	40,9	65,8

Kinematische Viskosität von Wasser in cm^2/s [1]

T [°C]	1 bar	5 bar	10 bar	20 bar	30 bar	40 bar	50 bar	100 bar	500 bar	1000 bar
5	0,0152	0,0152	0,0152	0,0151	0,0151	0,0151	0,0151	0,015	0,0143	0,0138
10	0,0131	0,0131	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,0129	0,0124	0,0121
15	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0113	0,0113	0,0113	0,0109	0,0107
20	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0097	0,0096
25	0,0089	0,0089	0,0089	0,0089	0,0089	0,0089	0,0089	0,0089	0,0087	0,0086
30	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,0079	0,0078
35	0,0072	0,0072	0,0072	0,0072	0,0072	0,0072	0,0072	0,0072	0,0071	0,0071
40	0,0066	0,0066	0,0066	0,0066	0,0066	0,0066	0,0066	0,0066	0,0065	0,0065
45	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006
50	0,0055	0,0055	0,0055	0,0055	0,0055	0,0055	0,0055	0,0055	0,0055	0,0055
55	0,0051	0,0051	0,0051	0,0051	0,0051	0,0051	0,0051	0,0051	0,0051	0,0052
60	0,0047	0,0047	0,0047	0,0047	0,0047	0,0047	0,0047	0,0047	0,0048	0,0048
65	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044	0,0045	0,0045
70	0,0041	0,0041	0,0041	0,0041	0,0041	0,0041	0,0041	0,0041	0,0042	0,0042
75	0,0039	0,0039	0,0039	0,0039	0,0039	0,0039	0,0039	0,0039	0,0039	0,004
80	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0037	0,0037	0,0038
85	0,0034	0,0034	0,0034	0,0034	0,0034	0,0034	0,0034	0,0035	0,0035	0,0036
90	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0034
95	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031	0,0032	0,0032
100	0,2075	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,003	0,003	0,0031
110	0,2202	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0028
120	0,2333	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0026
130	0,2468	0,0023	0,0023	0,0023	0,0023	0,0023	0,0023	0,0023	0,0024	0,0024
140	0,2606	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023
150	0,2749	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,0021	0,0021
160	0,2895	0,0551	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019	0,002	0,002
170	0,3045	0,0583	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018	0,0019	0,0019
180	0,32	0,0616	0,0291	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0018	0,0018
190	0,3358	0,0649	0,0309	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	0,0017	0,0018
200	0,352	0,0683	0,0327	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	0,0017
225	0,3943	0,077	0,0373	0,0173	0,0014	0,0014	0,0014	0,0014	0,0015	0,0016
250	0,4391	0,0862	0,042	0,0199	0,0125	0,0013	0,0013	0,0013	0,0014	0,0015
275	0,4863	0,0958	0,047	0,0225	0,0143	0,0102	0,0077	0,0013	0,0013	0,0014
300	0,536	0,1059	0,0521	0,0252	0,0162	0,0117	0,009	0,0012	0,0013	0,0013
325	0,5881	0,1165	0,0575	0,028	0,0182	0,0132	0,0102	0,0042	0,0012	0,0013
350	0,6426	0,1275	0,0631	0,0309	0,0201	0,0147	0,0115	0,005	0,0012	0,0013
375	0,6995	0,139	0,0689	0,0338	0,0222	0,0163	0,0128	0,0057	0,0012	0,0012
400	0,7587	0,1509	0,0749	0,0369	0,0243	0,0179	0,0141	0,0065	0,0012	0,0012
425	0,8202	0,1633	0,0812	0,0401	0,0264	0,0196	0,0155	0,0072	0,0012	0,0012
450	0,8841	0,1761	0,0876	0,0434	0,0286	0,0213	0,0168	0,008	0,0013	0,0012
475	0,9501	0,1894	0,0943	0,0468	0,0309	0,023	0,0182	0,0087	0,0014	0,0012
500	1,0184	0,2031	0,1012	0,0503	0,0333	0,0248	0,0197	0,0095	0,0016	0,0012

B. Wichtige Formeln

B.1. Grundgrößen

Dichte, Volumen, Masse: $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$

Ideales Gas: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{R \cdot T}$

Volumenstrom, Massenstrom: $\dot{V} = w \cdot A$, $\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot w \cdot A$

Druck: $p = \frac{F}{A}$

Schubspannung, Viskosität: $\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy}$ $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

Oberflächenspannung: $\sigma = \frac{F}{2 \cdot l} = \frac{\text{angreifende Kraft an einer Berandung}}{\text{Länge der Berandung}}$

B.2. Hydrostatik

Kräftebilanz in ruhenden Fluiden:

