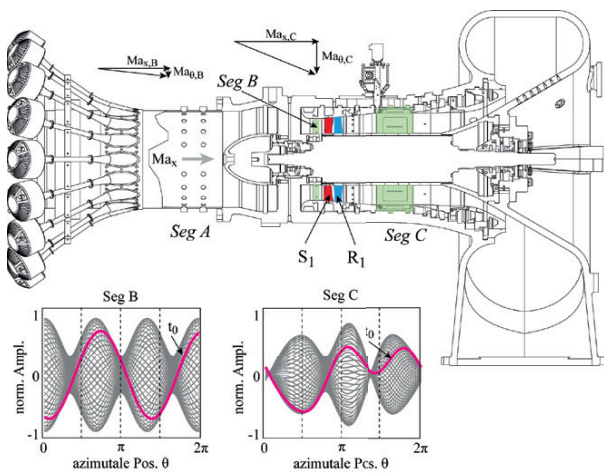


Michael Bartelt

Ein Beitrag zum Ausbreitungsverhalten modaler Schallfelder in Niederdruckturbinen



Berichte aus dem Institut für
Turbomaschinen und Fluid-Dynamik
Band 7/2015
Herausgeber: Jörg Seume

Pressure
coefficient

$$C_p = \frac{p - p_1}{p_{01} - p_1}$$



Institut für Turbomaschinen
und Fluid-Dynamik

Ein Beitrag zum Ausbreitungsverhalten modaler Schallfelder in Niederdruckturbinen

Von der
Fakultät für Maschinenbau
der
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Ing (FH) Michael Bartelt, M.Sc.
geboren am 16. November 1979 in Cuxhaven

2015

Schlagwörter:

Aeroakustik, Schalltransport, Turbine, Modenanalyse

Keywords:

Aero Acoustics, Sound Propagation, Turbine, Modal Analysis

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Lutz Rissing

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jörg Seume

2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jan W. Delfs

Tag der Promotion: 30. April 2015

Kurzfassung

Die Reduzierung der Lärmemission ist eine zentrale Herausforderung in der Entwicklung moderner Flugtriebwerke. Dazu ist das physikalische Verständnis der Lärmentstehungs- und Transportmechanismen innerhalb der Antriebe notwendig. Aus diesem Grund widmet sich die vorliegende Arbeit der Untersuchung des Ausbreitungsverhaltens Rotor-asynchron in eine Niederdruckturbine eingekoppelter Schallfelder.

Experimente zeigen, dass die Turbinen-internen Schallfelder durch die vielfache Überlagerung von drehenden, stehenden und partiell stehenden Moden geprägt sind, die gerade bei einer Rotor-asynchronen Anregung in besonders komplexer Form auftreten. So werden in dieser Arbeit zunächst die wesentlichen physikalischen Mechanismen des Ausbreitungsverhaltens akustischer Moden in Rohrleitung unter Berücksichtigung überlagerter Strömungs- und Drallfelder herausgearbeitet. Ein Schwerpunkt liegt auf der Behandlung stehender, partiell stehender sowie mehrfach überlagerter Azimutalmoden. Dazu werden unter anderem theoretische Betrachtungen angestellt, die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von überlagerten Modenstrukturen zu bestimmen. Diese folgen nicht mehr den klassischen Ansätzen der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, sondern ergeben sich vielmehr als eine speziell gemittelte Gesamtgeschwindigkeit, die eine charakteristische Größe der Ausbreitung überlagerter Wellenfelder ist.

Darauf aufbauend werden Verfahren entwickelt, experimentell gemessene Schallfelder in ihre modalen Bestandteile zu zerlegen und zu analysieren, wobei insbesondere auf die Bestimmung der modalen Phasenbeziehungen und der Teilmodenverhältnisse eingegangen wird. Es ist das Ziel, einen hybriden Analyseansatz zu entwickeln, der zur Auswertung sowohl auf die Ergebnisse experimenteller Messungen als auch auf die Ergebnisse analytischer Berechnungen zurückgreift. Es wird demonstriert, dass man mit Hilfe dieses Verfahrens komplexe Schallfelder auf Basis weniger Stützstellen experimenteller Messdaten berechnen kann, um so eine vollständige Schallfeldanalyse durchzuführen. Kern dieses Berechnungsverfahrens ist ein analytisches Schalltransportmodell, das die Ausbreitung beliebig überlagerter Moden in Ring- und Kreisringkanälen unter Berücksichtigung einer überlagerten Haupt- und Drallströmung bestimmt.

Sowohl das Transportmodell als auch die entwickelten Analyseverfahren werden zunächst mit Hilfe experimenteller Versuche in einem aeroakustischen Windkanal für Rohranwendungen validiert und erprobt, bevor sie für akustische Untersuchungen in einer Versuchsturbine eingesetzt werden. Dabei wird das Ausbreitungsverhalten Rotor-asynchron in den Eintritt einer ein- und zweistufigen Versuchsturbine eingekoppelter Schallfelder untersucht. Es zeigt sich, dass abhängig von der Anregungsfrequenz, ganz charakteristische Ausbreitungseigenschaften der Schallfelder auftreten, während Drehzahleffekte nur von untergeordneter Bedeutung sind. Die gewonnenen Erkenntnisse zum Transport- und Transmissionsverhalten werden vorgestellt, diskutiert und entsprechende Schlussfolgerungen gezogen.

Abstract

The reduction of noise emission is a major challenge for the development of new aircraft engines. The physical knowledge and the insight of the noise sources as well as the transport mechanisms occurring within the engines is necessary. For this purpose, the present work investigates the propagation of rotor asynchronously induced sound fields within a low pressure turbine.

The internal sound fields result from a manifold superposition of rotating, standing and partially standing mode patterns. The latter mainly occurs in rotor asynchronously induced sound fields. Thus, this work presents in a first step the general physical mechanisms of modal sound propagation within ducts for superimposed flow and swirl conditions. The focus is on the analytical description of standing, partially standing, and multiple superimposed azimuthal modes. Theoretical investigation is performed to determine the propagation velocity of superimposed mode fields, which is no longer given by the classical phase and group velocity approaches. It can be understood more as a weighted propagation velocity. Based on that, analysis techniques are developed to decompose experimentally measured sound fields to analyze its modal components. Particular regard is taken to the modal phase relations and a so called part-mode-ratio. A new hybrid analysis approach is presented, which uses both the experimental and analytical data for the reconstruction of the internal sound field.

The core is an analytical propagation model, which is employed to determine the sound propagation within (annular) ducts of arbitrarily superimposed modes considering mean flow and swirl. It is demonstrated, that complex sound fields can be simulated and reconstructed based on few sampling points of experimentally gained measurement data by this hybrid approach. The transport model as well as the analysis methods are verified by means of experimental wind tunnel test results before applying them to aero acoustic studies in a turbine test rig. These experiments are used to intensively investigate the propagation behavior of rotor-asynchronously induced sound fields through a single and two-stage low pressure turbine. A characteristic behavior of sound transmission is observed, which depends on the excitation frequency. It is found, that engine speed effects are only of minor importance. The achieved results are presented and the conclusions are drawn.

Danksagung

Wenn der münsteraner Jurist Professor Thomas Hoeren Widmungen in Dissertationen als „dümmliche Landplagen“ bezeichnet, in denen etwa dem Opa, der Schwiegermutter oder gar dem eigenen Hund bescheinigt wird, dass die Arbeit ohne deren Zutun „nicht hätte realisiert werden können“, muss man ihm ehrlich gesagt beipflichten (Hoeren 2011). Selbst ich habe diese Arbeit ohne das Mitwirken eines Hundes realisieren können und auch mein vor über 47 Jahren verstorbener Großvater hat mir nicht sonderlich geholfen. Dennoch ist es mir ein Anliegen einige einleitende Worte zu Beginn der Dissertationsschrift zu verlieren und meinen Dank auszusprechen.

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik der Leibniz Universität Hannover. Dem Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. Seume danke ich sehr herzlich für unser vertrauensvolles Verhältnis und die großen Freiheiten, die mir gewährt wurden. Sie haben mich immer gefördert und ich habe sehr viel von Ihnen gelernt und durch Sie kennengelernt. Sie gaben mir die Möglichkeit, das spannende und zukunftsweisende Thema der Akustik in Hannover voranzubringen, was ich sehr gern und mit viel Herzblut getan habe.

Ganz besonders habe ich mich über die Bereitschaft von Herrn Prof. Dr.-Ing. Delfs gefreut, das Koreferat zu übernehmen. Sie haben sich sehr viel Zeit genommen das Manuskript durchzuarbeiten und ihre hilfreichen Anregungen haben die Qualität der Arbeit definitiv gesteigert. Vielen herzlichen Dank dafür. Darüber hinaus danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Rissing für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Wesentliche Anteile dieser Arbeit sind im Rahmen des Forschungsverbunds *Bürgernahe Flugzeug* - einer Forschungs Kooperation der TU Braunschweig, der Leibniz Universität Hannover und des DLR - erarbeitet worden. Für die Finanzierung des Forschungsprojekts AP 1300 bedanke ich mich.

Die harten Verhandlungen mit Ihnen Herr Dr. Runkel über die „kontinuierlichen Zusatzfinanzierungen“ der Projekte haben zwar nicht immer Spaß gemacht, doch Sie haben mich bei deren Realisierung der Experimente riesig unterstützt und letztendlich den Weg für die am Ende doch sehr teuren Versuche geebnet.

Der Prüfstands Aufbau mitsamt seiner notwendigen Vorarbeiten sowie die Durchführung der Versuche wäre ohne die Unterstützung meiner Studenten und Studentinnen nicht möglich gewesen. Ihr habt mich teilweise mehrere Jahre treu begleitet und mit Euren Studien- und Diplomarbeiten wertvolle Beiträge geleistet. Euch gilt ein ausgesprochen großer Dank!

Während meiner Zeit am Institut gab es einen Ort, wo ich mich am liebsten aufgehalten habe - in den Werkstätten und im Prüffeld. Nicht nur, weil es dort immer so schön nach Öl gerochen hat, unerträglich laut war und man sich die Hände richtig dreckig machen konnte - nein es waren die Kollegen des technischen Personals. Für Eure Unterstützung und die

hervorragende Arbeit, insbesondere während des Prüfstandsaufbaus und der Versuchskampagnen, danke ich Euch von ganzem Herzen.

Meine Korrekturleser Mandanna Hurfar, Benedikt Ernst und Oliver Freund haben wirklich gute Arbeit geleistet und mir viele hilfreiche Hinweise und Verbesserungsvorschläge gegeben. Ein großes Danke!

Mein ganz besonderer Dank gilt den Pionieren und Pionierinnen der Aeroakustik und Aeroelastik Gruppe - insbesondere meinen Akustikkollegen Juan David Laguna, Mandanna Hurfar, Sina Schwert (geb. Witthaus) und Christian Keller. Wir haben oft zusammengesessen bis uns die Köpfe rauchten, haben uns ausgetauscht und viele Hürden gemeinsam genommen. Es war so unglaublich wichtig Euch an meiner Seite zu wissen. Christopher Meinzer danke ich für die nahtlose und unkomplizierte Übernahme der Gruppenleitertätigkeiten.

Mit großer Freude denke ich an die schöne Zeit am Institut zurück, den freien Geist der herrschte, die Aufbruchstimmung und das freundschaftliche Zusammenarbeiten. Ich glaube wir haben in den letzten Jahren viel verändert und bewegt und dabei eine Menge Spaß gehabt. Meinen engsten Mitstreitern und Freunden Jens Aschenbruck, Benedikt Ernst, Marc Biester, Oliver Freund, Alejandro Gomez, Michael Henke, Florian Herbst, Jasper Kammeyer, Oliver Kleppa, Marcus Kuschel, Christoph Lietmeyer, Arman Mohseni, Torsten Sextro und Jan Siemann danke ich dafür ganz besonders.

Meiner Familie danke ich vor allem für eins - für das nie aufhörende und aufrichtige Interesse, an dem was ich gemacht habe. Zu wissen, dass sich jemand tatsächlich für die doch oftmals unverständlichen und nicht immer ganz zugänglichen Dinge interessiert hat, ist von unschätzbarem Wert.

Meine liebe Birte, Du hast in der letzten Zeit wahrscheinlich am meisten zurückstecken müssen. Deine Geduld, Deine Liebe und Deine schier unendliche Rücksichtnahme haben mir das Arbeiten an dieser Dissertation sehr vereinfacht. Das ist mir sehr bewusst. Von ganzem Herzen mein Dank dafür. Nicht zuletzt hast Du mir während dieser Zeit das wohl größte Geschenk auf Erden bereitet - unseren kleinen Paul!

Hannover, im April 2015

Michael Bartelt

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	xv
Formelzeichen	xvii
1 Einleitung	1
1.1 Fluglärm - ein gesellschaftspolitisches Problem	1
1.2 Technologische Herausforderungen	2
1.3 Stand der Forschung	4
1.4 Motivation und Struktur der Arbeit	8
2 Prüfstände und Messtechnik	11
2.1 Aeroakustischer Windkanal (AWT)	11
2.2 Luftturbine (LT)	14
2.3 Schallgenerator (SG)	17
2.3.1 Aufbau des Schallgenerators	17
2.3.2 Erzeugung der Modenstrukturen	18
2.4 Akustische Messtechnik	21
3 Akustische Wellengleichung und deren Lösung für Rohrleitungen	23
3.1 Konvektive Wellengleichung in Zylinderkoordinaten	23
3.2 Lösung der Wellengleichungen	26
3.2.1 Lösung für Ringkreiskanäle	26
3.2.2 Approximationslösung für Ringkanäle bei Drallströmung	29
4 Theoretische Betrachtungen zum Ausbreitungsverhalten akustischer Moden in Rohrleitungen	35
4.1 Spinning Modes	36
4.1.1 Cut-On Verhalten	38
4.1.2 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	39
4.1.3 Ausbreitungswinkel von Spinning Modes	42
4.1.4 Einfluss der Strömung auf die Ausbreitungseigenschaften und das Cut-On Verhalten	47
4.1.5 Frequenzeinfluss von akustischen Moden	50
4.2 Stehende Azimutalmoden	52
5 Analytisches Schalltransportmodell	61
5.1 Idee und Ziel	61

5.2	Literaturüberblick zu Schalltransmissions- und Schalltransportmodellen . .	62
5.3	Aufbau des Transportmodells	63
6	Analyseverfahren	67
6.1	Spektralanalyse und Filterung	69
6.1.1	Bestimmung der Frequenzspektren	69
6.1.2	Bestimmung der Leistungsspektren	70
6.1.3	Filter	73
6.2	Azimutale Modalanalyse	76
6.3	Phasenanalyse	78
6.3.1	Globaler Phasenversatz	79
6.3.2	Modaler Phasenversatz	81
6.4	Dekompositionsverfahren	85
6.4.1	SVD zur Untersuchung der Zeitreihen	86
6.4.2	SVD zur Analyse der Modenamplituden	89
6.5	Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten	93
6.6	Verfahren zur Synchronisation und Rekonstruktion der Messsignale	96
6.6.1	Rotorbasierte Synchronisation	97
6.6.2	Korrelationsbasierte Synchronisation	98
7	Vorversuche und experimentelle Validierung	103
7.1	Strategie der experimentellen Validierung	103
7.2	Validierung der azimutalen Schallfeldstruktur	106
7.3	Validierung der axialen Schallfeldausbreitung	111
7.4	Validierung der radialen Schallfeldstruktur	113
7.4.1	Radiale Schallfeldstruktur ohne Strömungsüberlagerung	113
7.4.2	Radiale Schallfeldstruktur bei Strömungsüberlagerung	114
8	Turbinenversuche	117
8.1	Schalltransportuntersuchungen in der Versuchsturbine	117
8.1.1	Spektralanalyse der Turbinenschallfelder	118
8.1.2	Schalltransport über die Stufe - Stufentransmission	121
8.1.3	Modenanalyse der angeregten Schallfelder	124
9	Schlussfolgerungen und Ausblick	133
9.1	Schlussfolgerungen	133
9.2	Ausblick	136
A	Anhang Prüfstände	137
A.1	Anhang AWT	137
A.2	Anhang Luftturbine	141
A.2.1	Kennfelder der Turbinenversuche	141
A.2.2	Druck- und Temperaturprofil im Turbinenzulauf	142
A.2.3	Bestimmung des Strömungsfelds	143
B	Anhang mathematische Erläuterungen und Herleitungen	145

B.1	Ausbreitungsgleichung für p' und u'_i bei Strömungsüberlagerung	145
B.2	Konvektive Wellengleichungen in Zylinderkoordinaten	151
B.3	Lösung der konvektiven Wellengleichungen in Zylinderkoordinaten	153
B.4	Erläuterungen zur radialen Ausbreitungsgleichung für ein akustisches Potential	158
B.5	Beweis der radialen Wellenzahlen	164
B.6	Zylinderfunktionen	166
B.7	Herleitung der Gruppengeschwindigkeit	168
B.8	Herleitung der Gruppen- und Phasengeschwindigkeit unter Strömungseinfluss	170
B.9	Herleitung des Verzerrungswinkels	172
C	Anhang Moden	173
C.1	Radiale Schallfeldausbreitung akustischer Moden	173
C.1.1	Untersuchung der Radialstruktur	173
C.1.2	Radiale Modenstrukturen bei Überlagerung	178
C.2	Projektion der Modenwinkel	183
C.3	Dispersionsdiagramme	184
C.4	Ausbreitungsgeschwindigkeit überlagerter Modenfelder	187
D	Anhang Analyseverfahren	189
D.1	Signalfilterung bei Strömungsüberlagerung	189
D.2	Zusatz Phasenanalyse	191
D.3	Datenqualifizierung für das Synchronisationsverfahren	193
E	Anhang Experimente	195
E.1	Übersicht Validierungsstrategie	195
E.2	Validierungsmessungen AWT	197
E.2.1	Validierungsfall II.	197
E.2.2	Validierungsfall III.	202
E.3	Versuchsturbinenexperimente	207
E.3.1	Übersicht Betriebspunktparameter der Turbinenmessungen	207
E.3.2	LT1: $\dot{m} = 4 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	208
E.3.3	LT1: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	210
E.3.4	LT1: $\dot{m} = 6 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	212
E.3.5	LT1: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	214
E.3.6	LT1: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 5000 \text{ min}^{-1}$	216
E.3.7	LT1: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$	218
E.3.8	LT1: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$	220
	Literaturverzeichnis	223
	Wissenschaftlicher Werdegang	239

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwicklung der Schallemissionen der Boeing 747 Familie. Bewertungsgröße: Kumulierte Marge als Differenz von tatsächlich gemessenen Schallpegeln und vorgeschriebenen Maximalpegeln für die Modi Anflug, Überflug und Vollast. Triebwerksmodelle: $-\diamond-$ Pratt & Whitney; $-\circ-$ General Electric; $-\square-$ Rolls-Royce	3
2.1	Aufbau des aeroakustischen Windkanals (AWT)	13
2.2	Messstrecke des AWT und Übersicht über die fest installierten Messpositionen.	13
2.3	Aufbau der Luftturbine und der Versuchsinstrumentierung. (S = Stator; R = Rotor)	14
2.4	Messstellen in der Luftturbine.	16
2.5	Aufbau des Schallgenerators (SG)	18
2.6	(oben) Erzeugte Modenstrukturen bei Überlagerung stehender Wellen mit definierten Phasenversätzen. (unten) Korrespondierende Real- und Imaginärteile der azimuthalen Schalldruckverteilung für den 10. Zeitschritt bei einer Anregungsfrequenz von 100 Hz. In Bezug auf Gl.(2.1) entspricht (A) $j = 1$, (B) $j = 2$, (C) $j = 3$ und (D) $j = 4$	19
2.7	Experimentell bestimmte Schalldruckverläufe in der Messstrecke des AWT bei Anregung verschiedener Azimutalmoden. (links) Grundmode $mn_{[0;0]}$; (Mitte) Stehende Mode $mn_{[2;0]}$; (rechts) Spinning Mode $mn_{[3;0]}$	21
3.1	Vergleich verschiedener Approximationslösungen zur Bestimmung der axialen Wellenzahlen bei Hauptströmungs- und Drallüberlagerung für einen Anulus ($r_a = 1$ m , $r_i = 0,4$ m) und $k = 10$ m ⁻¹ , $m = 2$, $n = 0...10$. (oben) Referenz keine Strömung, kein Drall - Vergleich mit analytischer Lösung. (Mitte) $Ma_x = 0,3$ und $Ma_\theta = 0,1$. (unten) $Ma_x = 0,3$ und $Ma_\theta = 0,5$	34
4.1	Schalldruckverteilung einer $mn_{[2;1]}$ Mode in einem Ringkreiskanal ($\sigma = 0,6$) für verschiedene Ausbreitungszustände.	37
4.2	Umfangsdruckverteilung für eine $mn_{[1;0]}$ Spinning Mode an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks. Die Normierung erfolgt auf den Betrag der Maximalamplitude	37
4.3	Umfangsdruckverteilung für drei überlagerte Moden $mn_{[1;0]}$, $mn_{[2;1]}$, $mn_{[3;0]}$ mit jeweils gleicher Amplitude und gleicher Frequenz ($kD = 18,13$). Schalldruckfeld an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks	38
4.4	Laufrichtung einer $mn_{[1;0]}$ Spinning Mode und Verlauf der Wellenfronten zu verschiedenen Zeitpunkten	40

4.5	Axialer Modenwinkel χ_x in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz kD für unterschiedliche Azimutalmoden. Vergleich der Bestimmungsverfahren als dreidimensionale Approximation nach Rice et al. (1979) (Referenz) und zweidimensionaler Projektion. Im Anhang C.4 ist zusätzlich eine vergrößerte Abbildung dargestellt.	42
4.6	Zusammenhang zwischen den Ausbreitungswinkeln und den Ausbreitungsgeschwindigkeiten einer einzelnen Mode. (links) ohne Strömungsüberlagerung, (rechts) mit axialer Strömungsüberlagerung	45
4.7	Zusammenhang zwischen den Ausbreitungswinkeln und den Ausbreitungsrichtungen für überlagerte Spinning Modes am Beispiel von $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Moden. Der rote und schwarze Pfeil entsprechen den Ausbreitungsrichtungen der Einzelmoden, während der grüne Pfeil der resultierenden Ausbreitungsrichtung des überlagerten Zustands entspricht.	47
4.8	Dispersionsdiagramm zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der axialen Wellenzahl von der Anregungsfrequenz bei Strömungsüberlagerung. Exemplarische Darstellung für $mn_{[2;0]}$. Eine vergrößerte Darstellung ist in Abb. C.8 zu finden	48
4.9	Abgewickeltes Schalldruckprofil entlang der Rohrwand für eine $mn_{[1;0]}$ Spinning Mode bei unterschiedlichen Hauptströmungsgeschwindigkeiten.	50
4.10	Abgewickeltes Schalldruckprofil entlang der Rohrwand für eine $mn_{[2;0]}$ Spinning Mode bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen kD	51
4.11	Stationäre Modenamplituden in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz kD für unterschiedliche Modenordnungen.	51
4.12	Experimentell in der Versuchsturbine bestimmte Schalldruckverteilung an ausgewählten Frequenzen des Spektrums. Aus der Überlagerung aller einzelnen Schallfelder ergibt sich schließlich das Gesamtschallfeld. Dessen Struktur ist in diesem Fall maßgeblich durch die stehende $mn_{[3;0]}$ Modenstruktur geprägt, die bei einer Frequenz von 750 Hz auftritt.	53
4.13	Umfangsdruckverteilung für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als stehende Welle in Umfangsrichtung an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks	54
4.14	Umfangsdruckverteilung für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als stehende Welle in axialer Richtung an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks	54
4.15	Umfangsdruckverteilung für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als partiell stehende Welle an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks	55
4.16	Ⓐ: Verlauf der normierten Wellenzahl $k_{x,\text{norm}}^\pm = (k_x^\pm - k_x^\pm _{\text{Ma}_x=0})/k_x^\pm _{\text{Ma}_x=0}$ bei einer Anregungsfrequenz von $kD=8,13$. Ⓑ: Verläufe des Proportionalitätsfaktors $q_{[mn]}^\pm$ für identische Randbedingungen. (rechts) Ausbreitung der Moden in positive x-Richtung. (links) Ausbreitung der Moden in negative x-Richtung	57
4.17	Ausgebildete Modenstruktur einer ursprünglich stehenden Umfangsmoden $mn_{[1;0]}$ unter dem Einfluss einer überlagerten Axialströmung (oben) und Drallströmung (unten)	58
4.18	Verzerrungswinkel	59

6.1	Übersicht über das Mess- und Analyseprinzip zur Bestimmung der azimuthalen Schallfeldstruktur	68
6.2	P_{SD} eines exemplarisch ausgewählten Signals der Luftturbinenmessungen (Referenz) im Vergleich zu P_{Welch} für verschiedene Fensterlängen L als Vielfache i der Referenzfensterlänge $L_{ref} = 512$ Samples.	73
6.3	Amplituden- und Phasengang eines Butterworth-Filters für verschiedene Durchlassbreite δf bei einer Eckfrequenz von 395 Hz. rot: $\delta f : \pm 5\text{Hz}$, blau: $\delta f : \pm 10\text{Hz}$, grün: $\delta f : \pm 20\text{Hz}$	74
6.4	(links) Frequenzspektrum für eine Schallfeldanregung bei $f = 395$ Hz im AWT unter Strömungseinfluss $\dot{m} = 9$ kg/s. Gezeigt sind die Spektren für das ungefilterte Signal als auch die Bandpass-gefilterten Spektren mit variierender Bandbreite δf eines Butterworth Filters. (rechts) Korrespondierende Azimutalmomen $mn_{[0...5;0]}$ bezogen auf die maximale Amplitude des ungefilterten Signals.	75
6.5	Zeitvariationen der modalen Amplituden für eine überlagerte Modenkombination $mn_{[0;0]}$, $mn_{[1;0]}$ (stehend, $\epsilon = 1$), $mn_{[2;0]}$ ($\epsilon = 0, 4$), $mn_{[3;0]}$ (spinning, $\epsilon = 0$). Die Berechnung erfolgt mit dem Transportmodell. Die Anregungsfrequenz beträgt $f_{Ex} = 2000$ Hz.	77
6.6	(links) Phasenversatzvektoren $\delta\phi_{t,i}(t)$ für eine $mn_{[1;0]}$ Mode mit verschiedenen Teilmodenverhältnissen ϵ und azimuthalen Phasenwinkeln ϕ_θ . (rechts) Korrespondierende Gradienten $d\delta\phi_{t,i}(t)/dt$	79
6.7	(links) Phasenversatzvektoren $\delta\phi_{t,i}(t)$ für verschiedene Modenkombinationen bei Überlagerung einer $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode. Überlagerung sowohl reiner Spinning Modes ($\epsilon = 0$) als auch stehender Moden ($\epsilon = 1$) überlagert. (rechts) Korrespondierende Gradienten $d\delta\phi_{t,i}(t)/dt$	81
6.8	Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden und der korrespondierenden Phasenversätze für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als Spinning Mode (oberer Block) und stehende Mode (unterer Block) bei unterschiedlichen Anregungsbedingungen.	83
6.9	Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden und der korrespondierenden Phasenversätze für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als partiell stehende Mode für unterschiedliche Teilmodenverhältnisse und Phasenwinkel.	84
6.10	Ortskurven der Singulärvektoren $\mathbf{V}$ (blau) und $\mathbf{U}$ (rot) für verschiedene Modenzustände und Modenüberlagerungen. Dabei wird eine Amplitudenvariation bzw. Variation des Teilmodenverhältnisses jeweils für eine Teilmode durchgeführt. Die Variationen sind anhand der Farbverläufe kenntlich gemacht.	88
6.11	Ortskurven einer $mn_{[1;0]}$ Mode. Die Variation der Teilmodenverhältnisse ist anhand der Farbverläufe kenntlich gemacht von schwarz ($\epsilon = 0$) nach grün ($\epsilon = 1$).	91
6.12	(links) Teilmodenverhältnis ϵ in Abhängigkeit von der Ellipsenfläche S_{El} für unterschiedliche Moden- und Ausbreitungszustände. (rechts) Normierte Ellipsenfläche $S_{El,norm}$	92

6.13	(links) Schallfeldstruktur in der x - θ -Ebene für eine überlagerte $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode und die mit dem Gradientenverfahren bestimmten Wellenfronten (grau). (rechts) Geometrische Beziehungen zur Bestimmung des zeitlichen Wellenfrontversatzes mit Hilfe dessen die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt wird. Wellenfronten zum Zeitpunkt t_0 in grau; Wellenfronten zum Zeitpunkt t_1 in Magenta.	95
6.14	Prinzip des Permutationsverfahrens zur Drehung der Schallfeldstruktur. (links) Originaler Datensatz der x - θ -Schalldruckverteilung am Referenzzeitpunkt t_0 . Unten sind die Verläufe der norm. Amplitude für eine azimutale Position für t_0 und t_1 aufgetragen, aus denen sich die Verschiebung berechnen lässt. (rechts) Identisches Vorgehen mit permutierten Datensatz.	96
6.15	Abweichung der BPF von der über alle Rotorumdrehungen und Messzyklen gemittelten BPF δ_{BPF} . Beispiel aus den Turbinenmessungen für $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	97
6.16	Darstellung der korrelationsbasierten Auswertung eines exemplarisch ausgewählten Druck-Zeitverlaufs des Messintervalls i des Segments B	99
6.17	Vergleich der Schalldruckstrukturen des Segments B für die Messzyklen der Referenz, Nr. 6, Nr. 14 und Nr. 33. (oben) Zeitliche Verteilung des Referenzschallfeldes. (Mitte) Verläufe der unsynchronisierten Schalldruckverteilungen der Messzyklen Nr. 6, Nr. 14 und Nr. 33. (unten) Mit Hilfe der Korrelationsmethoden zeitlich synchronisierte Verläufe der Schalldruckverteilungen	101
6.18	(oben) Vergleich des zeitlichen Verlaufs der azimutalen Schallfeldstruktur in Segment C . (links) Synchronisierte Signale, (rechts) nicht-synchronisierte Signale. (unten) Resultierende Modenordnungen - zeitlich gemittelt.	102
7.1	Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden. Zu erkennen ist die dominante $mn_{[2;0]}$ Mode.	108
7.2	Vergleich der mit dem Schalltransportmodell (STM) berechneten und den experimentell bestimmten Modenparametern. (A)(oben) Zeitliche Phasenverläufe und Amplitudenverläufe (unten) der komplexen Modenamplituden. (B) Vergleich der globalen Phasenbeziehungen. (C) Vergleich der globalen Ortskurven.	109
7.3	Zeitverläufe der Umfangsdruckverteilung des überlagerten Modenfelds und der Envelope. Vergleich von Experiment und Berechnung.	110
7.4	Mit dem Schalltransportmodell berechnetes Schallfeld in azimutaler und axialer Richtung an der Kanalwand zu einem Zeitpunkt.	111
7.5	Axiale Schalldruckverläufe in der Messstrecke des AWT. Vergleich der berechneten und experimentell bestimmten Schalldrücke.	112
7.6	Normierte Amplituden A/A_{max} der experimentell gemessenen und der berechneten radialen Schalldruckverteilungen für unterschiedliche Modenformen.	114
7.7	Vergleich von experimentellen und berechneten radialen Schalldruckverteilung für $n = 0$ und $m = 0, 2, 3, 4$ bei $\sigma = 0$ für den strömungsfreien und strömungsüberlagerten Fall.	115

8.1	(oben) Spektren in den Segmenten <i>B</i> und <i>C</i> für einen Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$, $f_{\text{Ex}} = 750 \text{ Hz}$. In grau: Schwankungsbereiche über die einzelnen Messzyklen. In schwarz: Korrespondierende Mittelwerte. (unten) Spektren für jedes Mikrofon bzw. jede Umfangsposition bei gleichem Betriebspunkt.	118
8.2	Spektren der drei Messebenen (Segment <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i>) für zwei unterschiedliche Betriebspunkte. (links) Betriebspunkt 1: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$, $f_{\text{Ex}} = 1000 \text{ Hz}$. (rechts) Betriebspunkt 2: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$, $f_{\text{Ex}} = 2000 \text{ Hz}$	119
8.3	Zusammenstellung der Transmissionsverluste für unterschiedliche Betriebspunkte der einstufigen (links) und zweistufigen (rechts) Turbinenkonfiguration.	122
8.4	Übersicht der Ergebnisse der Cut-On Analyse für den Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$. (links) Ausbreitungsfähige Moden in Abhängigkeit von der Frequenz für die Segmente <i>A</i> , <i>B</i> und <i>C</i> . (rechts) Korrespondierende Dispersionsdiagramme.	123
8.5	Vergleich der Amplitudendifferenzen einzelner Azimutalmoden m bei verschiedenen Anregungszuständen des Betriebspunktes $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$. (links) Normierung der Amplitudendifferenz auf den Betrag der maximalen Amplitudendifferenz separat für jede einzelne Anregungsfrequenz. (rechts) Normierung der Amplitudendifferenz auf den Betrag der höchsten Amplitudendifferenz aller Anregungsfrequenzen.	125
8.6	Ergebnisse der Wellenanalyse für den betrachteten Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$ für Segment <i>B</i> (vor Stufe) und Segment <i>C</i> (hinter Stufe). Übersicht über die komplexen Modenamplituden.	125
8.7	Ergebnisse der Wellenanalyse für den betrachteten Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$ für Segment <i>B</i> (vor Stufe) und Segment <i>C</i> (hinter Stufe). (A) Vergleich der globalen Phasenlagen und deren Gradienten. (B) Übersicht über die Ortskurven der einzelnen Moden des überlagerten Feldes. (C) Übersicht über die modalen Phasenbeziehungen für ausgewählte Moden.	126
8.8	(oben) Berechnete Schallfeldausbreitung in axialer Richtung für Segment <i>B</i> (vor Stufe) und Segment <i>C</i> (hinter Stufe) zu einem Zeitpunkt für $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$. (unten) Resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeiten des überlagerten Modenfeldes.	127
8.9	Übersicht der Ergebnisse der Wellenanalyse für den betrachteten Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 680 \text{ Hz}$ für Segment <i>B</i> (vor Stufe) und Segment <i>C</i> (hinter Stufe). Übersicht über die komplexen Modenamplituden.	128
8.10	Übersicht der Ergebnisse der Wellenanalyse für den betrachteten Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 680 \text{ Hz}$ für Segment <i>B</i> (vor Stufe) und Segment <i>C</i> (hinter Stufe). (A) Vergleich der globalen Phasenlagen und deren Gradienten. (B) Übersicht über die Ortskurven der einzelnen Moden des überlagerten Feldes. (C) Übersicht über die modalen Phasenbeziehungen für ausgewählte Moden.	129

8.11	Vergleich der Moden in Segment B und C für zwei unterschiedliche Betriebspunkte $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ und $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 7000 \text{ min}^{-1}$ bei einer Anregungsfrequenz von $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$. (oben) Ortskurven. (unten) Modale Phasenbeziehungen der $m_{[0;0]}$ Mode.	130
8.12	Qualifizierung der Schallfeldberechnung für Segment B (vor der Stufe) und Segment C (hinter der Stufe) anhand der zeitabhängigen Envelopen (links) und den Schalldruckverläufen $p'(\theta, t)$. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe des Schalltransportmodells (STM) unter Verwendung der experimentell ermittelten Randbedingungen bei dem Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$	132
A.1	(rechts) Aufbau der PIV-Messungen mit Kameraendoskopen und offener Laserführung. (links) Ergebnisse der PIV-Messungen für verschiedene Betriebszustände	138
A.2	(links) Verläufe der Mach-Zahlen über dem Rohrquerschnitt für verschiedene Betriebspunkte. (rechts) Verläufe des isotropen Turbulenzgrads über dem Rohrquerschnitt für verschiedene Betriebspunkte	139
A.3	Frequenzspektrum des Reflexionsfaktors für den reflektionsarmen Abschluss	139
A.4	Kennfeld der einstufigen (links) und zweistufigen (rechts) Luftturbinenkonfiguration	141
A.5	Vermessene Profile des Totaldrucks und der Totaltemperatur über der Kanalhöhe des Turbinenzulaufs. Hier exemplarisch: $\dot{m} = 6,4 \text{ kg/s}$ $n = 6400 \text{ min}^{-1}$, 2-stufige Konfiguration	142
A.6	Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine für den Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	144
B.1	Zylinderfunktionen der Ordnung $m = 0 \dots 10$. (oben, links) Verlauf der Besselfunktionen 1. Art J_m . (oben, rechts) Verlauf der Neumannfunktionen 1. Art Y_m . (unten, links) Verlauf der ersten Ableitung der Besselfunktionen 1. Art. (unten, rechts) Verlauf der ersten Ableitung der Neumannfunktionen 1. Art. Die Schwarz-Weiß-Verläufe entsprechen der Ordnung m . Von dunkel ($m = 0$) nach hell	166
B.2	Verläufe der Zylinderfunktionen. (oben) Verläufe der Eigenwerte μ_{mn} und Q_{mn} als Abhängige der azimuthalen Modenordnung für verschiedene Nabenverhältnisse $\sigma = 0 \dots 0.9$ und verschiedene Radialmodenordnungen n . Die Schwarz-Weiß-Verläufe entsprechen der Ordnung m . Von dunkel ($m = 0$) nach hell	167
C.1	Modale Schalldruckverteilung einer $mn_{[2;2]}$ Mode in einem Kreis- und Ringkreiskanal ($\sigma = 0,5$) bei einer Anregung von $kD = 27,5$	174
C.2	Radiale Schalldruckverteilung der Radialmodenordnung $n = 3$ für $m = 0 \dots 20$ und verschiedenen Nabenverhältnisse. Schwarz-Weiß-Verläufe entsprechen der azimuthalen Modenordnung (von dunkel $m = 0$ nach hell $m = 20$).	175

C.3	(links) Verläufe des radialen Schalldruckprofils für verschiedene Azimutalmodenordnungen $m = 0 \dots 20$ bei $n = 3$ und $\sigma = 0$. (rechts) Verläufe des radialen Schallprofils für verschiedene Azimutalmodenordnungen $m = 0 \dots 20$ bei $n = 3$ und $\sigma = 0,6$. o = Knotenlinien * = Maxima der Amplituden	176
C.4	Verläufe der Bestimmungsgleichung Ψ als Abhängige der Eigenwerte μ_{mn} für verschiedene Azimutalmodenordnung $m = 0 \dots 10$ und $n = 5$. Rot: Nebenverhältnis $\sigma = 0,6$ bzw. blau: $\sigma = 0,8$. Zusätzlich sind die Variationen s der entsprechenden Nullstellen eingetragen.	177
C.5	Radiale Schalldruckverteilung der Radialmodenordnung $n = 0$ für variierendes m . (links) $\sigma = 0$, (rechts) $\sigma = 0,6$. Schwarz-Weiß-Verläufe entsprechen der azimutalen Modenordnung (von dunkel $m = 0$ nach hell $m = 20$).	179
C.6	Beeinflussung der radialen Modenstruktur bei Überlagerung niedriger Moden.	182
C.7	Axialer Modenwinkel χ_x in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz kD für unterschiedliche Azimutalmoden. Vergleich der Bestimmungsverfahren als dreidimensionale Approximation nach Rice et al. (1979) (Referenz) und der zweidimensionalen Projektion. Vergrößerte Darstellung der Abb. 4.5	183
C.8	Dispersionsdiagramm zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der axialen Wellenzahl von der Anregungsfrequenz bei Strömungsüberlagerung. Exemplarische Darstellung für $mn_{[2,0]}$	184
C.9	Dispersionsdiagramme zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der axialen Wellenzahl von der Anregungsfrequenz bei Strömungs- und Drallüberlagerung. Exemplarische Darstellung für eine $mn_{[2,0]}$ bei unterschiedlichen Nebenverhältnissen $\sigma = 0$ (Kreiskanal) und $\sigma = 0.635$ (Ringkeiskanal der Luftturbine)	185
C.10	Dispersionsdiagramme für variierende Umfangsmodenordnung m bei $n = 0$ und $\sigma = 0.635$ (Ringkeiskanal Luftturbine). Die Diagramme verdeutlichen den Einfluss der Strömungseigenschaften auf das modale Ausbreitungsverhalten	186
C.11	Ausbreitungsgeschwindigkeiten unterschiedlich überlagerter Spinning Modes am Beispiel von $mn_{[1,0]}$ und $mn_{[2,0]}$ Moden. Der rote und schwarze Pfeil entsprechen den Geschwindigkeitsvektoren der Einzelmoden, während der grüne Pfeil dem resultierenden Geschwindigkeitsvektor des überlagerten Zustands entspricht. Neben den simulierten bzw. geometrisch ermittelten Gesamtgeschwindigkeiten sind auch die linear superpositionierten Geschwindigkeiten dargestellt.	187
D.1	Experimentell gemessene radiale Schalldruckverteilung für den strömungsfreien und strömungsüberlagerten ($Ma_x = 0,11$) Fall bei Anregung einer $mn_{[2,0]}$ Mode. Abstimmung eines Bandpass-Filters auf die jeweilige Anregungsfrequenz. (oben) Schwingungsamplituden im zeitlichen Verlauf. (unten) radiale Schalldruckverteilung für RMS-Werte (—o—) und Maximalwerte (—*—).	189
D.2	Zeitliche Verläufe der komplexen Amplituden für eine $mn_{[1,0]}$ Mode bei unterschiedlichen Amplituden der Teilmoden (Teilmodenverhältnis ϵ) und variierendem azimutalen Phasenwinkel ϕ_θ . Schwarz: $ \mathbf{A} $; blau: $\Re\{\mathbf{A}\}$; magenta: $\Im\{\mathbf{A}\}$	191

D.3	Zu den in Abb. D.2 gezeigten zeitlichen Verläufen der komplexen Amplitude korrespondierende Phasenversätze ϕ_θ der Wellenkomponenten zueinander. Schwarz: ϕ_θ zwischen $\Im\{\mathbf{A}\}$ und $\Re\{\mathbf{A}\}$; blau: ϕ_θ zwischen $ \mathbf{A} $ und $\Re\{\mathbf{A}\}$; magenta: ϕ_θ zwischen $ \mathbf{A} $ und $\Im\{\mathbf{A}\}$	192
D.4	Prinzip des Qualifizierungsverfahrens der Messreihen mit Hilfe der Korrelationskoeffizienten. (oben) Korrelationskoeffizienten für das Gesamtsignal (links) und das auf die Anregungsfrequenz von $f = 680$ Hz gefilterte Signal (rechts) über die Zeitintervalle. (unten) Korrespondierende Mittelwerte die zur Selektion der Messwerte herangezogen werden.	194
E.1	Schematischer Ablauf der Schalltransportmodell-Validierung im AWT . . .	196
E.2	Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden (dominante $mn_{[2;0]}$ Mode) .	198
E.3	Vergleich von Experiment und Berechnung. (A) zeitliche Phasenverläufe (oben) und Amplitudenverläufe (unten) der komplexen Modenamplituden für die $mn_{[0;0]}$, $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode. (B) Vergleich der globalen Phasenbeziehungen. (C) Vergleich der globalen Ortskurven	199
E.4	Zeitverläufe der Umfangsdruckverteilung und Bestimmung der Envelope. Vergleich von Experiment und Berechnung	200
E.5	Vergleich der gemessenen und berechneten Schalldruckverläufe $p'(\theta, t)$ in azimuthaler Richtung an der Kanalwand.	201
E.6	Mit dem Schalltransportmodell berechnetes Schallfeld in azimuthaler und axialer Richtung an der Kanalwand an einem Zeitpunkt t	201
E.7	Vergleich von Experiment und Berechnung. Gegenüberstellung der zeitlichen Verläufe der komplexen Amplituden und Phasenversätze für die $mn_{[0;0]}$ und die $mn_{[1;0]}$ Mode. (Kurven liegen in allen Fällen übereinander)	203
E.8	Vergleich von Experiment und Berechnung. Gegenüberstellung der zeitlichen Verläufe der komplexen Amplituden und Phasenversätze für die $mn_{[2;0]}$ und die $mn_{[3;0]}$ Mode. (Kurven liegen in allen Fällen übereinander)	204
E.9	Vergleich von Experiment und Berechnung. (A) globale Phasenbeziehungen. (B) globale Ortskurven. (C) Zeitverläufe der Umfangsdruckverteilung und Bestimmung der Envelope	205
E.10	Vergleich der zeitlichen Verläufe der azimuthalen Schalldrücke in der Messebene.	206
E.11	Mit dem Schalltransportmodell berechnetes Schallfeld in azimuthaler und axialer Ausbreitungsrichtung an der Kanalwand zu einem Zeitpunkt t	206
E.12	Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 4$ kg/s , $n = 3500$ min ⁻¹	208
E.13	Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 4$ kg/s , $n = 3500$ min ⁻¹	208
E.14	Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 4$ kg/s , $n = 3500$ min ⁻¹	209
E.15	Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 5$ kg/s , $n = 3500$ min ⁻¹	210
E.16	Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 5$ kg/s , $n = 3500$ min ⁻¹	210

E.17 Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	211
E.18 Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 6 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	212
E.19 Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 6 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	212
E.20 Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 6 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	213
E.21 Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	214
E.22 Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	214
E.23 Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$	215
E.24 Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 5000 \text{ min}^{-1}$	216
E.25 Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 5000 \text{ min}^{-1}$	216
E.26 Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 5000 \text{ min}^{-1}$	217
E.27 Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$	218
E.28 Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$	218
E.29 Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$	219
E.30 Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$	220
E.31 Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$	220
E.32 Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$	221

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

2.1	Prüfstandsparameter des AWT für Maximallastbetrieb	12
2.2	Prüfstandsparameter der Lufturbine für die ein- und zweistufige Konfiguration im Nennlastpunkt.	16
3.1	Koeffizienten der verschiedenen Approximationsmodelle	32
5.1	Übersicht über die wichtigsten Eingabeparamter des Transportmodells, die mit Hilfe der Analyseverfahren aus den experimentellen Daten gewonnen werden.	64
6.1	Koeffizienten für das Regeessionspolynom der Gl.(6.29)	92
7.1	Übersicht über die charakteristischen Schallfeldparameter. <i>TM</i> : Eingabevariable für Transportmodell; <i>VT</i> : Validierungsvariable	104
7.2	Übersicht über die verwendeten Parameter des Schalltransportmodells. . .	107
7.3	Übersicht über die mit Hilfe der Analyseverfahren ermittelten modalen Ausbreitungsparameter.	107
E.1	Übersicht über die modalen Ausbreitungsparameter	197
E.2	Übersicht über die modalen Ausbreitungsparameter	202

Tabellenverzeichnis

Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung	Definition
A	m^2	Fläche	
A	Pa	Schalldruckamplitude	S. 89
$\mathbf{A}$	Pa	Matrix der Schalldruckamplituden	
AKF	—	Autokorrelationsfunktion	Gl.(6.32)
a	m/s	Schallgeschwindigkeit	
B	—	Anzahl Rotorscheaufeln	
C	—	Fourierkoeffizient	Gl.(6.2)
c_{gr}	m/s	Gruppengeschwindigkeit	Gl.(4.6)
c_{ph}	m/s	Phasengeschwindigkeit	Gl.(4.7)
$\mathbf{c}_{\text{ph}}$	m/s	Vektor Phasengeschwindigkeit	
$c_{x,r,\theta}$	m/s	Komponente der Absolutgeschwindigkeit in Axial-, Radial- und Umfangsrichtung	Gl.(A.4)
$\mathbf{D}$	—	Datenmatrix	Gl.(6.16)
D	m	Durchmesser	
E	J	Schallenergie	
e	J/kg	spezifische innere Energie	
e_i	—	Einheitsvektor	
f	$1/\text{s} = \text{Hz}$	Frequenz	
f_{BPF}	$1/\text{s} = \text{Hz}$	Blattwechselfrequenz	
f_{R}	$1/\text{s} = \text{Hz}$	Rotordrehfrequenz	
$\mathbf{G}$	—	Gradientenmatrix	Gl.(6.31)
H	m	Kanalhöhe	
He	—	Helmholtz-Zahl	$L/\lambda = kL$
h	—	Index der harmonischen Ordnung	
h	Js	Plancksche Wirkungsquantum	
I	W/m^2	Schallintensität	
J_m	—	Bessel-Funktion m-ter Ordnung	
KKF	—	Kreuzkorrelationsfunktion	Gl.(6.32)
k	m^2/s^2	spezifische turbulente kinetische Energie	