$\frac{\partial p}{\partial x} = f_{m,x} \cdot \varrho$
$\frac{\partial p}{\partial y} = f_{m,y} \cdot \varrho$
$\frac{\partial p}{\partial z} = f_{m,z} \cdot \varrho$

Hydrostatischer Druckverlauf (z_2=Abstand zur Oberfläche)
$p(z_2) = p_a + g \cdot \varrho \cdot z_2$

Barometrische Höhenformel
$p = p_0 \cdot e^{\frac{-g \cdot \rho_0 \cdot z}{p_0}}$, $p = p_0 \cdot e^{\frac{-g \cdot z}{R \cdot T_0}}$

Druckunterschied im U-Rohr
$\Delta p = \varrho \cdot g \cdot h$

Dichtebestimmung im U-Rohr

$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$

Druckkraft auf horizontale Behälterwand:
$F = (p_\mathrm{i} - p_0 + \varrho \cdot g \cdot h) \cdot A$

Druckkraft auf geneigte Behälterwand:

Auftrieb (resultierende Kraft)
$F = F_A + F_G = (\varrho_\mathrm{Körper} - \varrho_\mathrm{Fluid}) \cdot g \cdot V_\mathrm{Körper}$

Druck in Tropfen und Blasen
$\Delta p = p_i - p_a = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$ (Tropfen)
$\Delta p = p_i - p_a = \frac{4 \cdot \sigma}{r}$ (Blase)
$\Delta p = \sigma \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$(gekrümmte Oberfläche mit zwei Radien)

kapillare Steighöhe: $h = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot g \cdot r} = \frac{4 \cdot \sigma \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot g \cdot d}$

B.3. Bilanzgleichungen

Massenerhaltung
$\dot{m} = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} = \frac{d(\rho \cdot V)}{\mathrm{dt}} = -\int\limits_A \rho \cdot w \cdot \mathrm{dA}$

Kontinuitätsgleichung
$\rho_1 \cdot w_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot A_2$
$\frac{w_2}{w_1} = \frac{A_1}{A_2}$(bei konstanter Dichte)

Bernoulli-Gleichung
$\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2$

Toricellische Ausflussformel
$\dot{V} = w_2 \cdot A_2 = A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$

Impulssatz (vereinfacht bei Strömung in die jeweilige Raumrichtung, z-Richtung mit Schwerkraft)
$F_{Fluid,x} = \dot{m}_1 \cdot w_{1,x} - \dot{m}_2 \cdot w_{2,x} + p_1 \cdot A_{1,x} - p_2 \cdot A_{2,x}$
$F_{Fluid,y} = \dot{m}_1 \cdot w_{1,y} - \dot{m}_2 \cdot w_{2,y} + p_1 \cdot A_{1,y} - p_2 \cdot A_{2,y}$
$F_{Fluid,z} = \dot{m}_1 \cdot w_{1,z} - \dot{m}_2 \cdot w_{2,z} + p_1 \cdot A_{1,z} - p_2 \cdot A_{2,z} - \rho \cdot g \cdot V$

B.4. Reibungsbehaftete Strömungen

Druckverlust bei laminarer Strömung (ACHTUNG: Re-Zahl prüfen!)

$\Delta p_v = \frac{8 \cdot \eta \cdot \bar{w} \cdot L}{R^2} = \frac{32 \cdot \eta \cdot \bar{w} \cdot L}{D^2} = \frac{8 \cdot \eta \cdot \dot{V} \cdot L}{\pi \cdot R^4} = \frac{128 \cdot \eta \cdot \dot{V} \cdot L}{\pi \cdot D^4}$

Druckverlustsberechnung allgemein:

$\mathrm{Re} = \frac{w \cdot D}{\nu} = \frac{w \cdot D \cdot \rho}{\eta}$

$\lambda = \lambda \left(\mathrm{Re}, \frac{R}{k_S} \right)$

gerades Rohr: $\frac{\Delta p_v}{\rho} = \lambda \frac{L \cdot w^2}{D \cdot 2}$
Einbauten: $\frac{\Delta p_v}{\rho} = \zeta \frac{w^2}{2}$

hydraulischer Durchmesser (bei nicht runden Rohren/Schächten): $D = \frac{4 \cdot A}{U} = D_{\mathrm{hydraulisch}}$

Leitungen mit mehreren Teilstücken $\frac{\Delta p_{v,\mathrm{ges}}}{\rho} = \sum_i \lambda_i \frac{L_i \cdot w_i^2}{D_i \cdot 2} + \sum_i \zeta_i \frac{w_i^2}{2}$

Gesamtgleichung: $\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + \frac{\Delta p_v}{\rho}$

Bei Strömungsmaschinen: $\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 + \omega_{\mathrm{Pumpe}} = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + \frac{\Delta p_v}{\rho}$