Formel

k	$1/\text{m}$	Wellenzahl	$\omega/a = 2\pi/\lambda$
k_{Bl}	$1/\text{m}$	Blockierwellenzahl	Gl.(4.22)
k_i	$1/\text{m}$	Wellenzahlvektor	
$\mathbf{k}$	$1/\text{m}$	Wellenzahlvektor	
k_x	$1/\text{m}$	axiale Wellenzahl	Gl.(3.22)
k_r	$1/\text{m}$	radiale Wellenzahl	S. 27
k_θ	$1/\text{m}$	azimutale Wellenzahl	S. 42
L	m	charakteristische Länge	
L_p	dB	Schalldruckpegel	
Ma	—	Mach-Zahl	u/a
$\text{Ma}_{x,r,\theta}$	—	Mach-Zahl in Axial-, Radial- und Umfangsrichtung	
m	—	azimutale Modenordnung	
$\dot{m}$	kg/s	Massenstrom	
n	$1/\text{s}$	Drehzahl	
n	—	radiale Modenordnung	
$\vec{n}$	—	Normalenvektor	
P_{SD}	dB	Leistungsspektraldichte	Gl.(6.7)
P_{Welch}	dB	Leistungsspektraldichte nach Welch	Gl.(6.10)
P_{ij}	N/m^2	Reibspannungstensor	
p	Pa	Druck	
p_{stat}	Pa	statischer Druck	
p_{tot}	Pa	Totaldruck	
p'	Pa	Schalldruck	
$\mathbf{Q}$	—	Eigenvektor	Gl.(6.23)
Q_{mn}	—	Amplitudenverhältnis der Zylinderfunktionen	S. 174
q	—	Proportionalitätsfaktor	Gl.(4.28)
R	—	Korrelationskoeffizient	Gl.(D.1)
R	J/kgK	spezifische Gaskonstante	
Re	—	Reynolds-Zahl	$Ul\rho/\mu$
r	m	Radius	
r_a	m	Außenradius, Gehäuseradius	
r_i	m	Innenradius, Nabenradius	
r	—	Reflexionsgrad	
r, θ, x	m	Zylinderkoordinaten	
r_t	—	Autokorrelationsfunktion AKF	Gl.(6.6)
$\mathbf{S}$	—	Eigenwertmatrix	Gl.(6.23)
$S_{\text{El,norm}}$	—	norm. Ellipsenfläche	Gl.(6.28)
S_{xx}	Watt	Schallleistung	Gl.(6.5)

S	J/K	Entropie	
s	J/kgK	spezifische Entropie	
Str	—	Strouhal-Zahl	fl/u
T	s	Zeitintervall	
T	K	statische Temperatur	
T_{tot}	K	totale Temperatur	
t	s	Zeit	
$\mathbf{U}$	—	komplexer Singulärvektor	Gl.(6.16)
U	m/s	Betrag der Strömungsgeschwindigkeit	
u_i	m/s	Geschwindigkeitsvektor	
u'_i	m/s	Schallschnellevektor	
V	—	Anzahl Statorschaufeln	
V	m ³	Volumen	
$\mathbf{V}$	—	komplexer Singulärvektor	Gl.(6.16)
w	m/s	Relativgeschwindigkeit	
		Axial-, Radial- und Umfangsrichtung	
x_i	m	Vektor der kartesischen Koordinate	
x, y, z	m	kartesische Koordinaten	
Y_m	—	Neumann-Funktion m-ter Ordnung	
$\mathbf{Y}$	—	Koeffizientenmatrix	Gl.(6.20)
$\mathbf{Z}$	—	komplexe Datenmatrix	Gl.(6.16)
Z	kg/m ² s	Impedanz	
Z_m	—	Zylinderfunktion-Funktion m-ter Ordnung	

Griechische Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung	Definition
α	Grad	Strömungswinkel	
α	Grad	Verzerrungswinkel	Gl.(4.30)
β	Grad	Metallwinkel	
χ	Grad	Ausbreitungswinkel akustische Mode	S.42
Γ	m^2/s	Zirkulation	Gl.(B.60)
Γ	rad	Rotationswinkel des Abbilds	Gl.(6.24)
$\gamma_{x,\theta}$	Grad	Stafflungswinkel in Bezug zur x / θ Ebene	
Δ	—	Differenz	
ΔT_R	—	Transmissionsverlust	Gl.(8.1)
$\delta\phi$	Grad	Phasenversatz	S. 79
δ_{ij}	—	Kronecker-Delta	
ϵ	—	Teilmodenverhältnis	S. 54
ϵ	—	Amplitudenfaktor	
ϵ_{ijk}	—	Levy-Civita-Symbol	
η	kg/ms	dynamische Viskosität	
κ	—	Isentropenexponent	
Λ	—	radiale Ausbreitungsfunktion	Gl.(3.26)
λ	m	Wellenlänge	
$\mu_{[mn]}$	—	Eigenwert bzw. n-te Nullstelle der Bestimmungsgleichung U_m	
ν	m^2/s	kinematische Viskosität	
ξ	—	Cut-Off-Verhältnis	S. 39
ρ	kg/m^3	Dichte	
π	—	Druckverhältnis	
σ	—	Nabenverhältnis	
τ	s	Zeit	
τ_V	s	Zeitversatz	
τ_{ij}	N/m^2	Spannungstensor	
Φ	—	akustisches Potential	
φ	—	akustisches Potential	
ϕ	Grad	Phasenwinkel	
ϕ_0	Grad	Nullphasenwinkel	
Ψ_m	—	Bestimmungsgleichung m-ter Ordnung	S. 176
ω	rad/s	Kreisfrequenz	
Ω	rad/s	Winkelgeschwindigkeit	

Tiefgestellte Indizes

Index	Bedeutung
$(\cdot)_{\pm x}$	Schallausbreitung in positive o. negative Axialrichtung
$\underline{(\cdot)}$	komplexe Amplitude
$(\cdot)_{[m;n]}$	akustische Mode mit Azimuthalordnung m und Radialordnung n
$(\cdot)_B$	bewegtes Koordinatensystem
$(\cdot)_{Bl}$	blockiert
$(\cdot)_{Cut-Off}$	nicht ausbreitungsfähige akustische Mode
$(\cdot)_{Cut-On}$	ausbreitungsfähige akustische Mode
$(\cdot)_F$	feststehendes Koordinatensystem
$(\cdot)_{norm}$	normiert
$(\cdot)_{max}$	maximal
$(\cdot)_R$	rotatorischer Anteil der Geschwindigkeitskomponente (Vorticity)
$(\cdot)_{ref}$	Referenzwert

Überstreichungen und hochgestellte Indizes

Symbol	Bedeutung
$(\cdot)^{\pm\theta}$	Schallausbreitung in positive o. negative Umfangsrichtung
$(\cdot)'$	Schwankungsanteil
$\widehat{(\cdot)}$	Amplitude
$\overline{(\cdot)}$	Mittelwert (RMS)
$\widetilde{(\cdot)}$	Absolutgröße (stationärer Anteil + Schwankungsanteil)
$(\cdot)^{(\sigma)}$	vom Nabenverhältnis abhängig

Mathematische Zeichen und Operatoren

Symbol	Bedeutung
$\wedge$	logisches <i>und</i>
∇	Nabla Operator
Δ	Laplace Operator
grad	Gradient
div	Divergenz
rot	Rotation
$\Im\{\dots\}$	Imaginärteil
$\Re\{\dots\}$	Realteil
$\approx$	ungefähr gleich
$\propto$	proportional

Abkürzungen

Abkürzungen	Bedeutung
AMA	A zimutale M oden A nalys
APE	A coustic P erturbation E quation
AWT	A eroacoustic W ind T unnel
BPF	B lade P assing F requency
CAA	C omputational A ero A coustics
FEM	F inite E lemente M ethode
FFT	F ast F ourier T ransform
FPGA	F ield P rogrammable G ate A rray
GTF	G eared T urbo F an
ICAO	I nternational C ivilian A viation O rganisation
ICP	I ntegrated C ircuit P iezoelectric
LEE	L inearized E uler E quations
POD	P roper O rthogonal D ecomposition
RMA	R adiale M oden A nalys
RMS	R oot M ean S quare
SNR	S ignal N oise R atio
STM	S chall T ransport M odell
SVD	S ingular V alue D ecomposition
TFD	Institut für T urbomaschinen und F luid- D ynamik
TTL	T ransistor T ransistor L ogic
UHBR	U ltra H igh B ypass R atio
WEM	W ave E xpansion M ethod

1 Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung von Schalltransportmechanismen in Niederdruckturbinen mit dem Ziel, zukünftig die Lärmemissionen von Flugtriebwerken zu reduzieren. Der Anlass ergibt sich dabei sowohl aus gesellschaftspolitischen Fragestellungen als auch technologischen Anforderungen an die Entwicklung neuer Flugantriebe.

So wird im ersten Teil dieses Kapitels das Thema in den gesellschaftspolitischen Kontext gestellt und die Problematik der Lärmemission von Flugantrieben aus wirtschaftlicher, medizinischer und rechtlicher Perspektive betrachtet. Anschließend werden die technologischen Herausforderungen herausgearbeitet, und das Thema wird in den technisch-wissenschaftlichen Kontext eingeordnet. Im zweiten Teil des Kapitels werden darauf aufbauend die wissenschaftliche Motivation und das Ziel dieser Arbeit vorgestellt.

1.1 Fluglärm - ein gesellschaftspolitisches Problem

Prognosen zur Entwicklung der europäischen Luftfahrtindustrie zeigen, dass die technologischen Anforderungen an moderne Flugantriebe maßgeblich durch einen Zielkonflikt ökonomischer und ökologischer Fragestellungen geprägt sind (Argüelles et al. 2001). Wie auch Graham et al. (2014) ausführen, gilt es zum einen, die Kosten für Betrieb und Wartung zu senken, zum anderen müssen strenge gesetzlich vorgeschriebene Schadstoff-Emissionsgrenzwerte eingehalten werden. Bereits seit einigen Dekaden stellt die Reduzierung des Treibstoffverbrauchs das vorrangige Ziel in der Entwicklung ziviler Flugtriebwerke dar. Für ein modernes High-Bypass-Triebwerk der dritten Generation (z. B. General Electric GE90-115B), ließ sich so etwa der spezifische Kraftstoffverbrauch SFC (engl.: Specific Fuel Consumption), im Gegensatz zu einem Strahltriebwerk der ersten Generation (z. B. Pratt & Whitney JT3C), um über 50% reduzieren (Peeters et al. 2005). Ein zweiter, zunehmend in den Vordergrund tretender Aspekt, ist die Reduzierung der Geräuschemissionen, die ebenfalls strengen gesetzlichen Grenzwertvorgaben unterliegen. Auch wenn das zivile Flugaufkommen zeitlichen Schwankungsprozessen in Nachfrage und Preisentwicklung folgt, wird für die nächsten Jahrzehnte ein starker Anstieg der Flugbewegungen vorhergesagt, der den Trend der letzten Jahre fortführt. Wie aus einer Airbus-internen Studie (Global Market Forecast - Airbus (2013)) hervorgeht, wird für die nächsten Jahrzehnte ein jährliches Wachstum von über 6% erwartet, was in etwa einer Verdoppelung des Flugaufkommens alle 15 Jahre entspricht. In ähnlicher Weise wird sich auch das Frachtflugaufkommen entwickeln.

Wie in Berster et al. (2010, 2011) diskutiert wird, müssen, um diese Wachstumsraten logistisch bewerkstelligen zu können, neue Flughäfen gebaut und bereits bestehende vergrößert werden. Des Weiteren werden geltende Beschränkungen, wie etwa Nachtflugverbote,

1 Einleitung

zumindest teilweise aufgehoben werden müssen. In der jüngsten Vergangenheit geriet gerade dies in Konflikt mit vielen Bürgerinitiativen und Protestbewegungen, die sich gegen den Ausbau großer deutscher Flughäfen oder das Aufheben existierender Nachtflugverbote stellen (FAZ 2013, Gröl 2012).

Zahlreiche medizinische und psychoakustische Studien belegen, dass Lärm nicht nur belästigend und kommunikationsstörend ist, sondern bei längerer Einwirkung unmittelbar zu einer gesundheitlichen Schädigung der Betroffenen führen kann. Eine verstärkte Lärmbelastung betrifft nicht nur das Gehör, sondern es treten auch vermehrt chronische Stressreaktionen auf, die zu einem erhöhten Risiko von Herz-Kreislaufkrankheiten führen sowie vegetative und endokrine Reaktionen hervorrufen können (Greiser et al. 2006). Häufige Stresssymptome und Krankheitsbilder aufgrund dauerhaften Fluglärms sind chronische Schlafstörungen, Tinnitus oder kardiovaskuläre Erkrankungen (Babisch 1998, 2000). Auch Jarup et al. (2008) und Goto und Kaneko (2002) zeigen, dass es einen direkten Zusammenhang zwischen der nächtlichen Lärmbelastung durch den zivilen Flugverkehr mit der Prävalenz von Bluthochdruck gibt. Weitere Ergebnisse zu bereits durchgeführter und aktueller epidemiologischer Lärmwirkungsforschung werden etwa bei Eriksson et al. (2007), Umweltbundesamt (2004) oder WHO (2011) diskutiert.

Um Mensch und Umwelt vor schädlicher Fluglärmbelastung zu schützen, sind gesetzlich strenge Lärmgrenzwerte vorgeschrieben, die unter anderem im Bundesimmissionsschutzgesetz festgelegt sind. Laut Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit (BMU 2011) bezieht sich der derzeitige Fluglärmschutz vor allem auf die Einhaltung progressiver Lärmgrenzwerte für zivile Verkehrsflugzeuge, die von der ICAO (engl.: International Civil Aviation Organization) unter Berücksichtigung des fortschreitenden Standes der Lärminderungstechnik festgelegt werden (vgl. hierzu auch: BGBl (2007) oder EG/2002/30 (2002)). Diese Grenzwerte sollen die Lärmsituation in der Umgebung von Flughäfen auf lange Sicht verbessern, stellen aber besondere technische Herausforderungen an aktuelle und zukünftige Triebwerksgenerationen. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass die international gesetzlich geforderte Einhaltung von Lärmobergrenzen die Fluglinienbetreiber dazu zwingt, ihre Flugzeuge mit lärmarmen Triebwerken auszustatten.

1.2 Technologische Herausforderungen

Aus den oben genannten Gründen widmet sich die Luftfahrtindustrie seit mehreren Jahrzehnten der Entwicklung lärmreduzierter Flugzeuge und Antriebe, wobei zukünftig noch größere Anstrengungen unternommen werden müssen, um die sehr ambitionierten gesetzlichen Vorgaben zu erreichen. Anhand der Abb. 1.1 werden die Entwicklungstrends der Geräuschminderung am Beispiel der Boeing 747-Flugzeugfamilie verdeutlicht. So konnten innerhalb der letzten 30 Jahre die Lärmpegel um über 22 EPNdB gesenkt werden, was in etwa einer Viertelung des subjektiven Lautstärkeempfindens entspricht (Neise et al. 2005). Die Lärmcharakteristik wird im Rahmen der Qualifizierungs- und Abnahmetests der Flugzeuge stets als Summenpegel von Antrieb und Zelle erfasst. Die dem Diagramm zugrunde liegenden Daten sind auf Basis der Noise Certification Database berechnet und erstellt

worden (NoisedB). Da in dem ausgewählten Fall der Flugzeugtyp identisch ist, lassen sich zumindest indirekt Rückschlüsse auf die Reduzierung der Geräuschemissionen der Antriebe ziehen.

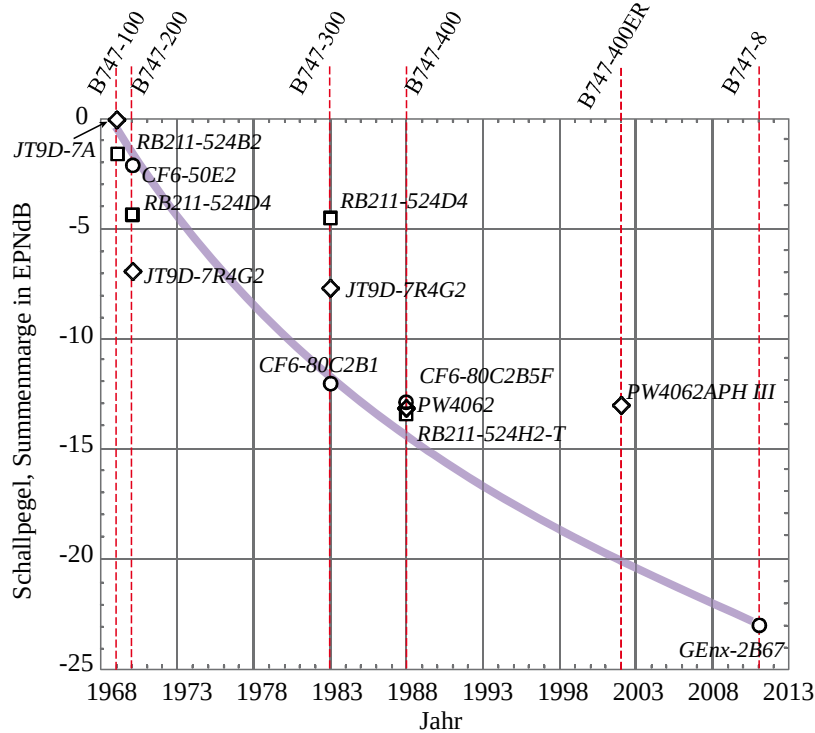


Abbildung 1.1: Entwicklung der Schallemissionen der Boeing 747 Familie. Bewertungsgröße: Kumulierte Marge als Differenz von tatsächlich gemessenen Schallpegeln und vorgeschriebenen Maximalpegeln für die Modi Anflug, Überflug und Volllast. Triebwerksmodelle: —◇— Pratt & Whitney; —○— General Electric; —□— Rolls-Royce

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass durch die technologische Weiterentwicklung bereits große Fortschritte in der Reduzierung der Schallemission von Turbofantriebwerken erzielt werden konnten. Besondere Bedeutung kommt dabei der Erhöhung des Nebenstromverhältnisses und der damit einhergehenden verringerten Strahlgeschwindigkeit zu. Da diese überproportional zur Schallemission beiträgt (Lighthill 1964), führen hohe Bypassverhältnisse stets zu einer Reduzierung des Strahlärms. Auch haben sich im Laufe der letzten Jahrzehnte die Absorbertechnologien und die Entwicklung effektiver Schalldämpfereinheiten (engl.: Liner) bezahlt gemacht (Broszat 2008). Weitere Verbesserungen sind auf die gezielte Auslegung der Kanalgeometrien und des Schaufeldesigns (Cut-Off-Design) zurückzuführen (Broszat et al. 2013, Huff 2007, Gorji-Bandpy und Azimi 2012). Zukünftig wird mit der Einführung von UHBR-Triebwerken (engl.: Ultra High Bypass Ratio) oder von Getriebefan-Triebwerken (GTF) eine weitere Reduzierung der Schallemission erwartet (Kaplan et al. 2006, Alexiou et al. 2010). Letztere stehen kurz vor der Serieneinführung (z. B. PW1000G von Pratt & Whitney). Durch die verringerte Fan-Drehzahl nimmt der ansonsten sehr dominante Fan-Lärm ab. Aus Wirkungsgrad-technischen Gründen wird in GTF die Niederdruckturbinen allerdings wesentlich schneller drehen und mehr Leistung umsetzen können. Dies resultiert jedoch in einem Anstieg des Kerntriebwerkärms.

1 Einleitung

Dessen Minderung tritt somit verstärkt in den Fokus des wissenschaftlichen Interesses, und die Untersuchung der Lärmmechanismen und des Schalltransports in Niederdruckturbinen gewinnt aus technologischer Sicht zunehmend an Bedeutung. Für die Entwicklung zukünftiger Triebwerke ist dabei das vertiefte Verständnis der physikalischen Mechanismen der Schallentstehung und des Schalltransportes unerlässlich. Diese Arbeit leistet einen Beitrag dazu.

1.3 Stand der Forschung

Für eine mathematische Modellierung der Akustik in Turbomaschinen werden oftmals die komplexen Maschinenkomponenten einer Turbine oder eines Verdichters auf vereinfachte Systeme und Geometrien wie ebene Plattengitter oder Kreis- und Ringkreiskanäle reduziert, ohne dabei die physikalischen Eigenschaften grundlegend zu verändern. Alle in den letzten Dekaden entwickelten Theorien zur Beschreibung akustischer Phänomene in Turbomaschinen greifen auf diese vereinfachten Modelle zurück. Anfang der 1950er Jahre beginnen erste systematische Untersuchungen zur Akustik von Strahltriebwerken, wobei der Fokus zunächst auf der Identifizierung der akustischen Quellen und potentiellen Anregungsmechanismen liegt.

Kemp (1953) untersucht als Erster systematisch die Schallentstehungsmechanismen in den Schaufelgittern axialer Turbomaschinen. Er zeigt, dass Schall sowohl durch die Interaktion der Potentialfelder der Schaufelgitter als auch durch die Wechselwirkung mit den viskosen Nachläufen stromauf liegender Schaufelreihen erzeugt wird. Diese Ideen werden nachfolgend z. B. von Smith und House (1967), Kaji und Okazaki (1970a), Mani und Horvay (1970) aufgegriffen, weiterentwickelt und theoretisch untermauert. Hulse und Large (1967) untersuchen die Schallquellen in Axialverdichtern und entwickeln ein einfaches mathematisches Modell zur Abschätzung der Schallerzeugung mit besonderem Augenmerk auf dem Einfluss des Axialabstandes zwischen Rotor und Stator.

Wie Ghiladi (1981) anführt, weisen die tonalen Schalldrucksignale eine Grundfrequenz auf, die proportional zur Blattwechselfrequenz (engl.: BPF - Blade Passing Frequency) bzw. deren Höherharmonischen ist. Diese Frequenz ist unabhängig von der Gitteranordnung (Stator-Rotor oder Rotor-Stator) und ergibt sich aus dem Produkt von Drehzahl und Laufschaufelanzahl.

Die in den Stufen der Turbomaschine angeregten Schallfelder breiten sich anschließend in den Strömungsführenden Kanälen in Form akustischer Moden aus. In ihrer richtungsweisenden Arbeit leiten Tyler und Sofrin (1962) einen einfachen Zusammenhang zwischen der durch Rotor-Stator-Interaktion angeregten azimuthalen Modenordnungen m und den Schaufelanzahlen des Rotors B sowie des Stators V her

$$m = hB \pm sV \quad \text{mit: } s = 0, 1, \dots, \infty \quad . \quad (1.1)$$

Die Variable h ist die Ordnung der Harmonischen, während s einem beliebigen Vielfachen entspricht. Die Modenordnung kann dabei sowohl positiv als auch negativ sein, was dann der relativen Modendrehrichtung in oder entgegen der Rotordrehrichtung entspricht. Nach Gl.(1.1) sind theoretisch unendlich viele Azimutalmoden anregbar, die sich allerdings

nur nach Überschreiten einer charakteristischen Grenzfrequenz, der sogenannten Cut-On Frequenz, auch tatsächlich ausbreiten können.

In mehrstufigen Turbomaschinen liegen sowohl Rotor-Stator als auch Stator-Rotor Kombinationen vor, die in komplexer Art und Weise miteinander wechselwirken. In Anlehnung an Enghardt et al. (2001) lässt sich Gl.(1.1) für mehrstufige Turbomaschinen zu

$$m = h_1 B_1 - \sum_{i=2}^n h_i B_i \pm \sum_{j=1}^n s_j V_j \quad \text{mit: } s = 0, 1, \dots, \infty \quad (1.2)$$

erweitern. Holste (1995a,b) oder Kester und Pickett (1972) geben ergänzend dazu eine Berechnungsvorschrift für gegenläufige, mehrstufige Rotor-Stator Kombinationen an.

Aufbauend auf den Fragestellungen der Schallanregung treten in den frühen 1970er Jahren auch die Transportmechanismen in den Fokus des wissenschaftlichen Interesses. Morfey (1964) stellt dazu eine sehr umfassende Theorie zum Verhalten rotierender Schalldruckfelder in Rohren, den sogenannten Spinning Modes, vor und leitet die physikalisch-mathematischen Zusammenhänge des Schalltransports her. In den nachfolgenden Jahren entstehen einige grundlegende Arbeiten zur Beschreibung der modalen Schallfelder in Rohrleitungssystemen und in Ringkanälen, auf die auch im Rahmen dieser Arbeit zurückgegriffen wird. So entwickeln bspw. Morfey (1972) und Mani und Horvay (1970) verschiedene Transportmodelle, bei denen die sich in Rohren ausbreitenden Schallfelder mit Hilfe überlagelter Moden beschrieben werden. Es folgen eine Vielzahl von Arbeiten, die die Theorien der idealisierten Rohrakustik auf reale Maschinenanwendungen hin weiterentwickeln. So untersuchen bspw. Ingard und Singhal (1975) oder Lansing et al. (1970) die Schallabstrahlung aus Rohren endlicher Länge und mit einer Abschlussimpedanz, was für reale Triebwerksanwendungen von zentraler Bedeutung ist. Rice (1979) führt hingegen Wandimpedanzen ein, um einfache Dämpfungsmodelle zu entwickeln - eine Vorstufe für heutige Linermodelle (Broszat 2008, Vilenski und Rienstra 2007a). In zwei sehr umfangreichen Studien von Doak (1973a,b) werden die Schallfelder in schallharten Rohren in Bezug auf die Anregungsmechanismen analytisch untersucht. Ein Schwerpunkt ist die Quellverteilung und der Einfluss der Rohrgeometrie sowie des Rohrabschlusses auf die Schalldruckmuster. Da diese Modelle alle für gerade Kreis- oder Ringkreiskanäle entwickelt worden sind, erweitern Candel (1975) und Kelly et al. (1982) die modalen Transportmodelle für Düsen und Diffusor-ähnliche Geometrien. Hersch und Liu (1976) untersuchen den Einfluss einer überlagerten Strömung auf das Ausbreitungsverhalten ebener Wellen in einem konvergent-divergenten Strömungskanal und zeigen, dass linearisierte Ansätze nur bis zu einer Grenzmachzahl von $Ma = 0,6$ Gültigkeit besitzen.

Bereits in den 1970er Jahren widmen sich mehrere Studien der Fragestellung der korrekten Lösung der Wellengleichung und der damit verbundenen Eigenwertproblematik bei Überlagerung des akustischen Feldes mit komplexen Strömungsfeldern, wie sie in realen Turbomaschinen existieren (Shanker 1972, Yourkovich 1976, Salant 1968). Diese Thematik ist bis in die heutige Zeit Gegenstand der Forschung. So untersuchen etwa Kousen (1995, 1996, 1999), Tam und Auriault (1998), Golubev und Atassi (1996) oder erst kürzlich Vilenski und Rienstra (2007b) die Eigenwertbestimmung bei Drall- und Scherströmungen mit Hilfe numerischer Verfahren. Auch in dieser Arbeit wird auf die Eigenwertproblematik eingegangen, denn gerade für die Entwicklung analytischer Transportmodelle oder die

1 Einleitung

Verbesserung experimenteller Analyseverfahren ist die Berücksichtigung real existierender Strömungsfelder von großer Bedeutung.

Während viele Arbeiten zunächst rein theoretischer Natur sind, untersucht Plumblee et al. (1973) den Schalltransport in durchströmten Ringkreiskanälen ohne und mit einer Impedanzbelegung analytisch und experimentell. Auch Schiffer (1976) widmet sich der experimentellen Bestimmung der Ausbreitung des von Turbomaschinen emittierten Schalls in Rohrleitungen mit Diskontinuitäten, während Ghiladi (1981) die Schallausbreitungsphänomene in Rohrleitungssystemen bei reiner Drehtonanregung der akustischen Felder beleuchtet.

In Ergänzung zu der Untersuchung des Schalltransports durch Rohrleitungen werden in den 1970er Jahren ebenfalls erste Transmissionsmodelle für Schaufelgitter entwickelt. In den meisten Fällen handelt es sich dabei um stark vereinfachte zweidimensionale und feststehende Schaufelreihen, wie sie etwa in Amiet (1971, 1974) vorgestellt werden. Eine zentrale Annahme ist dabei, dass lediglich ebene Wellen das Gitter passieren. Koch (1971) erweitert unter Zuhilfenahme der Wiener-Hopf-Methode diese Modelle für höhere Moden. Matta und Mani (1979) entwickeln ein Berechnungsprogramm, um die niederfrequente Schalltransmission durch Turbinen vorherzusagen.

Eine der wenigen experimentellen Arbeiten zur Schalltransmission in realen Turbomaschinen wird von Doyle und Matta (1977) vorgestellt. Dabei wird, ähnlich wie in der vorliegenden Arbeit, das Schallfeld vor einer Versuchsturbine mit Hilfe einer Sirene angeregt und dessen Ausbreitung an mehreren, über der Maschine verteilten Punkten, gemessen.

Parallel werden die Grundsteine für viele noch heute verwendete experimentelle Messmethoden gelegt. So entwickelt z.B. Moore (1979) ein Messverfahren zur Bestimmung der azimuthalen und radialen Moden in Rohrsystemen, das als Vorläufer der auch in dieser Arbeit eingesetzten Modenanalyse angesehen werden kann. Auch Bolleter und Chanaud (1971), Bolleter und Crocker (1972), Bolleter et al. (1973) oder Mugridge (1969) verwenden bereits, wie heute üblich, spezielle Analyse- und Korrelationsmethoden zur Bestimmung der modalen Schallfeldstruktur in Rohrleitungssystemen. Ebenso wird von Harel und Perulli (1972) eine Methodik entwickelt, die die räumlich kohärenten und inkohärenten Schallfeldstrukturen unter Zuhilfenahme solcher Verfahren bestimmen.

Aufbauend auf den Entwicklungen und Theorien jener Jahre sind heutzutage immer noch viele dieser Fragestellungen Gegenstand der aktuellen Forschung. So untersuchen etwa Logue et al. (2009) die Transmission durch rotierende Schaufelgitter, Sutliff (2014) die Transmission in Rohrleitungssystemen oder Hay et al. (2013) verbesserte Impedanzmodelle zur Simulation akustischer Dämpfungselemente. Dies geht oft einher mit der Weiterentwicklung rein numerischer Verfahren sogenannter hybrider CAA-Berechnungen (engl.: Computational Aero Acoustics), die mit Steigerung der Rechenkapazitäten immer mehr an Bedeutung gewinnen (Weckmüller und Guerin 2009, Mincu et al. 2012, Zhang und Chen 2014). Diese basieren meistens auf Störansatzverfahren (APE, engl.: Acoustic Perturbation Equations oder LEE, engl.: Linearized Euler Equations), die mit Hilfe numerischer Methoden der Finite-Elemente (FEM) oder Finite-Differenzen gelöst werden. Im Gegensatz zu den bereits in der industriellen Praxis eingesetzten CFD-Verfahren sind die CAA-Methoden derzeit nicht auf einem technologisch vergleichbar ausgereiften Stand.

Ein zunehmend in das Interesse der Forschung tretender Mechanismus ist der Brennkammerschall. Bereits Chiu und Summerfield (1973) geben eine ausführliche theoretische Beschreibung der Schallerzeugung und Verstärkung in Brennkammersystemen an und leiten mathematisch einen Zusammenhang zwischen der Reaktionskinetik und der Schallerzeugung her. Neben den instationären Verbrennungsprozessen wirken insbesondere Entropie-induzierte Effekte und Wirbelstärkeschwankungen (Vorticity-Wellen) als akustische Quellen, wie Cumpsty und Marble (1977), Bake et al. (2008, 2009a,b) oder Kings et al. (2012) zeigen. Obwohl der Brennkammerlärm in den letzten Jahrzehnten nicht im Fokus der Entwicklung von Lärminderungsmaßnahmen stand, gewinnt dieser mit Reduzierung des ansonsten sehr dominanten Strahl lärms zunehmend an Bedeutung. Gerade die komplexen Interaktions- und Transportphänomene des Brennkammerschalls mit den sich anschließenden Hoch- und Niederdruckturbinen stellen für das Verständnis der Akustik des Kerntriebwerks eine große Herausforderung dar. Aus der jüngeren Brennkammerforschung sind Ansätze bekannt, die die Modenausbreitung nicht nur auf Basis der klassischen Spinning Mode Theorie formulieren, sondern auch die Existenz stehender Azimutalmode berücksichtigen. Dabei handelt es sich in den meisten Fällen um Rotor-asynchron in die Turbinen eintretende Schallfelder. Einige der wenigen Arbeiten zu diesem Thema sind z.B. Evesque et al. (2003), Parmentier et al. (2012), Wolf et al. (2012) und insbesondere Noiray und Schuermans (2013). Werden in Brennkammern solche Schallfeldstrukturen erzeugt, können sie sich stromab durch die Turbine ausbreiten und zur Schallemission des Triebwerks beitragen. Die Untersuchungen unterstreichen die Notwendigkeit, neben Spinning Modes, auch das Ausbreitungsverhalten stehender Azimutalmode in Turbomaschinen zu untersuchen. Diese Theorien werden in dieser Arbeit aufgegriffen und weiterentwickelt.

Auf experimenteller Seite werden mittlerweile sehr hochauflösende Verfahren zur Bestimmung hoher Radialmode angewandt (Tapken et al. 2011, 2009, 2008). Einen weiteren Schwerpunkt stellt die Erforschung des Breitbandlärms sowie die Schallfeldstrukturen in komplexen Wirbel-behafteten Strömungen dar (Posson und Moreau 2013, Enghardt et al. 2009). Der Einsatz solch hochauflösender Messungen bedingt allerdings eine große Anzahl an Sensoren und teurer Messtechnik. Zukünftige Bestrebungen werden zum Ziel haben, experimentelle Messungen auch unter Einsatz einer reduzierten Anzahl an Messstellen zu verwirklichen. So widmet sich bspw. das LUFO 5 Vorhaben LIST aktuell diesen Fragestellungen. Die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Mess- und Analysemethoden leisten dazu einen Beitrag.

Wie etwa Taddei et al. (2009), Broszat et al. (2009) oder Faustmann et al. (2013) zeigen, spielen experimentelle Untersuchungen in Turbomaschinen unter realistischen Versuchsbedingungen eine immer wichtigere Rolle. Auch die in dieser Arbeit vorgestellten experimentellen Untersuchungen werden an einer Versuchsturbine unter realen Strömungsbedingungen und mit profilierter Beschau felung durchgeführt. Nur so können die oftmals unter vereinfachenden Annahmen entwickelten Theorien erweitert und auf reale Turbomaschinen hin angewandt werden.

1.4 Motivation und Struktur der Arbeit

Diese Arbeit will einen Beitrag zum verbesserten Verständnis der Schalltransportmechanismen in Niederdruckturbinen leisten. Dabei wird sich bewusst auf die Transportphänomene konzentriert - die akustischen Quellen werden als vorausgesetzt angenommen. Erst wenn die physikalischen Mechanismen der Schallausbreitung in Triebwerken besser verstanden sind, können auch gezielter Maßnahmen entwickelt werden, die Schallmission zu verringern.

Wie in den einleitenden Kapiteln herausgearbeitet ist, sind Rotor-asynchron in Turbinen induzierte Schallfelder bisher kaum untersucht worden. Da allerdings die primär aus den Brennkammern emittierten Schallfelder ein solches Verhalten aufweisen, stellt deren Erforschung ein wichtiges Moment zum Verständnis der Transportmechanismen in den Maschinen dar. So liegt der Fokus dieser Arbeit auf der theoretischen und experimentellen Untersuchung des Transports von Rotor-asynchron in eine Niederdruckturbine eingekoppelter Schallfelder.

Experimentell wird dazu eine Versuchsturbine um die Möglichkeit erweitert, in deren Eintritt ein synthetisch erzeugtes Schallfeld einzukoppeln, das anschließend an unterschiedlichen Positionen der Maschine gemessen wird. So lassen sich Rückschlüsse auf die Transport- und Transmissionseigenschaften ziehen.

Generell erfordern hochauflösende akustische Messungen in Rohrleitungen und Turbomaschinen eine Vielzahl an sowohl azimuthal als auch radial und axial verteilten Sensoren (Enghardt et al. 2001, Tapken und Enghardt 2006, Tapken et al. 2009). Da die eingesetzte Versuchsturbine konstruktiv bedingt nur eine begrenzte Anzahl an Messpositionen zulässt, ist die Analysetiefe beschränkt. Um diesen Missstand zu beheben, wird ein analytisches Transportmodell entwickelt, welches zur Berechnung modaler Schallfelder in Kreis- oder Ringkreiskanälen dient. Dieses Transportmodell ist zentraler Bestandteil eines hybriden Auswertungskonzepts für die experimentell-simulative Analyse des Schalltransports in Turbomaschinen. Das Ziel ist es, mit Hilfe weniger lokal gemessener Schalldrücke im Experiment das komplette Schallfeld anschließend rechnerisch zu bestimmen. Die Messwerte dienen als Randbedingung für die Berechnungen. Somit ist selbst bei einer geringen Sensoranzahl eine detaillierte Studie des Schallfeldes möglich. Im Rahmen der Arbeit wird die prinzipielle Umsetzung dieser Idee demonstriert, die für zukünftige Schallfelduntersuchungen eine vielversprechende Auswertungsmöglichkeit darstellt.

Sowohl für das Transportmodell, als auch für die entwickelten Analysemethoden ist das vertiefte Verständnis der wirkenden akustischen Effekte unerlässlich. Somit widmet sich diese Arbeit auch der physikalisch-mathematischen Beschreibung akustischer Moden in Rohrleitung und deren Überlagerungszuständen. Ein Schwerpunkt liegt auf der Berücksichtigung von Strömungs- und insbesondere Drallfeldern sowie der Behandlung von stehenden und partiell stehenden Azimutalmoden.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Im nachfolgenden Kapitel werden zunächst die eingesetzten Prüfräger vorgestellt, während in Kapitel 3 die den theoretischen Überlegungen zu Grunde liegenden mathematischen Zusammenhänge herausgearbeitet werden. Dabei werden die akustischen Wellengleichungen für die Berücksichtigung einer überlagerten

Haupt- und Drallströmung erweitert und Approximationslösungen diskutiert, die auch in das Transportmodell integriert sind. Kapitel 4 widmet sich der Beschreibung und Diskussion akustischer Moden und deren Sonderformen in Schallfeldern. Anschließend wird in Kapitel 5 das analytische Transportmodell vorgestellt, welches Teil des hybriden Auswertungsprozesses ist. Die zur Schallfeldanalyse entwickelten Methoden werden in Kapitel 6 beschrieben, bevor in Kapitel 7 auf die experimentelle Validierung der hybriden Auswertungsmethodik in einem aeroakustischen Windkanal eingegangen wird. In Kapitel 8 werden schließlich die eigentlichen Turbinenversuche präsentiert. Abschließend werden in Kapitel 9 die Schlussfolgerungen gezogen und ein Ausblick wird gegeben.

1 Einleitung

2 Prüfstände und Messtechnik

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die eingesetzten Prüfstände und die verwendete Messtechnik gegeben. Sie sind die Basis der experimentellen Verifikation des entwickelten hybriden Analyseansatzes und somit ein unverzichtbarer Teil der experimentellen Analyseketten.

Zunächst wird in Abschnitt 2.1 auf den im Rahmen dieser Arbeit ausgelegten, aufgebauten und in Betrieb genommenen aeroakustischen Windkanal (AWT) des Instituts für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik (TFD) der Leibniz Universität Hannover eingegangen. Der Prüfstand dient im Wesentlichen zur Erprobung der Messtechnik und zur Validierung der Analyseverfahren, bevor die Messungen in der technisch komplexeren Versuchsturbine des Instituts durchgeführt werden. Diese wird in Abschnitt 2.2 vorgestellt, und das Messkonzept wird erläutert. In Abschnitt 2.3 wird näher auf den zur Erzeugung synthetischer Schallfelder genutzten Schallgenerator eingegangen. Abschließend wird in Abschnitt 2.4 ein kurzer Überblick über die eingesetzte akustische Messtechnik gegeben.

2.1 Aeroakustischer Windkanal (AWT)

Aufgrund ihrer Komplexität erfordern akustische Untersuchungen in Turbomaschinen eine vorherige Erprobung und Optimierung der jeweiligen Messstrategien und Aufbauten. Dies trifft auch für den Versuchsturbinenprüfstand zu. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit ein aeroakustischer Windkanal (AWT) für Rohranwendungen entwickelt und aufgebaut, der in seiner Komplexität gegenüber der Turbine stark vereinfacht ist, aber dennoch über strömungsmechanische Eigenschaften verfügt, wie sie in deren Eintritt vorherrschen. Somit gilt es, hohe Massenströme bei gleichzeitig hohen Druckverhältnissen zu realisieren. Mit Hilfe dieses aerodynamisch und aeroakustisch optimierten Prüfstandes werden umfangreiche Studien zur Kanalakustik oder zur Inbetriebnahme der entwickelten Messeinheiten unter bekannten Randbedingungen durchgeführt.

Bereits während der Auslegungsphase wird darauf geachtet, dass der Prüfträger variabel aufgebaut ist, damit sich spätere Modifikationen einfach realisieren lassen und eine höchstmögliche Flexibilität gewährleistet ist. Neben der experimentellen Erprobung akustischer Messtechniken ist die Validierung numerischer Vorhersagemethoden für Kanalanwendungen ein weiterer Einsatzzweck des AWT, für die heutzutage nur sehr begrenzt adäquate Validierungsfälle zur Verfügung stehen. Das System verfügt über effektive Schalldämpfereinheiten und sehr homogene Strömungsfelder in der Messtrecke, so dass eine sehr leise und turbulenzarme Grundströmung gewährleistet ist. Wie Bartelt und Seume (2011) zeigen, werden dazu bereits im Auslegungsprozess umfangreiche numerische Strömungssimulationen und Optimierungsmethoden eingesetzt. Im Rahmen einer Inbetriebnahme-

2 Prüfstände und Messtechnik

und Validierungskampagne werden die wichtigsten Systemparameter experimentell ermittelt (vgl. Tab. 2.1), welche detailliert in Bartelt et al. (2012) vorgestellt werden. Zusätzlich

Tabelle 2.1: Prüfstandsparameter des AWT für Maximallastbetrieb

Größe	Wert	Anmerkung
Länge Messstrecke	$2 \text{ m} + a$	variable Länge bei Implementierung von Austauschsegmenten
Durchmesser Messstrecke D	500 mm	—
max. Massenstrom	9,2 kg/s	—
max. Druckverhältnis p/p_{amb}	3,5	—
Ma_{max}	0,115	—
$\text{Re}_{D,\text{max}}$	$\text{Re}_D = 12,5 \cdot 10^5$	Bezogen auf Rohrdurchmesser in Messstrecke
Hintergrundrauschen bei $U_\infty = 40 \text{ m/s}$	$\leq 70 \text{ dB}$	—

sind in Anhang A.1 einige wichtige Ergebnisse der strömungsmechanischen und akustischen Einmessungen zu finden.

Nachfolgend soll nur ein Überblick über den allgemeinen Aufbau und die Funktionsweise des AWT gegeben werden. Für detaillierte Informationen, insbesondere zum Auslegungsprozess, sei auf Bartelt und Seume (2011) und Bartelt et al. (2012) verwiesen. Abb. 2.1 zeigt den Aufbau des Prüfstandes mit den wesentlichen Systemkomponenten - bestehend aus dem Rohrleitungssystem, dem Schalldämpfer / Beruhigungskammer, der Messstrecke, dem reflexionsarmen Rohrabschluss und dem Abluftsystem. Das Rohrleitungssystem dient dazu, den Prüfstand an die Luftversorgung des TFD anzuschließen. Dabei handelt es sich um eine Anordnung von drei Schraubenkompressoren, die entweder in Reihe oder parallel betrieben werden können. Diese fördern einen maximalen Massenstrom von 9,2 kg/s bei einem Druck von $3,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Somit lassen sich Strömungsbedingungen generieren, wie sie auch in den Großmaschinenprüfständen des Institutes vorherrschen.

In das Zuluftsystem ist eine kalibrierte Venturidüse implementiert, mit der der Massenstrom bestimmt wird. Gemäß ISO 5167-4:2003 sind vor und hinter der Messstelle definierte Mindesteinlauf- und Auslaufstrecke von $10D$ gefordert. Aus Sicherheitsgründen sind die Ein- und Auslauflängen auf je 6 m dimensioniert. Zwischen dem Zuleitungssystem und dem Schalldämpfer ist ein Kompensator implementiert, um einen möglicherweise auftretenden Körperschalleintrag in die akustisch sensiblen Bereiche des Prüfstands zu unterbinden. Der sich anschließende Schalldämpfer stellt ein zentrales Element des AWT dar. Im Rahmen eines umfangreichen Design- und Optimierungsprozesses wird ein spezielles Absorberkonzept entwickelt und absorbierende Auskleidungen entworfen (Bartelt und Seume 2011, Bartelt et al. 2012). Mit Hilfe des Schalldämpfers werden zum einen die aus den Schraubenverdichtern und den Rohrleitungssystemen herrührenden Schallanteile gedämpft, zum anderen dient dieser aufgrund seines großen Querschnitts auch als Beruhigungskammer und wird gezielt zur Vergleichmäßigung der Strömung eingesetzt. Stromab wird die homogenisierte Strömung am Schalldämpferauslass wieder kontrahiert und zum Auslassstutzen hin beschleunigt. Um eine gerichtete und somit auch eine leise Strömung zu gewährleisten,

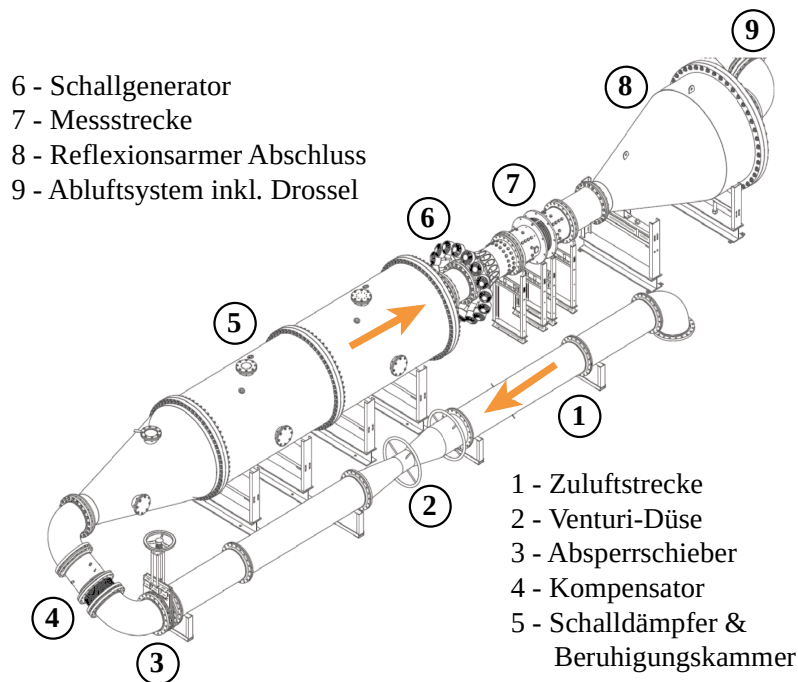


Abbildung 2.1: Aufbau des aeroakustischen Windkanals (AWT)

wird eine aerodynamisch optimierte Einlaufgeometrie (Bellmouth) verwendet, durch die die austretende Luft der eigentlichen Messstrecke zugeführt wird.

Abb. 2.2 gibt einen Überblick über den Aufbau der Messstrecke und die verwendeten Messpositionen. Vor der eigentlichen Messstrecke ist der in Abschnitt 2.3 vorgestellte Schallgenerator implementiert. Mit Hilfe dessen werden gezielt Schallfelder angeregt, die anschließend an unterschiedlichen Positionen der Messstrecke gemessen werden. In deren Mitte lassen sich bei Bedarf Rohr- oder Linersegmente verschiedener Länge einbringen und akustisch vermessen. Stromab der Messstrecke schließt sich ein reflexionsarmer Abschluss

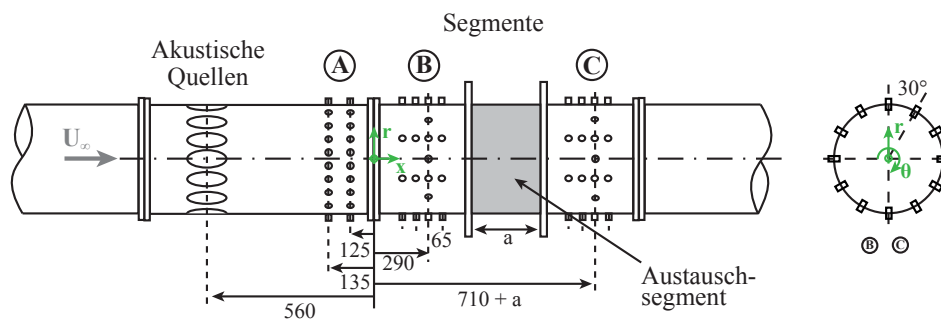


Abbildung 2.2: Messstrecke des AWT und Übersicht über die fest installierten Messpositionen.

an. Dieser wird für die akustischen Messungen in durchströmten Rohrsystemen nach DIN EN ISO 5136 empfohlen. Der Zweck eines reflexionsarmen Abschlusses ist es, die an einfachen Kanalöffnungen, aufgrund eines auftretenden Impedanzsprunges zwischen schallharter Kanalwand und dem sich anschließenden Freifeld auftretenden Reflexionen, zu minimieren.

Mit Hilfe einer schrittweisen Querschnittserweiterung und damit einer kontinuierlichen

Änderung der Impedanz lassen sich etwaige Impedanzsprünge verringern. Die resultierenden Reflexionen würden ansonsten bis in die Messebene hinein rückwirken und dort das eigentliche Messsignal überlagern und stören. Zusammenfassend lassen sich mit der in den Untersuchungen eingesetzten Verdichterschaltung und dem konstruktiven Aufbau der Messtrecke die in Tab. 2.1 gegebenen Leistungsdaten des Prüfstands erreichen. Höhere Strömungsgeschwindigkeiten (Mach-Zahlen) ließen sich z.B. durch die Einkopplung zusätzlicher Verdichteranlagen und/oder eine Querschnittsverengung bei Implementierung eines zusätzlichen Nabenkörpers erzielen.

2.2 Luftturbine (LT)

Für die experimentellen Untersuchungen der modalen Ausbreitungseigenschaften angeregter Schallfelder in Niederdruckturbinen wird die luftgetriebene Versuchsturbine des TFD eingesetzt. Die Maschine weist zwar im Vergleich zu realen Triebwerksturbinen in Temperatur- und Druckverhältnis skalierte Eintrittsbedingungen auf, doch werden Effekte wie Drallüberlagerung oder Enthalpiegradienten berücksichtigt. Darüber hinaus verfügt

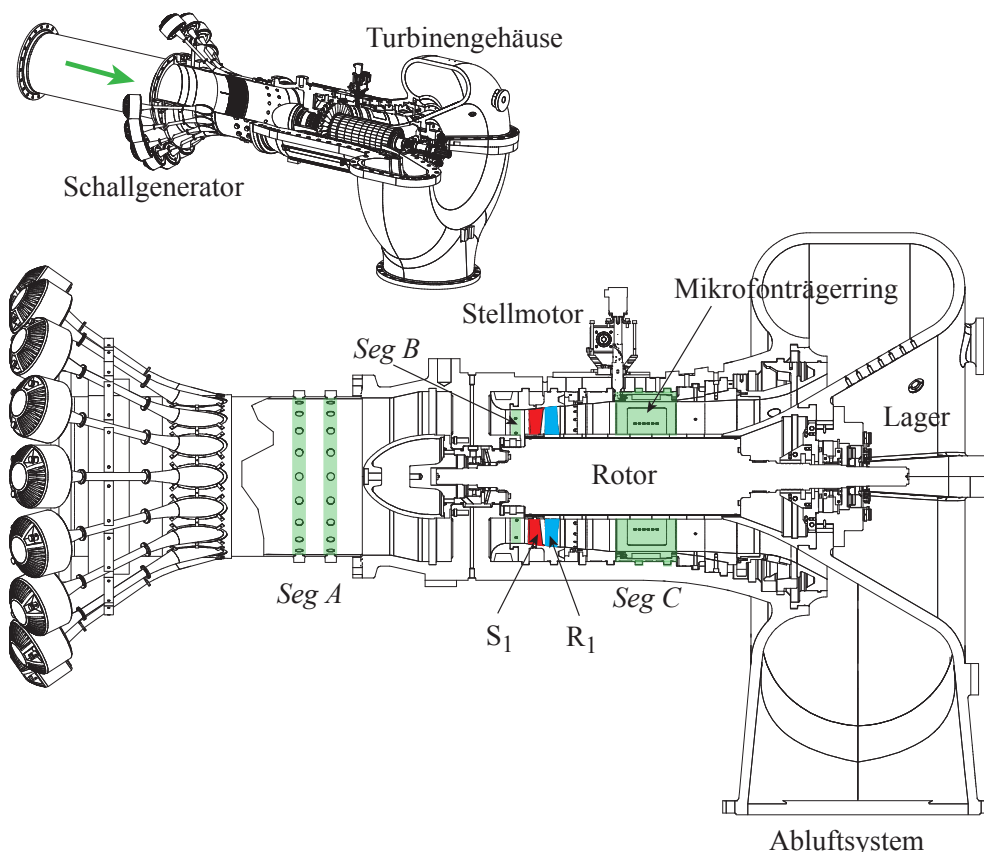


Abbildung 2.3: Aufbau der Luftturbine und der Versuchsinstrumentierung. (S = Stator; R = Rotor)

die Versuchsturbine über eine dreidimensionale Beschauelfung sowie realistische Nabenverhältnisse und Kanalgeometrien. Die Maschine lässt sich mit unterschiedlich beschauelften Rotoren und entsprechenden Leitschaufelträgern versehen. Es wird zunächst eine einstufige

und anschließend eine zweistufige Rotorkonfiguration verwendet, so dass sich sukzessiv die Komplexität der experimentellen Untersuchungen steigern lässt.

Im Folgenden soll ein kurzer Überblick über die wichtigsten Systemeigenschaften und die für die Versuche durchgeführte Modifikation der Maschine beschrieben werden. Für weiterführende Informationen zum Prüfstands Aufbau sei z.B. auf Binner (2011), Evers (1985) oder Zehner (1980) verwiesen. In Abb. 2.3 ist der verwendete Versuchsaufbau dargestellt. Genau wie der AWT (vgl. Abschnitt 2.1) ist auch die Luftturbine an die Luftversorgung des Instituts angeschlossen. Vor dem Turbineneinlauf befindet sich eine 13 m lange Einlaufstrecke, in welche ein zur Massenstrombestimmung verwendetes Norm-Venturirohr eingebracht ist. Durch die lange Einlaufstrecke ist die Anströmung der ersten Turbinenstufe drallfrei und homogen. In Anhang A.2.2 sind dazu exemplarisch die Verläufe des Totaldrucks und der Totaltemperatur über der Kanalhöhe im Zulauf der Luftturbine für einen Betriebspunkt der zweistufigen Konfiguration dargestellt.

Die Luftturbine kann mit verschiedenen Rotorkonfigurationen ausgestattet werden, wobei für die Akustikmessungen eine ein- und zweistufige Variante verwendet wird. Dabei handelt es sich um Repetierstufen (vgl. z. B. Traupel 1977) mit jeweils 30 freistehenden Lauf- und 29 Leitschaufeln pro Stufe. Die Schaufelprofile selbst sind nach einem Potentialwirbelansatz (vgl. z. B. Aungier 2006) mit einem Reaktionsgrad von 50% im Mittenschnitt ausgelegt und verfügen somit über eine dreidimensionale Verwindung in radialer Richtung. Weitere Informationen zur Auslegung der eingesetzten Beschaukelung werden bei Zehner (1980) gegeben.

Die von der Turbine erzeugte Wellenleistung wird über ein Getriebe an eine 1,4 MW-Gleichstrom-Pendelmaschine abgegeben. Stromab der Stufen befindet sich der Turbinenauslassdiffusor, durch den die Luft schließlich in das Abluftsystem und den Abgaskamin gelangt. In Tab. 2.2 sind die wichtigsten Betriebsparameter der ein- und zweistufigen Turbinenkonfiguration zusammengestellt.

Wie in Abb. 2.3 gezeigt ist, wird für die akustischen Versuche zwischen die Zuleitung und den Turbineneintritt der in Abschnitt 2.3 vorgestellte Schallgenerator implementiert. Mit dessen Hilfe werden spezifische Schallfelder angeregt, die sich in der Turbine ausbreiten und an Messstellen vor und hinter den Stufen aufgenommen werden. Abbildung 2.4 gibt einen Überblick über die verwendeten Messpositionen, welche in drei Segmente unterteilt sind. Sämtliche Mikrofone sind bündig in die äußere Kanalwand eingelassen. Segment A besteht aus zwei axial gestaffelten Mikrofonringen, die sich vor dem Turbineneintritt befinden. Der Mikrofonring des Segments B ist 20 mm vor der ersten Statorreihe angebracht. Er verfügt über 12 äquidistant über dem Umfang verteilte Sensoren und wird als Referenz der in die Stufe eintretenden Schalldruckfelder genutzt.

Hinter der letzten Rotorreihe (entweder ein- oder zweistufig) befindet sich in Segment C ein Mikrofonträgerring. Dazu sind in eine Trägerplatte sechs axial gestaffelte Mikrofone eingelassen, die mit Hilfe einer speziellen Traversiervorrichtung um 360° in 1°-Schritten gedreht werden können. Somit ist eine hochauflösende Schallfeldabtastung möglich und Azimutalmomen bis zur Ordnung $m = \pm 179$ bestimmbar. Abbildung 2.3 zeigt den Mikrofonträgerring mit den eingelassenen Mikrofonen. Über die sechs axial angeordneten Mikrofone kann neben dem azimutalen Schallfeld auch die Schallausbreitung in axialer

2 Prüfstände und Messtechnik

Tabelle 2.2: Prüfstandsparameter der Luftturbine für die ein- und zweistufige Konfiguration im Nennlastpunkt.

Bezeichnung	Wert LT 1-stufig	Wert LT 2-stufig
Leistung P_{nenn}	168 kW	300 kW
Drehzahl n_{nenn}	7500 min ⁻¹	7500 min ⁻¹
Massenstrom $\dot{m}_{\text{nenn}}$	7,8 kg/s	7,8 kg/s
Eintrittszustand $p_{\text{E,nenn}}, T_{\text{E,nenn}}$	1,294 · 10 ⁵ Pa; 344 K	1,678 · 10 ⁵ Pa; 374 K
Austrittszustand $p_{\text{A,nenn}}, T_{\text{A,nenn}}$	1,004 · 10 ⁵ Pa; 323 K	1,071 · 10 ⁵ Pa; 333 K
Nabendurchmesser D_N	0,27 m	0,27 m
Nabenverhältnis σ	0,567	0,567
Reaktionsgrad r	0,5	0,5

Richtung erfasst werden. Somit ist über eine Radial Moden Analyse (RMA) die Bestimmung radialer Moden bis zu einer Ordnung von $n = \pm 3$ möglich. Detaillierte Informationen zur Auslegung und zum Aufbau des Mikrofonträgersrings sind in Laguna et al. (2012) oder Laguna et al. (2013) zu finden.

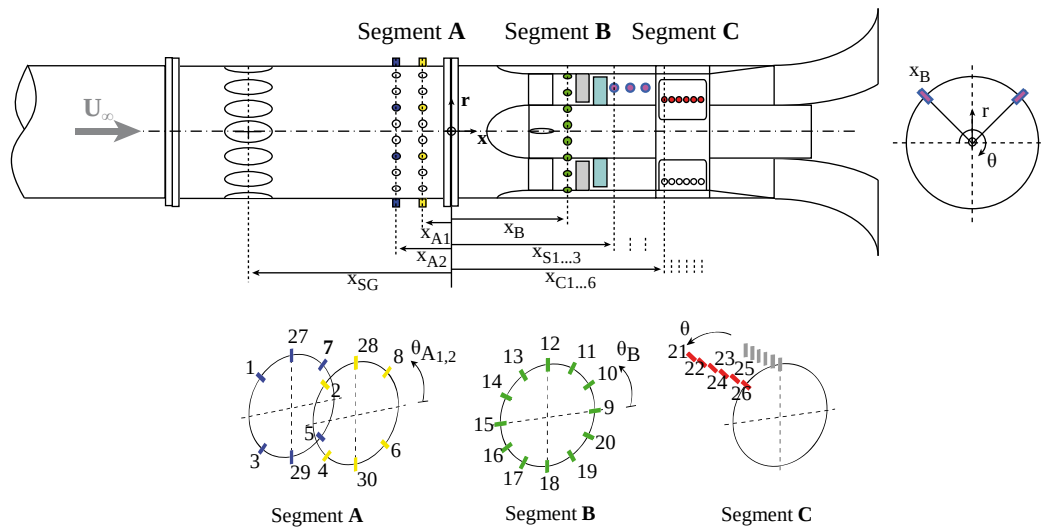


Abbildung 2.4: Messstellen in der Luftturbine.

Der Einsatz eines solchen Mikrofonaufbaus erlaubt eine hohe Auflösung unter Einsatz von nur sehr wenigen Mikrofonen. Die Positionierung der Traversiereinheit und die Datenerfassung erfolgen automatisiert über ein zentrales Steuer- und Messprogramm. Dazu wird der Mikrofonträgersring automatisch an die gewünschte Umfangsposition gefahren und es werden für die eingestellte Messdauer t_{Mess} bei gegebener Samplingfrequenz f_s entsprechend $t_{\text{Mess}} \cdot f_s$ Messwerte pro Umfangsposition aufgenommen. Im Regelfall ist eine 10°-Abtastung mit $t_{\text{Mess}} = 2$ s bei $f_s = 6 \cdot 10^5$ Hz gewählt. Für den weiteren Sprachgebrauch wird im Folgenden die Messung an einer Umfangsposition des Segmentes C als Messzyklus bezeichnet.

Neben den akustischen Sensoren verfügt die Luftturbine über eine Vielzahl an thermischen und pneumatischen Messstellen. Diese befinden sich im Zu- und Abströmpfad der Maschine und dienen zum einen der Betriebspunktüberwachung, zum anderen werden diese globalen Messsignale zur Kennfeldbestimmung genutzt (vgl. Anhang A.2.1). Wie in Anhang A.2.3 gezeigt ist, werden parallel zu den akustischen Versuchen Strömungsfeldmessungen mit Hilfe von pneumatischen 5-Lochsonden durchgeführt. Es zeigt sich, dass für die hier betrachteten Fälle von einem nahezu konstantem Stömungsprofil in axialer Richtung über der Kanalhöhe ausgegangen werden kann. Auch die Drallströmung kann als nahezu konstant angenommen werden. Die gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen sind für die Analyse und Rekonstruktion des Schallfeldes notwendig. Sämtliche Ergebnisse der Strömungsfeldvermessungen sind in Anhang E.3.1 zusammengestellt. Das Drehzahlsignal (1/rev) wird auf der Abtriebswelle mittels einer Lochscheibe und eines Hall-Sensors aufgenommen.

2.3 Schallgenerator (SG)

Wie bereits in Abschnitt 2.1 und 2.2 beschrieben ist, wird für die experimentellen Untersuchungen im AWT und in der Versuchsturbine ein spezieller Schallgenerator zur Erzeugung synthetischer Schallfelder verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieses akustische Anregungssystem entwickelt und aufgebaut, welches sowohl in die Messstrecke des AWT als auch in den Eintritt der Luftturbine implementiert werden kann. So lassen sich verschiedene Turbomaschinen-ähnliche Schallfelder und Modenstrukturen simulieren. Da deren Struktur am Eintritt in die Maschinen bekannt ist, können gezielt Rückschlüsse auf das Schalltransportverhalten durch die Maschine gezogen werden.

2.3.1 Aufbau des Schallgenerators

Insgesamt besteht der Schallgenerator aus 16 äquidistant auf dem Umfang eines Rohrsegments verteilten Lautsprechereinheiten. Diese sind wiederum aus je einem leistungsstarken 2“ Druckkammerlautsprecher (BMS 4591), einer Ladungseinheit und einem akustischen Horn aufgebaut, wie in Abb. 2.5 gezeigt ist. Die Lautsprecher weisen einen Arbeitsbereich zwischen 300 Hz und 10 kHz bei einem maximalen Pegel von 136 dB auf und werden pro Einheit von einem Audioverstärker RAM Audio RX600 versorgt. Da die Treiber (interne Ventilation) auch unter Druck-überlagerten Bedingungen operieren sollen, werden die Gehäuse abgedichtet, so dass ein Druckausgleich mit der Umgebung über die Membran unterbunden wird.

Im Rahmen des Design- und Optimierungsprozesses werden zunächst, unter Zuhilfenahme analytischer Modelle und numerischer Simulationen, die akustischen Einheiten hinsichtlich ihrer Schalldruckleistung und Abstrahlcharakteristiken ausgelegt. Weiterhin werden verschiedene Horngeometrien untersucht. Es zeigt sich, dass die modale Schallfeldanregung weitestgehend unabhängig von der Hornform ist. Die letztendlich realisierte hyperbolisch-konische Horngeometrie weist eine Abstrahlcharakteristik mit sehr niedrigen Nebenkeulen auf und gewährleistet somit eine verzerrungsfreie Richtcharakteristik bei hohen Schalldruckpegeln, wie Bartelt et al. (2013) zeigen.

Die akustischen Einheiten sind in ein Rohrsegment eingebracht, welches sich sowohl in die Messstrecke des AWT als auch in den Eintritt der Luftturbine implementieren lässt, wie in

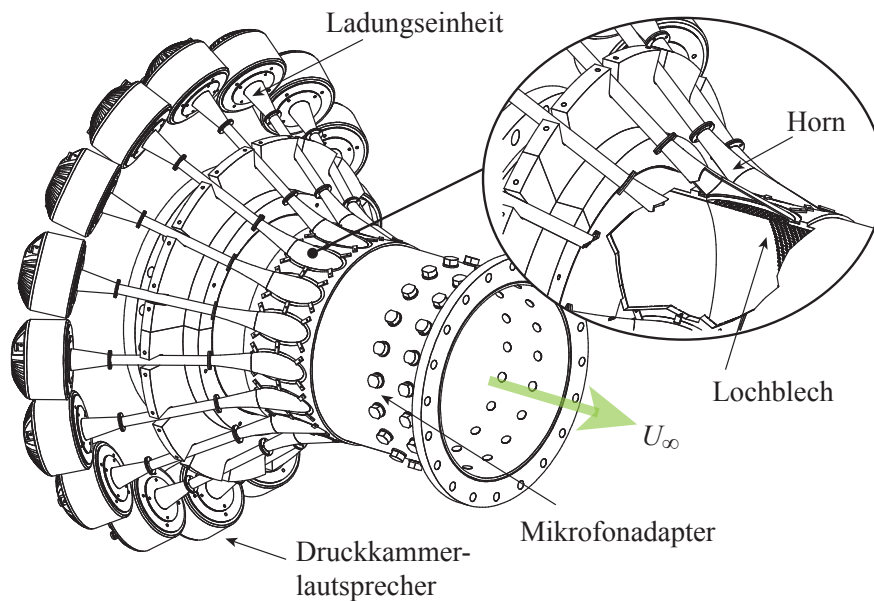


Abbildung 2.5: Aufbau des Schallgenerators (SG)

Abb. 2.1 und Abb. 2.3 gezeigt ist. Das Rohrsegment ist 900 mm lang bei einem Durchmesser von 496,5 mm (DN 500) und verfügt über 16 umfangsverteilte Öffnungen, in welche die akustischen Hörner eingebracht werden. Im Rohrrinneren sind die Einlässe mit einem dünnen Lochblech abgedeckt, welches zwar akustisch transparent ist, aber strömungsinduzierte Wirbelablösungen an den Öffnungen verhindert. Die Lautsprecher werden von einer digitalen Steuereinheit betrieben. Alle Einheiten können dabei mit unterschiedlichen Signalen, die für jede Frequenz eine individuelle Amplitude und Phase aufweisen, angesteuert werden. Zusätzlich lassen sich einfache Grundsignale (Sinus, Dreieck, Rechteck, Rauschen, etc.) und überlagerte Signale kombinieren. Die zugrunde liegende Idee ist es, beliebige Schallsignale, Modenmuster oder rotierende Schalldruckfelder zu erzeugen. Wie in Bartelt et al. (2013) ausführlich beschrieben ist, können über eine spezielle Pulsansteuerung auch rotierende Schalldruckfelder erzeugt und eine, der typischen Rotor-Stator-Interaktion nachempfundene Schallsituation, simuliert werden. Es werden zwei synchronisierte 8-Kanal I/O-FPGA Karten NI-PXI-7854R (engl.: Field Programmable Gate Array) der Firma National Instruments eingesetzt, die sich je nach Anwendungsfall individuell mit den Ausgabesignalen beschreiben lassen. Diese nutzen einen internen Virtex-5-LX110-FPGA Prozessor mit einer 16 Bit Auflösung, bei einer Samplingrate von 1 MHz pro analogem Ausgangskanal. Somit ist eine sehr schnelle und hochaufgelöste Signalausgabe möglich. Die Signalerzeugung ist dabei in die gesamte Messsoftwareumgebung integriert, da eine exakte Synchronisation mit der Signalaufnahme der Mikrofone erfolgen muss.

2.3.2 Erzeugung der Modenstrukturen

Die Erzeugung stehender und rotierender Moden lässt sich durch die gezielte Ansteuerung der einzelnen Lautsprecher mit definiertem Phasenversatz erreichen. Generell werden bei harmonischer Anregung mit einem Lautsprecher stehende Umfangsmoden angeregt. Da der Welle keine Drehrichtung vorgegeben wird, breitet sie sich sowohl in positive als

auch in negative Umfangsrichtung aus. Werden hingegen mit Hilfe mehrerer Lautsprecher verschiedene stehende Umfangsmode gleicher Ordnung, jedoch mit unterschiedlicher Phasenlage zueinander angeregt, lässt sich über deren Überlagerung eine drehende Azimutalmodenstruktur erzeugen. Entscheidend ist dabei die Phasenlage zwischen dem Real- und Imaginärteil der resultierenden Gesamtmode. Beträgt diese genau $\phi_\theta = \pi/2$, so wird die Mode rotieren.

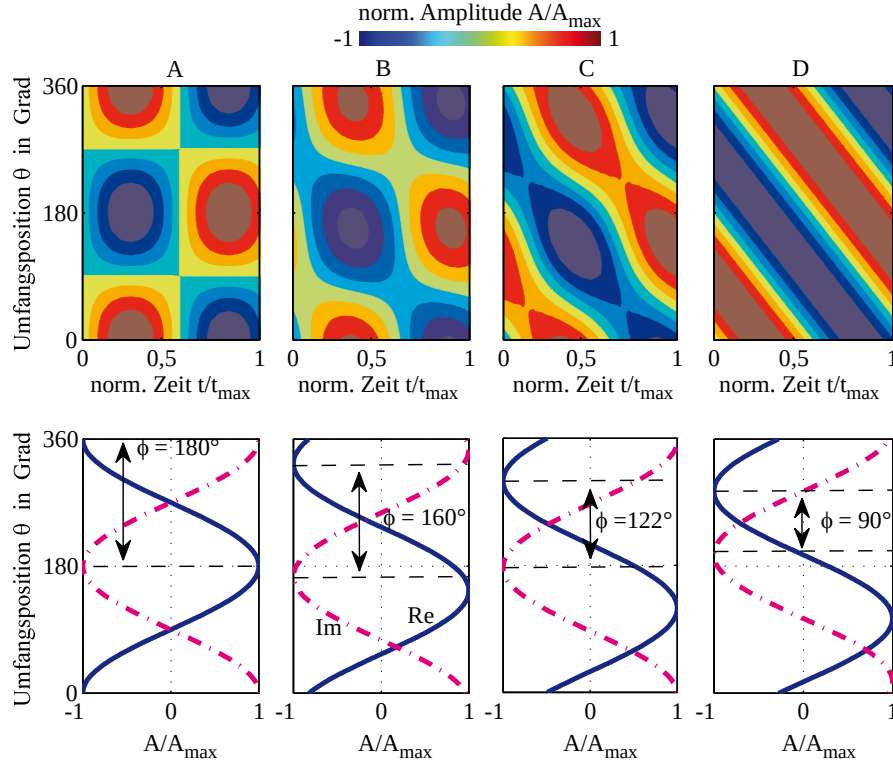


Abbildung 2.6: (oben) Erzeugte Modenstrukturen bei Überlagerung stehender Wellen mit definierten Phasenversätzen. (unten) Korrespondierende Real- und Imaginärteile der azimuthalen Schalldruckverteilung für den 10. Zeitschritt bei einer Anregungsfrequenz von 100 Hz. In Bezug auf Gl.(2.1) entspricht (A) $j = 1$, (B) $j = 2$, (C) $j = 3$ und (D) $j = 4$.

Mathematisch lässt sich dies mit dem in Gl.(3.24) gegebenen Teilmodenansatz herleiten. Eine stehende Umfangsmode ergibt sich stets aus zwei überlagerten, gleichartigen, doch entgegengesetzt drehenden azimuthalen Teilmoden. Bei Vernachlässigung des Strömungsdralls (sowohl die Strömungsfelder im AWT als auch im Einlauf der Luftturbine sind drallfrei) sind die axialen Wellenzahlen $k_{\pm x}^{\pm\theta}$, der sich in Umfangsrichtung entgegengesetzt und axial entweder stromauf oder stromab ausbreitenden Azimutalmode gleich. Unter der Annahme identischer Amplituden $\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta}$ (im Gegensatz zu Gl.(3.24) wird hier die komplexe Amplitude verwendet), gilt somit für die Summation der stehenden Umfangsmode

$$p'_m(x, \theta, t) = \left\{ \sum_{j=1}^4 \hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta} \left[e^{i(\pm m\theta + k_{\pm x}^{\pm\theta} x \pm \frac{(j-1)\pi}{2})} + j e^{i(\mp m\theta + k_{\pm x}^{\pm\theta} x)} \right] \right\} e^{-i\omega t} \quad (2.1)$$

Das resultierende Schalldruckfeld ergibt sich dabei aus der Summe der j stehenden Azimutalmode, die jeweils von einer der j Monopolquellen angeregt werden. Diese Verein-

fachungen sind für eine drallfreie Strömung möglich, was in guter Näherung dem Strömungszustand im Einlauf der Luftturbine und des AWT entspricht. Durch einfaches Zusammenfassen und Auflösen folgt aus Gl.(2.1) für die Überlagerung von vier stehenden Azimutalmoden schließlich

$$\begin{aligned} p'_m(x, \theta, t) &= 4\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta} e^{i(k_{\pm x}^{\pm\theta} x \mp m\theta)} e^{-i\omega t} \quad \text{bzw.} \\ &= 4\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta} (\cos(k_{\pm x}^{\pm\theta} x \mp m\theta) + i \sin(k_{\pm x}^{\pm\theta} x \mp m\theta)) e^{-i\omega t} \quad \text{mit } k_{\pm x}^{\pm\theta}, \theta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei stellt sich einzig im Fall von vier überlagerten stehenden Wellen, die einen Phasenversatz von $\pi/2$ zueinander aufweisen, eine reine Drehanweisung ein. Bei abweichenden Wellenanzahlen, Phasenversätzen oder unterschiedlichen Amplitudenverhältnissen tritt diese nicht auf. Über das Vorzeichen der Phase kann die Drehrichtung der erzeugten Mode beeinflusst werden.

In Abb. 2.6 sind dazu die resultierenden Schalldruckstrukturen unterschiedlich überlagelter stehender $mn_{[1;0]}$ Moden dargestellt. Dabei wird die Anzahl der überlagerten Moden j variiert, die jeweils $\pi/2$ phasenverschoben sind. Zusätzlich sind die korrespondierenden Real- und Imaginärteile der azimutalen Schalldruckverteilung für einen ausgewählten Zeitschritt aufgetragen. (A) zeigt die Modenstruktur zweier überlagelter Teilmoden ohne azimutalen Phasenversatz ϕ_θ (vgl. hierzu auch Gl. 3.24) zueinander. Die Phasenlage zwischen Real- und Imaginärteil der resultierenden Schalldruckverteilung entspricht dann genau 0° bzw. 180° , was zu einer stehenden Azimutalmode führt. Durch die Überlagerung zusätzlicher stehender Moden, die je einen azimutalen Phasenversatz von $\phi_\theta = \pi/2$ aufweisen, verringert sich die Phasenlage zwischen den Real- und Imaginärteilen des resultierenden Schalldruckfeldes. Dies ist in Abb. 2.6 in (B) für $j = 2$ und $\phi_\theta = 0, \pi/2$ und in (C) für $j = 3$ und $\phi_\theta = 0, \pi/2, \pi$ gezeigt. Dann weist die überlagerte Mode auch drehende Anteile auf. Durch Überlagerung von vier stehenden Moden mit $j = 4$ und $\phi_\theta = 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$ bildet sich eine reine Spinning Mode aus, wie in (D) gezeigt ist. Dann sind Real- und Imaginärteil des überlagerten Schalldruckfeldes genau orthogonal, was eine notwendige Bedingung für wandernde Wellen ist (vgl. Gl.2.2).

Für den Schallgenerator werden die azimutalen Phasenversätze mit Hilfe eines zeitlichen Phasenversatzes der Eingangssignale realisiert, die unter Berücksichtigung der Modenordnung, Wellenlänge und Lautsprecherposition über die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellen letztendlich einen räumlichen Phasenversatz ergeben. Diese Zusammenhänge zeigen ebenfalls, wie wichtig bei der Ansteuerung der Lautsprecher die Einhaltung exakter Phasenlagen und die Amplitudenverhältnisse zueinander sind. Geringe Abweichungen von wenigen Grad können zu einem fehlerhaft überlagerten Wellenfeld führen, so dass keine reinen Spinning Modes mehr anregbar sind.

Im Rahmen von Inbetriebnahmeversuchen werden im AWT die Amplitudengänge, die Fähigkeit spezifische Modenstrukturen anzuregen und die Quellpositionen untersucht (Bartelt et al. 2013). Abbildung 2.7 zeigt dazu exemplarisch drei verschiedene Schalldruckstrukturen, die durch eine gezielte Ansteuerung der Lautsprechereinheiten erzeugt werden. Neben der Grundmode lassen sich auf Basis der in diesem Abschnitt beschriebenen Theorien

sowohl stehende als auch rotierende Azimutalmoden verschiedener Ordnung anregen. Für weitere Validierungen sei auf Bartelt et al. (2013) verwiesen.

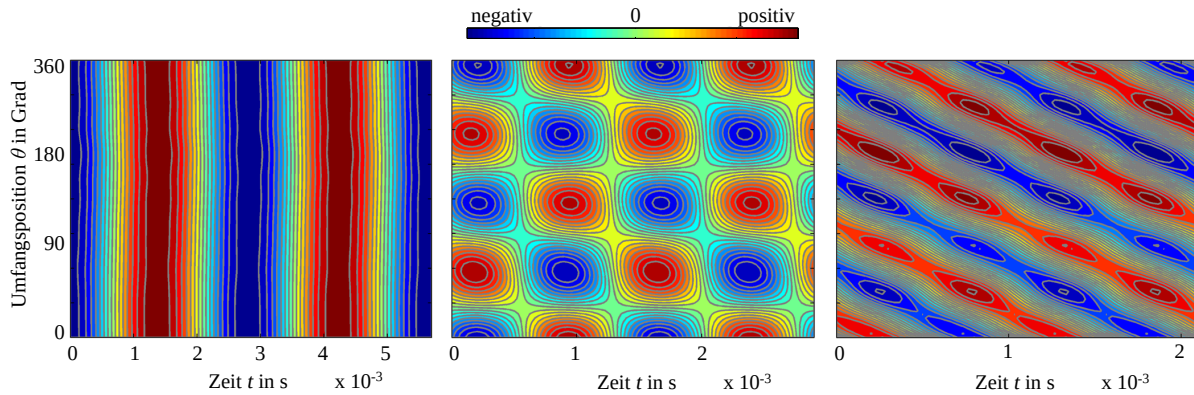


Abbildung 2.7: Experimentell bestimmte Schalldruckverläufe in der Messstrecke des AWT bei Anregung verschiedener Azimutalmoden. (links) Grundmode $mn_{[0;0]}$; (Mitte) Stehende Mode $mn_{[2;0]}$; (rechts) Spinning Mode $mn_{[3;0]}$

Die experimentellen Untersuchungen zeigen, dass der entwickelte Schallgenerator in der Lage ist, Turbomaschinen-spezifische Schallfelder und Modenstrukturen anzuregen. Somit steht für die experimentellen Schalltransportuntersuchungen ein leistungsfähiges Anregungssystem zur Verfügung.

2.4 Akustische Messtechnik

Für alle akustischen Messungen im AWT und der Versuchsturbine werden 1/4“-Druckfeldmikrofone der Firma GRAS eingesetzt. Dabei handelt es sich um vorpolarisierte Kondensatormikrofonkapseln (GRAS-40BD) in Kombination mit einem ICP-fähigen Vorverstärker (GRAS-26CB-S10). IPC steht dabei für „Integrated Circuit Piezoelectric“, einem etablierten Industriestandard für piezoelektrischer Sensoren mit integrierter Schaltung, bei denen sowohl das Messsignal, als auch die Versorgungsenergie über die gleiche Leitung übertragen werden. Die Einheiten verfügen dabei über einen hohen Dynamikbereich und ein niedriges Signal-zu-Rausch Verhältnis (SNR). Bis zu $f \leq 30$ kHz ist der Frequenzgang nahezu konstant. Um thermische Hystereseeffekte zu minimieren, sind die Mikrofonkapseln und Vorverstärker künstlich gealtert und so für Umgebungstemperaturen bis zu $T \sim 120^\circ \text{C}$ bei Schalldrücken bis zu $P \leq 174$ dB einsetzbar. Da die Mikrofone ohne die werkseitig vorgesehenen Schutzgitter (Reduktion strömungsinduzierter Geräusche) in die Wandbohrungen eingelassen werden, müssen sie vor den Messungen neu kalibriert werden.

Bei den eingesetzten Signalaufnahmesystemen handelt es sich im Kern um Schwingungsmesskarten NI PXI 4496 ICP der Firma National Instruments. Jede Karte verfügt über 16 analoge Eingangskanäle mit einer Samplingrate von 200 kHz pro Kanal. Da die Karten ICP fähig sind, steht bereits die für den Mikrofonbetrieb notwendige Versorgungsspannung bereit, so dass keine externen Vorverstärker benötigt werden. Abhängig von den einzusetzenden Sensoren können die Karten beliebig zusammengestellt und synchronisiert werden.

2 Prüfstände und Messtechnik

In den Turbinenversuchen werden bspw. drei Karten parallel verwendet, so dass insgesamt 48 Kanäle zur Verfügung stehen. Zusätzlich werden zwei 16 Kanal NI PXI-6361 AI/AO Karten eingebunden, die zur synchronen Aufnahme der allgemeinen Prüfstandsdaten verwendet werden.

3 Akustische Wellengleichung und deren Lösung für Rohrleitungen

In diesem Kapitel werden die den Schalltransportmechanismen zugrunde liegenden mathematischen Grundgleichungen - die akustischen Wellengleichungen - vorgestellt und diskutiert. Diese stellen die theoretische Grundlage des entwickelten Schalltransportmodells (bzw. des hybriden Analyseansatzes) dar, welches auf Basis der analytischen Lösungen der Wellengleichung schließlich die modale Schallfeldausbreitung berechnet. Dabei wird von einem homogenen, isentropen Fluid ausgegangen und lineare akustische Zusammenhänge werden vorausgesetzt. Akustische Quellen bleiben unberücksichtigt.

Wie bereits einleitend beschrieben ist, breiten sich Schallfelder in Triebwerken innerhalb definierter Berandungen aus. Obwohl die Geometrien der Strömung-führenden Kanäle oftmals sehr komplex sind, lassen sie sich in den meisten Fällen als Rohre mit kreis- bzw. ringkreisförmigem Querschnitt betrachten. So werden in Abschnitt 3.1 die akustischen Wellengleichungen für fest-berandete Kreis- oder Ringkreiskanäle in Zylinderkoordinaten angegeben. In Abschnitt 3.2 folgt die Lösung dieses Differentialgleichungsproblems. Da hier lediglich ein für das Grundverständnis benötigter Überblick gegeben werden soll, wird auf die explizite Herleitung der Wellengleichungen verzichtet und vielmehr auf die im Anhang gegebenen Erklärungen bzw. die umfangreiche Fachliteratur verwiesen (vgl. Rienstra und Hirschberg 2011, Delfs 2009, Munjal 1987).

3.1 Konvektive Wellengleichung in Zylinderkoordinaten

Allgemein beschreiben die Wellengleichungen den Transport einer physikalischen Größe ($\tilde{p}, \tilde{u}_i, \tilde{\rho}, \dots$) durch ein beliebiges Medium und können mannigfaltige Formen annehmen, wie z. B. Campos (2007a,b) zeigt. Die resultierenden Transportgleichungen müssen dabei stets die räumliche und zeitliche Änderung dieser Größen erfassen. Die akustischen Wellengleichungen werden in dieser Arbeit auf Basis der kontinuummechanischen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls unter Zuhilfenahme der kalorischen Zustandsgleichungen formuliert.

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Änderung der Dichte $\tilde{\rho}$ und ergibt sich zu

$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Die Impulserhaltung lässt sich über die Cauchy'sche Bewegungsgleichung (Spurk und Aksel 2007) angeben

$$\tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\delta_{ij} \tilde{p} + \tilde{P}_{ij} \right) + f_i = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{P}_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad . \quad (3.2)$$

3 Akustische Wellengleichung und deren Lösung für Rohrleitungen

Für die hier betrachteten akustischen Transportprozesse spielen die an einem Volumenelement angreifenden Körperkräfte f_i ebenso wenig eine Rolle wie dissipative Effekte. Aus diesem Grund können sowohl die in Gl.(3.2) berücksichtigten Körperkräfte als auch der Reibspannungstensor $\tilde{P}_{ij}$ vernachlässigt werden. Einzig die, in dem Spannungstensor $\tilde{\tau}_{ij}$ enthalten Normalspannungsterme $\delta_{ij}\tilde{\tau}_{ij}$, welche den statischen Drücken in Normalenrichtung entsprechen, müssen berücksichtigt werden. Somit vereinfacht sich Gl.(3.2) mit

$$\tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \quad (3.3)$$

zu der allgemein bekannten Euler-Gleichung, die einen Bezug zwischen den konvektiven Transportprozessen und den an einem Teilchen angreifenden Druckkräften für ein reibungsfreies Fluid herstellt.

Da bei akustischen Signalen lediglich die Ausbreitung einer Störinformation $\{p', u'_i, \rho', \dots\}$ relevant ist, kann die betrachtete physikalische Größe mit Hilfe eines Störansatzes, in einen rein ortsabhängigen und zeitlich stationären sowie einen zeitlich und räumlich fluktuierenden Anteil zu

$$\{\tilde{p}(x, t), \tilde{u}_i(x, t), \tilde{\rho}(x, t), \dots\} = \{p(x), u_i(x), \rho(x), \dots\} + \{p'(x, t), u'_i(x, t), \rho'(x, t), \dots\} \quad (3.4)$$

separiert werden. Die um die Störgrößen erweiterte Differentialgleichung lässt sich anschließend in einem fiktiven Arbeitspunkt linearisieren (vgl. Delfs 2009, Goldstein 1976), was zulässig ist solange für die Amplituden $|A(p', u'_i, \rho', \dots)| \ll |A(p, u_i, \rho, \dots)|$ gilt. Werden diese Störgrößenansätze und Linearisierungen auf Gl.(3.1) und Gl.(3.3) angewandt, so lassen sich mit

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u'_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + \rho \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{u'_r}{r} \right) = 0 \quad (3.5)$$

und

$$\rho \left(\frac{\partial u'_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_x}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} - \frac{2u_\theta}{r} u'_\theta + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \rho' \frac{u_\theta^2}{r} \quad (3.7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_\theta}{\partial x} + u'_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} u'_r + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \quad (3.8)$$

die linearisierten Kontinuitäts- und Impulsgleichungen in Zylinderkoordinaten angeben (Kousen 1999, Yourkovich 1976).

Dabei wird von einer in axialer und azimuthaler Richtung vollständig ausgeprägten Strömung ausgegangen, so dass eine Änderung von $u_x(r)$ und $u_\theta(r)$ nur in radialer Richtung vorliegt. Die radiale Geschwindigkeitskomponente sei im Vergleich zu der dominanten Axial- und Drallströmung vernachlässigbar klein ($u_r \rightarrow 0$). Wie bereits erwähnt ist, wird weiterhin eine stationäre, isentrope Hauptströmung angenommen, für die (isentrope) Temperaturschichtungen ausgeschlossen sind. Dies entspricht in guter Näherung dem Strömungsfeld hinter einem Turbinenrotor. Wie in Anhang B.1 gezeigt ist, lässt sich mit

$$p' = a^2 \rho' \quad (3.9)$$

3.1 Konvektive Wellengleichung in Zylinderkoordinaten

zusätzlich zu den Gl.(3.5) bis Gl.(3.8) eine linearisierte Druck-Dichtebeziehung angeben, die einen Zusammenhang zwischen dem Schalldruck und der Dichtestörung herstellt.

Durch räumliche Ableitung der Impulsgleichungen Gl.(3.6) - Gl.(3.8) und anschließender Verrechnung mit der Kontinuitätsbeziehung nach Gl.(3.5) lässt sich eine allgemeingültige Ausbreitungsgleichung für die akustischen Größen des Schalldrucks p' und der Schallschnelle u'_i in Zylinderkoordinaten bei überlagerter Scher- und Drallströmung bestimmen:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \text{Ma}_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\text{Ma}_\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + 2a \text{Ma}_x \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\text{Ma}_\theta \text{Ma}_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial \theta} + 2a \frac{\text{Ma}_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial t} - \\
& \frac{\rho}{r} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right) + \\
& 2\rho \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta u'_\theta}{r^2} - \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} \right) = \\
& -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{u_\theta^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{a^2} \right) + \frac{2\text{Ma}_\theta p'}{r a} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\
& - \frac{\partial \rho}{\partial r} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} u_\theta u'_\theta \right) .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Die Herleitung ist detailliert in Anhang B.1 dargestellt. Dabei handelt es sich allerdings nicht um eine Wellengleichung des Schalldrucks im klassischen Sinne, da in Gl.(3.10) neben dem Schalldruck p' auch noch die drei Komponenten der Schallschnelle u'_i enthalten sind, und diese Beziehungen somit nicht direkt gelöst werden kann. Den akustischen Größen ist in dieser Form eine Drall-überlagerte isentropen Hauptströmung überlagert, wobei in Gl.(3.10) noch kein spezifisches Drallmodell implementiert ist. Durch die Annahme einer speziellen Drallverteilung wird der radiale Dichtegradient entsprechend angepasst (vgl.Kousen (1999)).

Unter der Voraussetzung, dass die Drallkomponente u_θ bzw. Ma_θ klein gegenüber der Hauptströmung u_x bzw. Ma_x ist, vereinfacht sich Gl.(3.10) zu:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \text{Ma}_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{2\text{Ma}_x}{a} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} - 2\rho a \frac{\partial \text{Ma}_x}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial x} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} \tag{3.11}$$

Diese Form berücksichtigt weiterhin eine vom Radius abhängige axiale Geschwindigkeitsverteilung. Wird hingegen ein konstantes Strömungsprofil angenommen, so wie es in guter Näherung für Rohrströmungen hoher Geschwindigkeit der Fall ist, ergibt sich mit

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \text{Ma}_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{2\text{Ma}_x}{a} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} \tag{3.12}$$

eine Formulierung, die exakt der vielfach in der Literatur verwendeten einfachen konvektiven Wellengleichung

$$\frac{1}{a^2} \frac{D^2 p'}{Dt^2} = \nabla^2 p' \tag{3.13}$$

entspricht (Rienstra und Hirschberg 2011, Schönwald 2010). Die materielle Ableitung $D/Dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ enthält dabei sowohl das zeitliche als auch das konvektive Differential. Die mathematische Vorgehensweise der Transformation ist in Anhang B.2 hergeleitet.

3.2 Lösung der Wellengleichungen

Aus den im vorangegangenen Abschnitt 3.1 hergeleiteten konvektiven Wellengleichungen wird eine analytische Lösung für Ringkreiskanäle bei Überlagerung mit einer konstanten axialen Grundströmung formuliert. Diese kann als vereinfachte Beschreibung des Schalltransports in den Strömungskanälen einer axialen Turbomaschine verstanden werden. Unter Vernachlässigung des Nabenkörpers wird anschließend eine Lösung für einfache zylindrische Rohre bestimmt, welche z.B. zur Beschreibung der Schallausbreitung in den Ein- und Auslaufstrecken von Turbinen dient. In Ergänzung dazu werden in Abschnitt 3.2.2 erweiterte Lösungen für komplexere Strömungsprofile beschrieben und diskutiert.

3.2.1 Lösung für Ringkreiskanäle

Basis für die Lösung ist die konvektive Wellengleichung für eine rein axiale Kanaldurchströmung (vgl. Gl. 3.12) mit einer über der Kanalhöhe konstanten Strömungsgeschwindigkeit Ma_x . Für diese homogene Differentialgleichung 2. Ordnung gilt es eine allgemeingültige Lösung für den Schalldruck $p'(x, r, \theta, t)$ mit Hilfe eines harmonischen Separationsansatzes

$$p'(x, r, \theta, t) = \Re\{f(x)g(r)h(\theta)e^{-i\omega t}\} \quad (3.14)$$

zu finden. Die drei Ausbreitungsfunktionen $f(x)$, $g(r)$ und $h(\theta)$ repräsentieren die Schallausbreitung in alle Raumrichtungen, während der Zeitterm über den harmonischen Anteil $e^{-i\omega t}$ berücksichtigt ist. Wird dieser Ansatz auf die einzelnen Ableitungen der Gl.(3.12) angewandt und anschließend alle Terme durch die Ausbreitungsfunktionen dividiert, lässt sich Gl.(3.12) zu

$$\begin{aligned} & (1 - Ma_x^2) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \frac{1}{f(x)} - 2ikMa_x \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{1}{f(x)} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} \frac{1}{g(r)} + \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} \frac{1}{g(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h(\theta)}{\partial \theta^2} \frac{1}{h(\theta)} + k^2 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.15)$$

zusammenfassen, wobei die Wellenzahl k bereits für ω/a eingeführt worden ist. Diese gemischte Differentialgleichung kann nun sukzessiv für jede einzelne Ausbreitungsfunktion gelöst werden. Dazu gilt es Gl.(3.15) derart umzustellen, dass die jeweils von einer der drei Variablen x , r und θ abhängigen Terme separiert sind. So liegt für jede Ausbreitungsfunktion eine eigene Differentialgleichung vor. Das genaue Vorgehen ist in Anhang B.3 beschrieben und wird dort ausführlich hergeleitet. In diesem Abschnitt seien lediglich die finalen Gleichungen und Lösungen angegeben.

Für die Wellenausbreitung in Umfangsrichtung $h(\theta)$ lässt sich mit

$$\frac{1}{h(\theta)} \frac{d^2 h(\theta)}{d\theta^2} = -m^2 \quad (3.16)$$

eine gewöhnliche homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmen, die mit Hilfe einer harmonischen Ansatzfunktion gelöst werden kann

$$h(\theta) = \hat{A}_{\theta,+} e^{-im\theta} + \hat{A}_{\theta,-} e^{im\theta} \quad \text{wobei} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

Diese Exponentialfunktion stellt aufgrund ihrer Komplexwertigkeit mathematisch gesehen eine Drehbewegung dar und beschreibt jeweils eine in θ_+ und in θ_- Richtung drehende Umfangswelle, wobei die Drehrichtung über das Vorzeichen des Exponentens festgelegt wird. Der ganzzahlige Exponent m entspricht dabei der Anzahl der Wellenfronten pro Umlauf und gibt die Ordnung der Umfangsmode an. Mit $\hat{A}_{\theta,\pm}$ sind darüber hinaus zwei komplexe Amplituden der Umfangswellen eingeführt. Für die axiale und radiale Ausbreitungsfunktionen ergeben sich mit

$$(1 - \text{Ma}_x^2) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \frac{1}{f(x)} - 2ik\text{Ma}_x \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{1}{f(x)} - k_{r,[mn]}^{(\sigma)2} + k^2 = 0 \quad (3.18)$$

und

$$\frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \left(k_{r,[mn]}^{(\sigma)2} - \frac{m^2}{r^2} \right) g(r) = 0 \quad (3.19)$$

ebenfalls zwei lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, wobei $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ die zunächst nicht näher definierte Separationskonstante des gewählten Ansatzes ist.