Leistung und Wirkungsgrad von Strömungsmaschinen
$P_{\mathrm{hydr}} = \dot{m} \cdot \omega_{\mathrm{Pumpe}} = \dot{V} \cdot \varrho \cdot \omega_{\mathrm{Pumpe}} = \dot{V} \cdot \rho \cdot g \cdot H_{\mathrm{fiktiv}}$
$P_{\mathrm{el,Pumpe}} = \frac{P_{\mathrm{hydr}}}{\eta_{\mathrm{Pumpe}}}$
$P_{\mathrm{el,Turbine}} = P_{\mathrm{hydr}} \cdot \eta_{\mathrm{Turbine}}$

Umströmung (c_w-Wert): $c_W = \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot A}$

Nomenclature

$\dot{m}$	Massenstrom
$\dot{V}$	Volumenstrom
c_w	Widerstandsbeiwert
ς	Widerstandsbeiwert
η	dynamische Viskosität
λ	Rohrreibungszahl
ν	kinematische Viskosität (Zähigkeit)
ρ	Dichte
σ	Oberflächenspannung
τ	Schubspannung
ω	spez. Arbeit einer Strömungsmaschine
A	Fläche
a	Beschleunigung
D	Gesamtdurchmesser (einer Rohrleitung)
d	Durchmesser
E	Energie
F	Kraft
f	Massenkraft
g	Gravitationskonstante
h	Höhe
L	Gesamtlänge (einer Rohrleitung)
l	Länge
m	Masse

P	Leistung
p	Druck
R	Radius (einer Rohrleitung)
R	spez. Gaskonstante
r	Radius
s	Strecke (entlang der Strömung)
T	Temperatur
t	Zeit
U	Umfang
V	Volumen
v	spez. Volumen
w	Strömungsgeschwindigkeit
x	Länge (Koordinate)
y	Länge (Koordinate)
z	Länge (Koordinate)
H_{fiktiv}	fiktive Förderhöhe

Literaturverzeichnis

[1] NIST Standard Reference Database 23: Fluid Thermodynamic and Transport Properties REFPROP, 2010.

[2] Willi Bohl and Wolfgang Elmendorf. *Technische Strömungslehre: Stoffeigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen, Hydrostatik, Aerostatik, inkompressible Strömungen, kompressible Strömungen, Strömungsmesstechnik.* Kamprath-Reihe. Vogel, Würzburg, 14., überarb. und erw. aufl. edition, 2008.

[3] Leopold Böswirth, Sabine Bschorer, and Thomas Buck. *Technische Strömungslehre: Lehr- und Übungsbuch ; mit 43 Tabellen.* Studium. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 9., überarb. aufl. edition, 2012.

[4] Heinz Schade, Ewald Kunz, and Frank Kameier. *Strömungslehre.* De Gruyter Lehrbuch. de Gruyter, Berlin, 3., neu bearb. aufl. edition, 2007.

[5] Heribert Stroppe and Heinz Langer. *Physik für Studierende der Natur- und Ingenieurwissenschaften: Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen ; mit 25 Tabellen, 238 durchgerechneten Beispielen und 140 Aufgaben mit Lösungen.* Fachbuchverl. Leipzig im Carl-Hanser-Verl., München, 15., aktualisierte aufl. edition, 2012.

[6] Walter Wagner. *Rohrleitungstechnik.* Kamprath-Reihe. Vogel, Würzburg, 11., überarb. und erw. aufl. edition, 2012.

[7] www.wikipedia.de. Strömungswiderstandskoeffizient, 2017.

Abbildungsverzeichnis

1.1. Beispiele für Umströmungsprobleme 5
1.2. Beispiele für Durchströmungsprobleme 6
1.3. Koordinatensysteme in der Strömungslehre (links: kartesisches Koordinatensystem, rechts: Zylinderkoordinaten) 9
1.4. Beispiel für Stromlinien (links) und Bahnkurven (rechts) 10
1.5. Rheologisches Modell 13
1.6. Rheologisches Verhalten verschiedener Fluide 15
1.7. Grenzflächenphänomene 16
1.8. Kräftebilanz im Innern und an der Grenzfläche eines Fluids (links) und Messung der Oberflächenspannung (rechts) 16