Die axiale Wellenausbreitung nach Gl.(3.18) entspricht einem einfachen Sturm-Liouville Eigenwertproblem und kann mit einem harmonischen Ansatz zu

$$f(x) = \hat{A}_{x,+} e^{-ik_{x,[mn]}^+ x} + \hat{A}_{x,-} e^{-ik_{x,[mn]}^- x} \quad (3.20)$$

bestimmt werden. Die Ausbreitung in radialer Richtung stellt hingegen eine Spezialform der Sturm-Liouville-Klasse als Bessel'sche Differentialgleichung dar. Auch für diese sind allgemeingültige Ansätze in Form von Zylinderfunktionen bekannt, so dass sich die radiale Ausbreitungsfunktion mit

$$g(r) = \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)} = J_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) + Q_{[mn]}^{(\sigma)} Y_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) \quad (3.21)$$

für einen schallhart berandeten Kreiskanal ergibt. Gl.(3.21) enthält neben der Bessel- und Neumannfunktion J_m und Y_m , auch noch einen sogenannten Amplitudenfaktor $Q_{[mn]}^{(\sigma)}$, der den Anteil der beiden Zylinderfunktionen an der Gesamtlösung gewichtet. Der Index (σ) soll verdeutlichen, dass die jeweilige Größe vom Nabenverhältnis abhängt. Dazu sind in Anhang B.6 die Verläufe der Zylinderfunktionen, deren Ableitung sowie die des Amplitudenfaktors $Q_{[mn]}^{(\sigma)}$ dargestellt.

Die in Gl.(3.20) und Gl.(3.21) gegebenen Variablen $k_{x,[mn]}^\pm$ bzw. $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ entsprechen physikalisch betrachtet den axialen und radialen Wellenzahlen, die sich mit $k_{r,[mn]}^{(\sigma)} = \mu_{[mn]}/r_a$ aus den Eigenwertbestimmungen ergeben. Genau diesen kommt bei der Lösung der Wellengleichung eine besondere Bedeutung zu. Es sind die Eigenwerte $\mu_{[mn]}$, die die Form und Ausbreitung des Wellenfeldes bestimmen und für eine Kopplung der drei Ausbreitungsfunktionen verantwortlich sind.

3 Akustische Wellengleichung und deren Lösung für Rohrleitungen

Wie in Anhang B.3 hergeleitet ist, resultieren die radialen Wellenzahlen aus den Eigenwerten der radialen Differentialgleichung (im Fall des Ringkreiskanals, also aus den Eigenwerten der Zylinderfunktionen) und sind vom Nebenverhältnis σ abhängig. Die Eigenwerte ergeben sich in diesem Fall wiederum über das n -te lokale Extremum der Bessel- und Neumannfunktion m -ter Ordnung (vgl. Gl.(B.49)). Die axialen Wellenzahlen

$$k_{x[mn]}^{\pm} = \frac{k\text{Ma}_x \pm \sqrt{k^2 - (1 - \text{Ma}_x^2) k_{r,[mn]}^{(\sigma)^2}}}{(1 - \text{Ma}_x^2)} \quad (3.22)$$

hängen über $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ sowohl von den Eigenwerten der Zylinderfunktionen als auch von dem Nebenverhältnis ab.

Die allgemeine Lösung der Gl.(3.12) zur Beschreibung der Schallfeldausbreitung in einem Ringkanal ergibt sich schließlich über den gewählten Ansatz nach Gl.(3.14) aus der Lösung der einzelnen Ausbreitungsfunktionen und den Eigenwerten bzw. Wellenzahlen zu:

$$p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) = \Re \left\{ \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) \left(\hat{A}_{+x}^{+\theta} e^{i(m\theta + k_{+x}^{+\theta} x)} + \hat{A}_{+x}^{-\theta} e^{i(-m\theta + k_{+x}^{-\theta} x)} + \right. \right. \\ \left. \left. \hat{A}_{-x}^{+\theta} e^{i(m\theta - k_{-x}^{+\theta} x)} + \hat{A}_{-x}^{-\theta} e^{i(-m\theta - k_{-x}^{-\theta} x)} \right) e^{-i\omega t} \right\} \quad (3.23)$$

Wie bereits erwähnt ist, breitet sich das Schallfeld in berandeten Umgebungen in Form akustischer Moden aus. Gl.(3.23) kann dementsprechend als Beschreibung von vier überlagerten Teilmoden verstanden werden, die sich sowohl in positive als auch negative Umfangs- und Axialrichtung ausbreiten. Über die hier eingeführten komplexen Amplituden $\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta}$ ist der Anteil einer jeweiligen Teilmode an der Gesamtlösung definiert, denn sie stellen eine Kombination der Amplituden der axialen und azimuthalen Wellenfunktion dar.

Im Folgenden wird mit $\phi_{\pm x}^{\pm\theta}$ ein, der komplexen Amplitude zugeordneter azimuthaler Phasenwinkel explizit aufgeführt, so dass sich Gl.(3.24) zu

$$p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) = \Re \left\{ \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) \left(\hat{A}_{+x}^{+\theta} e^{i(m\theta + k_{+x}^{+\theta} x + \phi_{+x}^{+\theta})} + \hat{A}_{+x}^{-\theta} e^{i(-m\theta + k_{+x}^{-\theta} x + \phi_{+x}^{-\theta})} + \right. \right. \\ \left. \left. \hat{A}_{-x}^{+\theta} e^{i(m\theta - k_{-x}^{+\theta} x + \phi_{-x}^{+\theta})} + \hat{A}_{-x}^{-\theta} e^{i(-m\theta - k_{-x}^{-\theta} x + \phi_{-x}^{-\theta})} \right) e^{-i\omega t} \right\} \quad (3.24)$$

ergibt. Die vormalig komplexe Amplitude liegt somit als reelle Größe vor.

Das sich in einem Kreiszyylinder oder Ringkreiszyylinder ausbreitende Gesamtschallfeld kann selbst wiederum als eine Überlagerung vieler verschiedener Moden verstanden werden. Unter der Annahme kleiner Amplituden lässt sich der Schalldruck im betrachteten Kontrollvolumen als lineare Superposition der modalen Einzeldruckverteilungen nach

$$p'(x, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{N} \quad (3.25)$$

bestimmen.

Soll anstelle eines Ringkreiskanals ein einfacher Kreiskanal betrachtet werden, so gelten prinzipiell auch die in Gl.(3.24) gegebenen modalen Ansätze. Allerdings ändern sich die zur Herleitung der radialen Wellengleichung verwendeten Randbedingungen (vgl. Anhang B.3), was zum Wegfall der Neumannfunktion Y_m in Gl.(3.21) führt. Dementsprechend vereinfacht sich die Lösung der radialen Ausbreitungsfunktion zu

$$\Lambda_{[mn]} = J_m(k_{r,[mn]}r) \quad . \quad (3.26)$$

Damit einhergehend, ist der Eigenwert der Zylinderfunktion nun nicht mehr vom Nabenverhältnis abhängig, so dass sich eine andere Form des Schallfeldes ergibt.

Abschließend lässt sich festhalten, dass mit der konvektiven Wellengleichung nach Gl.(3.12) ein analytisch lösbarer Zusammenhang zur Beschreibung des Schalltransports in gleichförmig durchströmten Kreis- und Ringkreiskanälen formuliert werden kann. Die Lösung ergibt sich über die Eigenschwingungsformen des Gasvolumens, die sogenannten Moden. Dies führt zu einem klassischen Eigenwertproblem für die axiale Wellenzahl, welche zwei Scharen an Eigenwerten besitzen; je eine für stromauf und je eine für stromab wandernde Moden. Da die Eigenfunktionen orthogonal zueinander sind, lässt sich aus den resultierenden Eigenfunktionen eindeutig das Schalldruckfeld bestimmen. Ist die überlagerte Strömung hingegen nicht mehr gleichförmig, indem sie etwa Drall- und Scherströmungsanteile aufweist, so ist die Orthogonalitätsbeziehung nicht mehr gewährleistet, und die das Schalldruckfeld beschreibende Schar an Eigenfunktionen ist nicht mehr vollständig. In dem nachfolgenden Abschnitt werden dazu Ansätze vorgestellt, die die axialen Wellenzahlen für diesen Fall mit Hilfe von Nährungsverfahren bzw. numerischen Methoden bestimmen.

3.2.2 Approximationslösung für Ringkanäle bei Drallströmung

Die Strömungsfelder in Turbomaschinen sind im Regelfall Drall-behaftet. Diese in Umfangsrichtung wirkende Geschwindigkeitskomponente hat einen Einfluss auf die Schallausbreitung in dem Strömungskanal und muss für die Bestimmung der akustischen Transportphänomene berücksichtigt werden. Bei der Überlagerung der Hauptströmung mit einer Drallströmung gelten die in Abschnitt 3.2.1 angenommenen Vereinfachungen nicht mehr. Neben der konvektiven Geschwindigkeit in axialer Richtung müssen nun auch noch die vom Radius abhängigen Umfangskomponenten berücksichtigt werden. Die beiden Geschwindigkeitsfelder sind folglich gekoppelt. Anstelle der Gl.(3.12) wird nun die in Gl.(3.10) gegebene Wellengleichung verwendet, für deren Lösung zusätzliche Informationen der Schallschnellekomponenten benötigt werden. Dies führt zu einem komplexen Differentialgleichungssystem für die radialen Schallfeldkomponenten und es existiert keine geschlossene analytische Lösung mehr, um die axialen Wellenzahlen zu bestimmen.

Die Bestimmung der Eigenwerte ist somit erschwert, zumal durch die in realen Strömungen auftretenden Scherschichten weitere Effekte zum Tragen kommen. So zeigt z.B. Kerrebrock (1977), dass in einem gleichförmigen, homogenen Strömungsfeld drei verschiedene Störmechanismen wirken - Entropie-, Vorticity- und Druckstörungen, die zunächst

3 Akustische Wellengleichung und deren Lösung für Rohrleitungen

nicht interagieren. Letztere wandern durch die Domäne als Schalldruckmoden, während die Entropie und Vorticity-Wellen (hydrodynamische Moden) rein konvektiv transportiert werden. Tam und Auriault (1998), Campos et al. (1999) oder Vilenski und Rienstra (2007b) führen eine zusätzliche Unterteilung der hydrodynamischen Moden in rein konvektive und Kontinuumsmoden ein.

In stark Drall-behafteten Strömungen liegt eine direkte Kopplung zwischen dem akustischen und hydrodynamischen Feld vor. Während das Eigenwertproblem bei Überlagerung des Schallfelds mit einer gleichförmigen axialen Hauptströmung analytisch gelöst werden kann, ist dies für ungleichförmige Strömungsprobleme nur noch numerisch möglich. So auch bei der hier beschriebenen gekoppelten Drall- und Hauptströmung, denn der zur analytischen Lösung der Wellengleichung genutzte Separationsansatz nach Gl.(3.14) ist nun nicht mehr anwendbar, da die Geschwindigkeiten $Ma_x(r)$ und $Ma_\theta(r)$ vom Radius abhängen.

Bereits Ende der 1960er Jahre veröffentlicht Salant (1968) eine Studie, um den Einfluss einer homogenen, inviskosen Drall-behafteten Strömung auf die Ausbreitungseigenschaften des modalen Schallfelds zu untersuchen. Nayfeh et al. (1974) erweitert diese Ansätze für Scherströmungen mit besonderem Hinblick auf impedanzbelegte Oberflächen. Es werden zudem numerische Ansätze vorgestellt, die Differentialgleichungen mit Hilfe von einem Finite-Differenzen-Verfahren zu lösen. Im Gegensatz dazu nutzt z.B. Yourkovich (1976) eine Galerkin-Methode, um die aus den linearisierten Erhaltungsgleichungen formulierten Wellengleichungen für eine Scher-Drall-Strömung, numerisch zu lösen. Dabei werden erstmalig auch die radialen Abhängigkeiten des Dichtefeldes erfasst und gezielt die Einflüsse der Drallüberlagerung auf das Ausbreitungsverhalten akustischer Moden untersucht. In Ergänzung dazu werden von Kerrebrock (1977) verschiedene Drallmodelle auf das Transportverhalten gasdynamischer Störgrößen in Kreiskanälen untersucht. Neben Festkörper- und Potentialwirbelmodellen werden auch aus diesen kombinierte Modelle (numerische) verwendet, wobei stets von einem nicht-viskosen Fluid ausgegangen wird. Kerrebrock (1977) gibt eine umfangreiche Herleitung der Eigenwertbestimmung bzw. der axialen Wellenzahlen für Scher-, Kontinuums- und akustische Wellen an. Auch Golubev und Atassi (1996, 1998) untersuchen den Einfluss einer Drallströmung auf akustische und hydrodynamische Moden. Dazu leiten sie aus den linearisierten Erhaltungsgleichungen eine radiale Ausbreitungsgleichung her und formulieren diese als Eigenwert-Problem, aus dem sich numerisch die axialen Wellenzahlen ergeben. Kousen (1999) greift einen ähnlichen Ansatz auf, doch er definiert ein Eigenwertsystem, das die Bestimmung sämtlicher instationärer Störgrößen bei beliebigen Strömungsprofilen zulässt (vgl. auch Kousen (1995), Kousen (1996)). Zur Berechnung der radialen Gradienten verwenden sowohl Golubev und Atassi (1996) als auch Kousen (1999) ein Finite-Differenzen-Verfahren. Weitere Arbeiten zur Untersuchung des Dralleinflusses auf das Eigenwertverhalten bzw. die Ausbreitungseigenschaften akustischer Moden, sind z.B. bei Tam und Auriault (1998) oder Nijboer (2001) zu finden.

Neben den numerischen Modellen werden in der offenen Literatur verschiedene Approximationsansätze zur Bestimmung der axialen Wellenzahl bei einer überlagerten Haupt- und Drallströmung angegeben. Diese werden auf Basis der vereinfachten Wellengleichungen unter Zuhilfenahme einfacher Strömungs- und Drallmodelle bestimmt. Dennoch sind die Approximationsmodelle insofern interessant, als dass sie eine einfache Möglichkeit darstellen, komplexere Strömungsformen in analytischen Ausbreitungsmodellen zu berücksichti-

gen, ohne aufwendige Eigenwertlösungen mit Hilfe numerischer Simulationen durchführen zu müssen. Da die korrekte Vorhersage der axialen Wellenzahlen für die Beschreibung der Wellenausbreitung in Kanälen von entscheidender Bedeutung ist, sollen im Rahmen dieser Arbeit verschiedene Approximationsmodelle gegenübergestellt und verglichen werden. Diese Vorarbeiten dienen dazu, einen adäquaten Approximationsansatz für das in dieser Arbeit entwickelte Schalltransportmodell zu finden. Eine solche Gegenüberstellung und qualitative Bewertung unterschiedlicher Wellenzahlmodelle ist in der offenen Literatur nicht bekannt.

Es werden die Approximationen von Lohmann (1978), Ghiladi (1981), Kousen (1996) und Nijboer (2001), denen ein Festkörperdrall-Modell zugrunde liegt, sowie das auf Basis einer Potentialwirbelannahme formulierte Modell von (Golubev und Atassi 1996) untersucht. Da in den meisten Literaturreferenzen keine genauen Angaben zur Herleitung der vorgeschlagenen Approximationsmodelle gegeben sind, wird zusätzlich eine Approximation von Keller (2013) vorgestellt. Er hat im Rahmen der Forschungsarbeiten zu dieser Dissertation eine Approximation für einen Festkörperwirbelansatz mit Hilfe eines speziellen Transformationsverfahrens entwickelt und detailliert hergeleitet.

Für die Verifikation der vereinfachten Modelle wird ein Finite-Elemente-Modell zur Berechnung der axialen Wellenzahlen entwickelt, deren Ergebnisse als Referenz dienen. Da lediglich die Ausbreitung der akustischen Moden und nicht der hydrodynamischen betrachtet werden soll, wird mit

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{d \ln(\rho(r))}{dr} \right) \frac{d}{dr} + \left(\text{Ma}_x(r) \mu_{[mn]}^{*\pm} + \text{Ma}_\theta(r) \frac{m}{r} - k \right)^2 - \frac{m^2}{r^2} - \mu_{[mn]}^{*\pm 2} \right] \varphi(r) = 0 \quad (3.27)$$

eine spezielle Form der radialen Ausbreitungsgleichung für das akustische Potential $\varphi(r)$ hergeleitet und als Eigenwertproblem formuliert. Die detaillierte Herleitung ist in Anhang B.4 gegeben. Da die Eigenwerte sowohl für das akustische Potential als auch den Schalldruck identisch sein müssen, ist diese Formulierung zulässig. Im Gegensatz zu den vereinfachten Approximationsmodellen basiert die Lösung des numerischen Modells auf den gekoppelten Differentialgleichungen in axialer, azimuthaler und radialer Ausbreitungsrichtung. Es wird dabei von einer Potentialströmung ausgegangen, mit einer über der Kanalhöhe konstanten axialen Strömungsgeschwindigkeit $\text{Ma}_x(r)$, da Schereffekte vernachlässigt bleiben sollen. Dem Hauptströmungsfeld ist ein Potentialwirbel überlagert, so dass sich in radialer Richtung die Umfangsgeschwindigkeit gemäß $\text{Ma}_\theta(r) = \Gamma/r$ ergibt. Ein Potentialwirbel stellt in guter Näherung das sich hinter einem Rotor einstellende Drallprofil in der Kernströmung dar (Kerrebrock 1977). Gl.(3.27) wird unter Berücksichtigung schallharter Wände an Welle und Gehäuse mittels Neumann-Randbedingungen numerisch für eine beliebige Schar an Eigenwerten $\mu_{[mn]}$ gelöst, aus denen sich die axiale Wellenzahl ergibt. Jeder Eigenwert resultiert aus einer spezifischen Kombination azimuthaler m und radialer n Modenordnungen. Für die numerische Berechnung wird das Differentialgleichungsproblem mit quadratischem Wellenzahlen zunächst in ein lineares Eigenwertproblem umformuliert und in die allgemeine Form $\mathbf{A}x = \mu_{[mn]} \mathbf{B}x$ überführt. Diese Eigenwertbestimmung lässt sich mit Standardverfahren, wie in diesem Fall mit den ARPACK-Routinen, lösen (Lehoucq et al. 1998). Die verwendete numerische Methode ist ein 1D-Finite-Elemente-Verfahren (FEM). Aus den berechneten Eigenwerten können anschließend mit $\mu_{[mn]}^{*\pm} = \sqrt{k^2 - (\mu_{[mn]}/r_a)^2}$ die axialen Wellenzahlen bestimmt und mit den Lösungen der Approximationsmodelle verglichen werden.

3 Akustische Wellengleichung und deren Lösung für Rohrleitungen

Dazu sind in Tab. 3.1 fünf verschiedene Approximationsansätze und deren Literaturquelle aufgeführt. Die Koeffizienten $a...d$ ergeben mit Gl.(3.28) die entsprechenden axialen Wellenzahlen

$$k_{x,[mn]}^{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{b - c}}{d} \quad . \quad (3.28)$$

Es ist das Ziel, mit den jeweiligen Approximationsmodellen der Gl.(3.28) eine möglichst genaue Näherung für die axialen Wellenzahlen in einem komplexen Strömungsfeld zu erlangen. Dabei werden die radialen Wellenzahlen $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ nicht numerisch bestimmt, sondern mit Hilfe des in Gl.(3.21) gegebenen analytischen Ansatzes approximiert. In Anhang B.5 wird dazu mathematisch nachgewiesen, dass die in Tab. 3.1 verwendeten radialen Wellenzahlen $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ jenen des strömungsfreien Falls entsprechen und sich somit einfach bestimmen lassen.

Tabelle 3.1: Koeffizienten der verschiedenen Approximationsmodelle

Name	a	b	c	d
Lohmann (1977)	$\frac{\text{Ma}_x \left(-k \pm \text{Ma}_\theta k_{r,[mn]}^{(\sigma)} \right)}{(1 - \text{Ma}_x^2)}$	$\frac{\left(k \pm \text{Ma}_\theta k_{r,[mn]}^{(\sigma)} \right)^2}{(1 - \text{Ma}_x^2)}$	$\frac{(1 - \text{Ma}_x^2) k_{r,[mn]}^{(\sigma)}}{(1 - \text{Ma}_x^2)}$	1
Ghiladi (1981)	$\text{Ma}_x \left(k \pm \text{Ma}_\theta k_{r,[mn]}^{(\sigma)} \right)$	$\left(k \pm \text{Ma}_\theta k_{r,[mn]}^{(\sigma)} \right)^2$	$(1 - \text{Ma}_x^2) k_{r,[mn]}^{(\sigma)2}$	$(1 - \text{Ma}_x^2)$
Kousen (1996)	$\text{Ma}_x \left(k - \text{Ma}_\theta \frac{m}{r_a} \right)$	$\left(k - \text{Ma}_\theta \frac{m}{r_a} \right)^2$	$-(\text{Ma}_x^2 - 1) k_{r,[mn]}^{(\sigma)2}$	$(\text{Ma}_x^2 - 1)$
Gloubev und Attasi (1996)	$-\text{Ma}_x \left(k - \frac{m}{r_m} \text{Ma}_x \text{Ma}_\theta \right)$	$\left(k - \frac{m}{r_m} \text{Ma}_x \text{Ma}_\theta \right)^2$	$\frac{(1 - \text{Ma}_x^2)}{\left(\frac{m^2}{r_m^2} + \left(\frac{n\pi}{\Delta r} \right)^2 \right)}$	$(1 - \text{Ma}_x^2)$
Nijboer (2001)	$\frac{\text{Ma}_x \left(-k + \text{Ma}_\theta \frac{m}{r_a} \right)}{1 - \text{Ma}_x^2}$	$\left(\frac{-k + \text{Ma}_\theta \frac{m}{r_a}}{1 - \text{Ma}_x} \right)^2$	$\frac{k_{r,[mn]}^{(\sigma)2}}{1 - \text{Ma}_x^2}$	1
Keller (2013)	$\text{Ma}_x \left(k - \text{Ma}_\theta \frac{m}{r_a} \right)$	$\left(k - \text{Ma}_\theta \frac{m}{r_a} \right)^2$	$(1 - \text{Ma}_x^2) k_{r,[mn]}^{(\sigma)2}$	$(1 - \text{Ma}_x^2)$

Da keine analytisch exakten bzw. experimentell ermittelbaren Referenzlösungen existieren, wird für die Verifikation der Approximationsmodelle auf einen Vergleich mit numerischen Berechnungen zurückgegriffen. Dazu dienen zum einen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Simulationen als Referenz, zum anderen die bei Nijboer (2001) vorgestellten Ergebnisse zweier unterschiedlicher numerischen Simulationen. Dort werden die axialen Wellenzahlen sowohl in einer homentropen Drallströmung, als auch in einer Drallströmung mit konstanter Dichte untersucht. Durch den Vergleich der Ergebnisse der unterschiedlichen numerischen Simulationen mit jenen der Approximationsmodelle, soll die Güte der approximativ bestimmten Wellenzahlen näher untersucht werden. Darüber

hinaus lassen sich die in der Literatur aufgeführten Modelle für ein anwendungsorientiertes Beispiel vergleichen, um etwaige Übereinstimmungen bzw. Abweichungen der Modelle untereinander aufzuzeigen.

Abbildung 3.1 stellt die Ergebnisse für drei verschiedene Strömungszustände gegenüber. Dazu werden die axialen Wellenzahlen für einen Ringkreiskanal mit einem Innenradius $r_i = 0,4 \text{ m}$, einem Außenradius $r_a = 1 \text{ m}$, bei $k = 10 \text{ m}^{-1}$ für $m = 2$ und $n = 0 \dots 10$ berechnet und verglichen. Um direkte Rückschlüsse auf das Ausbreitungsverhalten der Moden ziehen zu können, wird der Imaginärteil der axialen Wellenzahl über deren Realteil abgetragen. So ist direkt erkenntlich, wann diese einen komplexen Anteil aufweisen und folglich Cut-Off sind. Die Ordnung der Radialmoden läuft von außen nach innen.

Zunächst wird der strömungsfreie Referenzzustand betrachtet, für den nach Gl.(3.22) eine eindeutige analytische Lösung berechnet werden kann, die sich zur Validierung der numerischen Ergebnisse verwenden lässt. Wie in Abb. 3.1 (oben) zu erkennen ist, stimmen sowohl die berechneten Werte der Approximationsmodelle als auch die der numerischen Lösung mit den analytischen exakt überein. Für diesen Fall sind für $m = 2$ die ersten beiden Radialmoden $n = 0, 1$ ausbreitungsfähig, da deren korrespondierende Eigenwerte rein reell sind. Für alle höheren Radialmoden liegen folglich nur imaginäre Eigenwerte vor. Bereits an dieser Gegenüberstellung zeigt sich, dass das von Lohmann (1978) formulierte Modell fehlerhaft ist und falsche Eigenwerte berechnet.

Im zweiten Fall wird dem Schallfeld eine konstante Hauptströmung $\text{Ma}_x = 0.3$ mit einer geringen Drallkomponente $\text{Ma}_\theta(r_a) = 0.1$ überlagert. Wie bereits einleitend beschrieben ist, existiert aufgrund des gekoppelten Drall- und Hauptströmungsfelds nun keine analytisch eindeutige Lösung mehr (Yourkovich 1976), denn die Eigenfunktionen der akustischen Moden sind nicht mehr vollständig und nicht mehr orthogonal zueinander. Neben den akustischen Moden treten nun auch hydrodynamische auf, wie ausführlich in Anhang B.4 diskutiert wird. Die Existenz der axialen Strömungskomponente verschiebt die Cut-On Line hin zu negativen Werten. In Ergänzung zu den numerischen Ergebnissen sind für diesen Fall auch Referenzwerte aus der Literatur eingetragen (Simulationen von Nijboer (2001)). Wie bereits bei diesem geringen Dralleinfluss deutlich zu erkennen ist, werden, neben dem Modell von Lohmann (1978), auch mit den Approximationen nach Ghiladi (1981) stark abweichende Werte der axialen Wellenzahl bestimmt. Besonders die Vorhersage einer dritten ausbreitungsfähigen Mode für die Wellenzahlen $k_{x,[mn]}^\pm = 0.2 \text{ m}^{-1}$ und -7.5 m^{-1} (vgl. Abb. 3.1, Mitte) zeigt, dass das Modell zu falschen Eigenwerten führt. Diese Tendenzen verstärken sich mit erhöhter Drallstärke, wie in Abb. 3.1 (unten) zu sehen ist. Die sich schräg ausbildenden Äste der Cut-On Linie sind für solch niedrige Azimutalmoden ebenfalls untypisch und stimmen weder mit den Simulationsergebnissen noch mit der Literatur überein (Golubev und Atassi 1996, Tam und Auriault 1998). Dies ist besonders interessant, da es sich gerade bei Ghiladi (1981) um ein vielfach zitiertes und oft eingesetztes Modell handelt. Es wird mit dieser Analyse gezeigt, dass von der Verwendung dieses Modells abgesehen werden sollte. Wesentlich bessere Übereinstimmungen sind z.B. für die Approximationen nach Kousen (1996), Nijboer (2001) und Keller (2013) festzustellen.

Wie Keller (2013) nachweist, erfolgt die Herleitung der Approximationslösung unter der Annahme, dass die Hauptströmungskomponente unabhängig von der Drallströmung ist. Dennoch sind sehr gute Übereinstimmung zwischen den numerisch simulierten und den berechneten axialen Wellenzahlen festzustellen. Der durch die Vernachlässigung der

3 Akustische Wellengleichung und deren Lösung für Rohrleitungen

Kopplung von Haupt- und Drallströmung resultierende Fehler ist entsprechend gering, so dass die Approximationslösung eine gute Näherung darstellt.

Für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Schalltransportmodell wird daher die Approximation nach Kousen (1996) bzw. Keller (2013) zur Berechnung der Eigenwerte verwendet.

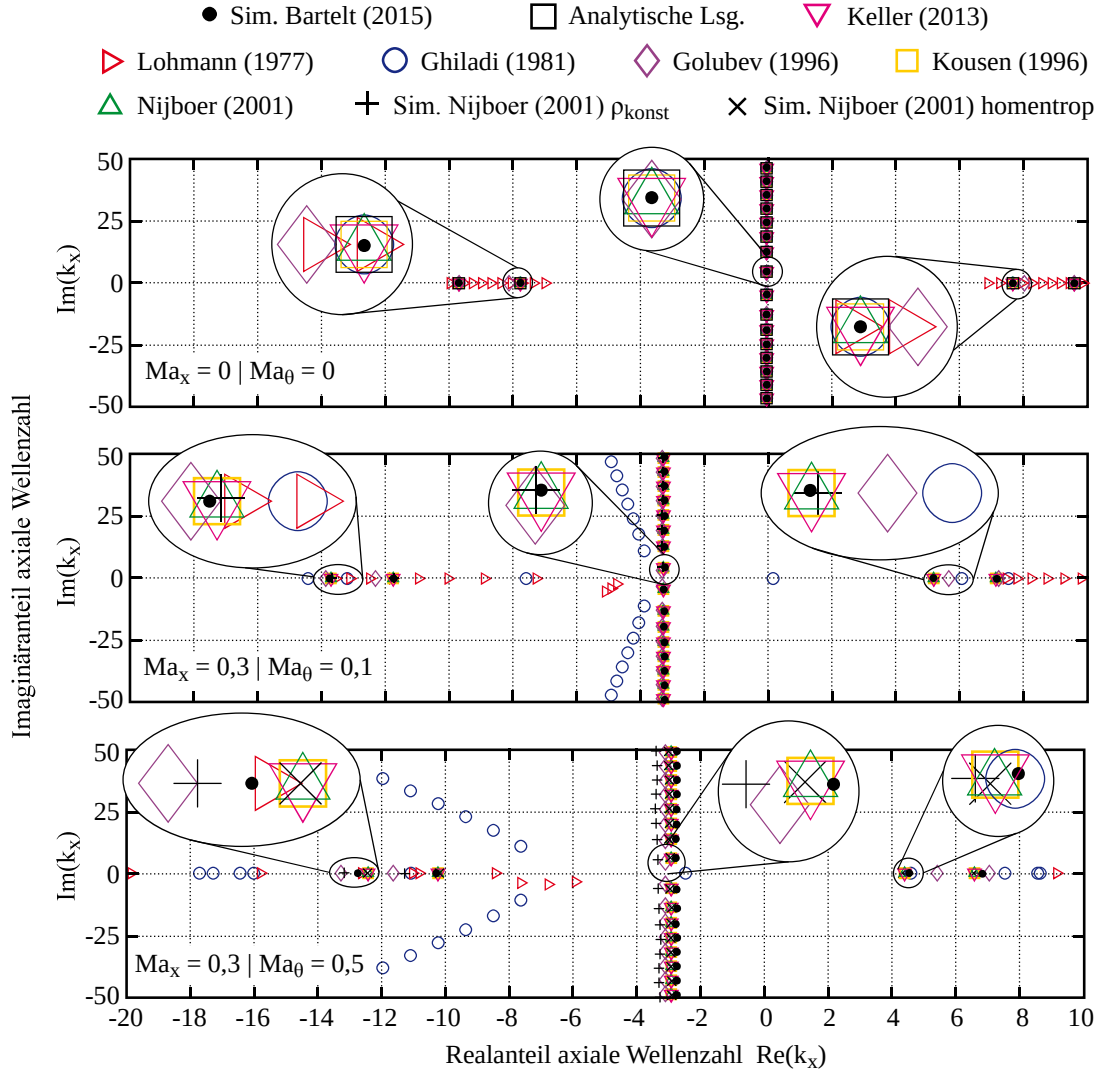


Abbildung 3.1: Vergleich verschiedener Approximationslösungen zur Bestimmung der axialen Wellenzahlen bei Hauptströmungs- und Drallüberlagerung für einen Anulus ($r_a = 1 \text{ m}$, $r_i = 0,4 \text{ m}$) und $k = 10 \text{ m}^{-1}$, $m = 2$, $n = 0 \dots 10$. (oben) Referenz keine Strömung, kein Drall - Vergleich mit analytischer Lösung. (Mitte) $\text{Ma}_x = 0,3$ und $\text{Ma}_\theta = 0,1$. (unten) $\text{Ma}_x = 0,3$ und $\text{Ma}_\theta = 0,5$.

4 Theoretische Betrachtungen zum Ausbreitungsverhalten akustischer Moden in Rohrleitungen

Wie bereits einleitend in Abschnitt 1.4 beschrieben ist, breiten sich die in den rotierenden Komponenten der Maschinen angeregten Schallfelder stromauf- und stromab durch die angeschlossenen Rohrleitungen aus, bis sie im Bereich der Schubdüse und des Triebwerkseinlasses in die freie Umgebung abgestrahlt werden. Die Abstrahleigenschaften sind dabei maßgeblich von den Triebwerks-internen Transportmechanismen innerhalb der Strömungskanäle beeinflusst (Huang et al. 2008, Gorazd et al. 2012).

Im Regelfall können die metallischen Kanalwände als schallhart angenommen werden, was bedeutet, dass keine Schallenergie durch die Wand transportiert wird. Diese Randbedingung erzwingt, dass sich innerhalb des Kanals Vielfachreflexionen ausbilden, die interferieren und zu ganz spezifischen Schalldruckmustern, den sogenannten akustischen Moden, führen. Allgemein beschreibt eine Mode die charakteristische Schwingungsform eines elastischen Mediums und entspricht aus mathematischer Sicht dessen Eigenform. Diese hängt von den vorherrschenden thermodynamischen und geometrischen Randbedingungen, den Materialeigenschaften des Mediums und den Anregungszuständen ab. In einem luftgefüllten Rohr entsprechen die akustischen Moden den jeweiligen Eigenformen der zum Schwingen angeregten Luftsäule. Dabei ergibt sich die Form der Mode stets als Abhängige aller Raumrichtungen, so dass sich über dem Rohrquerschnitt ein in azimuthaler, radialer und axialer Richtung gekoppeltes Schallfeld ausbreitet. Moden werden üblicherweise nach der Ordnung ihres Umfangsanteils m und der Ordnung ihres Radialanteils n klassifiziert. Während m die Anzahl der azimuthalen Knotenlinien angibt, entspricht n den sich über dem Rohrquerschnitt in radialer Richtung ergebenden Knotenlinien. Ein Sonderfall ist die ebene Welle für $m = n = 0$, bei der über dem gesamten Querschnitt ein uniformes Schalldruckprofil vorherrscht.

In Anlehnung an Gl.(3.24) setzt sich das modale Schallfeld aus vier überlagerten Teilmoden nach

$$p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) = \Re \left\{ \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) \left(\hat{A}_{+x}^{+\theta} e^{i(m\theta + k_{+x}^{+\theta} x + \phi_{+x}^{+\theta})} + \hat{A}_{+x}^{-\theta} e^{i(-m\theta + k_{+x}^{-\theta} x + \phi_{+x}^{-\theta})} + \right. \right. \\ \left. \left. \hat{A}_{-x}^{+\theta} e^{i(m\theta - k_{-x}^{+\theta} x + \phi_{-x}^{+\theta})} + \hat{A}_{-x}^{-\theta} e^{i(-m\theta - k_{-x}^{-\theta} x + \phi_{-x}^{-\theta})} \right) e^{-i\omega t} \right\} \quad (4.1)$$

zusammen. Dabei entspricht $\Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r)$ der in Gl.(3.21) hergeleiteten Ausbreitungs-

funktion in der Radialebene als Abhängige des Nebenverhältnisses σ und der radialen Wellenzahl $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$, die sich wiederum aus den Eigenwerten $\mu_{mn}^{(\sigma)}$ ergibt (vgl. Abschnitt 3.2.1). Das azimuthale Schallfeld ist über $\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta} e^{i(\pm m\theta)}$ beschrieben und die axiale Wellenausbreitung über $\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta} e^{i(k_{\pm x}^{\pm\theta} x)}$. In Gl.(4.1) sind zusätzlich noch die Phasenwinkel $\phi_{\pm x}^{\pm\theta}$ eingeführt, die einen in axialer und/oder azimuthaler Richtung wirkenden Phasenversatz berücksichtigen. Über die Drehbewegung $e^{-i\omega t}$ wird schließlich die zeitliche Änderung, die Pulsation des Schalldruckfeldes, erzwungen. Mit der in Gl.(4.1) gegebenen Definition lässt sich jede beliebige Modenstruktur abbilden, die sowohl eine Ausbreitung in positiver als auch negativer Axialrichtung $\{\dots\}_{[\pm x]}$ und Umfangsrichtung $\{\dots\}_{[\pm\theta]}$ zulässt.

Jede Teilmode ist durch eine eigene Amplitude $\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta}$ und eine spezifische axiale Wellenzahl $k_{\pm x}^{\pm\theta}$ charakterisiert, die deren Ausbreitung mit dem vorherrschenden Strömungsfeld koppelt. Die der Mode inhärente Schwingungsüberlagerung in axialer und azimuthaler Richtung resultiert in einer sich um die Rohrachse spiralförmig ausbreitenden Schalldruckstruktur, die auch als Spinning Mode bezeichnet wird. Diese kann sich in Abhängigkeit von den Randbedingungen entweder in positive oder negative Axial- und Umfangsrichtung ausbreiten. Spinning Modes spielen für die Akustik in Turbomaschinen eine bedeutende Rolle, da diese aufgrund rotierender Quellmuster z.B. durch Rotor-Stator-Wechselwirkungen angeregt werden. Entscheidend ist dabei, dass dem Schalldruckfeld eine definierte Drehrichtung aufgeprägt ist. Bei einem stationären Quellmuster, wie es z.B. aus einer Brennkammer stammen könnte, werden hingegen (partiell) stehende Umfangsmoden erzeugt.

So werden im nachfolgenden Abschnitt 4.1 zunächst wichtige Eigenschaften von Spinning Modes herausgearbeitet und diskutiert, während in Abschnitt 4.2 auf eine Sonderform der akustischen Moden eingegangen wird - die stehenden Moden. Da der Schwerpunkt der Arbeit auf der Untersuchung azimuthaler Schallfelder liegt, konzentriert sie sich auf die Ausbreitung von Umfangsmoden. Eine vollständig von der radialen Modenausbreitung losgelöste Betrachtung ist allerdings nicht zielführend, weshalb in Anhang C.1 die theoretischen Hintergründe der radialen Modenausbreitung näher beleuchtet werden.

Auf Basis der in diesem Kapitel gewonnenen Erkenntnisse zu den Ausbreitungseigenschaften modaler Schallfelder in Rohrleitungen, werden für die Entwicklung der Analyseverfahren der hybriden Analysemethodik elementare Grundlagen herausgearbeitet.

4.1 Spinning Modes

Abbildung 4.1 zeigt exemplarisch die Ausbreitung einer $mn_{[2;1]}$ Spinning Mode in einem Ringkreiszyylinder für verschiedene Ausbreitungszustände.

Für die mathematische Beschreibung einer einfachen Spinning Mode bedarf es lediglich einer der in Gl.(4.1) gegebenen vier Teilmoden

$$p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) = \Re \left\{ \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) \hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta} e^{i(\pm m\theta + k_{\pm x}^{\pm\theta} x + \phi_{\pm x}^{\pm\theta})} e^{-i\omega t} \right\}. \quad (4.2)$$

Abbildung 4.2 zeigt den Schalldruck einer $mn_{[1;0]}$ Mode als Abwicklung an der Rohrwand eines Kreiskanal. In Bezug auf die experimentelle Bestimmung von Schallfeldern sind die

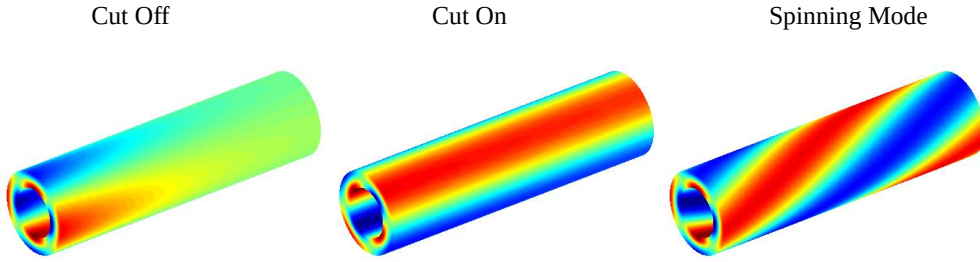


Abbildung 4.1: Schalldruckverteilung einer $mn_{[2;1]}$ Mode in einem Ringreiskanal ($\sigma = 0,6$) für verschiedene Ausbreitungszustände.

Wanddrücke von besonderer Bedeutung, da sie relativ einfach mit Hilfe von in die Rohrwand eingebrachten Sensoren (Mikrofone bzw. instationäre Drucksensoren) aufgenommen werden können. So sind in diesem Beispiel exemplarisch 12 virtuelle Mikrofone äquidistant über dem Rohrumfang platziert und das resultierende Umfangsdruckprofil $p'_{\text{norm}} = p'_i/p'_{\text{max}}$ über θ abgetragen. Der Zeitschrieb zeigt den sich im zeitlichen Verlauf über den festen Mikrofonpositionen ergebenden Schalldruck $p'_{\text{norm}}(t)$. Dieser lässt im Fall einer einzelnen Spinning Mode bei bekannter Wellenlänge direkt auf die räumliche Verteilung zu einem festen Zeitpunkt schließen. Es wird deutlich, dass die Schalldruckverteilung über dem Umfang zeitlich variiert und keine Knoten aufweist.

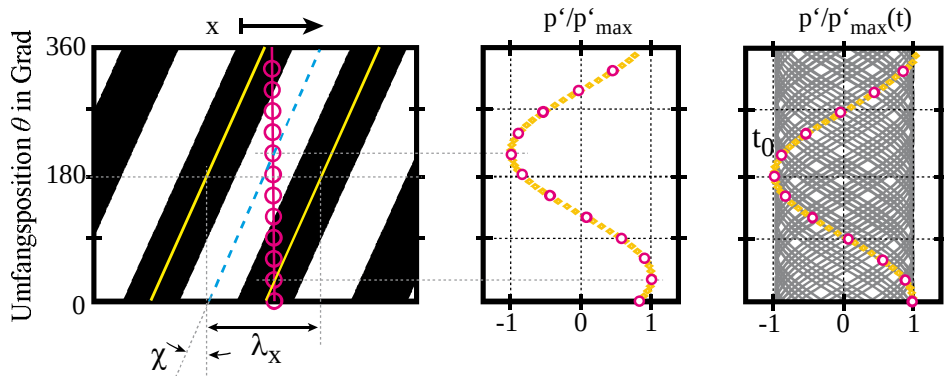


Abbildung 4.2: Umfangsdruckverteilung für eine $mn_{[1;0]}$ Spinning Mode an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks. Die Normierung erfolgt auf den Betrag der Maximalamplitude

Während in Abb. 4.2 das Druckfeld einer einzelnen Mode dargestellt ist, zeigt Abb. 4.3 die Überlagerung von drei Spinning Modes bei gleicher Frequenz und gleicher Amplitude doch unterschiedlicher Ordnung. Ein solches Gesamtschallfeld, welches in realen Anwendungen und Messungen in noch wesentlich komplexerer Art und Weise auftritt, lässt sich mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden modal zerlegen und entsprechend analysieren. Durch die Überlagerung unterschiedlicher Moden ergeben sich ganz spezifische Interferenzmuster, die zu einer komplexen Schalldruckstruktur führen. Dies zeigt sich in Abb. 4.3 anhand des zeitabhängigen Umfangsdruckprofils beim Durchlaufen einer Periode $2\pi(\omega)^{-1}$ an einer festen Axialposition, welches sich innerhalb einer Envelope als wiederkehrende Struktur ausbildet. Die einzelnen Spinning Modes weisen sowohl in Umfangs-

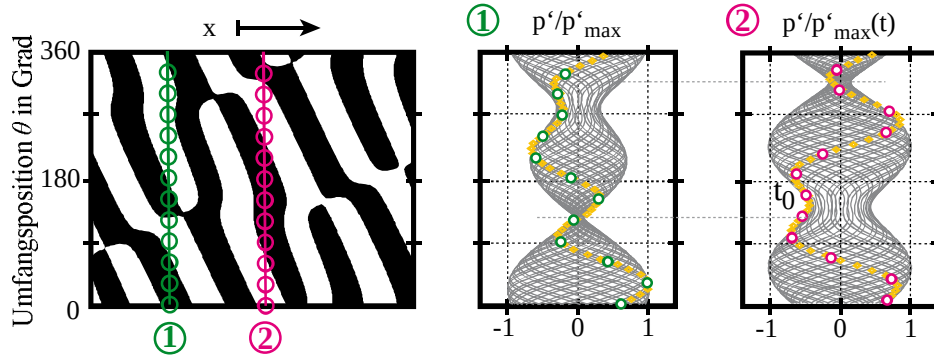


Abbildung 4.3: Umfangsdruckverteilung für drei überlagerte Moden $mn_{[1;0]}$, $mn_{[2;1]}$, $mn_{[3;0]}$ mit jeweils gleicher Amplitude und gleicher Frequenz ($kD = 18,13$). Schalldruckfeld an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks

auch in Axialrichtung unterschiedliche Wellenlängen auf, was bei deren Überlagerung zu einer von der Axialposition abhängigen Wellenstruktur und Envelopen führt, wie in Abb. 4.3 zu erkennen ist. Diese Eigenschaft gilt es etwa bei der Sensorplatzierung in experimentellen Versuchsaufbauten sowie bei der Auswertung und Interpretation von Messdaten zu beachten. D.h. für die Auswertung der aus den Schalldruckdaten bestimmten Envelope muss die axiale Messposition bekannt sein, um eine genaue Zuordnung der Schallfeldstruktur innerhalb des Rohres zu erlangen. Theoretisch wird es für jede axiale Position nur eine charakteristische Envelope geben. Aus diesem Grund wird die Envelope für die in Kapitel 7 vorgestellte Schallfeldanalyse eingesetzt.

4.1.1 Cut-On Verhalten

Wie bereits in den vorherigen Kapiteln angedeutet wurde, sind akustische Moden in berandeten Umgebungen nur unter bestimmten Bedingungen ausbreitungsfähig. Allgemein können im Nahfeld einer akustischen Quelle Moden jeglicher Ordnung angeregt werden. Deren Ausbreitung innerhalb des Rohres (Fernfeld) hängt hingegen von verschiedenen Faktoren ab, auf die in diesem Abschnitt eingegangen wird. Es ist üblich ausbreitungsfähige Moden als Cut-On und nicht ausbreitungsfähige Moden als Cut-Off zu bezeichnen. Eine Mode wird sich in axialer Richtung in einem Rohr nur dann ausbreiten, wenn der in Gl.(4.2) gegebene axiale Ausbreitungsterm Wellencharakter aufweist, d.h. wenn dieser über einen komplexen Exponenten und damit eine Drehanweisung verfügt. Ansonsten wird die Mode exponentiell abklingen, wie in Abb. 4.1 (links) dargestellt ist. Die Cut-On Eigenschaften sind demnach von der axialen Wellenzahl geprägt, die nicht komplexwertig werden darf. So lässt sich nach $k_{x,[mn]}^{(\pm)} = \sqrt{k^2 - k_{r,[mn]}^{(\sigma)2}}$ mit

$$k^2 - k_{r,[mn]}^{(\sigma)2} \geq 0 \quad (4.3)$$

ein einfacher formaler Zusammenhang für die Cut-On Bedingung ohne Strömungseinfluss ermitteln. Wie sich zeigt, muss dazu der Radikand stets größer Null sein. Aus diesem Zusammenhang lässt sich mit $f_{\text{Cut-On}}$ eine spezifische Anregungsfrequenz angeben, ab der eine Mode ausbreitungsfähig ist.