2.1. Kräftebilanz an einem Volumenelement in x-Richtung 19
2.2. Hydrostatischer Druckverlauf 22
2.3. Das U-Rohr als Messinstrument (links: Druckmessung, rechts: Dichtemessung) 24
2.4. Druckverläufe in Behälter 25
2.5. Hydrostatisches Paradoxon: Die Kraft auf die Bodenplatte ist nur von der Flüssigkeitshöhe und nicht von der Gefäßform abhängig! 26
2.6. Drucksituation an der geneigten Platte 26
2.7. Kräftebilanz für ein schwebendes Teilchen 27
2.8. Angriffspunkte von Schwer- und Auftriebskraft 28
2.9. Tropfen und Blasen 29
2.10. Kräftebilanz an gekrümmten Oberflächen 31
2.11. Oberflächenspannung bei größeren Radien 32
2.12. Wechselwirkung von Adhäsion und Kohäsion an der Grenzfläche Festkörper / Fluide 32
2.13. Kapillarkraft bei einer runden Kapillare (links) und im Rechteck-Spalt (rechts) 34

3.1. Massenbilanz an einem Quader 35
3.2. Massenbilanz an einem Rohrleitungselement 38
3.3. Strömungssituation (x-Richtung) in ein infinitesimal kleines Volumenelement 39
3.4. Strömungssituation (x-Richtung) in ein infinitesimal kleines Volumenelement - Kräftebilanz entlang eines Stromfadens 41
3.5. Druckbegriffe bei einem umströmten Körper 44
3.6. Messung des statischen Drucks durch Wandbohrungen und des Gesamtdrucks 44

3.7. Messung des dynamischen Drucks mit dem Prandtlschen Staurohr 44
3.8. Dampfdruckkurve von Wasser 45
3.9. Kräftebilanz zur Aufstellung des Impulssatzes 48

4.1. Kräftebilanz bei einer reibungsbehafteten Strömung 55
4.2. Geschwindigkeitsfeld bei einer laminaren Rohrströmung 56
4.3. Visualisierung der laminaren (links) und turbulenten (rechts) Strömung mit Hilfe eines Farbsstrahls 58
4.4. Vergleich von laminar (links) und turbulenter Strömung (rechts); oben: Weg einzelner Fluidelemente, die zum Zeitpunkt t_0 die Startlinie passieren; unten: Weg von Fluidelementen gemittelt über einen längeren Zeitraum . 58
4.5. Rohrreibungszahl in Abhängigkeit der Reynoldszahl und der Rauigkeit (Moody-Diagramm) 61
4.6. Druckverlustsbeiwert bei verschiedenen Einbauten[6, 4] 63
4.7. Pumpen- und Anlagenkennlinie 66
4.8. Betriebspunkt als Schnittpunkt von Pumpen- und Anlagenkennlinie 67
4.9. Beispiel für ein Rohrleitungsnetz 67
4.10. Kräftesituation bei der Anströmung eines Körpers 68

Tabellenverzeichnis

1.1. Grundgleichungen der Strömungsmechanik 7
1.2. Unter-Richtungen der Strömungslehre 7
1.3. Dynamische Viskosität η und kinematische Viskosität ν einiger Stoffe [5] 14
1.4. Oberfächenspannung in N/m verschiedener Materialien bei 20°C [5, 3] . . 17

2.1. Oberflächenspannung verschiedener Grenzflächen [2] 33

4.1. Beispiele für c_w-Werte [7] 69

Index

A
Auftrieb, 27

B
Bahnkurve, 10
Bernoulli-Gleichung, 42, 45, 46, 60, 64
Beschleunigung, 11
Blase, 16, 30

D
Dichte, 7
Druck, 8, 12, 19, 21, 25, 29, 43, 64, 68
Druck, dynamisch, 43
Druck, Schwere-, 43
Druck, statisch, 43
Durchmesser, hydraulischer Ersatz-, 62

G
Grenzfläche, 15

I
ideales Gas, 8
Impulssatz, 47, 50

K
Kapillarkraft, 32
Kavitation, 44
Kontinuitätsgleichung, 38
Koordinatensystem, 8
Kraft, 11, 19, 25, 26, 49, 67, 68

L
Leistung, 65

M
Massenerhaltung, 35
Massenkraft, 12
Massenstrom, 11

O
Oberflächenkraft, 12
Oberflächenspannung, 17, 29, 30, 32

P
Pumpe, 64

R
Reynolds-Zahl, 59
Rohrlänge, gleichwertige, 63
Rohrleitungsnetz, 67
Rohrreibungszahl, 60
Rohrströmung, 55

S
Schubspannung, 13
spezifisches Volumen, 7
Stromlinien, 10
Strömung, laminar, 57
Strömung, turbulent, 57
Strömungsgeschwindigkeit, 8

T
Temperatur, 8
Torricellische Ausflussformel, 46
Tropfen, 16, 30

U
U-Rohr, 24

V
Viskosität, 13, 59
Viskosität, dynamische, 13
Viskosität, kinematische, 14
Volumenstrom, 11

W
Widerstandsbeiwert, 62, 68
Wirkungsgrad, 65

Z
Zähigkeit, 14