Für den Fall einer einfachen Hauptströmungsüberlagerung ohne Drall ergibt sich durch Umstellen der Gl.(3.22) dann die sogenannte die Cut-On Frequenz zu

$$f_{\text{Cut-On}} \geq \left(\sqrt{1 - \text{Ma}_x^2} \right) \mu_{[mn]}^{(\sigma)} \frac{a}{2\pi r_a} \quad . \quad (4.4)$$

Liegt hingegen eine Hauptströmung mit einer zusätzlich überlagerten Drallkomponente vor, erweitert sich die Gl.(4.4) zu

$$f_{\text{Cut-On}} \geq \left[\left(\sqrt{1 - \text{Ma}_x^2} \right) \mu_{[mn]}^{(\sigma)} + \text{Ma}_\theta m \right] \frac{a}{2\pi r_a} \quad . \quad (4.5)$$

Die in Gl.(4.5) angegebene Beziehung bei kombinierter Strömungs- und Drallüberlagerung ist auf Basis des in Tab. 3.1 gegebenen Modells nach Kousen (1996) bestimmt worden. Wie anhand dieser Zusammenhänge zu erkennen ist, wird die Cut-On Frequenz mit zunehmendem Rohrdurchmesser geringer bzw. es sind bei gleicher Anregungsfrequenz auch höhere Moden ausbreitungsfähig. Weiterhin hängt das Cut-On Verhalten linear vom Eigenwert $\mu_{[mn]}^{(\sigma)}$ ab. Einen Sonderfall stellt allerdings die sogenannte Grundmode $m_{[0;0]}$ dar, die als ebene Welle immer ausbreitungsfähig ist. Insbesondere die Überlagerung des akustischen Feldes mit einem Strömungs- und Drallfeld wirkt sich auf die Ausbreitungseigenschaften der Moden aus und wird ausführlich in Abschnitt 4.1.4 diskutiert.

Sofrin und McCann (1966) führen mit $\xi = f/f_{\text{Cut-Off}}$ das sogenannte Cut-Off Verhältnis als dimensionslose Kennzahl ein, welche eine einfache Möglichkeit darstellt, unabhängig von den geometrischen Randbedingungen und der Anregungsfrequenz, eine akustische Mode zu charakterisieren (vgl. auch Panek 2011). Demnach lassen sich drei Unterscheidungsmerkmale definieren. Für $\xi > 1$ liegt der ausbreitungsfähige Zustand vor, während für $\xi < 1$ die Mode exponentiell abklingt. Bei $\xi = 1$ stellt sich gerade der Cut-On/Cut-Off Fall ein, bei dem sich die Wellenfronten der Mode zwar parallel zur Rohrachse drehen, doch in axialer Richtung kein Transport auftritt (vgl. Abb. 4.1, Mitte).

4.1.2 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Für die Beschreibung des Ausbreitungsverhaltens akustischer Moden sind deren modale Ausbreitungsgeschwindigkeiten, die sogenannte Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, von besonderer Bedeutung. Strenggenommen handelt es sich dabei um wellendynamische Formulierungen, die etwa auch in der Quantenmechanik verwendet werden. Aufgrund der Allgemeingültigkeit sind diese Ansätze auch auf akustische Problemstellungen übertragbar. Für die Phase einer monochromen Welle $\varphi(x, t) = A_0 e^{i(\omega t - k_{x,[mn]}^{(\pm)} x + \phi)}$ lässt sich, solange diese nicht gestaucht oder gefaltet ist (lineare Akustik), ein konstanter Phasenwinkel ϕ annehmen und die Geschwindigkeit der Phase mit $(\omega t - k_{x,[mn]}^{(\pm)} x) = \text{const.}$ zu

$$c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_{x,[mn]}^{(\pm)}} \quad (4.6)$$

bestimmen. $c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)}$ entspricht dabei der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenfronten, also Orten gleicher Phase, in axialer Richtung, wie in Abb. 4.4 anhand der Geschwindigkeitsvektoren dargestellt ist. In Abhängigkeit vom Vorzeichen der axialen Wellenzahl

kann die Phasengeschwindigkeit sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Für die Grundmode $mn_{[0;0]}$ entspricht die Phasengeschwindigkeit genau der Schallgeschwindigkeit a des Mediums. Für höhere Moden gilt hingegen stets $c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)} > a$. Dann laufen die Wellenfronten in axialer Richtung des Kanals schneller als Schallgeschwindigkeit.

Da in einem Wellenfeld stets mehrere harmonische Wellen mit leicht variierender Frequenz überlagert sind, tritt eine Modulation der Einzelwellen auf (Zhang und Park 2004). Dies führt zur Ausbildung von Wellenpaketen mit einem definierten Anfang und Ende, die nun nicht mehr zwangsläufig mit der Phasengeschwindigkeit der Trägerwellen durch den Wellenkanal wandern, sondern vielmehr mit der Gruppengeschwindigkeit

$$c_{\text{gr},x,[mn]}^{(\pm)} = \frac{d\omega}{dk_{x,[mn]}^{(\pm)}} \quad . \quad (4.7)$$

Wie in Anhang B.7 hergeleitet ist, lässt sich durch quantenmechanische Betrachtungen zeigen, dass $c_{\text{gr},x,[mn]}^{(\pm)}$ die Geschwindigkeit des Energie- und Informationstransports einer Mode in axialer Richtung ist.

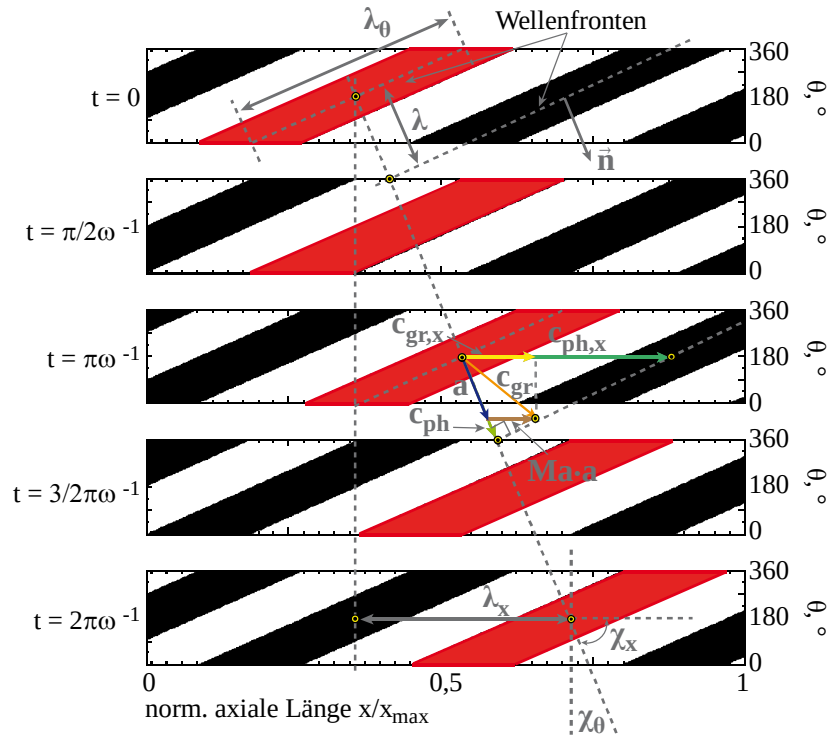


Abbildung 4.4: Laufrichtung einer $mn_{[1;0]}$ Spinning Mode und Verlauf der Wellenfronten zu verschiedenen Zeitpunkten

Auch Gerasik und Stastna (2010) zeigen, dass die Gruppengeschwindigkeit in konservativen, dispersiven Medien einer Energieausbreitungsgeschwindigkeit entspricht, die sich sowohl über die in Gl.(4.7) gegebenen kinematischen Ansätze $d\omega/dk_{x,[mn]}^{(\pm)}$ als auch über energetische Bilanzierungen des mittleren Energieflusses $\overline{E_F}$ und der mittleren mechanischen Energie $\overline{E}$ bestimmen lässt (vgl. Farassat und Meyers 1996). Dabei weist $c_{\text{gr},[mn]}^{(\pm)}$ im

absorptionsfreien Fall stets reelle Werte auf, während bei Absorption die Gruppengeschwindigkeit komplex wird. Dann entspricht der Realteil dem Energietransport und der Imaginärteil dem Anteil der absorbierten Energie (Sanchez et al. 2012). In der Triebwerksakustik spielen diese Fragestellungen insbesondere für die Berechnung von Schalldämpfereinheiten (Liner) eine wichtige Rolle.

Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten hängen über die Dispersionsrelation nach Rayleigh zusammen

$$c_{\text{gr},x,[mn]}^{(\pm)} = c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)} \left(1 - \frac{\omega}{c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)}} \frac{dc_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)}}{d\omega} \right)^{-1}. \quad (4.8)$$

Dispersion liegt folglich vor, wenn die Phasengeschwindigkeit eine Funktion der Frequenz ω ist und sich somit durch Modulation einzelner Trägerwellen Wellenpakete ausbilden können, die Information bzw. Energie übertragen. Dies führt ebenfalls zu einem nicht-linearen Zusammenhang zwischen der allgemeinen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls a und der Wellenzahl. Eine ausführliche Herleitung der Dispersionsrelation in Wellenkanälen wird z.B. von Johnson (1990), Meykens et al. (1998) oder Cepni et al. (2004) gegeben. Falls jedoch $c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)} \neq f(\omega)$ so gilt $c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)} = c_{\text{gr},x,[mn]}^{(\pm)}$ und es tritt keine Dispersion auf. Dies ist für ebene Wellen der Fall. In Anlehnung an Lerch et al. (2009) lässt sich mit

$$c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)} = \frac{\omega}{k_{x,[mn]}^{(\pm)}} = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{Cut-Off}}}{\omega} \right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\xi} \right)^2}} \quad (4.9)$$

und

$$c_{\text{gr},x,[mn]}^{(\pm)} = \frac{d\omega}{dk_{x,[mn]}^{(\pm)}} = a \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{Cut-Off}}}{\omega} \right)^2} = a \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\xi} \right)^2} \quad (4.10)$$

eine Moden-spezifische Formulierung für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit angeben, mit Hilfe derer direkt die Dispersionseigenschaften erkennbar sind. Nur im Falle einer ebenen Welle gilt für das Cut-Off Verhältnis $\xi \gg 1$ und der Radikand in Gl.(4.9) bzw. Gl.(4.10) wird zu Eins, so dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit und der Wellenzahl vorliegt.

Das Modenpaket wandert dabei im Rohr über den Abschnitt Δx in der Zeit

$$t = \frac{\Delta x}{c_{\text{gr},x,[mn]}^{(\pm)}} = \frac{\Delta x}{a \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{Cut-Off}}}{\omega} \right)^2}} = \frac{\Delta x}{a \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\xi} \right)^2}}. \quad (4.11)$$

Diese Beziehung verdeutlicht, dass bei einer festen Frequenz ω die Mode mit der niedrigsten Cut-Off Frequenz eine feste Wegstrecke Δx in der kürzesten Zeit zurücklegt. Wenn sich die Anregungsfrequenz hingegen in unmittelbarer Nähe der Cut-Off Frequenz befindet ($\xi \rightarrow 1$), nimmt die Gruppengeschwindigkeit ab und die Wellenpakete wandern langsamer. Mit Hilfe dieser Betrachtungsweise lassen sich auch die in Abschnitt 4.1.1 vorgestellten

Ausbreitungszustände akustischer Moden erklären. Für den Cut-Off Fall gilt $\xi < 1$, so dass nach Gl.(4.10) die Gruppengeschwindigkeit imaginär wird. Da ein Energietransport jedoch nur bei $\Re\{c_{gr,x,[mn]}^{(\pm)}\}$ erfolgt, kann sich die Mode nicht ausbreiten. Für $\xi = 1$ ist die Mode gerade Cut-On. Die Phasengeschwindigkeit würde dann theoretisch unendlich groß werden, während die Gruppengeschwindigkeit zu Null wird. D.h. das Feld dreht sich, doch es tritt kein Energietransport statt.

4.1.3 Ausbreitungswinkel von Spinning Modes

Auf Basis der zuvor eingeführten modalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten wird in diesem Abschnitt eine geometrische Interpretation der Wellenfrontausbreitung anhand spezifischer Ausbreitungswinkel vorgestellt. Abbildung 4.4 stellt dazu den Zusammenhang zwischen den Wellenfrontwinkeln, Wellenlängen und den Ausbreitungsgeschwindigkeiten dar.

Wie z.B. Ingard (2008) zeigt, lassen sich die in einem Rohr ausgebildeten Spinning Moden bei einem definierten Radius stets als ebene Wellen mit einem entsprechenden Ausbreitungswinkel beschreiben. So kann in guter Näherung das ursprünglich dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales reduziert werden. Die Fronten einer ebenen Welle entsprechen dabei Flächen konstanter Phase bzw. konstanten Schalldrucks, die einen orthogonalen Abstand von einer Wellenlänge λ aufweisen und sich in Normalenrichtung mit der Schallgeschwindigkeit a ausbreiten.

Die Winkel werden nachfolgend stets zwischen dem Normalenvektor der Wellenfront $\vec{n}$ und den Basiskoordinaten des Kanals x, r, θ angegeben. In axialer Richtung stellt sich mit χ_x der axiale Ausbreitungswinkel und mit χ_θ der Ausbreitungswinkel in Umfangsrichtung ein, wie in Abb. 4.4 dargestellt ist. Die Reduktion der Ausbreitungsrichtungen erfordert eine Projektion des Wellenzahlvektors auf die x - θ -Ebene. So ergibt sich zwischen der Normalenrichtung der Wellenfront und der x -Achse $\chi_{x,\theta} = \arctan(k_\theta/k_{x,[mn]}^{(\pm)})$, wobei $k_\theta = m\pi/2r$ gilt. Abbildung 4.5 zeigt den Einfluss der Reduktion auf den axialen Ausbreitungswinkel χ_x bzw. $\chi_{x,\theta}$, die sich stets zwischen Wellenfrontnormalen und der Rohrachse aufspannen. Die auftretenden Unterschiede ergeben sich durch die Vernachlässigung der radialen Ausbreitungsrichtung bei der Projektion in die x - θ -Ebene. Obwohl die zweidimensionale Betrachtungsweise sehr anschaulich ist und in guter Näherung akzeptable Aussagen zulässt, werden sämtliche Berechnungen in dieser Arbeit mit Hilfe des von Rice et al. (1979) beschriebenen räumlichen Ansatzes durchgeführt (s. u.). Für vereinfachende Erklärungen wird bei Bedarf allerdings auf die projizierten Vektorgrößen zurückgegriffen. Wie ebenfalls

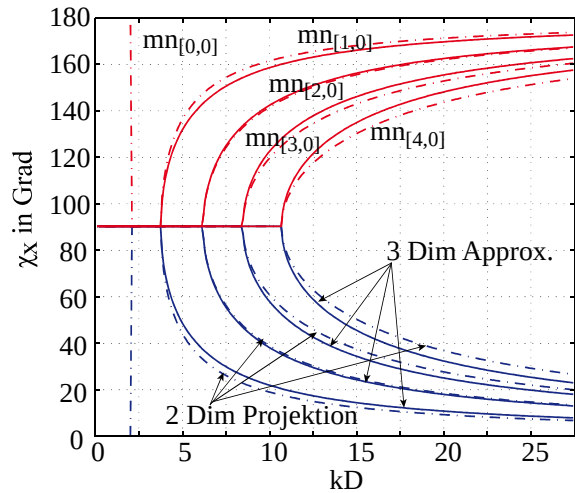


Abbildung 4.5: Axialer Modenwinkel χ_x in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz kD für unterschiedliche Azimutalmoden. Vergleich der Bestimmungsverfahren als dreidimensionale Approximation nach Rice et al. (1979) (Referenz) und zweidimensionaler Projektion. Im Anhang C.4 ist zusätzlich eine vergrößerte Abbildung dargestellt.

in Abb. 4.4 gezeigt ist, ergibt sich die axiale Wellenlänge zu $\lambda_x = \lambda / \cos(\chi_x)$. Daraus lässt sich unmittelbar die axiale Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenfronten ermitteln, die gemäß der in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Gesetzmäßigkeiten der axialen Phasengeschwindigkeit entspricht

$$c_{\text{ph},x} \equiv a \left(\frac{1}{\cos(\chi_x)} + \text{Ma}_x \right) \quad . \quad (4.12)$$

Rice et al. (1979) leiten auf Basis der konvektiven Wellengleichung eine Theorie zur einfachen Bestimmung der Ausbreitungswinkel in allen drei Raumkoordinaten her. Für den axialen Ausbreitungswinkel lässt sich mit

$$\cos \chi_x = \frac{k_{x,[mn]}^{\pm}}{k \left(1 - \text{Ma}_x \frac{k_{x,[mn]}^{(\pm)}}{k} \right)} = \frac{-\text{Ma}_x + \sqrt{1 - (1 - \text{Ma}_x^2) \left(\frac{k_{r,[mn]}^{(\sigma)}}{k} \right)^2}}{1 - \text{Ma}_x \sqrt{1 - (1 - \text{Ma}^2) \left(\frac{k_{r,[mn]}^{(\sigma)}}{k} \right)^2}} \quad (4.13)$$

eine direkte Beziehung über die Wellenzahlen k und $k_{x,[mn]}^{(\pm)}$ sowie die Eigenwerte $\mu_{[mn]}^{(\sigma)}$ und die axiale Mach-Zahl Ma_x angeben. Streng genommen gilt diese Winkelbeziehung nur an der äußeren Kanalwand bei $r = r_a$, was für die meisten Anwendungen jedoch ausreichend ist. Durch Einführung des Cut-Off Verhältnisses ξ kann Gl.(4.13) zu

$$\cos \chi_x = \frac{-\text{Ma}_x + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}}{1 - \text{Ma}_x \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}} \quad (4.14)$$

vereinfacht werden. Wie zu erkennen ist, laufen die Ausbreitungswinkel mit steigendem Cut-Off Verhältnis gegen $\chi_x \rightarrow 0$.

Da die radiale und azimuthale Wellenausbreitung über den Eigenwert $\mu_{[mn]}^{(\sigma)}$ bzw. die axiale Wellenzahl $k_{x,[mn]}^{(\pm)}$ miteinander gekoppelt sind, ist eine analytische Bestimmung des radialen und azimuthalen Strömungswinkels nach Rice et al. (1979) nur mit Hilfe eines Näherungsansatzes möglich. Für den radialen Ausbreitungswinkel ergibt sich

$$\cos \chi_r = \frac{\sqrt{\left(\frac{\mu_{[mn]}^{(\sigma)}}{r_a} \right)^2 - \left(\frac{m}{r} \right)^2}}{\left(k - \text{Ma}_x k_{x,[mn]}^{(\pm)} \right)} \quad (4.15)$$

während der azimuthale zu

$$\cos \chi_\theta = \frac{m}{r \left(k - \text{Ma}_x k_{x,[mn]}^{(\pm)} \right)} \quad (4.16)$$

bestimmt werden kann. Wie zu erkennen ist, hängen die radialen und azimuthalen Ausbreitungswinkel von der radialen Position r ab.

Mit Hilfe der Ausbreitungswinkel ist eine einfache Beschreibung der modalen Ausbreitungszustände möglich, die für die weiteren Betrachtungen der Schalltransportphänomene eine wichtige Rolle spielen.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten bei Strömungsüberlagerung

Ist dem Wellenfeld eine axiale Grundströmung überlagert, so wirkt sich dies unmittelbar auf die modalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten aus, und die Phasengeschwindigkeit nach Gl.(4.9) erweitert sich zu

$$c_{\text{ph},x,[mn]}^{(\pm)} = \frac{a(1 - \text{Ma}_x^2)}{\pm \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} - \text{Ma}_x} \quad (4.17)$$

und die Gruppengeschwindigkeit zu

$$c_{\text{gr},x,[mn]}^{(\pm)} = \frac{a(1 - \text{Ma}_x^2) \sqrt{1 - \xi^{-2}}}{\text{Ma}_x \sqrt{1 - \xi^{-2}} \mp 1} \quad (4.18)$$

Die detaillierten Herleitungen der Gl.(4.17) und Gl.(4.18) sind dem Anhang B.8 zu entnehmen. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeiten und die Modenwinkel unmittelbar zusammenhängen, wirkt sich eine Strömungsüberlagerung auch auf die Winkel aus. Nach Rice et al. (1979) treten neben Ausbreitungswinkeln $\chi_i(x, \theta, r)$ zusätzliche Winkel $\psi_i(x, \theta, r)$ auf. Wie in Abb. 4.6 gezeigt ist, wirken bei Überlagerung des Schallfeldes mit einem axial-gerichteten Strömungsfeld entsprechend konvektive Effekte. Dann findet der eigentliche Informationstransport nicht mehr normal zur Wellenfront statt, und die Gruppengeschwindigkeit erfährt in axialer Richtung eine Doppler-Verschiebung, die zu berücksichtigen ist. Dies führt zwangsläufig zu einem veränderten Gruppengeschwindigkeitsvektor und Ausbreitungswinkel (vgl. Rice et al. 1979) der Mode. Die Phasengeschwindigkeit wird dadurch ebenfalls verändert, befindet sich jedoch weiterhin in Richtung der Wellenfrontnormalen. Der Winkel zwischen dem axialen Phasengeschwindigkeitsvektor und der x -Achse ist weiterhin über die Beziehung in Gl.(4.14) gegeben, während nun allerdings für die Gruppengeschwindigkeit mit

$$\cos \psi_x = \sqrt{1 - \text{Ma}_x^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\xi^2}}{1 - \text{Ma}_x^2 \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)}} \quad (4.19)$$

ein neuer Winkel eingeführt werden muss. Weitere Ausführungen der etwaigen Winkelverhältnisse sind in Rice (1979) oder Hurfar et al. (2015) zu finden.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten in überlagerten Modenfeldern

Hines (1974) gibt einen sehr umfassenden allgemeinen Überblick über die Gruppen-, Phasen- und Spurgeschwindigkeiten von Wellen. Auch Whitham (1961), Lighthill (1964) oder Hayes (1973) veröffentlichen bereits in den 1960er und 70er Jahren sehr umfangreiche Theorien zur Bedeutung der Gruppengeschwindigkeit. Allen gemein ist jedoch, dass sich sämtliche Arbeiten auf einzelne monochrome Wellen oder Frequenz-modulierte Wellenpakete beziehen.

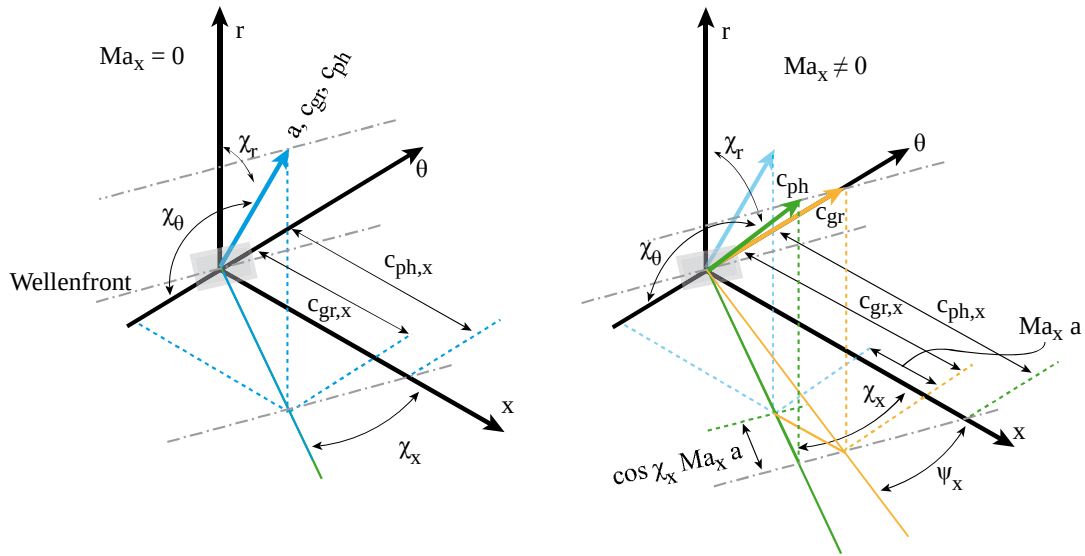


Abbildung 4.6: Zusammenhang zwischen den Ausbreitungswinkeln und den Ausbreitungsgeschwindigkeiten einer einzelnen Mode. (links) ohne Strömungsüberlagerung, (rechts) mit axialer Strömungsüberlagerung

Die Behandlung überlagerter Moden gleicher Frequenz, doch unterschiedlicher Ordnung, ist in der offenen Literatur für rohrakustische Anwendungen nicht bekannt. Obwohl die Phasen- und Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wellen ein klassisches Problem der theoretischen Physik und Bestandteil nahezu jeder physikalischen Teildisziplin sind (Quantenmechanik, Optik, Seismologie, etc.), werden überlagerte Moden gleicher Frequenz nicht behandelt. Genau diese Fragestellungen sind aber für die hier betrachteten Schalldruckfelder von Bedeutung, denn sie entsprechen den in einer Turbomaschine angeregten modalen Schallfeldern und stehenden Moden.

Generell zeigt sich: So einfach die Geschwindigkeitsbeziehungen für einzelne Moden sind, umso komplizierter gestalten sich die Zusammenhänge für überlagerte Moden unterschiedlicher Ordnung. Während sich im strömungsfreien Fall bei einzelnen Moden die allgemeinen Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten entsprechen, ist dieser Zusammenhang für überlagerte Moden nicht mehr gegeben. Es liegt quasi eine modale Dispersion vor, da nun die Gesamtenergie des Schalldruckfeldes auf die jeweiligen Moden verteilt ist, die sich alle mit unterschiedlicher Geschwindigkeit im Wellenkanal ausbreiten. Die resultierende Gruppengeschwindigkeit kann nun als gemittelte Ausbreitungsgeschwindigkeit verstanden werden. Die Mittelungsanweisung stellt dabei die eigentliche Herausforderung dar, denn sie ist im Allgemeinen nicht arithmetisch.

Abgeleitet von den in Abb. 4.6 dargestellten räumlichen Vektorbeziehungen sollen nachfolgend nur die in die x - θ -Ebene projizierten Winkel und Geschwindigkeiten betrachtet werden, da lediglich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten an der Kanalwand (Messebene) von Interesse sind. Insbesondere die Behandlung stehender Moden ist für diese Arbeit von Bedeutung.

Der Winkel χ_x ergibt sich in Abhängigkeit von der Modenordnung und der Anregungsfrequenz über die axialen und azimuthalen Wellenzahlen. Es lässt sich zeigen, dass der Winkel

einer einzelnen Mode über die Wellenzahlvektoren bzw. die Geschwindigkeitsvektoren zu

$$\begin{aligned} \cos \chi_i &= \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{k}|} = \frac{k_i}{k} \\ &\text{bzw.} \\ \cos \chi_i &= \frac{\mathbf{c}_{\text{ph}} \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{c}_{\text{ph}}|} = \frac{c_{\text{ph},i}}{c_{\text{ph}}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

bestimmbar sind. Einzig für die im folgenden Abschnitt eingeführten rein stehende Moden ergibt sich die triviale Lösung des axialen Gesamtwinkels $\chi_{x,\text{ges}}$ zwischen den beiden Teilmoden gemäß

$$\cos \chi_{x,\text{ges}} = \frac{k_m^+ k_m^-}{|k_m^+| |k_m^-|} = \frac{\chi_m^+ + \chi_m^-}{2} \quad (4.21)$$

zu $\chi_{x,\text{ges}} = 0$. Nur in diesem Fall scheint die einfache vektorielle Addition gültig zu sein. Sind hingegen die Modenordnungen oder Amplituden unterschiedlich, stimmen diese Ansätze nicht mehr. Die Ermittlung des Ausbreitungswinkels lässt sich dann geometrisch mit Hilfe der Wellenlängenvektoren der Einzelmoden bestimmen. Die geometrischen Zusammenhänge sind der Abbildung 4.7 zu entnehmen.

Wie für die Modenwinkel ist auch für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des überlagerten Feldes eine vektorielle Addition der einzelnen Modengeschwindigkeiten oder deren arithmetische Mittelung nicht zulässig. Wie bereits beschrieben, gibt es zu dieser Thematik bis auf Marcuse (1971) keine fundierten Referenzen in der offenen Literatur. Dieser hat in einer sehr umfangreichen Studie die Pulsausbreitung in dielektrischen, Multimoden-fähigen Wellenleitern, wie sie etwa in der Glasfasertechnik zur Übertragung optischer Signale Anwendung finden, untersucht. Aus der allgemeinen Wellengleichung wird ein Zusammenhang der modalen Energieausbreitung hergeleitet, aus der sich schließlich die Gruppengeschwindigkeit für ein linear überlagertes Modenfeld angeben lässt. Eine Anwendung dieser Methode auf akustische Fragestellungen wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit überprüft (vgl. Anhang C.4). Ein zufriedenstellendes Ergebnis kann jedoch nicht erzielt werden. Aus diesem Grund wird die resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeit geometrisch bestimmt. In Abschnitt 6.5 wird das entwickelte Verfahren vorgestellt.

Fallstudie: Modale Ausbreitungsgeschwindigkeiten unterschiedlich überlagerter Umfangsmoden

Abschließend sei in Abb. 4.7 ein Untersuchungsbeispiel einer überlagerten $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode vorgestellt, die beide bei $kD = 7,318$ (800 Hz) angeregt werden. Der Anschaulichkeit halber sind die Vektorbeziehungen hier als zweidimensionales Problem unter Verwendung der Wellenlängenvektoren dargestellt. Mit der Winkelkorrektur (vgl. Abb. 4.5) sind die Ansätze auch auf räumliche Problemstellungen übertragbar. Die Wellenfrontabstände werden in allen drei Fällen aus den Schalldruckfeldern vermessen.

Abbildung 4.7 stellt drei unterschiedliche Szenarien gegenüber. Die Überlagerung von zwei identischen Teilmoden, die jedoch entgegengesetzt im Kanal umlaufen, führt stets zu einer stehenden Azimutalmode (links). Wie hier zu erkennen, ist der resultierende Ausbreitungswinkel Null. Dies bestätigt die in Gl.(4.21) hergeleiteten Zusammenhänge. Die

Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenverbundes ist nun als dessen Gruppengeschwindigkeit zu verstehen, und die Phasengeschwindigkeit spielt nur noch eine untergeordnete Rolle.

In Abb. 4.7 (Mitte) sind die resultierenden Schallfelder für zwei in gleiche Richtung laufende Einzelmoden dargestellt, während in Abb. 4.7 (rechts) die Teilmoden in entgegengesetzte Richtung laufen. Wie zu erkennen ist, beeinflusst dies entscheidend das Ausbreitungsverhalten des Gesamtfeldes. Laufen die Einzelmoden in die gleiche Richtung, so scheint sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Verbundes zu verringern. Laufen sie in entgegengesetzte Richtungen, so scheint sich dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit zu erhöhen. Diese Effekte treten ansonsten nur durch konvektive Einflüsse bei Strömungsüberlagerung auf, wobei aufgrund des Doppler-Effekts die Ausbreitungsgeschwindigkeit erhöht bzw. verringert ist.

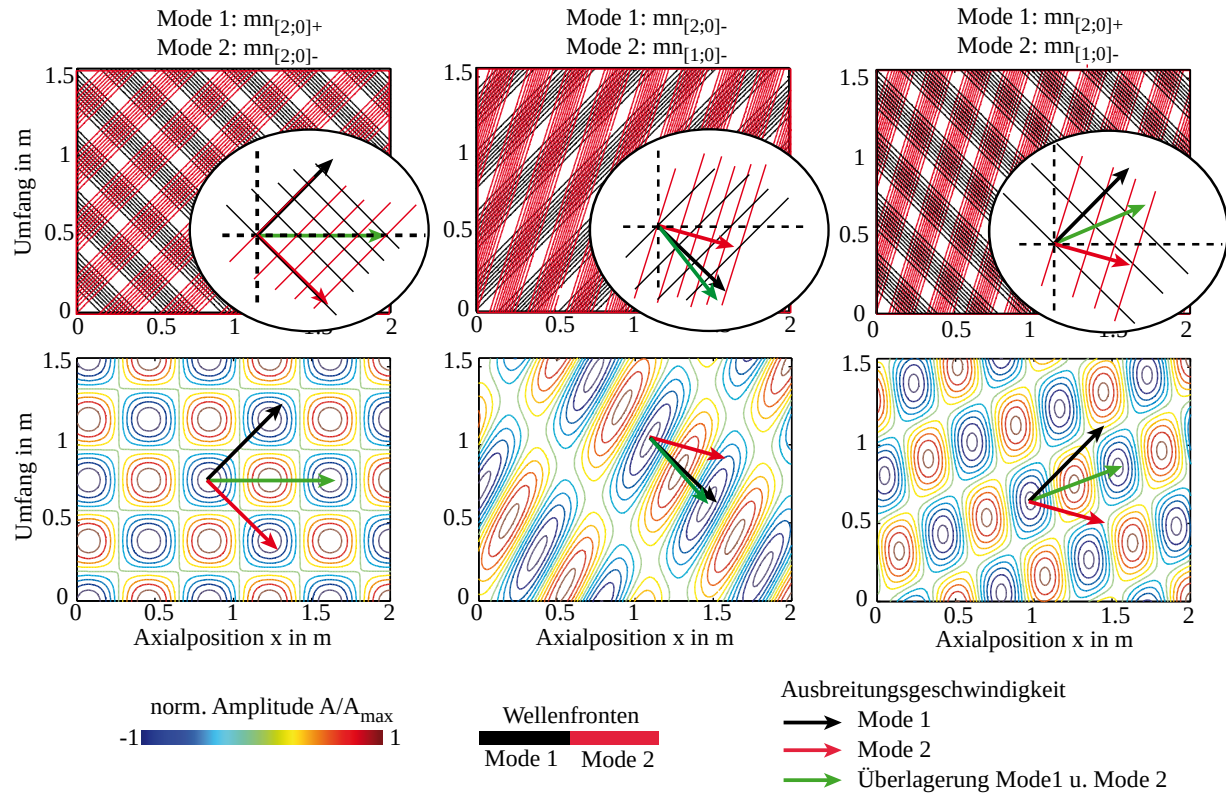


Abbildung 4.7: Zusammenhang zwischen den Ausbreitungswinkeln und den Ausbreitungsrichtungen für überlagerte Spinning Modes am Beispiel von $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Moden. Der rote und schwarze Pfeil entsprechen den Ausbreitungsrichtungen der Einzelmoden, während der grüne Pfeil der resultierenden Ausbreitungsrichtung des überlagerten Zustands entspricht.

4.1.4 Einfluss der Strömung auf die Ausbreitungseigenschaften und das Cut-On Verhalten

Abbildung 4.8 zeigt mit dem Dispersionsdiagramm ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Schema, mit dessen Hilfe sich die modalen Ausbreitungseigenschaften in einem

Kreis- oder Ringkanal verdeutlichen lassen. Dazu ist der Real- bzw. Imaginärteil, der mit dem Rohrdurchmesser normierten axialen Wellenzahl $k_{x,[mn]}^{(\pm)}D$, über der allgemeinen Wellenzahl kD und damit über der Anregungsfrequenz aufgetragen. Somit ist eine von den geometrischen Abmessungen und den thermodynamischen Zuständen unabhängige Aussage möglich. Neben dem strömungsfreien Zustand ist in Abb. 4.8 für eine $mn_{[2;0]}$ Mode exemplarisch ein Fall bei Strömungsüberlagerung ($Ma_x = 0,5$) berücksichtigt.

In Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz kD bilden sich im strömungsfreien Fall ab der Cut-On Frequenz (1) zwei symmetrische Äste der axialen Wellenzahl aus, deren Werte nun rein reell sind. Dies führt zu zwei betragsmäßig gleichen axialen Wellenzahlen z.B. (6) und (8), so dass eine Modenausbreitung sowohl in positiver als auch negativer axialer Richtung vorliegt. Unterhalb des Cut-Off Punktes ist die axiale Wellenzahl imaginär (4) und (5) und die Mode klingt ab.

Wie am Verlauf der Kurven ebenfalls deutlich zu erkennen ist, liegt ein nicht-linearer Zusammenhang zwischen der axialen Wellenzahl und der Anregungsfrequenz vor und Dispersion tritt ein (vgl. Abschnitt 4.1.2).

Während sich die Äste im strömungsfreien Fall symmetrisch ausbilden, stellt sich bei Überlagerung mit einer Hauptströmung für den Realteil ein asymmetrischer Verlauf ein. Generell verringert sich dabei die Cut-Off Frequenz (2) bzw. (3). Allerdings weisen die Wellen unmittelbar über diesem Grenzpunkt (3) rein negative Phasengeschwindigkeiten $c_{ph,x,[mn]}^{(\sigma)(-)}$ auf, d.h. die Wellenfronten können sich nur entgegen der Strömung ausbreiten. Erst ab Erreichen der Cut-On Frequenz des strömungsfreien Zustandes (1) treten auch positive Wellenzahlen auf und eine Ausbreitung in Strömungsrichtung ist möglich. Dieses Phänomen wird auch von Stahl und Argüello (1986) oder Hurfar (2012) beschrieben und mit

$$k_{BI} \geq \frac{\mu_{[mn]}^{(\sigma)}}{r_a} \quad (4.22)$$

wird eine spezielle Blockierwellenzahl eingeführt. Somit können sich bei Strömungsüberlagerung nur Moden stromab ausbreiten, wenn diese auch im strömungsfreien Fall Cut-On sind. Der Übergangsbereich zwischen Cut-Off- und Blockierfrequenz stellt eine weitere Besonderheit dar. So können selbst bei negativen Phasengeschwindigkeiten die Gruppengeschwindigkeiten $c_{gr,x,[mn]}^{(\pm)} = d\omega/dk_x$ in Abhängigkeit vom Gradienten positive Werte annehmen. Dann erfolgt bei einer rein in negativer Richtung ausbreitungsfähigen Welle der Energietransport entgegengesetzt, also mit der Strömung. In Abb. 4.8 entspricht dies dem Bereich zwischen $\Re\{k_{x,[mn]}^{(-)}\}$ des Punktes (1) und (3).

Wie das Dispersionsdiagramm ebenfalls zeigt, wird im ausbreitungsfähigen Zustand bei positiver Strömungsrichtung stets $|k_{x,[mn]}^{(-)}| > |k_{x,[mn]}^{(+)}|$ gelten. Dies entspricht dem auftre-

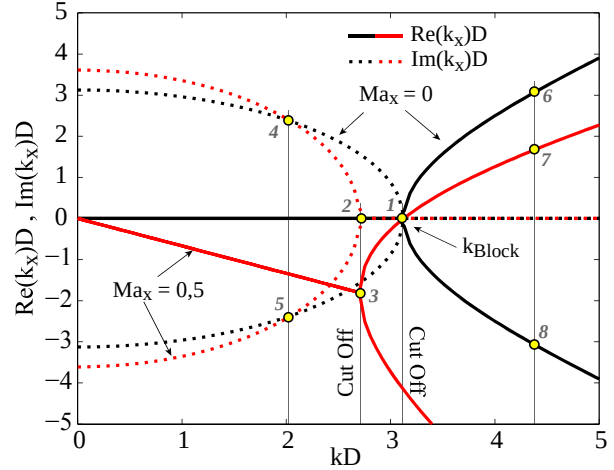


Abbildung 4.8: Dispersionsdiagramm zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der axialen Wellenzahl von der Anregungsfrequenz bei Strömungsüberlagerung. Exemplarische Darstellung für $mn_{[2;0]}$. Eine vergrößerte Darstellung ist in Abb. C.8 zu finden

tenden Doppler-Effekt, wobei Wellen, die sich entgegen der Strömungsrichtung ausbreiten, gestaucht werden, was zu kürzeren Wellenlängen und damit zu betragsmäßig größeren Wellenzahlen führt. Wellen, die sich hingegen mit der Strömung ausbreiten, werden gestreckt, was folglich zu betragsmäßig kleineren Wellenzahlen führen muss.

Im Anhang C (Abb. C.9) sind verschiedene Dispersionsdiagramme zusammengestellt, mit Hilfe derer sich die modalen Ausbreitungseigenschaften unter Berücksichtigung verschiedener Einflussparameter interpretieren lassen. Wie dort gezeigt ist, hat das Nebenverhältnis nur einen geringen Einfluss auf das Dispersionsverhalten, so dass im Folgenden die Untersuchungen stets für einen Ringkreiskanal ($\sigma = 0,6353$ - Luftturbinengeometrie) durchgeführt werden. In Abb. C.10 werden die Einflüsse einer Strömungs- und Drallüberlagerung auf die Ausbreitungseigenschaften von Azimutalmoden ($m = 0 \dots 10$) verdeutlicht. Bei einer rein axialen Hauptströmung in positiver Richtung verschieben sich die Cut-On Frequenzen hin zu niedrigeren Werten. Gleichzeitig tritt eine Änderung der Dispersionseigenschaften ein, so dass sich auch die axialen Wellenzahlen verringern. Mit zunehmender Azimutalmodenordnung m vergrößert sich der jeweilige Abstand zwischen der Cut-On Frequenz und der Blockierfrequenz. Dieser Effekt verstärkt sich mit steigender Strömungs-Mach-Zahl Ma_x . Das heißt, der Einfluss der Strömungsüberlagerung wirkt sich wesentlich stärker auf hohe Azimutalmoden aus als auf niedrigere, so dass deren Cut-On Frequenzen zunehmend geringer werden. Allerdings kommt dieser Effekt nur bei sich entgegen der Strömung ausbreitenden Wellen zum Tragen, da die Blockierfrequenzen definitionsgemäß den Cut-On Frequenzen des strömungsfreien Falls entsprechen.

Wird dem Schallfeld hingegen ein Drallfeld überlagert, so ändert sich zwar wiederum die Dispersion, doch bleiben die axialen Wellenzahlen symmetrisch. In Abhängigkeit von der Drallrichtung und Stärke findet entweder eine Erhöhung oder eine Verringerung der Cut-On Frequenzen statt. So wird bei positiver Drallrichtung $f_{\text{Cut-On}}$ der Azimutalmoden hin zu höheren Werten verschoben, was bedeutet, dass die Moden später ausbreitungsfähig sind. Im Gegensatz dazu werden bei negativer Drallrichtung die Moden früher Cut-On bzw. es können sich für eine feste Anregungsfrequenz Moden höherer Ordnung als im Fall ohne Drallüberlagerung ausbreiten. Physikalisch betrachtet werden die in axialer Richtung wandernden Wellen durch einen vorherrschenden Drall weder gestreckt noch gestaucht. Somit wirkt in axialer Richtung kein Doppler-Effekt, wie es bei einer Hauptströmung der Fall ist, und die axialen Wellenzahlen bilden sich symmetrisch aus. Allerdings tritt bei Drallüberlagerung ein in azimuthaler Richtung wirkender Dopplereffekt auf. In Abhängigkeit von der Modendrehrichtung und der Drallrichtung führt dies zu einer veränderten axialen Wellenzahl. Bei einer kombinierten Drall- und Hauptströmungsüberlagerung sind beide Effekte gekoppelt (vgl. Abb. C.10).

Wie in Abschnitt 4.1.3 beschrieben ist, können Spinning Modes als ebene Wellen mit einem definierten Winkel aufgefasst werden. Dieser ändert sich bei Strömungsüberlagerung. Abbildung 4.9 zeigt dazu exemplarisch die abgewinkelten Umfangsdruckverteilungen einer $mn_{[1;0]}$ Mode für verschiedene Mach-Zahlen Ma_x . Wie bereits ausgeführt ist, lassen sich so die auftretenden Doppler-Effekte anschaulich darstellen. In Folge dessen ändern sich die Modenwinkel derart, dass für eine Wellenausbreitung entgegen der Strömungsrichtung

steilere Winkel vorliegen, während bei Ausbreitung mit der Strömungsrichtung die Winkel sehr flach werden. Im Grenzfall bei $Ma_x = 1$ können die Winkel so steil werden, dass die Wellenfronten der Spinning Mode orthogonal zur Rohrachse sind. Dies lässt sich über eine Grenzwertbetrachtung $\lim_{Ma_x \rightarrow 1} \chi_x = 0, \pi$ der in Gl.(4.14) gegebene Winkelbeziehung beweisen. Wird hingegen diese Grenzwertbetrachtung auf die Gruppengeschwindigkeit nach Gl.(4.18) angewendet, ergibt sich $\lim_{Ma_x \rightarrow 1} c_{gr,x[mn]}^{(\pm)} = 0, \pi$. Die Mode kann sich dann nicht mehr in axialer Richtung ausbreiten und wird im Kanal stehen. Dieses Phänomen tritt in Turbomaschinen immer an Verdichtungsstößen auf, die somit eine natürliche Barriere für die Schallausbreitung darstellen. Diese Zusammenhänge erwähnt bereits Smith (2004) für den allgemeinen Fall der Schallausbreitung einer akustischen Quelle in Turbinen. Einhergehend ändern sich sowohl die axialen als auch die azimuthalen Wellenlängen λ_x bzw. λ_θ , wie in Abb. 4.9 zu erkennen ist.

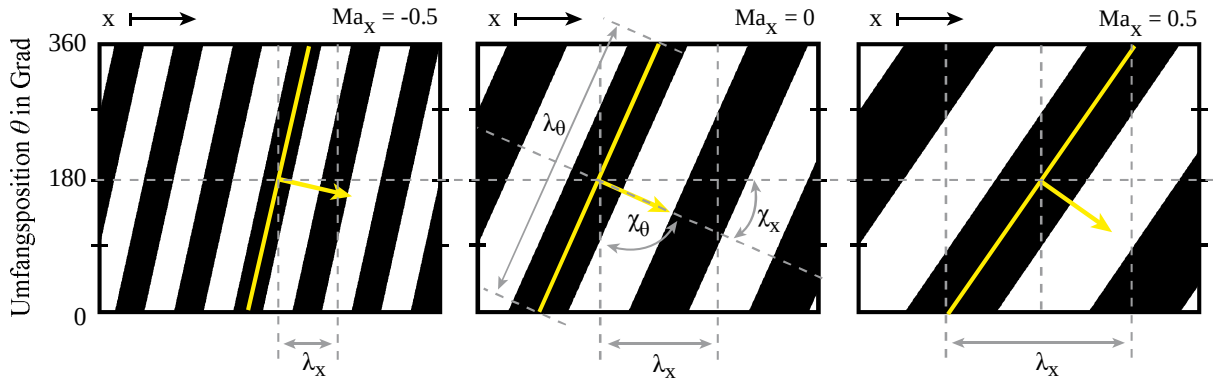


Abbildung 4.9: Abgewickeltes Schalldruckprofil entlang der Rohrwand für eine $mn_{[1;0]}$ Spinning Mode bei unterschiedlichen Hauptströmungsgeschwindigkeiten.

4.1.5 Frequenzeinfluss von akustischen Moden

In Abb. 4.10 sind exemplarisch für eine $mn_{[2;0]}$ Spinning Mode die Verläufe der Wellenfronten bei variierender Anregungsfrequenz kD gegenüber gestellt. In allen Fällen ist die Cut-On Bedingung erfüllt und die Mode ist stets ausbreitungsfähig. Wie zu erkennen ist, beeinflusst kD direkt die Modenform. Da sich das Schallfeld stets mit der jeweiligen Anregungsfrequenz dreht, sind auch die axialen und azimuthalen Wellenlängen von dieser abhängig. Mit Erhöhung der Anregungsfrequenz werden die Wellenlängen kürzer und die Wellenzahlen größer. Dies führt zu geringeren Ausbreitungswinkeln χ_x bzw. steileren Wellenfronten. Im Umkehrschluss würden im Grenzfall $kD \simeq kD_{\text{Cut-Off}}$ sehr große Winkel $\chi \rightarrow \pi/2$ auftreten, und die Mode würde sich lediglich um die Rohrachse drehen, wie es bereits in Abb. 4.1 dargestellt ist.

Für jede einzelne im Spektrum des akustischen Feldes auftretende Frequenz ist eine definierte Anzahl an Moden anregbar.

In Abb. 4.11 sind die instationären Modenamplituden in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz kD für unterschiedliche Modenordnungen $mn_{[0...3;n]}$ aufgetragen. Dazu wird im AWT ein Schallfeld unter Strömungseinfluss ($\dot{m} = 9 \text{ kg/s}$) mit dem Schallgenerator bei

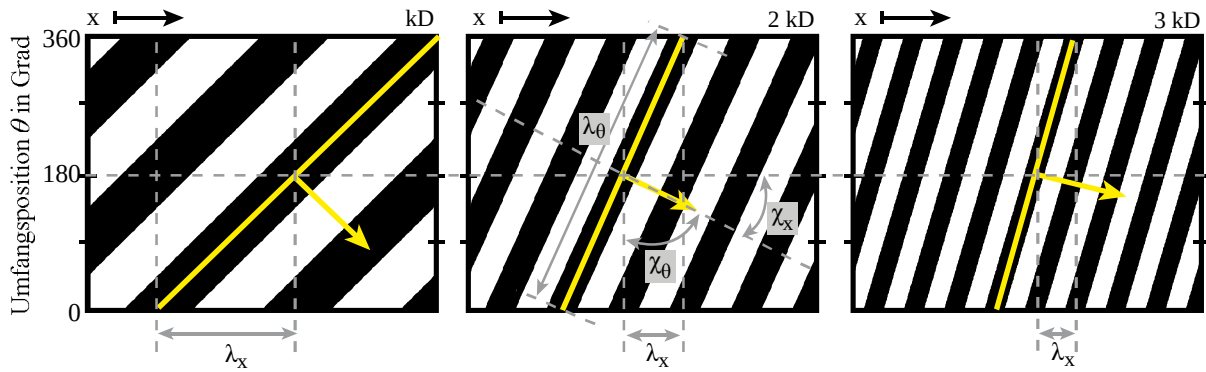


Abbildung 4.10: Abgewickeltes Schalldruckprofil entlang der Rohrwand für eine $mn_{[2;0]}$ Spinning Mode bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen kD .

einer einzelnen Frequenz harmonisch angeregt, ohne eine definierte Modenstruktur vorzugeben. Die Anregungsfrequenz wird schrittweise von $kD = 3,34$ (360 Hz) auf $kD = 13,94$ (1500 Hz) erhöht. Die Signalfilterung erfolgt mit einem Butterworth Bandpass-Filter, wobei die Eckfrequenz der Anregungsfrequenz entspricht und die Durchlassbreite $\delta f = \pm 5$ Hz beträgt.

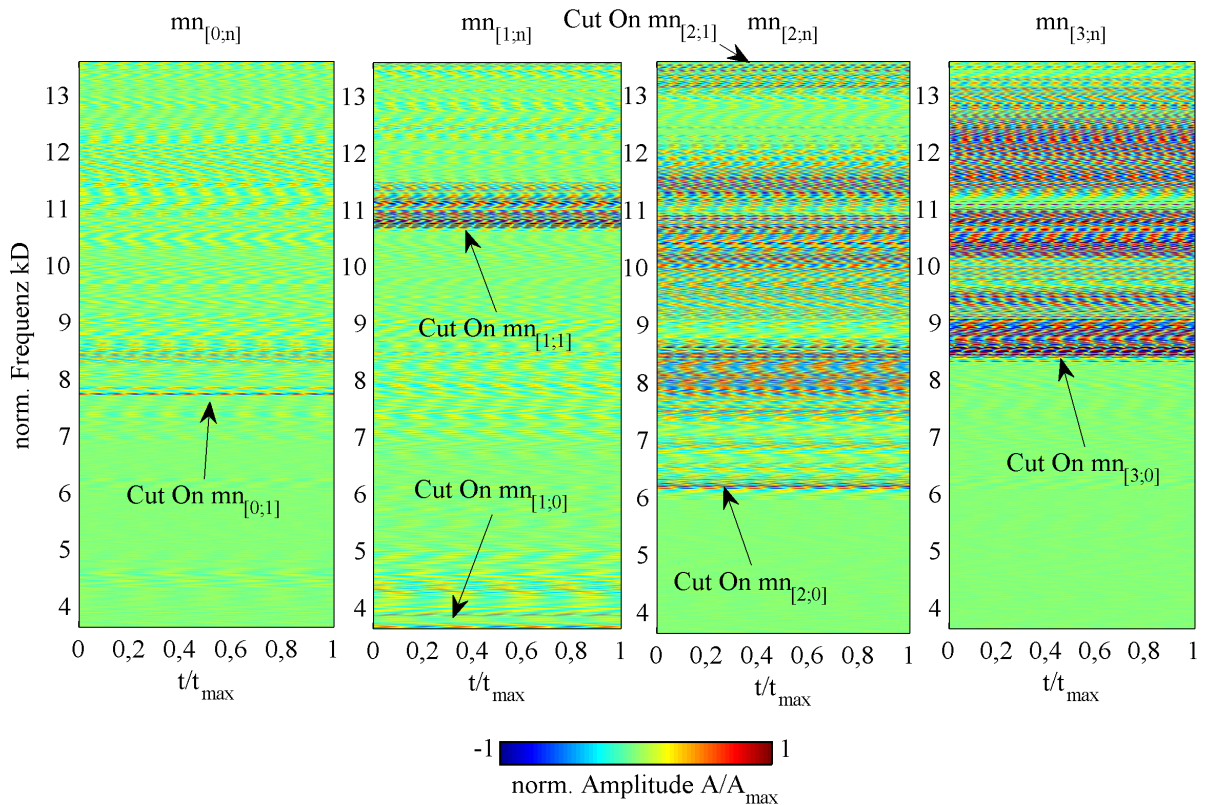


Abbildung 4.11: Instationäre Modenamplituden in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz kD für unterschiedliche Modenordnungen.

Mit dieser Darstellung lassen sich sehr deutlich die Cut-On Ereignisse erkennen, denn

bei Erreichen der Cut-On Frequenz treten stets die höchsten Modenamplituden, unabhängig von deren Ordnung, auf. Die jeweilige Mode weist dann ein Energiemaximum auf. Wie ebenfalls in Abb. 4.11 zu erkennen ist, wird eine Mode nach Überschreiten ihrer Cut-On Frequenz nicht zwangsläufig angeregt. In Abhängigkeit der Anregungsfrequenz ergeben sich somit ganz spezifische Ausbreitungszustände. Besonders deutlich wird dies am Beispiel der Grundmode oder der Azimutalmode erster Ordnung. Letztere weist beispielsweise bei $kD = 3,66$ sehr hohe Amplituden auf, da genau dort die $mn_{[1;0]}$ Mode Cut-On ist. Wird die Anregungsfrequenz erhöht, treten erst wieder bei $kD = 10,78$ signifikant erhöhte Modenamplituden auf. Dort ist die $mn_{[1;1]}$ Mode ausbreitungsfähig.

Auf der anderen Seite zeigt etwa die Betrachtung der $mn_{[2;n]}$ Mode und $mn_{[3;n]}$ Mode, dass nach Erreichen der Cut-On Frequenz eine Mode vielfach von unterschiedlichen Frequenzen angeregt werden kann. Diese Eigenschaft kommt insbesondere in mehrstufigen Turbomaschinen zum Tragen, bei denen eine Vielzahl an unterschiedlichen Frequenzen im Schallspektrum auftreten. Es bietet sich daher an, sich lediglich auf die energetisch dominanten Moden zu konzentrieren. Dieser Aspekt ist für die experimentelle Erfassung der modalen Schallfelder in Turbinen von großer Bedeutung. So ist zur gezielten Modenanalyse immer eine gut abgestimmte Signalfilterung erforderlich (vgl. Kapitel 6).

4.2 Stehende Azimutalmoden

Eine Sonderform der Spinning Modes sind stehende Wellen bzw. Moden, die sowohl in Umfangsrichtung, als auch in axialer Richtung auftreten können. Wie bereits in der Einleitung der Arbeit beschrieben ist (vgl. Abschnitt 1.3), treten in Turbomaschinen neben den einfachen Spinning Modes auch stehende bzw. partiell stehende Moden auf. Zur Verdeutlichung ist in Abb. 4.12 ein in der Versuchsturbine gemessenes Spektrum gezeigt. Für ausgewählte Frequenzen sind zusätzlich die Schalldruckfelder dargestellt, sowie das resultierende Gesamtschallfeld. Wie zu erkennen ist, liegt im niedrigen Frequenzbereich eine sehr dominante stehende Modenstruktur vor, die das Gesamtschallfeld prägt. Selbst die Rotor-induzierten Spinning Modes (bei BPF) beeinflussen in diesem Beispiel das resultierende Gesamtschallfeld nur marginal.

Obwohl stehende Azimutalmoden physikalisch-technisch relevant sind, werden sie in der offenen Literatur kaum behandelt. Eine der wenigen Quellen ist neben den bereits angegebenen Arbeiten von Evesque et al. (2003), Parmentier et al. (2012), Wolf et al. (2012) zur Brennkammerakustik, Hellmich und Seume (2004, 2006), die akustische Resonanzen in einem Axialverdichter untersuchen. Auf Grund dieses Mangels sollen im folgenden Abschnitt einige wichtige analytische Betrachtungen zur Beschreibung solch spezieller Modenformen angestellt werden. Die gewonnenen Kenntnisse sind für die Analyse und Interpretation experimentell ermittelter Schallfelder von Bedeutung.

Stehende Umfangsmoden bilden sich im Allgemeinen bei einer räumlich stationären Quellverteilung aus, ohne dass dem Schallfeld eine Richtung aufgeprägt ist. Dies ist etwa der Fall, wenn die Anregung in einem Rohr mit Hilfe fest installierter Lautsprecherarrays ohne Phasenversatz erfolgt. Auch werden einzelne strömungsmechanisch induzierte Schallquellen in einer Turbomaschine, wie etwa periodische Wirbelgebiete hinter Stützrippen

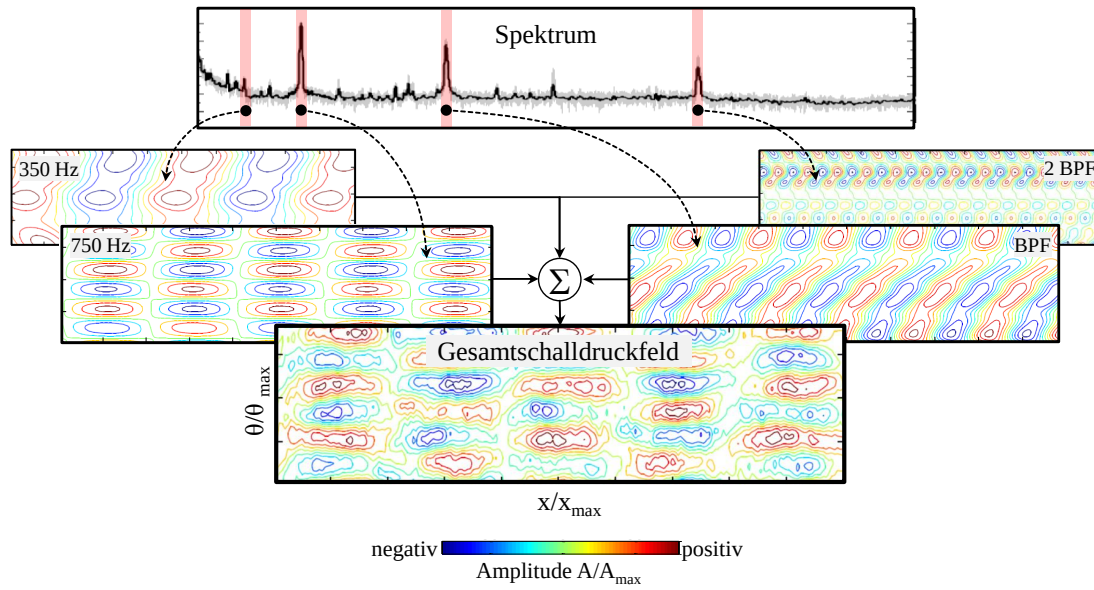


Abbildung 4.12: Experimentell in der Versuchsturbine bestimmte Schalldruckverteilung an ausgewählten Frequenzen des Spektrums. Aus der Überlagerung aller einzelnen Schallfelder ergibt sich schließlich das Gesamtschallfeld. Dessen Struktur ist in diesem Fall maßgeblich durch die stehende $mn_{[3;0]}$ Modenstruktur geprägt, die bei einer Frequenz von 750 Hz auftritt.

etc., in aller Regel stehende Umfangsmoden anregen.

Eine reine stehende Azimutalmode ergibt sich aus der Überlagerung einer hin- und einer rücklaufenden Teilmode in Umfangsrichtung, während eine stehende Axialwelle aus der Überlagerung einer in positiver und negativer axialer Richtung laufenden Welle resultiert. Beiden gemein ist, dass die jeweiligen Teilwellen sowohl die betragsmäßig gleichen Wellenzahlen als auch die gleichen Amplituden aufweisen müssen. Die Überlagerung der einzelnen Teilmoden führt schließlich zu der resultierenden Mode. Gerade für die Beschreibung stehender Wellen ist der in Gl. (3.24) verwendete Ansatz mit vier überlagerten Teilmoden ein großer Vorteil. Wie im Folgenden gezeigt wird, lassen sich mit dieser Formulierung direkt die einzelnen Wellen- bzw. Modenkomponenten separieren und gezielt deren Einfluss auf das Gesamtschalldruckfeld untersuchen.

Dies ist in Abb. 4.13 exemplarisch für eine stehende $m_{[1;0]}$ Mode dargestellt. Das Schalldrucksignal wird an 12 umfangsverteilter diskreten Punkten aufgenommen und über der Zeit abgetragen. Wie zu erkennen ist, stellt sich dabei aufgrund der in Umfangsrichtung auftretenden Knotenlinien, ein charakteristisches Umfangsdruckprofil ein, das im zeitlichen Verlauf zu einer Variation der Umfangsamplitude mit Nulldurchgängen an festen Azimutalpositionen führt.

Stehende Axialwellen resultieren z.B. aus den an Rohrenden bzw. Rohreinbauten auftretenden Reflexionen. Insbesondere in den komplexen Strömungskälen von Turbomaschinen treten eine Vielzahl an Reflexionen auf. Diese ergeben sich z.B. durch Diskontinuitäten in der Kanalgeometrie aber auch an den Rotoren selbst, welche in Abhängigkeit von der Drehzahl, den Anströmbedingungen und den geometrischen Eigenschaften ein ganz spezi-

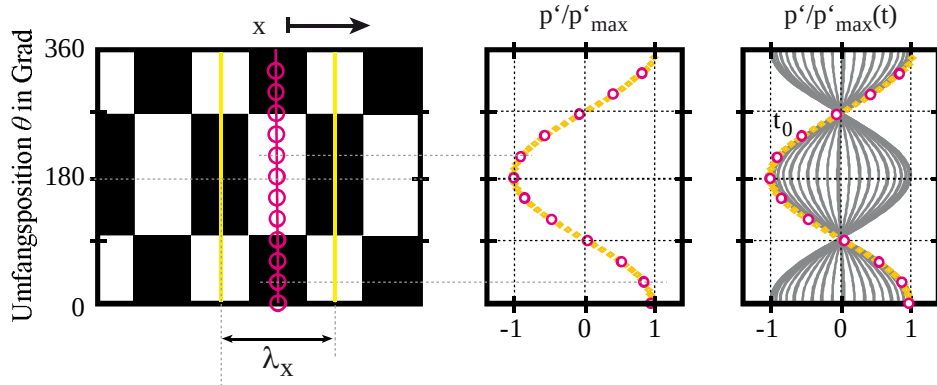


Abbildung 4.13: Umfangsdruckverteilung für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als stehende Welle in Umfangsrichtung an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks

fisches Reflexionsverhalten aufweisen (Koch 1971, Amiet 1974).

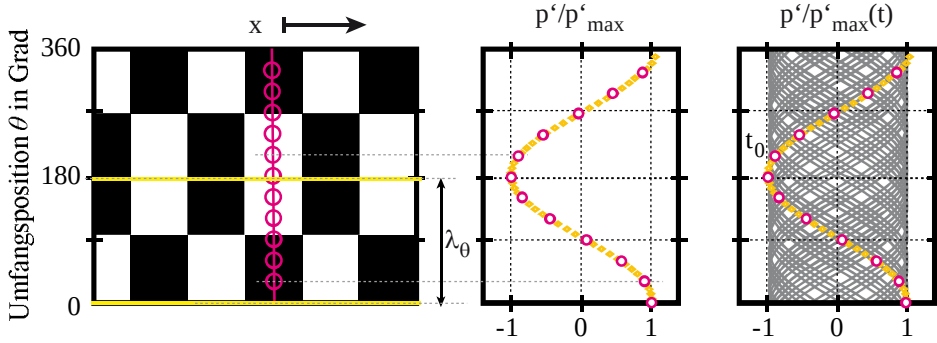


Abbildung 4.14: Umfangsdruckverteilung für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als stehende Welle in axialer Richtung an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks

Abbildung 4.14 zeigt analog zu Abb. 4.13 den zeitlichen Verlauf des an 12 Umfangspositionen aufgenommen Schalldrucks für eine stehende Axialwelle der Modenordnung $mn_{[1;0]}$. Im Gegensatz zu dem charakteristischen Schalldruckprofil bei stehenden Azimutalmoden ergibt sich für stehende Axialwellen keine räumlich stationäre Form des Umfangsdrucks. Dies verdeutlicht zudem, dass der Einsatz von nur an einer axialen Position über dem Umfang verteilter Sensoren keine Rückschlüsse auf die Existenz stehender Axialwellen zulässt und sich vielmehr ein Schalldruckmuster wie bei einer Spinning Mode einstellt (vgl. Abb. 4.2).

Im Folgenden soll sich jedoch auf stehende Azimutalmoden konzentriert werden. Wie bereits erwähnt wurde, treten in komplexen Maschinen nur in den seltensten Fällen reine, sondern vielmehr partiell stehende Moden auf. Generell sind für das Auftreten einer partiell stehenden Azimutalmode identische Wellenzahlen $k_{\pm x}^{\pm \theta}$ notwendig, während die Amplituden der gegenläufigen Teilmoden durchaus variieren können. Im Folgenden wird dazu mit $\epsilon = \hat{A}_{\pm x}^{+\theta} / \hat{A}_{\pm x}^{-\theta}$ das sogenannte Amplituden- oder Teilmodenverhältnis eingeführt, welches ein Maß für die Anteile der beiden Teilmoden an der Überlagerung dieser ist. Abb. 4.15 zeigt exemplarisch die Umfangsdruckverteilung einer $m_{[1;0]}$ Mode, die sich aus der Überlagerung

einzelner Teilmoden mit einem Amplitudenverhältnis von $\epsilon \neq 0$ ergibt.

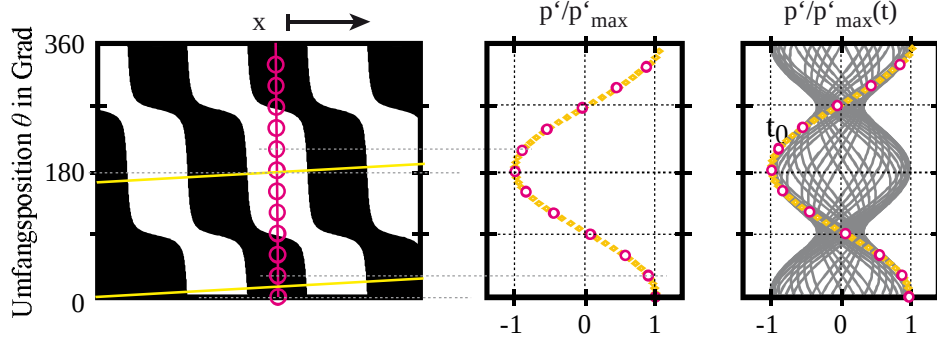


Abbildung 4.15: Umfangsdruckverteilung für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als partiell stehende Welle an diskreten Punkten und zeitliche Variation des Wanddrucks

Für den Fall, dass in einem zylindrischen Rohr eine Mode mn , bestehend aus den in Gl.(3.24) gegebenen vier Teilmoden, erzeugt wird, lässt sich unter der Annahme identischer Umfangsamplituden Gl.(3.24) vereinfachen. Dabei können die Amplituden der beiden in Umfangsrichtung gegenläufigen Teilmoden $\hat{A}_{+x}^{+\theta}$ und $\hat{A}_{+x}^{-\theta}$ über die Phasenbeziehung $\hat{A}_{+x}^{+\theta} = \hat{A}_{+x}^{-\theta} e^{-i\phi_+}$ zu einer Gesamtamplitude $\hat{A}_{+x}$ bzw. $\hat{A}_{-x}^{+\theta} = \hat{A}_{-x}^{-\theta} e^{-i\phi_-}$ ausgedrückt werden, wobei $|\hat{A}_{\pm x}| = 2|\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta}|$ gilt. Mit diesen Beziehungen und dem Additionstheorem für komplexe Exponentialfunktionen

$$e^{ia} + e^{\pm ib} = \cos((a \mp b)/2) e^{-i[(a \pm b)/2]} \quad (4.23)$$

vereinfacht sich Gl.(3.24) zu:

$$p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) = \Re \left\{ \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]} r) e^{-i\omega t} \cdot \left[\hat{A}_{+x} \cos \left(m\theta + (k_{+x}^{+\theta} - k_{+x}^{-\theta}) \frac{x}{2} + \frac{1}{2} (\phi_{+x}^{+\theta} - \phi_{+x}^{-\theta} + \phi_+) \right) e^{i/2 [(k_{+x}^{+\theta} + k_{+x}^{-\theta})x + (\phi_{+x}^{+\theta} + \phi_{+x}^{-\theta} - \phi_+)]} \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{A}_{-x} \cos \left(m\theta + (k_{-x}^{-\theta} - k_{-x}^{+\theta}) \frac{x}{2} + \frac{1}{2} (\phi_{-x}^{-\theta} - \phi_{-x}^{+\theta} + \phi_-) \right) e^{i/2 [-(k_{-x}^{+\theta} + k_{-x}^{-\theta})x + (\phi_{-x}^{-\theta} + \phi_{-x}^{+\theta} - \phi_-)]} \right] \right\} \quad (4.24)$$

Dabei hängt die Druckverteilung $p'_{[mn]}$ neben der Modenordnung m auch von den etwaigen axialen Wellenzahlen $k_{\pm x}^{\pm\theta}$ und Phasen $\phi_{\pm x}^{\pm\theta}$ der hin- und rücklaufenden Welle ab. Für den Sonderfall ohne Strömung sind die beiden axialen Wellenzahlen identisch, so dass sich Gl.(4.24) für zwei exakt gegenläufige Umfangsmoden mit $\phi_{\pm x}^{\pm\theta} = 0$ und $\phi_+ = \phi_- = 0, \pi, 2\pi, \dots$ zu

$$p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) = \Re \left\{ \hat{A}_{\pm x} \left(\Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]} r) \cos(m\theta) e^{ik_{\pm x}^{\pm\theta} x} \right) e^{-i\omega t} \right\} \quad (4.25)$$

weiter vereinfachen lässt. Sowohl bei rein axial gerichteter als auch bei drallbehafteter Strömung muss anstelle der Gl.(4.25) die Gl.(4.24) verwendet werden, denn dann gilt $k_{+x}^{\pm\theta} \neq k_{-x}^{\pm\theta}$

bzw. $k_{\pm x}^{+\theta} \neq k_{\pm x}^{-\theta}$. Dies führt zu einem komplexen Interferenzmuster mit den stehenden Umfangsmoden, wie es in Abb.(4.17) dargestellt ist.

Mathematisch lassen sich diese Zusammenhänge mit Hilfe von Gl.(4.24) herleiten. Da für eine rein stehende Azimutalmode die Wellenzahlen $k_{+x}^{+\theta} = k_{+x}^{-\theta}$ bzw. $k_{-x}^{+\theta} = k_{-x}^{-\theta}$ sind, ist das Druckfeld der Mode

$$p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) = \Re \left\{ \left[\Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]} r) \left(\hat{A}_{+x} \cos(m\theta) e^{ik_{+x}^{+\theta} x} \right) + \left(\hat{A}_{-x} \cos(m\theta) e^{-ik_{-x}^{+\theta} x} \right) \right] e^{-i\omega t} \right\}. \quad (4.26)$$

Der Einfluss der Strömungsrichtung auf die Ausbreitung und das Modulationsmuster der Schalldruckverteilung hängt von der betrachteten Ausbreitungsrichtung der Mode ab. Exemplarisch sei von einer sich stromab ausbreitenden Welle ausgegangen. Wie in Gl. (4.26) zu erkennen ist, wird die axiale Schallausbreitung lediglich durch die im Exponentialterm $e^{ik_{+x}^{+\theta} x}$ enthaltene axiale Wellenzahl $k_{+x}^{+\theta}$ beeinflusst.

Um den Einfluss der axialen Strömungsgeschwindigkeit Ma_x auf die Modulationseigenschaften des Druckfeldes näher zu untersuchen, lässt sich in Anlehnung an die in Tab. 3.1 bzw. Gl.(3.22) gegebenen Wellenzahldefinitionen mit

$$k_x^{\pm} = \frac{Ma_x k \pm \sqrt{k^2 - (1 - Ma_x^2) k_{r,[mn]}^{(\sigma)2}}}{(1 - Ma_x^2)} \quad (4.27)$$

ein einfacher analytischer Zusammenhang zur Bestimmung der axialen Wellenzahl ohne Drall angeben. Die zuvor beschriebene Streckung oder Stauchung des axialen Wellenfeldes aufgrund einer überlagerten Hauptströmung, lässt sich mit Hilfe der Wellenfrontposition in axialer Richtung bestimmen, welche periodisch in $2\pi/k_x^{\pm}$ ist. Somit kann die Variation der Wellenlänge (Streckung oder Stauchung) als Proportionalitätsfaktor

$$q_{[mn]}^{\pm} = \frac{k_x^{\pm}}{k_x^{\pm}|_{Ma_x=0}} = \frac{k_x^{\pm}}{\pm \sqrt{k^2 - k_{r,[mn]}^{(\sigma)2}}} \quad (4.28)$$

in Bezug auf den strömungsfreien Fall angegeben werden. Wie in Gl.(4.28) zu erkennen ist, hängt die axiale Form des Schalldruckprofils sowohl von der Stärke der überlagerten Grundströmung als auch über die Wellenzahl $k = \omega/a$ von der Anregungsfrequenz ω und über die radiale Wellenzahl von der Modenordnung mn ab. Um das Ausbreitungsverhalten der axialen Wellen innerhalb eines durchströmten Kanals eingehender zu untersuchen, sind in Abb. 4.16 exemplarisch die Verläufe einer normierten Wellenzahl bei variierender Hauptströmungsgeschwindigkeit dargestellt. Dabei ist die axiale Wellenzahl $k_x^{\pm}$ nach Gl.(4.27) mit $k_{x,norm}^{\pm} = (k_x^{\pm} - k_x^{\pm}|_{Ma_x=0})/k_x^{\pm}|_{Ma_x=0}$ auf den strömungsfreien Zustand bezogen, so dass sich direkte Aussagen über den Einfluss der überlagerten Hauptströmung auf die Wellenzahl treffen lassen. Mit steigender positiver Mach-Zahl Ma_x nimmt die axiale Wellenzahl einer sich in Strömungsrichtung ausbreitenden Welle ab, während bei Hauptströmung in negativer Richtung die axiale Wellenzahl zunimmt. Die physikalische Begründung lässt sich mit Hilfe des eintretenden Doppler-Effektes

$$k_x^{\pm} \propto \frac{k_x^{\pm}|_{Ma_x=0}}{1 \pm Ma_x} \quad (4.29)$$

geben, denn die Wellenzahl selbst stellt physikalisch gesehen einen Proportionalitätszusammenhang zwischen der Wellenlänge und der Anregungsfrequenz her. Durch die Strömungsüberlagerung erfährt die Schallwelle nun entweder eine Stauchung oder Streckung, was zu einer Verschiebung der axialen Wellenzahl führt.

So zeigt sich mit Hilfe der normierten Wellenzahl, dass beispielsweise bei positiver Strömungsüberlagerung eine sich mit der Strömung ausbreitende Welle negative Werte für $k_{x,\text{norm}}^\pm$ aufweist und sich die axiale Wellenzahl in Bezug auf den strömungsfreien Fall verringert - d.h. sie wird gestreckt. Bei negativer Strömungsrichtung bzw. negativer Ausbreitungsrichtung erfolgt die Bestimmung analog. Die resultierenden Wellenzahlverschiebungen bei einer Strömungsüberlagerung beeinflussen unmittelbar die Cut-On Eigenschaften der propagierenden Wellen und spielen somit bei der akustischen Untersuchung von Schalltransportmechanismen eine wichtige Rolle. Der Cut-On/ Cut-Off Effekt ist ebenfalls in Abb. 4.16 für die $mn_{[3,0]}$ -Mode zu erkennen. Die zur Berechnung der normierten Wellenzahlen verwendete Anregungsfrequenz ist bei den gegebenen Randbedingungen zu niedrig gewählt, um die $mn_{[3,0]}$ -Mode anzuregen, so dass die Wellenzahl komplexwertig wird.

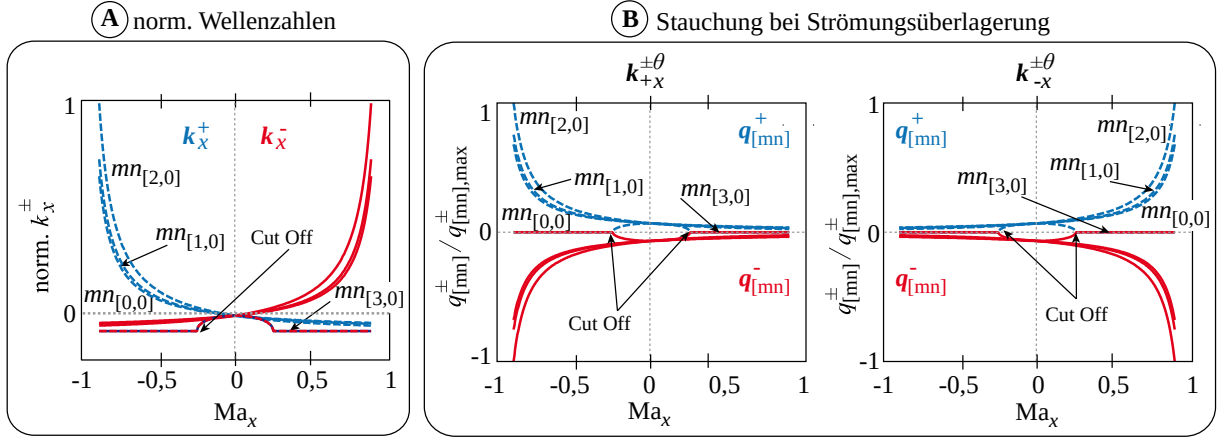


Abbildung 4.16: (A): Verlauf der normierten Wellenzahl $k_{x,\text{norm}}^\pm = (k_x^\pm - k_x^\pm|_{Ma_x=0})/k_x^\pm|_{Ma_x=0}$ bei einer Anregungsfrequenz von $kD = 8,13$. (B): Verläufe des Proportionalitätsfaktors $q_{[mn]}^\pm$ für identische Randbedingungen. (rechts) Ausbreitung der Moden in positive x-Richtung. (links) Ausbreitung der Moden in negative x-Richtung

In Abb. 4.16 sind weiterhin die nach Gl.(4.28) bestimmten Verläufe des Proportionalitätsfaktors $q_{[mn]}^\pm$ als Funktion der überlagerten Strömungsgeschwindigkeit für die Moden $mn_{[0...3,0]}$ in Abhängigkeit von der Wellenausbreitungsrichtung dargestellt. Dabei beschreibt $q_\pm$ das Vielfache, um das das Druckfeld bzw. die Modenstruktur gestaucht ($|q_{[mn]}^\pm| < 1$) oder gestreckt ($|q_{[mn]}^\pm| > 1$) wird. Es wird deutlich, dass sich der Strömungseinfluss besonders stark im Falle einer sich entgegen der Strömungsrichtung ausbreitenden Schallwelle auswirkt. So wird beispielsweise für eine sich in positiver axialer Richtung entgegen der Hauptströmung ausbreitenden Welle $q_{[mn]}^+$ exponentiell ansteigen und bei $Ma_x = -1$ theoretisch unendlich groß werden. Dies würde ebenfalls zu theoretisch unendlich großen axialen Wellenzahlen bzw. unendlich kleinen Wellenlängen führen. Breiten sich hingegen Welle und Strömung in der gleichen Richtung aus, so wird $q_{[mn]}^\pm$ bzw. die axiale Wellenzahl abnehmen, was einer Streckung der Wellen in axialer Richtung entspricht. Mit Hilfe dieses

analytischen Zusammenhang lässt sich der Strömungseinfluss auf die Modulationseigenschaften der axialen Wellenausbreitung schnell bestimmen.

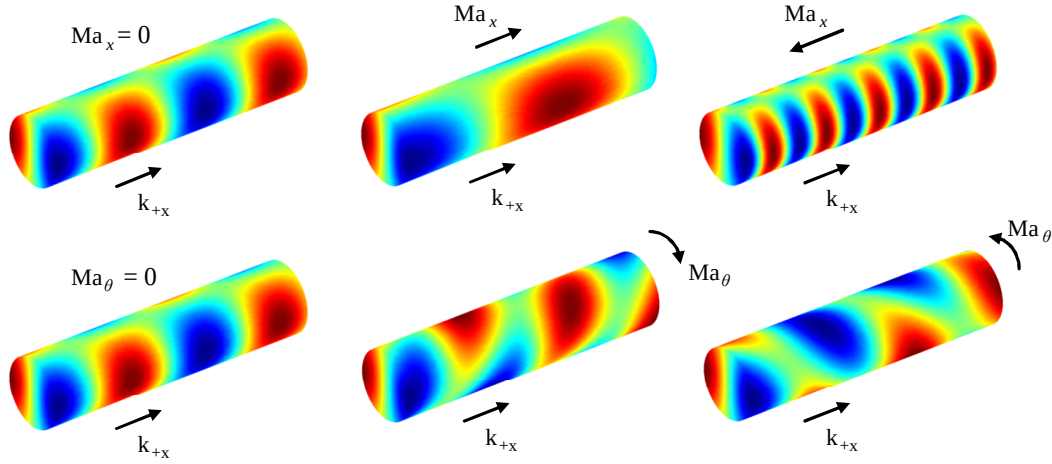


Abbildung 4.17: Ausgebildete Modenstruktur einer ursprünglich stehenden Umfangsmode $mn_{[1;0]}$ unter dem Einfluss einer überlagerten Axialströmung (oben) und Drallströmung (unten)

In sehr anschaulicher Art und Weise lassen sich anhand von Gl.(4.25) einige grundlegende Eigenschaften der stehenden Umfangsmoden aufzeigen: Die räumliche Änderung des Schallfeldes in Umfangsrichtung ist einzig durch den Cosinus-Term gegeben. Dies bewirkt in Abhängigkeit von der Ordnung m das Moden-spezifische Grundmuster der Umfangsdruckverteilung mit m -Schwingungsbäuchen über dem Umfang. Da dieser Term jedoch rein reellwertig ist und keine komplexe Drehanweisung beinhaltet, ist das Druckfeld stationär und wird sich folglich nicht drehen, wie es für eine klassische Spinning Mode zu erwarten wäre. Da in Gl.(4.25) zusätzlich noch der komplexwertige Exponentialterm der axialen Wellenzahl enthalten ist, wird das stationäre Grundmuster der Umfangsmode in axialer Richtung mit der Zeit ($e^{-i\omega t}$ -Term) oszillieren.

Die Drallüberlagerung führt hingegen zu einer azimuthalen Drehung des ohne Drall stationären Druckfeldes, wie in Abb.(4.17) deutlich zu erkennen ist. Dabei entsprechen die Drehrichtung und die Drehgeschwindigkeit der Mode denen der Drallkomponente. Diese Eigenschaft hat einen entscheidenden Einfluss auf das Interferenzverhalten zweier überlagelter Teilmoden der Ordnung mn . Selbst wenn zwei gegenläufige Teilmoden vorliegen, die hinsichtlich ihrer Amplitude und Phase vollkommen identisch sind, wird durch die zusätzliche Drallüberlagerung die eine Teilmode beschleunigt, während die andere verzögert wird. Dieser Effekt resultiert in einem speziellen Interferenzmuster, wie es in Abb.(4.17) gezeigt ist. Die ursprünglich symmetrische Form der Druckzellen wird dabei verzerrt, was sich mit dem Verzerrungswinkel α gemäß

$$\alpha = \pi/2 \pm \arctan \left(\frac{-k_{+x}^{\theta} - k_{+x}^{-\theta}}{2m} \right) \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

beschreiben lässt und in Abb. 4.18 dargestellt ist. Die Herleitung des Verzerrungswinkels ist in Anhang B.9 gegeben. Dabei fällt auf, dass zu dessen Herleitung lediglich der Cosinus-

Term Verwendung findet, so dass sich der Winkel weder durch den radialen Anteil des Druckfeldes noch durch den Oszillationseffekt in axialer Richtung ändert und auch nicht zeit- und frequenzabhängig ist. Dies ist von entscheidender Bedeutung, denn so lässt sich zeigen, dass α lediglich eine Funktion der axialen Wellenzahlen und der Modenordnung m ist.

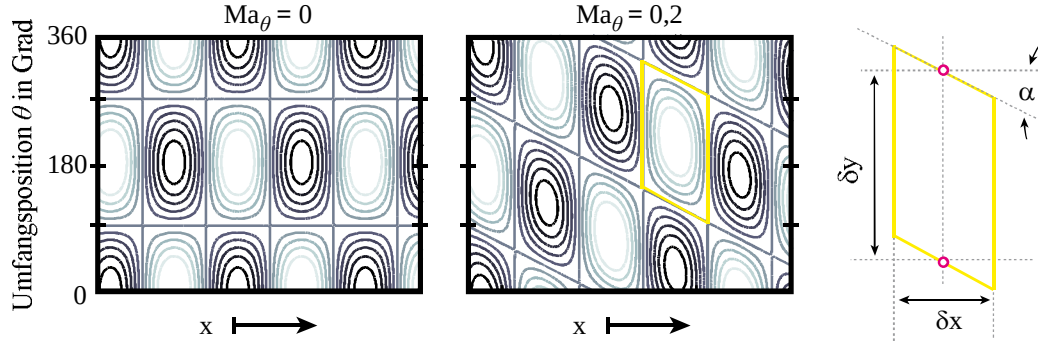


Abbildung 4.18: Verzerrungswinkel

Mit Hilfe der in diesem Abschnitt hergeleiteten Beziehungen zeigt sich darüber hinaus, dass die Überlagerung des Schallfeldes mit einer Haupt- und Drallströmung stets zu einem azimutalen Phasenversatz der Umfangsmodenstruktur führt. Bei Strömungsüberlagerung sind die axialen Wellenzahlen $k_{\pm x}^{+\theta}$ und $k_{\pm x}^{-\theta}$ unterschiedlich, was eine entsprechende Verzerrung der Modenstruktur bewirkt (vgl. Anhang B.9).

4 Theoretische Betrachtungen zum Ausbreitungsverhalten akustischer Moden in Rohrleitungen

5 Analytisches Schalltransportmodell

Dieses Kapitel stellt das im Rahmen der Arbeit entwickelte Transportmodell vor, welches zusammen mit den Analyseverfahren der zentrale Baustein der hybriden Analysemethodik ist. Es wird die grundlegende Idee und der Aufbau des Transportmodells vorgestellt und deren Integration in den entwickelten Prozessablauf beschrieben.

5.1 Idee und Ziel

Wie in der Einleitung (vgl. Abschnitt 1.4) bereits beschrieben wurde, erfordern hochauflösende akustische Messungen in Rohrleitungen und Turbomaschinen eine Vielzahl an sowohl azimuthal als auch radial und axial verteilten Sensoren (Enghardt et al. 2001, Tapken und Enghardt 2006, Tapken et al. 2009). Gerade in realen Triebwerken sind jedoch die Messzugänge geometrisch beschränkt, so dass oftmals nur eine geringe Anzahl an Sensoren verwendet werden kann. Ein weiterer Grund sind die hohen Beschaffungskosten akustischer Messtechnik. Die Verwendung von nur wenigen Sensoren ist im praktischen Einsatz meistens unumgänglich und schränkt die Analyse ein.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein hybrides Auswertekonzept vorgestellt, dass für die experimentell-simulative Analyse des Schalltransports in Turbomaschinen eingesetzt wird. Die Idee ist, mit Hilfe weniger lokal gemessener Schalldrücke im Experiment das komplette Schallfeld anschließend rechnerisch zu bestimmen. Die Messwerte dienen somit als Randbedingung für die Schallfeldberechnung. Somit ist selbst bei einer geringen Sensoranzahl eine detaillierte Studie des Schallfeldes möglich. Während in den Experimenten die Schallfeldinformationen nur an den Mikrofonpositionen vorliegen, ist man aufgrund der berechneten Ergebnisse in der Lage, das Schallfeld an jedem beliebigen Punkt der Domäne zu bestimmen. Dies eröffnet eine Vielzahl an Möglichkeiten zur detaillierten Schallfeldanalyse und hilft bei der physikalischen Deutung und Interpretation der Messergebnisse.

Das Modell wird anschließend im Rahmen der in Kapitel 7 vorgestellten Versuchskampagne am AWT experimentell validiert. Es zeigt sich, dass auf Basis der experimentell ermittelten Randbedingungen die Schallfelder, wie sie in den Versuchen auftreten, rechnerisch nachgebildet werden können. Es wird die prinzipielle Umsetzung dieser Idee demonstriert, die für zukünftige Schallfelduntersuchungen eine vielversprechende Auswertungsmöglichkeit darstellt.

5.2 Literaturüberblick zu Schalltransmissions- und Schalltransportmodellen

Bevor der Aufbau und die Struktur des Transportmodells beschrieben werden, sollen noch einige ergänzende Anmerkungen gemacht werden, um das Thema in den Stand der Wissenschaft und Technik einzuordnen. Generell gilt es, in der Terminologie den Schalltransport von der Transmission zu unterscheiden und damit auch die Modelle. Während der Transport die Ausbreitung der Schallfelder durch die Strömung-führenden Rohrleitungen, wie etwa die Zu- und Auslaufstrecke der Turbine, beschreibt, wird unter Transmission in diesem Zusammenhang das Durchtrittsvermögen des Schalls durch die Schaufelgitter verstanden.

Verfahren zur Beschreibung der Schalltransmission basieren oftmals auf Korrelationen oder nutzen semi-empirische Ansätze und sind meist sehr anwendungsspezifisch. Allgemeingültige analytische Modelle sind in der offenen Literatur selten zu finden. Daher soll im Folgenden ein kurzer Überblick über etablierte Ansätze zur Berechnung der Schalltransmission in Gitterkaskaden gegeben werden.

Während Mathews und Rekos (1977) ein sehr rudimentäres Modell zur groben Abschätzung der in Turbinen auftretenden Transmissionsverluste des in Brennkammern emittierten Schalls vorstellen, werden bereits in den frühen 1970er Jahren einige richtungsweisende Arbeiten zur analytischen Bestimmung der Schalltransmission in Schaufelgittern entwickelt. Allen gemein ist jedoch die Reduzierung der realen Schaufelgeometrie auf ein ebenes Plattenprofil. Diese auch als „Actuator Disk“ bezeichneten Methodik, wird z.B. von Kaji und Okazaki (1970b,c) und darauf aufbauend von Koch (1971) genutzt, um sehr umfassende analytische Modelle zu entwickeln. Diese werden von Mani und Horvay (1970), Amiet (1971) Muir (1977a) oder Glegg (1999) im Laufe der Jahre erweitert.

Alle aufgeführten Transmissionsmodelle nutzen rein modale Ansätze, d.h. der Schalltransport/die Transmission durch das Gitter wird nur für einzelne Spinning Modes mit definiertem Ausbreitungswinkel berechnet. Aussagen zur Überlagerungsfähigkeit mehrerer Einzelmoden oder stehender Azimutalmoden sind nicht gegeben.

Die Schalltransmission durch zwei Schaufelgitter wird lediglich von Amiet (1974) und Muir (1977b) behandelt. Eine geschlossene Theorie zur Beschreibung mehrstufiger Probleme ist ebenso wenig bekannt, wie die Berücksichtigung rotierender Gitter. Heinig (1983) entwickelt allerdings einen vielversprechenden Ansatz, der auch auf das in dieser Arbeit eingesetzte Transportmodell zukünftig angewendet werden könnte. Ähnlich wie im vorliegenden Fall unterteilt auch Heinig die Transportdomäne in Segmente. In den Zu- und Abströmbereichen der Stufe wird ein numerisches Modell zur Berechnung des Schalltransports eingesetzt. Die eigentliche Transmission durch das Schaufelgitter bzw. die Stufe wird mit Hilfe eines klassischen Gittertransmissionsmodells (z. B. Amiet 1974) bewerkstelligt. Im Rahmen dieser Arbeit werden keine Gittertransmissionsmodelle eingesetzt, da lediglich der Schalltransport des überlagerten Feldes vor und hinter der Turbinenstufe für den oben beschriebenen Zweck interessiert. Die Stufe selbst wird als unbekanntes akustisches Übertragungselement angenommen.

Im Gegensatz zu den Transmissionsmodellen existiert eine Vielzahl an Veröffentlichungen über die Modellierung des Schalltransports in Rohrleitungssystemen. Oftmals werden

die Modelle zur Berechnung der Schallausbreitung unter Einfluss aktiver oder passiver Dämpfungselemente entwickelt (Zimmer et al. 2003, Bi et al. 2007). In den meisten Fällen werden dabei jedoch rein numerische Verfahren, wie etwa FEM-basierte Lösungsmethoden eingesetzt. So nutzt etwa Wright (2005a) einen FEM-Ansatz zur Berechnung von Kanalmoden und erweitert anschließend das Modell um eine überlagerte Grundströmung (Wright und McAlpine 2007). Auch Gabard und Astley (2008) verwenden ein FEM-basiertes Mode-Matching Verfahren zur Berechnung des Schalltransports in absorbierenden Kanälen unter Strömungseinfluss.

Regan und Eaton (1999) nutzen ein FEM Verfahren, Elnady und Boden (2001) ein Point-Matching Verfahren oder Tester et al. (2004) ein Störansatzverfahren (APE: engl. Acoustic Perturbation Equation) zur Berechnung des Schalltransports in zylindrischen Rohren. Weckmüller und Guerin (2009) simulieren etwa mit Hilfe eines solchen Störansatzes den Schalltransport durch einen Verdichtereinlauf. Einen ähnlichen Ansatz wählen Witthaus et al. (2013), Witthaus und Seume (2014). Dabei wird jedoch in einem Kreisringkanal gezielt ein Modenfeld vorgegeben und der Modentransport entgegen einer aufgeprägten Hauptströmung berechnet. Weitere Arbeiten sind z.B. in Schönwald (2010) oder Yin und Delfs (2001) zu finden.

Bennett et al. (2009) entwickeln hingegen ein einfaches analytisches Modell zur Berechnung der Ausbreitung eines Multi-Modenfeldes in einem durchströmten Rohrsystem und vergleichen die Ergebnisse mit einer numerischen WEM (engl.: Wave Expansion Method). Im Unterschied zu dem hier entwickelten Modell wird das Schallfeld bei Bennett et al. (2009) durch eine Punktquelle angeregt. In dieser Arbeit wird das genutzte Modell für die spezifische Anwendung zur Nachrechnung eines vorgegebenen Modenfeldes genutzt. Es müssen weder Rückkopplungen noch Brechungseffekte, noch akustische Quellen berücksichtigt werden. Zudem werden nur einfache Rohrgeometrien (mit und ohne Nabe) betrachtet. Aus diesem Grund ist eine rein analytische Lösung möglich, die an jedem beliebigen Punkt eine exakte Lösung der Wellengleichung generiert.

5.3 Aufbau des Transportmodells

Die Programmierung wird in Matlab umgesetzt, was eine einfache Integration von bereits vordefinierten Routinen mathematischer Funktionen ermöglicht. Die Berechnung erfolgt auf Basis der in Gl.(3.24) gegebenen Lösung der allgemeinen Wellengleichung stets für eine spezifische Mode mn , die sich wiederum aus ihren vier einzelnen Teilmoden zusammensetzt. Der Vorteil dieses Vorgehens ist, dass sich so jeder beliebige Modenzustand erzeugen lässt. Durch die Einführung eines Teilmodenverhältnisses ϵ (vgl. Abschnitt 4.2) lassen sich sowohl reine Spinning Modes als auch rein stehende Moden als auch partiell stehende Moden erzeugen. Dies ermöglicht die Generierung typischer Modenfelder in Turbomaschinen.

Jeder Teilmode wird eine Amplitude $A_{\pm x}^{\pm \theta}$, eine Frequenz ω , ein azimuthaler und ein zeitlicher Phasenwinkel ϕ_θ bzw. ϕ_t sowie eine Drehrichtung zugeordnet. Somit berücksichtigt das Modell einen zwischen den Azimutalmoden auftretenden räumlichen Phasenversatz, der zu Veränderungen der resultierenden Modenstruktur führt, wie in Abschnitt 6.3 gezeigt ist.

Das Berechnungsverfahren arbeitet dabei mit einem modalen zeit-harmonischen Ansatz.

5 Analytisches Schalltransportmodell

Das bedeutet, es werden zunächst die Zeitverläufe der Einzelmoden bei einer festen Frequenz berechnet. Anschließend werden die Moden zum Gesamtschallfeld linear superponiert. Für die korrekte Berechnung des resultierenden Schallfeldes sind die spezifischen Moden und deren Interaktionsbedingungen notwendig. Dies sind neben den komplexen Modenamplituden auch die Teilmodenverhältnisse und die modalen Phasenbeziehungen. Diese Randbedingungen werden mit Hilfe der in Kapitel 6 vorgestellten Analyseverfahren aus den experimentellen Messungen generiert. So werden mit Hilfe der Azimutalmodenanalyse (AMA) bzw. Radialmodenanalyse (RMA) zunächst die dominanten Modenordnungen und korrespondierenden Amplituden bestimmt. Über die in Abschnitt 6.4.2 vorgestellte Singulärwertzerlegung (SVD) lassen sich anschließend die benötigten Teilmodenverhältnisse berechnen, während die Bestimmung der Phasenversätze über das in Abschnitt 6.3.1 vorgestellte Analyseverfahren auf Basis einer Hilbert-Transformation der Datenreihen erfolgt. Die wichtigsten Eingabeparameter sind in Tab. 5.1 aufgeführt.

Tabelle 5.1: Übersicht über die wichtigsten Eingabeparamter des Transportmodells, die mit Hilfe der Analyseverfahren aus den experimentellen Daten gewonnen werden.

Bezeichnung	Variable	Bemerkung
Modenordnungen	m und n	Vorgabe der dominanten Moden aus AMA und/oder RMA (Abschnitt 6.2)
Modenamplitude	$A_{\pm\theta}^{\pm}$	Berechnung mit AMA oder RMA (Abschnitt 6.2)
Teilmodenverhältnis	ϵ	Berechnung über SVD (Abschnitt 6.4.2)
Anregungsfrequenz	f	Vorgabe oder aus Spektralanalyse (Abschnitt 6.1.1 und 6.1.2)
modaler Phasenwinkel	$\phi_{\pm\theta}$	Berechnung über Hilbertanalyse (Abschnitt 6.3.1 und Abschnitt 6.3.2)
zeitlicher Phasenwinkel	ϕ_t	Berechnung über Hilbertanalyse (Abschnitt 6.3.1)
Modendrehrichtung	—	Bestimmung über Phasenversatzgradienten (Abschnitt 6.3.1)
axialer Reflexionskoeffizient	R_{ax}	(optional) Bestimmung über RMA
Mach-Zahl	Ma_x , Ma_θ	Aus Strömungsmessung
Druck und Temperatur	p , T	Aus Strömungs- und Temperaturmessung

Neben den akustischen Randbedingungen und den Geometriedaten werden auch Strömungsfeldparameter übergeben, denn die Berechnungen erfolgen unter Berücksichtigung einer existierenden Haupt- und Drallströmung. Mit der Überlagerung eines konstanten Strömungsdralls lässt sich die Schallfeldstruktur in Hinblick auf die in Turbomaschinen vorherrschenden Strömungszustände näherungsweise abbilden. Die Implementierung komplexerer Drallmodelle erfordert hingegen eine numerische Approximation der radialen Wellengleichung, so dass eine rein analytische Lösung, wie hier präferiert, nicht mehr möglich ist (vgl. Abschnitt 3.2.2).

Die Berechnung des Schallfeldes erfolgt analytisch an diskreten Punkten eines Berechnungsgitters, welches anhand der Rohrparameter erstellt wird. Um die Rechenzeit zu reduzieren, kann das Netz optional auf die interessierenden Zylinderflächen und Radialebenen beschränkt werden. Die Berechnung wird im Zeitbereich für die frequenzabhängigen Moden durchgeführt, so dass an jedem Gitterpunkt ein berechneter Wert des Gesamtschalldrucks $p'(x, r, \theta, t, f)$ in Abhängigkeit von der Simulationszeit vorliegt. Für die Berechnung des Schallfeldes muss die in Gl.(3.24) gegebene Ausbreitungsfunktion gelöst werden. Die Bestimmung der axialen Wellenzahlen (vgl. Gl.3.27) erfolgt auf Basis der in Abschnitt 3.2.2 gegebenen Approximationslösung nach Kousen (1996). Die benötigten Eigenwerte $\mu_{[mn]}^{(\sigma)}$ werden abhängig vom Nabenverhältnis über eine iterative Nullstellenbestimmung der Bessel- und Neumanfunktionen ermittelt (vgl. Anhang B.3). Anschließend werden die Eigenwerte zur Berechnung der radialen Ausbreitungsfunktion $\Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}$ genutzt, wie in Gl.(3.21) angegeben ist.

Durch Überlagerung der einzelnen Teilmoden ergibt sich gemäß Gl.(3.25) schließlich das Gesamtschallfeld. Um Rechenkosten zu sparen, lässt sich die Berechnung auf die dominanten Moden beschränken. Dies kann entweder manuell vorgegeben oder auf Basis des Cut-On Zustands der Moden festgelegt werden. Eine optional implementierbare Funktion berechnet dazu zunächst die Cut-On Eigenschaften jeder einzelnen Mode. Mit Hilfe einer Fallunterscheidung wird anschließend geprüft, ob deren Anteil berücksichtigt oder verworfen werden soll, falls die Mode nicht ausbreitungsfähig ist. Das berechnete Schallfeld wird sowohl an ein grafisches Ausgabe-, als auch an ein Analyseprogramm übergeben. Die Zeitreihen können so z.B. als Animationen oder als Konturdarstellungen ausgegeben werden. Die Post-Processing Verfahren erlauben darüber hinaus die Implementierung beliebiger virtueller Mikrofone, mit Hilfe derer an verschiedenen Messstellen die zeitabhängigen Schalldruckdaten aufgenommen werden können. Somit können experimentelle Versuchsaufbauten rechnerisch nachgebildet werden. Auf der anderen Seite lassen sich z.B. die Sensorpositionen oder Messstellenanzahlen virtuell simulieren und optimieren. In die Analyseprozesse sind unterschiedliche Auswerteroutinen implementiert, die in Kapitel 6 beschrieben sind. Mit Hilfe derer kann das Gesamtschallfeld wieder in seine modalen Bestandteile zerlegt werden, um die Ausbreitungseigenschaften der einzelnen Moden zu untersuchen. Weiterhin werden die modalen Phasenbeziehungen, die Ausbreitungswinkel sowie die Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten berechnet. Die verwendeten Algorithmen werden auch zur Auswertung der realen Messwerte genutzt. Somit ist ein direkter Vergleich der Ergebnisse möglich.

Ein weiterer Vorteil dieses analytischen Programms ist, dass es sich einfach parametrisieren lässt und somit in Optimierungsprozesse integriert werden kann.

Der Aufbau des Programms ist modular, so dass beliebige Module oder Funktionen integriert werden können, wie etwa Impedanz, Reflexions- oder Absorptionsrandbedingungen. Ebenfalls ist die Implementierung eines Gittertransmissionsmodells möglich. So ließe sich eine Kopplung aus Transportmodell und den zuvor diskutierten Transmissionsmodellen für Schaufelgitter herstellen. Eine Möglichkeit, dies zu bewerkstelligen, wäre zunächst die Schalldruckstrukturänderung und Dämpfung separat zu berechnen und anschließend das modifizierte Schallfeld in die Transportmodelle einzukoppeln.

5 Analytisches Schalltransportmodell

Theoretisch könnte das Vorgehen auch mit einem rein numerischen Verfahren, wie etwa einer CAA-Berechnung (engl. Computational Aero Acoustics), durchgeführt werden, was bei komplexen Geometrien und Strömungsbedingungen auch notwendig ist. In dieser Arbeit werden die Schallfeldberechnungen allerdings mit Hilfe eines analytischen Transportmodells für Ring- und Kreisringkanäle durchgeführt, welches auf den in Abschnitt 3.2 und Kapitel 4 vorgestellten theoretischen Beziehungen basiert. Für einfache Rohrleitungen sind diese Verfahren aufwändigen CAA-Methoden vorzuziehen. Sollten hingegen komplexe Geometrien und stark gestörte Strömungsfelder vorliegen, gilt es in Zukunft das Verfahren um die Möglichkeit einer CAA-Implementierung zu erweitern.

6 Analyseverfahren

In diesem Kapitel werden verschiedene Signalanalysemethoden vorgestellt und in Bezug auf deren Anwendung zur Untersuchung modaler Schallfelder in Turbomaschinen diskutiert und bewertet. Ein Schwerpunkt stellt die Auswertung azimuthaler Messdaten dar, die an diskret über dem Umfang der strömungsführenden Kanäle verteilten Messpositionen aufgenommen werden.

Es ist das Ziel, aus zunächst ungefilterten Eingangssignalen ein aus vielen Teilmoden überlagertes Umfangsschallfeld zu rekonstruieren, welches sich anschließend in seine modalen Bestandteile zerlegen lässt. Es werden Methoden vorgestellt und diskutiert, um neben den Amplituden der einzelnen Teilmoden auch auf deren Laufrichtung und Phasenversätze zurück zu schließen. Dazu werden im Rahmen dieser Arbeit verschiedene Wellenzerlegungsverfahren entwickelt, mit Hilfe derer aus den Zeitreihen die modale Schallfeldstruktur extrahiert werden kann. Zunächst werden jedoch die eingesetzten Spektralanalyseverfahren und die entworfenen Filterungen vorgestellt, um anschließend näher auf die eigentliche Wellenanalysemethode einzugehen. Diese charakteristischen Schallfeldparameter dienen zusätzlich als Randbedingung für das in Kapitel 5 vorgestellte Transportmodell. Damit kann im Anschluss das Schallfeld für die Überlagerung einer definierten Anzahl an Moden berechnet werden, um so ein Abbild der räumlichen Schallfeldstruktur in axialer und radialer Richtung zu erhalten. Somit stellen die in diesem Kapitel herausgearbeiteten modalen Analyseverfahren neben dem Schalltransportmodell einen weiteren zentralen Baustein zur Umsetzung der hybriden Analysemethodik dar. In Abbildung 6.1 ist eine Übersicht des Aufbaus der Analyseprozesse gegeben.

6 Analyseverfahren

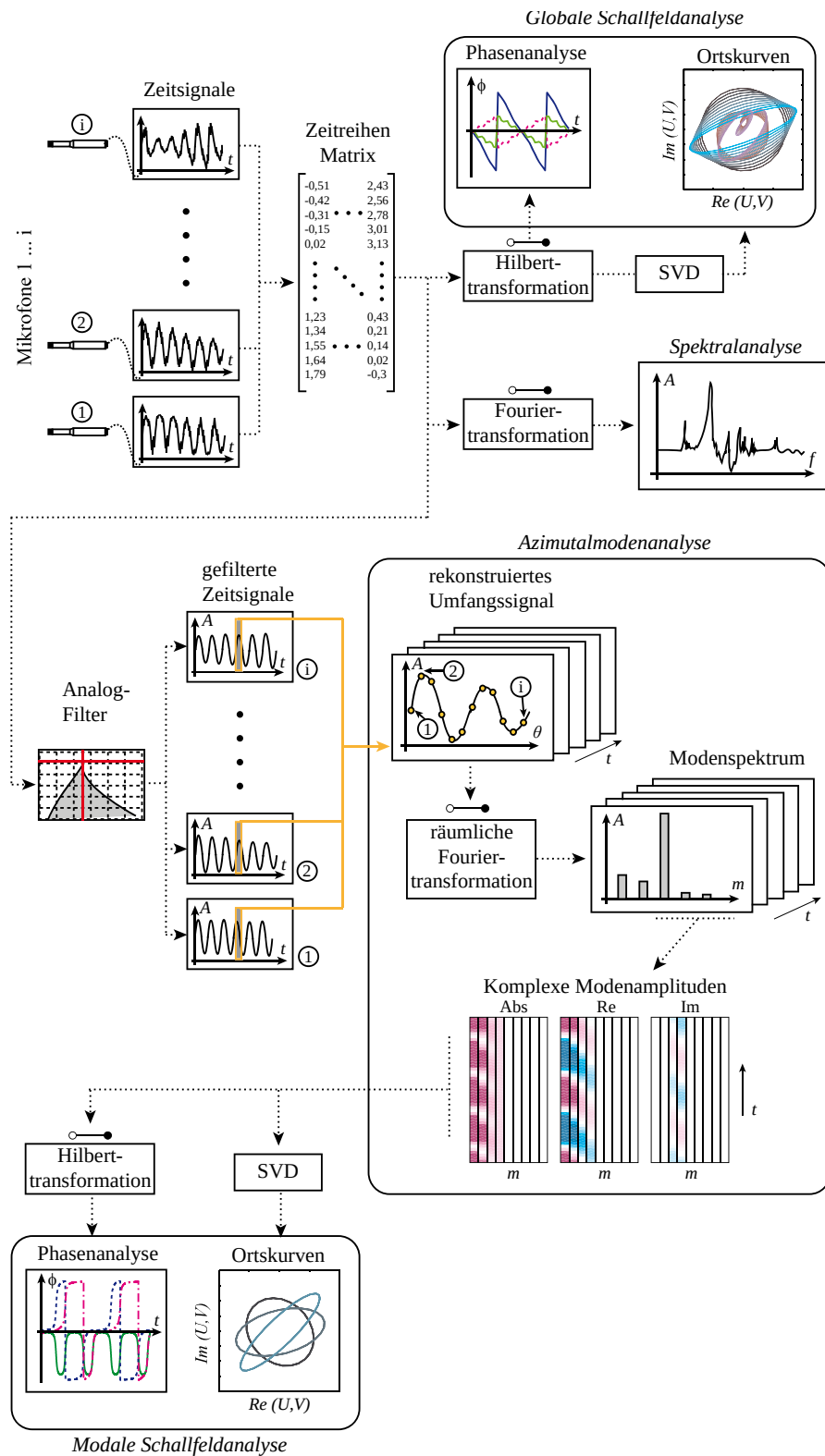


Abbildung 6.1: Übersicht über das Mess- und Analyseprinzip zur Bestimmung der azimuthalen Schallfeldstruktur

6.1 Spektralanalyse und Filterung

Neben den Untersuchungen des Schallfelds im Zeitbereich ist die Analyse im Frequenzbereich ein elementares Werkzeug der Signalverarbeitung und Bestandteil jeder Auswertungsroutine dieser Arbeit. Mit Hilfe einer Frequenzbereichsbetrachtung können wichtige Informationen über das spektrale Verhalten der Schallfelder gewonnen und dominante Frequenzen identifiziert werden. Gerade das akustische Verhalten von Turbomaschinen weist teilweise sehr dominante, schmalbandige Spektralanteile auf, die nur mit Hilfe einer Frequenzbereichsbetrachtung erkannt werden können. Die Ausgangsgrößen stellen die reellen Messdaten eines jeden Sensors dar, die über ein definiertes Zeitintervall t_{Mess} bei einer Samplingfrequenz f_S aufgenommen werden. Pro Sensor i liegen somit $N = t_{\text{Mess}} f_S$ diskrete Messdaten $p'_i(\theta, t)$ vor.

6.1.1 Bestimmung der Frequenzspektren

Allgemein lässt sich jede beliebige periodische Zeitfunktion $g(t)$ in eine Fourier-Reihe entwickeln (Weber und Ulrich 2012). So gibt z.B. Sager (2012) mit

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} \quad \text{mit } \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = \omega_0 n \quad (6.1)$$

eine allgemeine Transformationsanweisung für die kontinuierliche Fourier-Transformation in komplexer Darstellungsweise an. Die Fourier-Koeffizienten C_n ergeben sich dabei zu:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.2)$$

Wie Briggs und Henson (1995) zeigen, lassen sich die für zeitkontinuierliche Signale (periodisch oder aperiodisch) anwendbaren Methoden der Fourier-Analyse auch auf zeitdiskrete Signale übertragen. Somit stellt

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-2\pi i k n / N} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.3)$$

eine Vorschrift für die Hintransformation von diskreten Signalen dar.

Die diskrete Fouriertransformation (DFT) wird für die Auswertung der Messdaten eingesetzt, da eine digitale Datenaufnahme kein kontinuierliches Zeitsignal, sondern eine Zahlenfolge von diskret abgetasteten Werten liefert. Dabei entspricht die Anzahl der Abtastwerte den Samples N , welche auch als einfache Stichproben aufgefasst werden können und T der Länge des Abtastintervalls. Außerhalb dieses Abtastintervalls ist die abgetastete Funktion bzw. die Werteschar unbekannt. Allerdings setzt die diskrete Fouriertransformation voraus, dass sich das abgetastete Signal außerhalb des Intervalls periodisch fortsetzt. Um mit Hilfe der diskreten Abtastung das ursprüngliche Signal eindeutig zu rekonstruieren, werden an die Abtastung verschiedene Anforderungen hinsichtlich der Auflösung und

der Verteilung gestellt. Ein zentrales Element stellt dabei das Nyquist-Shannon Abtasttheorem dar (vgl. Shannon 1949). Wie Kammeyer und Kroschel (2006) zeigen, kann das Abtasttheorem auch als Interpolationsvorschrift verstanden werden, denn nach

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT) \frac{\sin(\omega_{\max}(t - kT))}{\omega_{\max}(t - kT)} \quad (6.4)$$

lässt sich ein auf $\pm\omega_{\max}$ bandbegrenzt, kontinuierliches Signal aus den diskreten Abtastwerten $g(kT)$ durch Interpolation mit einer $\sin(\omega_{\max}(t - kT))/\omega_{\max}(t - kT)$ -Funktion eindeutig für alle Zeitpunkte t rekonstruieren. k entspricht dabei einem einfachen Vorfaktor. Dazu gilt es den jeweiligen Abtastwert $g(kT)$ mit der Sinus-Funktion zu multiplizieren und über alle Samples aufzusummieren. Anders ausgedrückt, besagt das Abtasttheorem, dass ein bandbegrenzt, zeitkontinuierliches Signal $g(t)$ vollständig rekonstruiert werden kann, wenn die diskrete Wertabtastung mit einer Abtastfrequenz erfolgt, die mindestens doppelt so hoch ist wie die maximale Signalfrequenz.

Der im Rahmen dieser Arbeit verwendete numerische Algorithmus zur Berechnung der DFT ist die FFT (engl. Fast Fourier Transform), welche heutzutage eine Standardmethode in der Signalverarbeitung darstellt (Brigham und Morrow 1967, van Loan 1992, Dutt und Rokhlin 1993). Das hier verwendete Verfahren gewichtet die Messdaten mit einer Hanning-Fensterung (Sherlock 1999) und nutzt eine Zero-Padding Erweiterung (Chu 2008), um Signalüberlappungsfehler (Overlap) der FFT zu minimieren und damit die Faltungsoperationen zu beschleunigen. Diese Einstellungen haben in Vorversuchen für rauschüberlagerte Testsignale stets die erwartungstreuesten Ergebnisse geliefert. Mit Hilfe der Fouriertransformation bzw. der FFT werden die zeitabhängigen Messdaten in den Frequenzbereich transformiert. Dadurch liegt zu jeder Frequenz eine komplexe Amplitude und Phase vor, welche für die Analyse der Messdaten genutzt werden kann. Nach Realwertbildung lassen sich die Amplituden in ein Spektrum überführen und darstellen (vgl. Abb. 6.2).

6.1.2 Bestimmung der Leistungspektren

Zur quantitativen Bewertung der über dem Frequenzspektrum verteilten Schallleistung bietet sich das sogenannte Leistungsdichtespektrum P_{SD} (engl.: Power Spectral Density). Über das Wiener-Khintchine-Theorem (Wright 2005b) ergibt sich nach

$$S_{xx}(e^{i\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (6.5)$$

mit der Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\tau) f(t + \tau) d\tau \quad (6.6)$$

das P_{SD} als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion eines zeitlich abhängigen Signals. Da im Regelfall die Autokorrelationsfunktion der Messdaten nicht bekannt ist, muss das Leistungsdichtespektrum anhand einer Vielzahl von diskreten Messwerten

$x_{n=1,\dots,N-1}$ geschätzt werden. Da es sich um eine Energiebetrachtung handelt, lässt sich zur Schätzung das Betragsquadrat der zeitdiskreten Fourier-Transformierten $X(e^{i\omega})$ verwenden. Diese für eine diskret abgetastete Folge von N Messpunkten gültige Beziehung ergibt sich zu

$$P_{\text{SD}}(e^{i\omega}) = \frac{1}{N} \left| X(e^{i\omega}) \right|^2 \quad \text{mit:} \quad X(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\omega n} \quad . \quad (6.7)$$

Dieser Schätzwert, der, wie Kammeyer und Kroschel (2006) zeigen, implizit der Spektralschätzung einer nicht erwartungstreuen Autokorrelationsfolge entspricht, wird auch als Periodogramm bezeichnet. Zur Verdeutlichung wird die in Gl.(6.5) für eine unendliche Folge definierte Leistungsspektraldichte S_{xx} durch die für diskret abgetastete Wertereihen gültige Schätzung nach Gl.(6.7) im Folgenden mit P_{SD} bezeichnet.

Ähnlich wie bei der diskreten Fourier-Transformation (vgl. Abschnitt 6.1.1) bietet es sich auch bei der Berechnung der Periodogramme an, Fensterfunktionen einzusetzen, um auftretende Leakage-Effekte zu unterdrücken. Dazu wird die in Gl.(6.7) gegebene Funktion um die Gewichtung mit einer Fensterfunktion $W(n)$ erweitert

$$P_{\text{SD}}(e^{i\omega}) = \frac{1}{N\Pi} \left| \tilde{X}(e^{i\omega}) \right|^2 \quad (6.8)$$

$$\text{mit:} \quad \tilde{X}(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} W(n)x(n)e^{-i\omega n} \quad \text{und} \quad \Pi = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W^2(n) \quad ,$$

wobei Π einer Normierungskonstanten entspricht. Die Fourier-Transformierte $\tilde{X}(e^{i\omega})$ ist um eine Multiplikation des diskreten Messwerts mit der Fensterfunktion $W(n)$ erweitert. Diese Operation entspricht im Frequenzbereich einer Faltung, was bei endlicher Fensterbreite zum Auftreten von Haupt- und Nebenkeulen im Fensterspektrum führt, die das Leistungsdichtespektrum verschmieren können und somit die spektrale Auflösung herabsetzen. Dieser Effekt und die sich daraus ergebenden Anwendungen sind im nachfolgenden Abschnitt erklärt und in Abb. 6.2 beispielhaft demonstriert.

Obwohl das Periodogramm eine nicht erwartungstreue Schätzung der spektralen Leistungsdichte ist, kann über eine Grenzwertbetrachtung gezeigt werden, dass im Falle einer sehr hohen Anzahl an Abtastwerten $N \rightarrow \infty$ die Schätzung asymptotisch erwartungsgetreu ist. Somit entspricht der Erwartungswert des Periodogramms P_{SD} genau dem des Leistungsdichtespektrums S_{xx} . Wie Grüning (2008) zeigt, stellt ein Periodogramm immer eine inkonsistente Schätzung dar und weist folglich Varianzen auf, die zu hohen stochastischen Signalanteilen im Spektrum führen. Diese Eigenschaft hat große Bedeutung auf die Interpretierbarkeit der Leistungsverteilung. Nachfolgend wird daher mit der Welch-Methode (vgl. Kammeyer und Kroschel 2006) ein im Rahmen dieser Arbeit eingesetztes Verfahren vorgestellt, mit dem sich die Varianz der Schätzung verringern lässt.

Neben der Darstellung der Leistungsspektraldichte mit Hilfe der in Abb. 6.2 gezeigten Periodogrammen, bietet sich gerade für den Vergleich von Schallleistungen der Einsatz speziell geglätteter Leistungsdichtespektren an. Die in Periodogrammen für gewöhnlich auftretenden starken Signalfuktuationen lassen sich durch Mittelungsprozesse verringern. Das

hier verwendete Verfahren ist die Methode nach Welch (1967), die im Kern ebenfalls eine Schätzung der Spektraldichte ist, doch einer speziellen Intervallfensterung unterzogen wird. Dazu wird der Datensatz $x(n)|_{n=0}^{N-1}$ zunächst in S Teilsegmente von jeweils gleicher Länge I bzw. gleicher Anzahl an Abtastwerten zerlegt. Jedes Teilsegment wird anschließend mit einer Fensterfunktion $W(n)$ der Länge L multipliziert (gewichtet) und Fourier-transformiert (vgl. Abschnitt 6.1.1)

$$x(n) = x(n + rI)W(n) \quad \text{mit:} \quad n = 0, 1, \dots, L - 1 \quad \wedge \quad r = 0, 1, \dots, S - 1 \quad . \quad (6.9)$$

Nur wenn die Intervalllängen I und die Fensterlängen L identisch sind, sind die Teilsegmente nahtlos aneinander gereiht. Ist hingegen $I < L$, so überlappen sich die gewichteten Segmente. Dieser, auch als Overlapping bezeichnete Effekt, lässt sich bei der Mittelwertbildung gezielt zur Reduzierung der Varianz einsetzen, wie Grüning (2008) zeigt. Die Welch-Methode arbeitet dabei besonders effizient und stabil, wenn eine 50%ige Überlappung ($I = 0,5L$) der Intervalle verwendet wird. Die im Zeitbereich durchgeführte Gewichtung der Messwerte mit der Fensterfunktion $W(n)$ führt im Frequenzbereich entsprechend zu einer Faltung und wirkt damit als Tiefpassfilter, was zu einem geglätteten Verlauf des Leistungsdichtespektrums führt. Die Länge des Fensters ist dabei umgekehrt proportional zur Stärke der Glättung. Da bei den mit starken stochastischen Anteilen überlagerten Messwerten die Varianz groß ist, lässt sich diese durch zusätzliche Mittelwertbildung der S -Intervalle reduzieren. Mit

$$P_{\text{Welch}}(e^{i\omega}) = \frac{1}{S} \sum_{r=0}^{S-1} \frac{1}{\sum_{n=0}^{L-1} W^2(n)} \left| \sum_{n=0}^{L-1} W(n)x(n + rI)e^{-i\omega n} \right|^2 \quad (6.10)$$

ist ein formaler Zusammenhang für die Bestimmung der Leistungsspektraldichte P_{Welch} gegeben. Wie in Gl.(6.10) zu erkennen ist, stellen die Terme innerhalb der Summe die eigentliche Schätzung und Faltung mit der Fensterfunktion eines jeden Elements innerhalb des r -ten Intervalls der Länge L dar. Das Welch-Verfahren reduziert folglich die den Periodogrammen inhärenten hohen Varianzen durch die Mittelung vieler kleiner Einzelperiodogramme, in die das Grundsignal unterteilt wird.

Eine gute Schätzung des Leistungsdichtespektrums bei hoher Auflösung und geringer Varianz erfordert möglichst große Fensterlängen und viele Intervalle, was unmittelbar mit einer hohen Anzahl an Abtastwerten einhergeht. Für die praktische Anwendung gilt es folglich, einen akzeptablen Kompromiss aus Datenmenge, Berechnungszeit und Genauigkeit zu finden. Exemplarisch sind dazu in Abb. 6.2 die P_{Welch} für unterschiedliche Fensterlängen iL im Vergleich zu einem einfachen Periodogramm (Referenz) aufgetragen.

Wie zu erkennen ist, wird für die kleinste Fensterlänge von $L = 512$ Samples ($i = 1$) ein sehr stark geglätteter Verlauf des Leistungsdichtespektrums erreicht, was allerdings zu Lasten der Genauigkeit geht. Mit zunehmender Fensterlänge steigen zwar die Varianzen, doch wird das Spektrum verbessert abgebildet. Gerade für die Untersuchung einzelner Spektralkomponenten, wie es z.B. bei der akustischen Anregung notwendig ist, ist eine Mindestauflösung des Spektrums erforderlich. Aus den in Abb. 6.2 gegenübergestellten Spektren für unterschiedliche Fensterlängen, scheint die Fensterbreite von $L > 15 \cdot 512$ Samples ($i = 15$) ein Optimum aus hinreichender Genauigkeit und Datengröße zu liefern. Diese Fensterbreite wird daher für die weiteren Auswertungen verwendet.

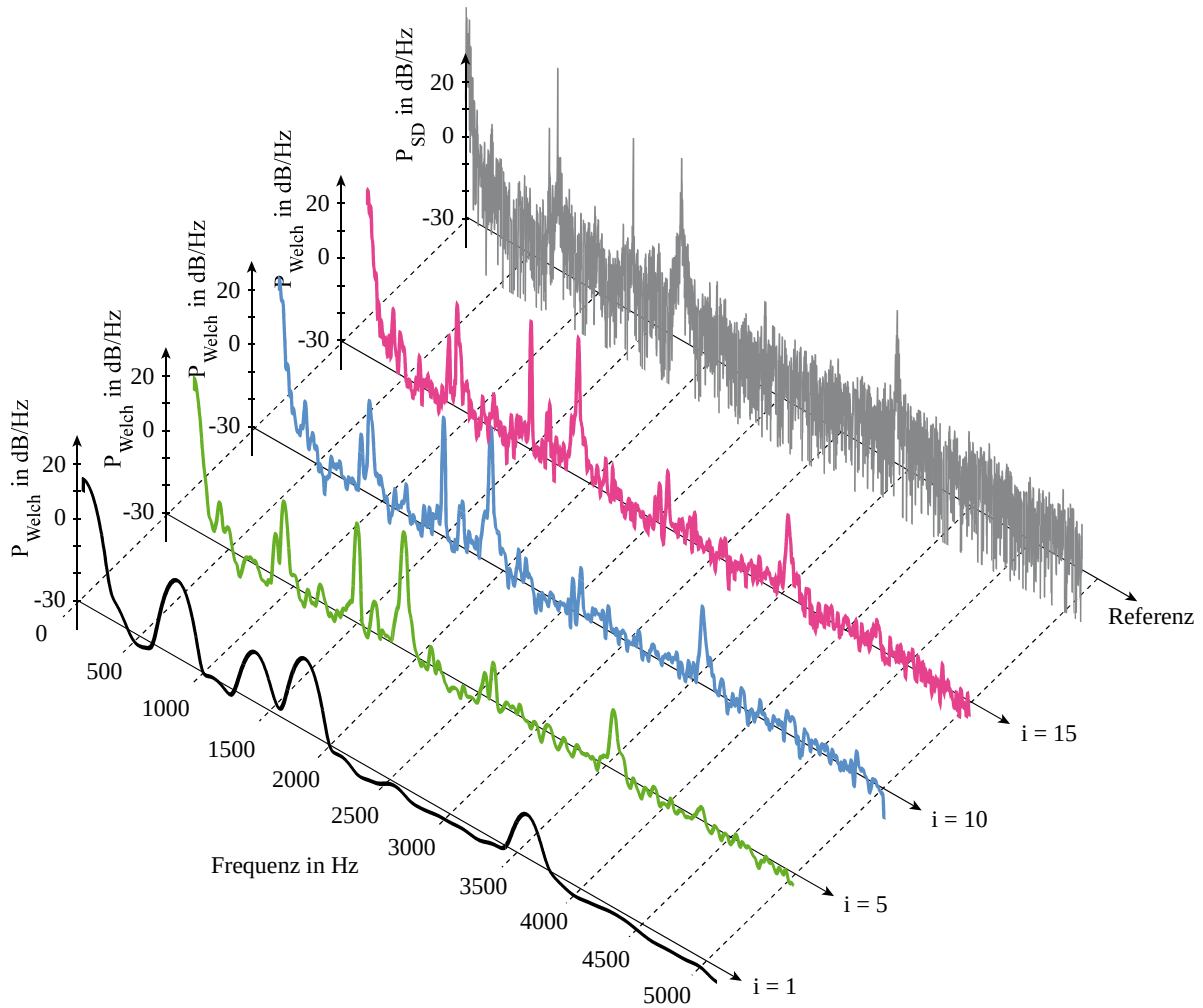


Abbildung 6.2: P_{SD} eines exemplarisch ausgewählten Signals der Luftturbinenmessungen (Referenz) im Vergleich zu P_{Welch} für verschiedene Fensterlängen L als Vielfache i der Referenzfensterlänge $L_{ref} = 512$ Samples.

6.1.3 Filter

Für die Auswertung der akustischen Messdaten und deren anschließende Analyse ist eine analoge bzw. digitale Filterung elementar. In typische Turbinen- oder Windkanalspektren sind die eigentlichen Messwerte sowohl von einer Vielzahl tonaler als auch stochastischer Signalkomponenten überlagert. Die gezielte Analyse einzelner modaler Bestandteile ist nur bedingt möglich. Das Messsignal muss auf den interessierenden Frequenzbereich gefiltert werden, so dass alle übrigen Spektralanteile herausgedämpft werden.

Ein Filter kann allgemein als Gatter verstanden werden, das nur ganz spezifische Anteile eines Eingangssignals passieren lässt. Dabei wird in Abhängigkeit von der Frequenz das Signal in Amplitude und Phasenlage derart verändert, dass die unerwünschten Signalanteile unterdrückt werden. Jackson (1996), Paarman (2001) oder Medlin (1990) geben umfassende Einblicke in die Theorie und Auslegung analoger sowie digitaler Filter. In dieser Arbeit wird ein Butterworth-Bandpassfilter verwendet (Kammeyer und Kroschel 2006),

welches in Abhängigkeit seiner Cut-On und Cut-Off Frequenzen mit einem schmalbandigen Durchlassbereich arbeitet (vgl. Abb. 6.3). Da Butterworth-Filter generell über relativ breite Übergangsbereiche verfügen, muss, um eine hohe Flankensteilheit zu gewährleisten, die Filterordnung hoch gewählt werden. Der eigentliche Vorteil dieser Filterklasse ist, dass sie im Durchlassbereich sehr geringe Oszillationen und einen nahezu linearen Phasengang aufweisen, so dass nur geringe Signalverzerrungen auftreten. In Abb. 6.3 sind dazu die Amplituden- und Phasengänge des entworfenen Filters für unterschiedliche Durchlassbereiche δf gegenübergestellt. Wie sich zeigt, liegt genau bei der Mittenfrequenz des Bands keine Phasenverschiebung vor, die allerdings zu den Eckfrequenzen hin (linear) ansteigt. Für die akustischen Messungen bedeutet dies, dass mit zunehmender Durchlassbreite die gefilterten Signale in Abhängigkeit von der Frequenz eine zusätzliche Phasendrehung erfahren, die im Nachhinein korrigiert werden muss.

Wie sich die Filtereinstellungen auf die Analyse eines akustischen Messsignals auswirken, ist in Abb. 6.4 für eine Messung im AWT dargestellt. Dazu wird ein strömungsüberlagertes Schallfeld bei einer Frequenz von $f_{\text{Ex}} = 400$ Hz ($kD = 3,66$) angeregt, so dass neben der Grundmode die erste Azimutalmode Cut-On ist.

Die Umfangssignale werden an äquidistant verteilten Positionen stromab der Anregungsebene aufgenommen (vgl. Abschnitt 2.1). In Abb. 6.4 (links) sind die Spektren des ungefilterten Signals den der mit unterschiedlicher Bandbreite gefilterten Signalen gegenübergestellt. Die verglichenen Filter sind alle Bandpass-Butterworth Filter 10. Ordnung, haben allerdings unterschiedliche Durchlassbreiten. Wie zu erkennen ist, weist das ungefilterte Signal sehr hohe Rauschkomponenten auf, was vornehmlich auf den strömungsinduzierten Schalleintrag zurückzuführen ist. Durch Anwendung der auf die Anregungsfrequenz f_{Ex} abgestimmten Filter werden diese breitbandigen Schallanteile unterdrückt. In Abb. 6.4 (rechts) ist der Einfluss der Filterbreite auf die Bestimmung des angeregten Modenfeldes dargestellt. Bei den ungefilterten Signalen liegen im gesamten Spektrum potentielle Anregungsfrequenzen vor, sodass stets Azimutalmoden höherer Ordnung angeregt werden, wie anhand der hohen Amplituden für $mn_{[1...5;0]}$ zu erkennen ist. Deren Anregung ist folglich nicht auf die interessierende Anregungsfrequenz f_{Ex} , sondern auf die strömungsinduzierten Spektralanteile zurückzuführen. Dies zeigt, dass gerade in Strömung-führenden Kanälen eine Filterung zur Identifikation einer spezifischen Anregungsfrequenz unabdingbar ist. Je kleiner dabei das Band ist, desto präziser ist die Eingrenzung der gezielt angeregten Mode, wie für die Anregung der $mn_{[1;0]}$ Mode gezeigt ist. Die Cut-On Frequenz dieser Mode liegt bei $f_{\text{Cut-On}} = 400$ Hz, d.h. in einem sehr schmalbandigen Bereich um diese Frequenz herum wird ein Energiemaximum der Mode liegen.

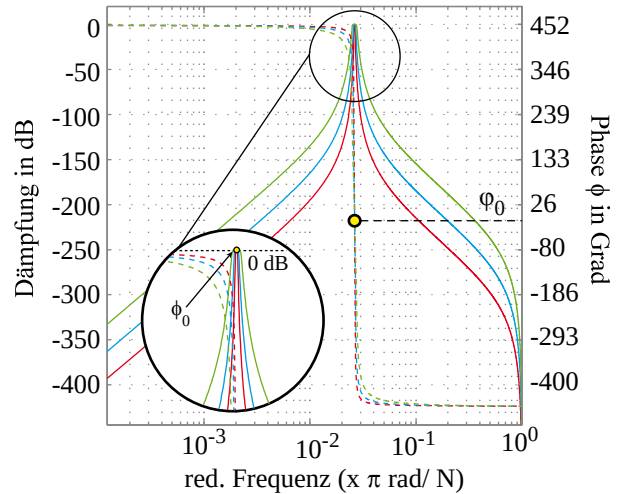


Abbildung 6.3: Amplituden- und Phasengang eines Butterworth-Filters für verschiedene Durchlassbreiten δf bei einer Eckfrequenz von 395 Hz. rot: $\delta f : \pm 5\text{Hz}$, blau: $\delta f : \pm 10\text{Hz}$, grün: $\delta f : \pm 20\text{Hz}$

Die Zusammenhänge sind für den gleichen Datensatz ausführlich in Abschnitt 4.1.5 dargestellt. Die Eckfrequenz der hier angewandten Filter entspricht stets der Anregungsfrequenz. Aufgrund der unterschiedlichen Bandbreiten δf werden um die Eckfrequenz herum zusätzliche Spektralanteile des Messsignals in der Modalanalyse berücksichtigt. Wie in Abb. 6.4 (rechts) zu erkennen ist, ist die Filterbreite $\delta f = \pm 5$ Hz eng genug gewählt, sodass vorwiegend die $mn_{[1;0]}$ Mode identifiziert wird. Wird die Filterbreite hingegen vergrößert, werden zusätzlich potentielle Anregungsfrequenzen innerhalb des Bandes berücksichtigt und weitere Moden detektiert, wie etwa die Grundmode. Für die drei verglichenen Filterbreiten werden in allen Fällen auch höhere Azimutalmoden $mn_{>[1;0]}$ gefunden. Diese sind auf Nahfeldeffekte zurückzuführen und haben nichts mit der gezielten Anregung zu tun, da die Anregungsfrequenz hier Cut-Off ist. Auf der anderen Seite spielt die Durchlassbreite bei der Energieerhaltung der Amplituden eine entscheidende Rolle. Auch wenn zur präzisen Frequenzeingrenzung ein möglichst schmales Durchlassband gewählt werden sollte, kann dies zu einer starken Abdämpfung der Amplitude führen, wie im Vergleich der Modenamplituden zu erkennen ist.

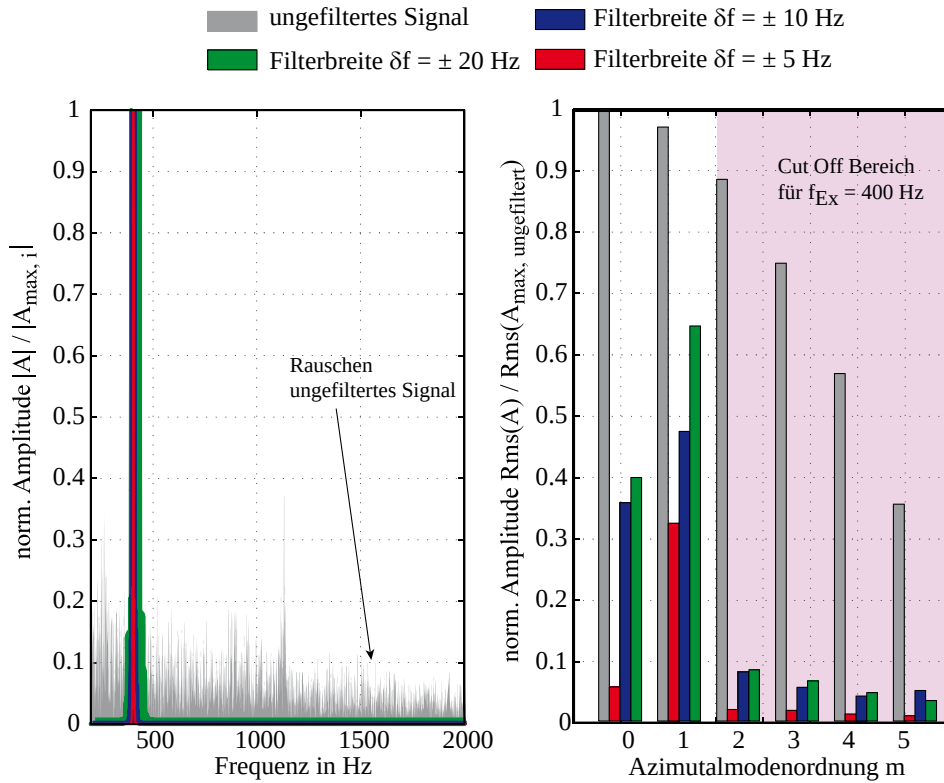


Abbildung 6.4: (links) Frequenzspektrum für eine Schallfeldanregung bei $f = 395$ Hz im AWT unter Strömungseinfluss $\dot{m} = 9$ kg/s. Gezeigt sind die Spektren für das ungefilterte Signal als auch die Bandpassgefilterten Spektren mit variierender Bandbreite δf eines Butterworth Filters. (rechts) Korrespondierende Azimutalmoden $mn_{[0...5;0]}$ bezogen auf die maximale Amplitude des ungefilterten Signals.

So untersucht Laguna (2015) unterschiedliche Filtereinstellungen für Luftturbinenmessungen mit Fokus auf die Energieerhaltungseigenschaften und empfiehlt wesentlich größere Durchlassbreiten als hier dargestellt.

Im Anhang D ist ein weiteres Beispiel für die Anwendung einer Bandpass abgestimmten

Filterung zur korrekten Bestimmung der radialen Schallfeldstrukturen bei Strömungsüberlagerung gegeben.

6.2 Azimutale Modalanalyse

Es gilt, sowohl die experimentell gemessenen als auch die numerisch-analytisch berechneten Schallfelder, bezüglich ihrer modalen Bestandteile zu untersuchen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit liegt der Schwerpunkt auf dem Transportverhalten von Umfangsmoden. Dazu wird in diesem Abschnitt die sogenannte Azimutalmodenanalyse (AMA) vorgestellt. Für die Bestimmung radialer Moden kommt mit der Radialmodenanalyse (RMA) hingegen ein anderes Verfahren zum Einsatz, das z.B. in Laguna et al. (2013) beschrieben ist.

Aus den an i diskreten Umfangspositionen aufgenommenen Schalldrücken $p'_i(x, \theta, r, t)$ wird aus allen Zeitschritten $t_1 \dots t_N$ eine Datenmatrix $\mathbf{D}$ erstellt

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} p'_{1,1}(t_1) & \cdots & p'_{1,N}(t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_{i,1}(t_1) & \cdots & p'_{i,N}(t_N) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Die Schalldrücke werden zuvor, mit Hilfe der in Abschnitt 6.1.3 vorgestellten Filterverfahren, auf das interessierende Frequenzband gefiltert, um überlagerte Störsignale zu eliminieren. Aus den diskreten Datensätzen lässt sich durch Interpolation zwischen den i -Stützstellen ein kontinuierliches Umfangsdruckprofil $\mathbf{D}_i$ rekonstruieren. Die räumliche Interpolation wird für jeden Zeitschritt separat durchgeführt, so dass ein eindimensionales Spline-Verfahren verwendet werden kann. Dies erfordert allerdings eine Mindestanzahl an Stützstellen (Sensoren), denn Spline-Interpolationen können zu unphysikalischen Oszillationen neigen. In Vorversuchen hat sich gezeigt, dass mindestens sechs Stützstellen über dem Umfang verteilt sein sollten.

Aus der Datenmatrix $\mathbf{D}_i$ lassen sich anschließend mittels einer räumlichen Fourier-Zerlegung die Umfangssignale in ihre modalen Komponenten zerlegen. Dabei wird die bereits in Abschnitt 6.1.1 für die Analyse von Zeitreihen vorgestellte Fouriertransformation nun auf räumlich verteilte diskrete Messsignale angewandt, was möglich ist, solange das (räumliche) Nyquist-Shannon Abtasttheorem (vgl. Gl.6.4) eingehalten wird. In Abhängigkeit von der Anzahl der Sensoren lassen sich so $i - 1$ Moden auflösen. Dies verdeutlicht allerdings auch, dass zur Bestimmung hoher Azimutalmoden viele Umfangsmesspositionen notwendig sind, was für die praktische Anwendung in Turbomaschinen aus Platz- und Kostengründen oftmals schwer zu realisieren ist.

Aus der räumlichen Fourier-Zerlegung, die über ein definiertes Intervall azimuthaler Stützstellen durchgeführt wird, erhält man für jede Umfangsmode m und jeden Zeitschritt eine komplexe Amplitude $\mathbf{A} = \{\hat{A}_{m,1}(t_1 \dots t_N) \dots \hat{A}_{m,i-1}(t_1 \dots t_N)\}$. Sowohl in den experimentellen als auch analytischen Untersuchungen zeigt sich, dass die komplexen Amplituden zeitlichen Schwankungen unterliegen. Daher ist es für die Analyse der modalen Schallfeldstrukturen notwendig, stets das zeitliche Verhalten der Moden zu betrachten. Zur Verdeutlichung sind in Abb. 6.5 die AMA-Ergebnisse einer Schallfeldberechnung dargestellt. Es wird exemplarisch ein gemischtes modales Schallfeld, bestehend aus der Grundmode, einer stehenden $mn_{[1;0]}$ Mode ($\epsilon = 1$), einer partiell stehenden $mn_{[2;0]}$ Mode ($\epsilon = 0,4$) und einer $mn_{[3;0]}$

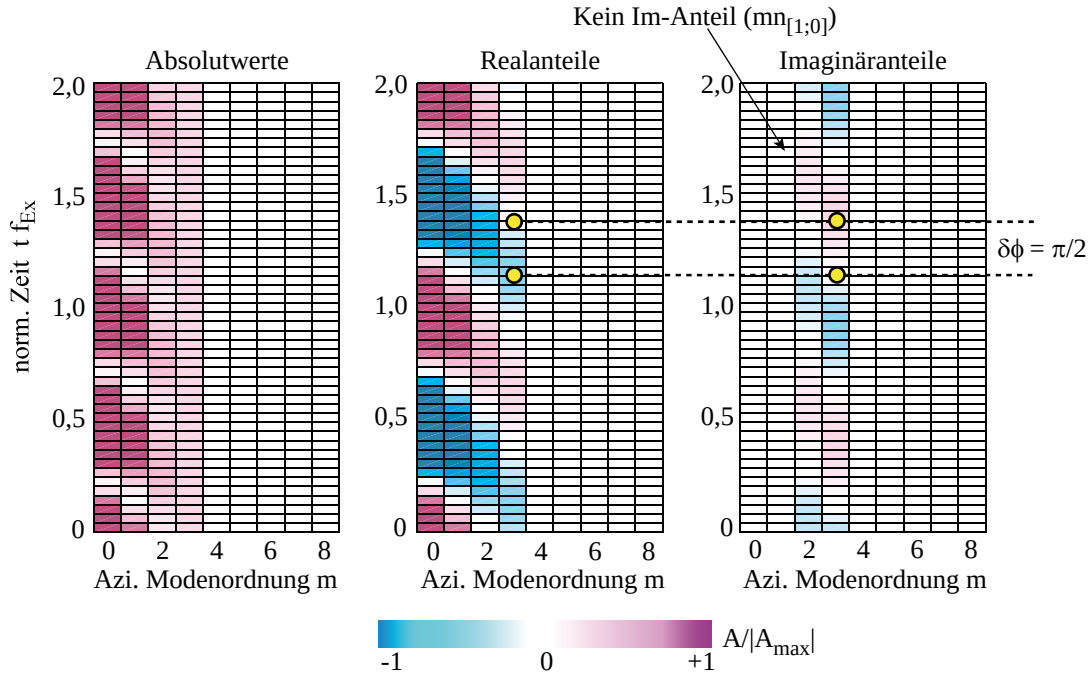


Abbildung 6.5: Zeitvariationen der modalen Amplituden für eine überlagerte Modenkombination $mn_{[0;0]}$, $mn_{[1;0]}$ (stehend, $\epsilon = 1$), $mn_{[2;0]}$ ($\epsilon = 0, 4$), $mn_{[3;0]}$ (spinning, $\epsilon = 0$). Die Berechnung erfolgt mit dem Transportmodell. Die Anregungsfrequenz beträgt $f_{\text{Ex}} = 2000$ Hz.

Spinning Mode ($\epsilon = 0$) überlagert. Neben den Absolutwerten sind auch die Real- und Imaginäranteile der komplexen Amplituden über zwei Perioden der Anregungsfrequenz dargestellt. Wie zu erkennen ist, oszillieren die Amplituden stets mit der Anregungsfrequenz gemäß des in Gl.(3.24) gegebenen Exponentialterms $e^{-i\omega t}$. Sensitivitätsuntersuchungen haben gezeigt, dass eine Auswertung über mehrere Zeitschritte, aber mindestens über eine Periode erfolgen muss, so dass sich die Amplitude als Zeit-gemittelter Wert berechnen lässt. Im Rahmen dieser Arbeit werden sowohl arithmetische Mittelwerte als auch RMS-Werte genutzt. Würde hingegen eine Analyse bei einem zufällig gewählten Zeitpunkt durchgeführt werden, stellt dies kein im Mittel repräsentatives Ergebnis dar.

Durch die komplexe Zerlegung der Amplituden lassen sich wichtige Rückschlüsse auf die Modenstruktur ziehen. In Ergänzung zu der in Abschnitt 6.4 beschriebenen Modalzerlegung mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung (SVD), lässt der Vergleich der Real- und Imaginärteile der modalen Amplituden Rückschlüsse auf die Rotationseigenschaften der Moden zu. Bei reinen Spinning Modes müssen die Amplituden gleich große Real- und Imaginäranteile aufweisen, um die räumliche Drehung der Mode zu gewährleisten (vgl. Gl. 6.18). In Abb. 6.5 ist dies für die Mode $mn_{[3;0]}$ zu erkennen, deren Real- und Imaginäranteil einen Phasenversatz von $\delta\phi = \pi/2$ zueinander aufweisen müssen. Bei rein stehenden Moden verschwindet hingegen der Imaginärteil, wie eingehend in Abschnitt 6.4 erklärt wird und in Abb. 6.5 anhand der Mode $mn_{[1;0]}$ Mode zu erkennen ist. Eine partiell stehende Welle ergibt sich bei unterschiedlichen Amplituden der Teilmode $\hat{A}_{\pm x}^{\theta}$ (vgl. Gl.4.24). Wie die Mode $mn_{[2;0]}$ mit einem Teilmodenverhältnis von $\epsilon = 0, 4$ zeigt, liegt auch in diesem Fall ein Imaginärteil (Spinning Mode Anteil) vor, allerdings mit reduzierter Amplitude.

Durch diese Betrachtungen können direkte Aussagen über die Anteile stehender und dre-

hender Teilmoden in einem überlagerten Schallfeld gemacht werden und stellen in Kombination mit dem in Abschnitt 6.4 vorgestellten Modalzerlegungsverfahren eine hilfreiche Methode zur Analyse der modalen Strukturen dar.

Amplitudenkorrektur Die Anwendung der azimuthalen Modalanalyse auf experimentelle Messdaten sowie auf die Berechnungsdaten des Schalltransportmodells bedarf einer Umrechnung der Amplituden. Mit Hilfe der AMA werden aus den reellen Zeitreihen der gemessenen Umfangsdrucksignale $p'_i(x, r, \theta, t)$ die korrespondierenden Azimutalmodenamplituden $\hat{A}_{\pm x}$ berechnet, die nicht den in Gl.(3.24) gegebenen Teilmodenamplituden $\hat{A}_{\pm x}^{\pm\theta}$ bzw. den komplexen Teilmodenamplituden $\underline{\hat{A}}_{\pm x}^{\pm\theta}$ entsprechen. Für die Rekonstruktion des Schallfeldes werden diese jedoch benötigt. Gemäß der Ausführungen des Kapitels 4 ergibt sich der Schalldruck einer einzelnen Mode aus den axialen, azimuthalen und radialen Anteilen seiner vier Teilmoden. So ergibt sich die gemessene, reelle, azimuthale Schalldruckamplitude $\hat{A}_{\pm x}$ gemäß Gl.(3.24) zu

$$\hat{A}_{\pm x} = \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) \left(\hat{A}_{\pm x}^{+\theta} e^{i(m\theta + k_{\pm x}^{+\theta} x)} \underline{\hat{A}}_{\pm x}^{-\theta} e^{i(-m\theta + k_{\pm x}^{-\theta} x)} \right) e^{i\omega t} \quad (6.12)$$

Da sich die axialen Wellenzahlen $k_{\pm x}^{\pm\theta}$ für hin- und rücklaufende Azimutalwellen nicht ändern und da die Modenamplitude $\underline{\hat{A}}_{\pm x}^{\pm\theta}$ eine zeit- und ortsunabhängige Größe ist, muss Gl.(6.12) auch bei $x, \theta = 0$ und $t = 0$ erfüllt sein und lässt sich so zu

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\pm x} &= \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) \left(\hat{A}_{\pm x}^{+\theta} + \underline{\hat{A}}_{\pm x}^{-\theta} \right) \\ \text{bzw. mit dem Teilmodenverhältnis } \epsilon & \\ \hat{A}_{\pm x} &= \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) (1 + \epsilon) \underline{\hat{A}}_{\pm x}^{\pm\theta} \end{aligned} \quad (6.13)$$

vereinfachen. Die gesuchte Modenamplitude ergibt sich schließlich als Quotient der gemessenen Azimutalmodenamplitude $\hat{A}_{\pm x}$ und der radialen Ausbreitungsfunktion $\Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r)$

$$\underline{\hat{A}}_{\pm x}^{\pm\theta} = \frac{\hat{A}_{\pm x}}{(1 + \epsilon) \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r_a)} \quad (6.14)$$

6.3 Phasenanalyse

Neben der Modenordnung, Oszillationsfrequenz und der Amplitude, stellen die zeitlichen und räumlichen Phasenwinkel der Teilmoden wichtige Parameter zur Bestimmung der Schallfeldstruktur dar. In überlagerten Feldern bewirkt die Phase eine Verschiebung der überlagerten Einzelmoden zueinander und führt so zu einem veränderten Gesamtschallfeld. Die korrekte Rekonstruktion ist ohne die Phaseninformationen nicht möglich. In diesem Abschnitt werden unterschiedliche Verfahren vorgestellt, mit Hilfe derer sowohl die Analyse und Interpretation der zeitlichen als auch räumlichen Phasenversätze möglich ist. Dabei wird zwischen dem globalen Phasenversatz des überlagerten Modenfeldes und dem modalen Phasenversatz zwischen den einzelnen Teilmoden einer spezifischen Azimutalmode unterschieden.

6.3.1 Globaler Phasenversatz

Die Basis des zeitlichen Phasenversatzes $\delta\phi_t$ sind die aus den Zeitverläufen der Messwerte rekonstruierten Umfangssignale $p'_i(\theta, t_1 \dots t_N)$ (vgl. Abschnitt 6.2) der Datenmatrix $\mathbf{D}_i$, die auf einen Referenzverlauf $p'_{i,\text{Ref}}(\theta, t_0)$ bezogen werden. Die Phasenversätze werden für n -Perioden berechnet, und es wird ein Phasenversatzvektor $\delta\phi_{t,i}(t)$ bestimmt. Über Gradientenbildung lässt sich anschließend die Phasenänderung $d\delta\phi_{t,i}(t)/dt$ bestimmen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden unterschiedliche Verfahren untersucht und gegenübergestellt, die die Bestimmung der Phaseneigenschaften auf Basis von Transformationsmethoden, wie der Fourier- oder Hilbertzerlegung, als auch auf Basis von Matrix-Faktorisierungen durchführt.

Für die Bestimmung der zeitlichen Phasenänderung der Umfangsstruktur stellt die Hilbertzerlegung eine schnelle und zuverlässige Methode dar, während für die Berechnung des räumlichen Phasenversatzes die Singulärwertzerlegung (SVD) gute Ergebnisse liefert.

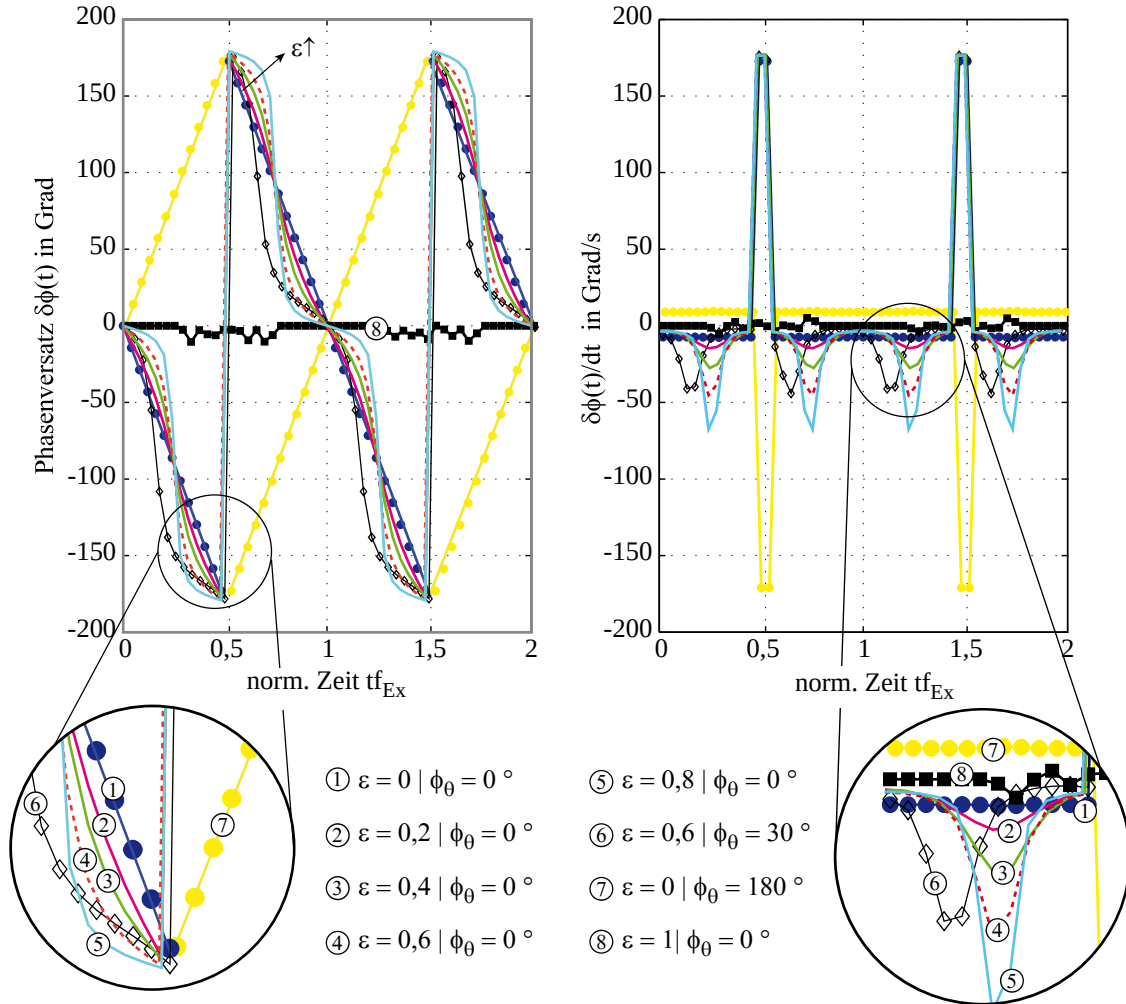


Abbildung 6.6: (links) Phasenversatzvektoren $\delta\phi_{t,i}(t)$ für eine $mn_{[1;0]}$ Mode mit verschiedenen Teilmodenverhältnissen ε und azimuthalen Phasenwinkeln ϕ_θ . (rechts) Korrespondierende Gradienten $d\delta\phi_{t,i}(t)/dt$.

Bestimmung des Phasenversatzes mittels Hilbert-Transformation

Wie z.B. Feldman (2006, 2010) oder Chen und Wang (2012) zeigen, eignet sich die Hilbert-Transformation gerade für die Bestimmung momentaner Signalattribute großer Zeitreihen. Sie wird sowohl zur Berechnung des zeitlichen Phasenversatzvektors als auch zur Berechnung des in Abschnitt 6.3.2 vorgestellten modalen Phasenversatzes verwendet. Dazu werden zunächst die beiden Eingangssignale $p'_{i,\text{Ref}}(\theta, t)$ und $p'_i(\theta, t)$, zwischen denen der Phasenversatz berechnet werden soll, mit Hilfe eines Hilbert-Filters transformiert (Feldman 2011).

Die in die Auswerteroutinen implementierten Algorithmen basieren auf einem Phasenlinearen FIR Filter (engl. Finite Impulse Response Filter) mit Parks-McClellan Syntax. Diese wiederum verwendet eine Chebyshev-Approximation zur Abstimmung der Filterfrequenzantworten (Rabiner et al. 1975). Das Filter selbst nutzt einen Hilbert-Transformator. Der Phasenversatz ergibt sich schließlich aus der Kombination der Eingangssignale und deren Hilberttransformierten $H\{\dots\}$ nach

$$\delta\phi_i(t) = \arctan \left(\frac{H\{p'_{i,\text{Ref}}(\theta, t)\}p'_i(\theta, t) - H\{p'_i(\theta, t)\}p'_{i,\text{Ref}}(\theta, t)}{p'_{i,\text{Ref}}(\theta, t)p'_i(\theta, t) + H\{p'_{i,\text{Ref}}(\theta, t)\}H\{p'_i(\theta, t)\}} \right) . \quad (6.15)$$

Mit Hilfe des Phasenversatzvektors $\delta\phi_i(t)$ lassen sich Aussagen über die zeitliche Entwicklung der Modenstruktur machen, wie in Abb. 6.6 am Beispiel einer $mn_{[1;0]}$ Mode für unterschiedliche Teilmodenverhältnisse ϵ und azimutale Phasenwinkel ϕ_θ gezeigt ist. Über den Gradienten $d\delta\phi_i(t)/dt$ lässt sich direkt die Modendrehrichtung bestimmen. Bei reinen Spinning Modes liegt ein konstanter Phasenversatz vor, sodass über die Periodendauer ein linearer Anstieg bzw. Abfall zu beobachten ist, bis sich nach einer Periode der Vorgang wiederholt. Die zeitliche Änderung des Phasenversatzvektors ist in Abb. 6.6 durch dessen Gradienten dargestellt. Für reine Spinning Modes ist dieser unabhängig von der Modenordnung, der Anregungsfrequenz sowie der räumlichen Phasenverschiebung der Teilmode. Der Grund ist, dass $\delta\phi_{t,i}(t)$ die Phasenverschiebung stets zwischen zwei kompletten Umfangsmodenstrukturen angibt, die sich bei Spinning Modes im Zeitverlauf nicht ändert, sondern lediglich rotiert.

Anders ist dies bei gemischten Moden, die ein festes Teilmodenverhältnis aufweisen. Dann interagieren die in positive und negative Umfangsrichtung umlaufenden Wellen miteinander, wobei eine der beiden Teilwellen stets eine geringere Amplitude als die andere aufweist. Somit verfügt die Mode immer über einen drehenden und stehenden Anteil. Der Phasenversatzvektor muss sich somit im Gegensatz zur Spinning Mode ändern. In Abschnitt 4.2 sind bereits die sich einstellenden Zeitverläufe und komplexen Schallfeldstrukturen beschrieben. Wie in Abb. 6.6 ebenfalls zu erkennen ist, wirkt sich dann auch ein auf eine Teilmode aufgeprägter azimutaler Phasenversatz mit dem Winkel ϕ_θ auf den Phasenversatzvektor aus, da die stehende Struktur gegenüber dem rotierenden Anteil verschoben wird und sich somit ein anderer Überlagerungszustand einstellt. Bei einer rein stehenden Umfangsmode ($\epsilon = 1$) muss $\delta\phi_i(t)$ hingegen zu Null werden, denn im zeitlichen Verlauf wird sich die Umfangsmodenstruktur nicht ändern. Zwar wird auf Grund des $e^{i\omega t}$ -Terms (vgl. Gl.3.24) die Amplitude oszillieren, doch bleibt die räumliche Struktur davon unbeeinflusst.

Werden hingegen die Phasenzustände von überlagerten Moden betrachtet, so ergeben sich wesentlich komplexere Phasenversatzvektoren, wie in Abb. 6.7 am Beispiel einer überlagerten $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode gezeigt ist. Dann bietet es sich an, neben der globalen

zeitlichen Phasenverschiebung, auch die im nachfolgenden Abschnitt diskutierte modale Phasenverschiebung zu verwenden.

Die Anwendung der globalen Phasenanalyse auf experimentelle Messdaten zeigt, dass in überlagerten Modenfeldern die einzelnen Moden des Gesamtsignals teilweise einen zeitlichen Phasenversatz zueinander aufweisen. Dies führt zu einem veränderten Gesamtschallfeld. Durch die Berücksichtigung eines weiteren zeitlichen Phasenversatzes $\delta\phi_t$, lassen sich die einzelnen Moden relativ einfach gegeneinander verschieben. In Abschnitt 7.2 wird dieses Verfahren eingesetzt, um die rekonstruierten Schallfelder anzupassen.

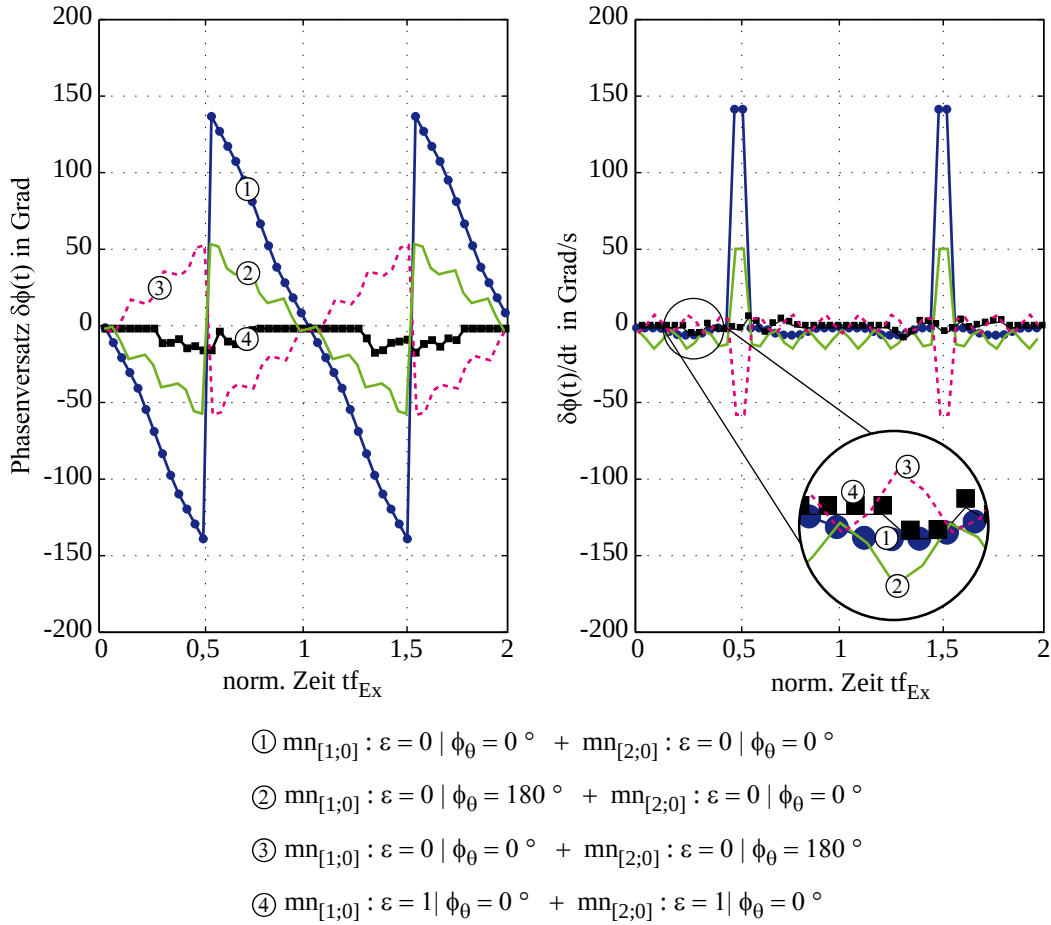


Abbildung 6.7: (links) Phasenversatzvektoren $\delta\phi_{t,i}(t)$ für verschiedene Modenkombinationen bei Überlagerung einer $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode. Überlagerung sowohl reiner Spinning Modes ($\varepsilon = 0$) als auch stehender Moden ($\varepsilon = 1$) überlagert. (rechts) Korrespondierende Gradienten $d\delta\phi_{t,i}(t)/dt$.

6.3.2 Modaler Phasenversatz

In komplexen Schallfeldern, die aus mehreren Einzelmoden mit jeweils unterschiedlichen Teilmodenverhältnissen bestehen, ist ein Rückschluss auf die jeweiligen Phasenanteile nicht ohne Weiteres möglich. Dann bietet es sich an, neben der globalen auch die modale Phasenverschiebung zu nutzen, welche für jede Mode separat angewendet wird. Unter dem hier

eingeführten Begriff des modalen Phasenversatzes $\delta\phi^{[mn]}(t)$ ist die jeweilige Phasenlage zwischen den Zeitreihen der Absolut-, Real- und Imaginärteile der komplexen Modenamplituden zu verstehen. Insbesondere die Phasenverschiebung $\delta\phi_{\text{Re,Im}}^{[mn]}(t)$ zwischen den Real- und Imaginärteilen gibt wichtige Rückschlüsse über das Schwingungsverhalten und den Wellencharakter der jeweiligen Mode (vgl. Abschnitt 6.2). In dieser Arbeit wird daher ein Verfahren entwickelt, welches den modalen Phasenversatz aus den Zeitreihen der komplexen Teilmodenamplituden bestimmt (vgl. Abschnitt 6.2).

Die Idee ist, dass die über der Zeit oszillierenden Modenamplituden sowohl vom Teilmodenverhältnis ϵ als auch von $\phi_{\pm\theta}$ abhängen, was nach nach Gl.(3.24) zwangsläufig der Fall sein muss, denn der Schalldruck $p'(x, \theta, r, t)$ ist abhängig von seinen Teilmodenamplituden und deren Phasenwinkeln. Das über der Zeit modulierte Amplitudensignal liegt aufgrund der AMA als komplexe Werteschar vor, wie in Abb. 6.5 bereits gezeigt ist. Die Berechnung der Phasenversätze erfolgt wieder über eine Hilbert-Transformation und ergibt sich für zwei zu vergleichende Eingangssignale nach Gl.(6.15).

In Abb. 6.8 und Abb. 6.9 sind am Beispiel einer $mn_{[1;0]}$ Mode mit exemplarisch gewählten Einstellungen die Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden und die korrespondierenden modalen Phasenversätze $\delta\phi^{[m,n]}(t)$ für drehende, stehende und partiell stehende Moden mit verschiedenen Teilmodenverhältnissen ϵ und unterschiedlichen azimuthalen Phasenwinkeln ϕ_θ gegenübergestellt.

Die Zeitverläufe der komplexen Amplituden zeigen, dass für reine Spinning Modes ($\epsilon = 0$) ein azimuthaler Phasenversatz $\delta\phi_\theta$ die Amplitudenmodulation nicht beeinflusst (vgl. ① und ②). Dieser triviale Fall muss eintreten, da bei Spinning Modes lediglich eine der vier Teilmoden (vgl. Gl.3.24) wirkt und ein räumlicher Phasenversatz einzig zu einer definierten Drehung der gesamten helikalen Struktur führt. Die realen und imaginären Wellenanteile weisen einen konstanten Phasenversatz von $\delta\phi_{\text{Re,Im}}^{[m,n]}(t) = \pm\pi/2$ zueinander auf, sind also orthogonal. Des Weiteren zeigt diese Eigenschaft, dass aus der Überlagerung phasenversetzter Einzelwellen eine drehende Modenstruktur resultieren kann. Dies lässt sich z.B. zur experimentellen Erzeugung von Spinning Modes nutzen (vgl. Abschnitt 2.3.2). Wie in Abb. 6.8 ebenfalls zu erkennen ist, oszillieren die modalen Phasenversätze $\delta\phi_{\text{Re,Im}}^{[m,n]}(t)$ über die Periodendauer um den Mittelwert von $\pm\pi/2$. Das Vorzeichen ist dabei Indikator für die Drehrichtung der Mode und hängt von der aktiven Amplitude ab. Für $A_{-\theta}$ dreht sich die Mode in positive Umfangsrichtung und für $A_{+\theta}$ entsprechend entgegen.

Bei rein stehenden Moden ($\epsilon = 1$) existiert lediglich der Realteil, welcher entsprechend die azimuthale Modenform prägt (vgl. dazu auch Abschnitt 4.2). Existiert allerdings ein räumlicher Phasenwinkel ϕ_θ zwischen den beiden Teilmoden, sind diese gegeneinander verdreht, wie in ③ und ④ zu erkennen ist. Es muss dann neben dem Real- nun auch ein Imaginärteil auftreten. Entscheidend ist allerdings, dass sich beide in Phase befinden bzw. um $\pm\pi$ verschoben sind und damit keine Laufrichtung der Mode vorgegeben ist, wie auch anhand der $\delta\phi_{\text{Re,Im}}^{[m,n]}(t)$ -Verläufe zu erkennen ist. Dies bewirkt stets eine veränderte Gesamtmodenstruktur.

Während mit Hilfe des Faktorisierungsverfahrens sowohl das Teilmodenverhältnis ϵ als auch der azimuthale Phasenwinkel ϕ_θ bestimmt werden können, lassen sich über die modale

Phasenanalyse zusätzliche Informationen über die Überlagerungszustände der Teilmoden und die Modendrehrichtung gewinnen. So kann z.B. bestimmt werden, welche der beiden Teilmoden $A_{+\theta}$ (Drehung in positive Umfangsrichtung) oder $A_{-\theta}$ (Drehung in negative Umfangsrichtung) nach Gl.(3.24) die Dominante ist, und welche der beiden um den etwaigen azimutalen Phasenversatz verschoben ist. Bei einer gemischten Mode, auch partiell

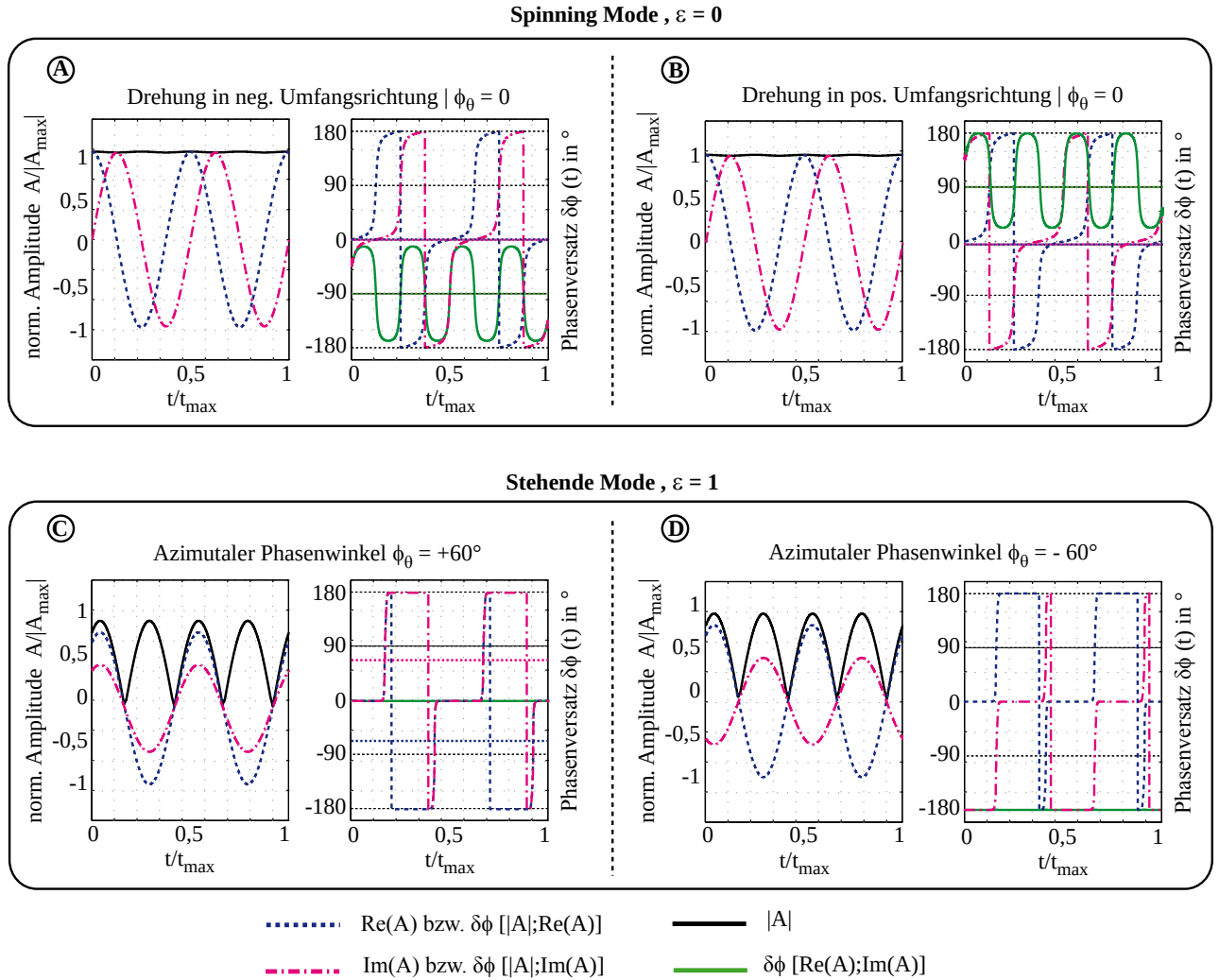


Abbildung 6.8: Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden und der korrespondierenden Phasenversätze für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als Spinning Mode (oberer Block) und stehende Mode (unterer Block) bei unterschiedlichen Anregungsbedingungen.

stehende Mode genannt, sind, genau wie bei Spinning Modes, der Real- und Imaginärteil unabhängig vom Teilmodenverhältnis um $\pm\pi/2$ zueinander versetzt (vgl. Abb. 6.9 (E)). Dies deutet auf den drehenden Charakter der Mode hin. Einzig das existierende Teilmodenverhältnis ist dafür verantwortlich, dass die resultierende Modenstruktur dreht, denn die beiden Teilmoden sind betragsmäßig über dem Umfang nicht mehr gleichmäßig überlagert. Wie der Vergleich der Beispiele in (F) und (G) zeigt, wird dazu eine der Amplituden mit dem Teilmodenverhältnis ε gewichtet.

6 Analyseverfahren

Allerdings liegen aufgrund des stehenden Wellenanteils Oszillationen der Betragsgröße vor, die stets in Phase mit dem Realteil sind. Ein Verhalten, das ansonsten nur bei rein stehenden Moden zu beobachten ist. Durch einen aufgeprägten azimuthalen Phasenwinkel $\phi_{\pm\theta}$ verschieben sich auch hier die Teilmoden zueinander, was zu einer zusätzlichen Phasenverschiebung führt. Dies ist in Abb. 6.9 anhand der Phasenversätze $\delta\phi^{[mn]}(t)$ von (E) und (F) gezeigt. Die Form der resultierenden Modenstruktur ist dabei maßgeblich davon bestimmt, welche der beiden Teilmoden $A_{+\theta}$ oder $A_{-\theta}$ dominiert und welche der beiden um den etwaigen azimuthalen Phasenversatz verschoben ist (vgl. (G) und (H)). Dabei bezieht sich der Phasenwinkel $\phi_{+\theta}$ auf die sich in positive Umfangsrichtung drehende Mode, während $\phi_{-\theta}$ sich auf die in negative Umfangsrichtung drehende Mode bezieht.

In Anhang D (Abb. D.2) sind exemplarisch für eine $mn_{[1;0]}$ Mode die zeitlichen Verläufe

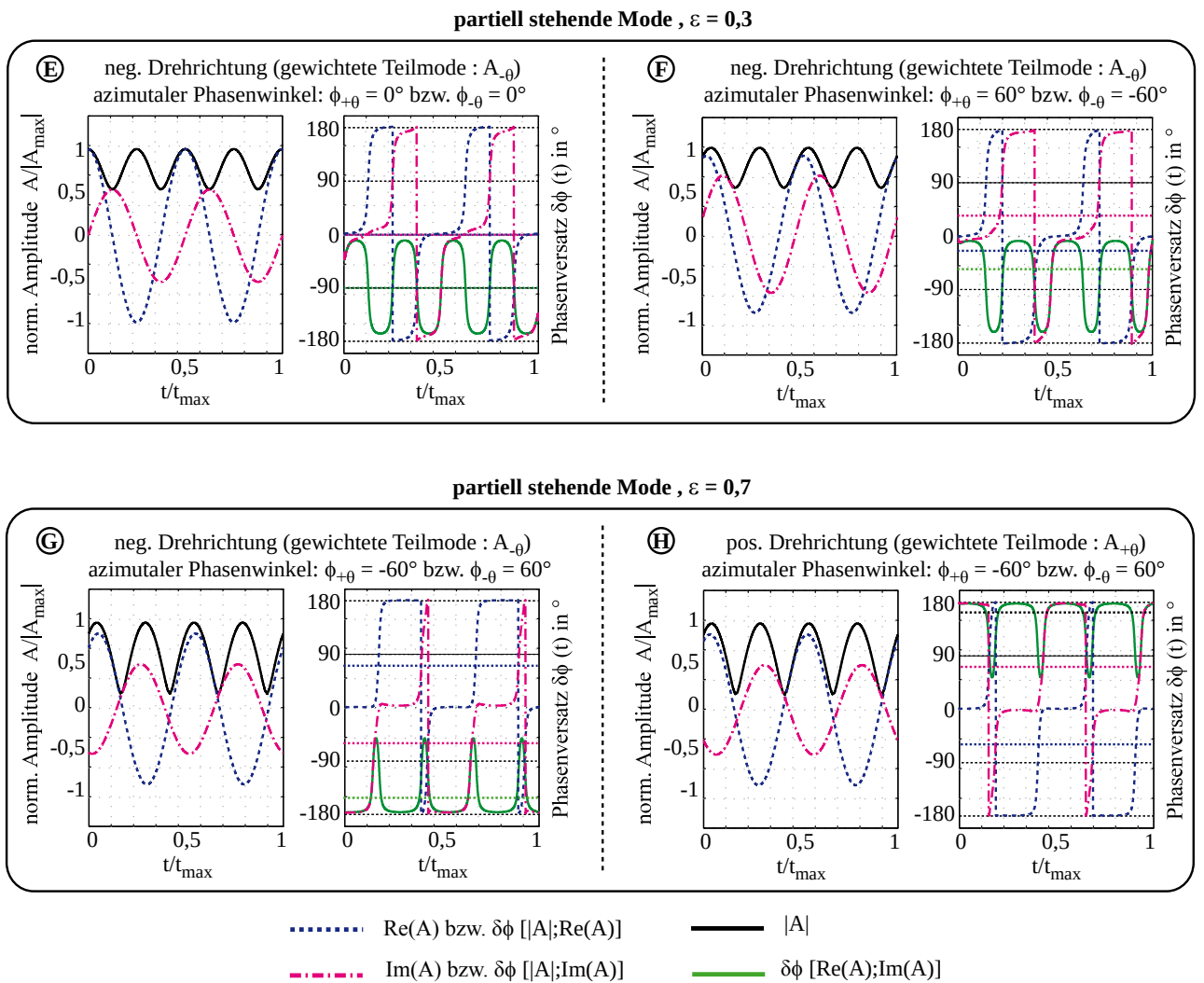


Abbildung 6.9: Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden und der korrespondierenden Phasenversätze für eine $mn_{[1;0]}$ Mode als partiell stehende Mode für unterschiedliche Teilmodenverhältnisse und Phasenwinkel.

der komplexen Modenamplituden für verschiedene Teilmodenverhältnisse und variierende

azimutale Phasenwinkel ϕ_θ aufgetragen. In Anhang D (Abb. D.3) sind die korrespondierenden modalen Phasenversätze $\delta\phi^{[mn]}(t)$ dargestellt, die eine Aussage über die Phasenlage der einzelnen Wellenanteile zueinander zulassen und damit auch eine Interpretation der Modenstruktur ermöglichen.

Es lässt sich festhalten: Die Existenz eines Imaginärteils zeigt einzig an, dass die Teilmoden räumlich gegeneinander verschoben sind und weist nicht direkt auf die Existenz drehender Modenstrukturen hin. So treten beispielsweise für rein stehende Moden bei aufgeprägtem azimutalem Phasenwinkel reelle und imaginäre Teilmodenamplituden auf. Diese sind allerdings stets in Phase bzw. um $\pm\pi$ zueinander verschoben. Liegt zwischen Real- und Imaginärteil hingegen ein Phasenversatz $0 < |\delta\phi| < \pi$ vor, so verfügt die resultierende Modenstruktur stets über einen drehenden Anteil.

Im Rahmen von Sensitivitätsuntersuchungen hat sich herausgestellt, dass die in diesem Abschnitt vorgestellte Methode, den Phasenversatz zwischen zwei Zeitreihen mit Hilfe der Hilbert-Transformation zu berechnen, eine zuverlässige Methode ist - insbesondere für die Behandlung großer Zeitreihen. Die Stärke des Verfahrens ist, dass es auch bei überlagerten Modenstrukturen einsetzbar ist, was gerade bei geometrisch basierten Ansätzen, die einen Phasenversatz auf Basis der Verschiebung charakteristischer Kurvenparameter ermitteln, nicht der Fall ist. Da die Zeitreihensignale der akustischen Messungen meistens aus mehreren überlagerten Modenkomponenten zusammengesetzt sind, wurde in diesem Abschnitt, neben dem globalen Phasenversatz, eine neue Methodik zur Bestimmung des modalen Phasenversatzes eingeführt, die eine Wellenanalyse für jede einzelne Mode separat zulässt.

6.4 Dekompositionsverfahren

Die Analyse der gemessenen und simulierten Schallfelddaten muss Aufschluss über die Modenstruktur geben. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Kenntnis, zu welchen Anteilen eine Mode rotiert oder steht, denn diese Eigenschaften bewirken sehr spezifische Modenstrukturen, wie in Kapitel 4 gezeigt wurde. Diese Informationen werden darüber hinaus für die Berechnung der Schallfelder mit dem Schalltransportmodell benötigt. Mit Hilfe der Azimutalmodenanalyse (vgl. Abschnitt 6.2) lassen sich zwar die einzelnen Amplituden eines überlagerten Modenfeldes bestimmen, doch erhält man keine Information darüber, ob es sich um eine drehende, stehende oder partiell stehende Mode handelt. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher eine Methodik entwickelt, mit Hilfe derer sich ein aus mehreren Teilmoden überlagertes Schallfeld zerlegen lässt und man Aufschluss über die Amplitudenverhältnisse der stehenden und drehenden Modenanteile erhält. Basis ist eine Singulärwertzerlegung (SVD - engl.: Singular Value Decomposition) der komplexen Schalldruckdaten bzw. Modenamplituden.

6.4.1 SVD zur Untersuchung der Zeitreihen

Aus den θ - t -Daten, die an einer festen axialen Position mit N umfangsverteilter Sensoren aufgenommen werden, wird die Datenmatrix $\mathbf{D}$ erstellt. Diese $M \times N$ -Matrix lässt sich mit Hilfe etablierter Dekompositionsverfahren zerlegen (Lindfield und Penny 2012, Golub und van Loan 1996). Im Rahmen dieser Arbeit wird eine SVD verwendet, um Aufschluss über die charakteristischen Eigenschaften der Matrix und somit auch über die Modenstruktur zu erhalten. Allgemein lässt sich nach

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T & \text{für } \mathbf{D} \in \mathbb{R} \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H & \text{für } \mathbf{Z} \in \mathbb{C}\end{aligned}\tag{6.16}$$

eine Datenmatrix mit Hilfe der SVD in eine unitäre $M \times M$ -Matrix $\mathbf{U}$ (linksseitigen Singulärvektoren), eine unitäre, adjungierte $N \times N$ -Matrix $\mathbf{V}$ (rechtsseitigen Singulärvektoren) und eine rein reelle Diagonalmatrix $\mathbf{S}$ zerlegen (vgl. z.B. Golub und van Loan 1996) oder Klema und Laub (1980).

Wie Bunse-Gerstner und Gragg (1988) zeigen, lässt sich die SVD auch auf komplexe Matrizen anwenden, wobei dann anstelle der einfachen Transponierten $\mathbf{V}^T$ die komplex Konjugierte zu nehmen ist bzw. die Hermitesche $\mathbf{V}^H$ (vgl. Gl.6.16). Dekompositionsverfahren werden allgemein zur Reduzierung großer Matrixsysteme in der numerischen Mathematik oder der Bildverarbeitung verwendet. Doch lassen sich viele Eigenschaften auch zur Analyse dynamischer, zeitinvarier Systeme nutzen. Angewandt auf die akustischen Messsignale, repräsentieren die orthogonalen bzw. unitären Matrizen die Eigenvektoren der Mode, da $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T$ und $\mathbf{V} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}$ gilt, während die Diagonalmatrix die Singulärwerte der Mode enthält, die vergleichbar mit den Eigenwerten sind (Golub und Reinsch 1970, Yoshikawa et al. 2005). Somit müssen in den Eigenvektormatrizen auch die Informationen sämtlicher überlagerter Teilmoden enthalten sein. Feeny (2008) zeigt unter Verwendung einer komplexen POD (engl.: Proper Orthogonal Decomposition), eine dem SVD Verfahren sehr ähnliche Dekompostionsmethode, dass sich für komplexe Datenmatrizen das Wellenverhalten mit Hilfe von Matrizenzerlegungen bestimmen lässt.

Da die verwendete Datenmatrix (Messwerte) jedoch reellwertig ist, gilt es zunächst die Werte in die komplexe Ebene zu überführen. Nach Feldman (2006) lässt sich dazu das reelwertige, zeitabhängige Signal $p'(t) = \Re(z(t))$ mittels Hilbert-Transformation $p'_H(t) = \Im(z(t))$ in ein komplexwertiges überführen. Das analytische Signal ergibt sich somit zu $z(t) = p'(t) + ip'_H(t)$ (Feeny 2008). So liegen für jede Messposition pro Sample M komplexe Signale vor, aus denen sich mit

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{1,1}(t_1) & \cdots & z_{1,N}(t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{M,1}(t_1) & \cdots & z_{M,N}(t_N) \end{pmatrix}\tag{6.17}$$

die komplexe Datenmatrix $\mathbf{Z}$ ergibt. Diese lässt sich schließlich nach Gl.(6.16) mit standardisierten Algorithmen der SVD in ihre komplexen Singulärvektoren $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ und in die reellen Singulärwerte zerlegen. Diese enthalten sämtliche Informationen über das Ausbreitungsverhalten der Mode. Physikalisch gesehen entspricht $\mathbf{U}$ der Modenform, während $\mathbf{V}$ die Modulation der Mode über dem betrachteten Zeitintervall beschreibt (Kerschen und

Golival 2002). Über die Real- und Imaginäranteile von $\mathbf{U}$ bzw. $\mathbf{V}$ lässt sich schließlich ein Zusammenhang zwischen den stehenden und wandernden Anteilen der Welle angeben, da beide den Eigenvektoren der Datenmatrix entsprechen. Zu Grunde liegt die Annahme einer harmonischen Schwingungüberlagerung, so dass sich ein gesampeltes Signal gemäß

$$z(\theta_i, t) = (\sin \lambda \theta_i + i \cos \lambda \theta_i) e^{i\omega t} \quad (6.18)$$

stets aus dessen räumlicher und zeitlicher Änderung ergibt. Wie in Gl.(6.18) zu erkennen ist, erfordert die räumliche Änderung der Welle in azimuthaler Richtung die komplexe Drehanweisung $i \cos \lambda \theta_i$.

In Abb. 6.10 sind dazu die Ausbreitungseigenschaften unterschiedlicher Modenkombinationen für variierte Amplituden bzw. Teilmodenverhältnisse dargestellt. In den Diagrammen (A), (B) und (C) wird zunächst für eine einzelne partiell stehende $mn_{[2;0]}$ Mode der Einfluss des azimuthalen Phasenwinkels auf die Singulärwerte $\mathbf{V}$ und $\mathbf{U}$ betrachtet. Das Teilmodenverhältnis wird dabei von $\epsilon = 0$ (reine Spinning Mode) bis $\epsilon = 1$ (stehende Mode) variiert. Für die Darstellung wird eine spezielle Form der Ortskurve gewählt. Diese beschreibt eine von den reellen Eingabeparametern t und θ abhängige Bahnkurve des komplexen Zeigers bzw. der komplexen Systemgröße $\mathbf{V}$ und $\mathbf{U}$.

Bei einer reinen Spinning Mode müssen gemäß Gl.(6.18) die Real- und Imaginärteile gleichmäßig ausgeprägt sein, damit eine Modendrehung vorliegt. Die Ortskurven von $\mathbf{V}$ und $\mathbf{U}$ beschreiben dann, unabhängig vom azimuthalen Phasenwinkel ϕ_θ , einen Einheitskreis, wie in den Diagrammen (A), (B) und (C) für $\epsilon = 0$ zu erkennen ist. Dies gilt auch für überlagerte Spinning Modes unterschiedlicher Ordnung, die in die gleiche Richtung drehen (vgl. (D)). Weist die Mode hingegen stehende Anteile auf, so wird der Imaginärteil abgeschwächt. Bei einer rein stehenden Welle verschwindet dieser ganz, und es kommt lediglich der Realteil in Gl.(6.18) zum Tragen. Die Ortskurven von $\mathbf{V}$ werden dann gestreckt und bilden sich als Ellipsen aus. Da die Singulärwerte $\mathbf{U}$ die räumliche Modulation der Mode beschreiben, werden deren Ortskurven im Gegensatz zu $\mathbf{V}$, auch bei steigendem Teilmodenverhältnis ϵ Wellencharakter aufweisen und stets einen Real- und Imaginärteil besitzen. Diesen Ortskurven kommt zur Interpretation überlagerter Moden eine besondere Bedeutung zu. Während die Singulärwerte $\mathbf{V}$ Aufschluss darüber geben, ob und mit welchen Amplitudenverhältnissen eine stehende Mode vorliegt, lassen sich mit den Ortskurven von $\mathbf{U}$ auch die Knotenlinien, die durch Überlagerung der einzelnen Moden auftreten, identifizieren. Die Schnittpunkte der Kurvenverläufe sind dafür ein Indiz.

Um den Einfluss der Überlagerung zweier Moden auf die Singulärvektoren zu zeigen, werden exemplarisch eine $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode unterschiedlicher Ausprägung überlagert. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.10 ((D), (E) und (F)) dargestellt. In (D) sind die beiden Moden reine Spinning Modes. Es wird lediglich die Amplitude der $mn_{[1;0]}$ Mode variiert, wobei jedoch die Teilmodenverhältnisse stets $\epsilon = 0$ sind. Es zeigt sich, dass $\mathbf{V}$ immer den Einheitskreis ausbildet und somit nur vom Teilmodenverhältnis abhängt und nicht von der Amplitudenhöhe.

Werden hingegen (partiell) stehende und rotierende Moden überlagert, so spielt die Modendrehrichtung eine entscheidende Rolle, wie im Vergleich der Ortskurven in (E) und (F) zu erkennen ist. In (E) werden eine $mn_{[1;0]}$ Spinning Mode mit einer partiell stehenden $mn_{[2;0]}$

6 Analyseverfahren

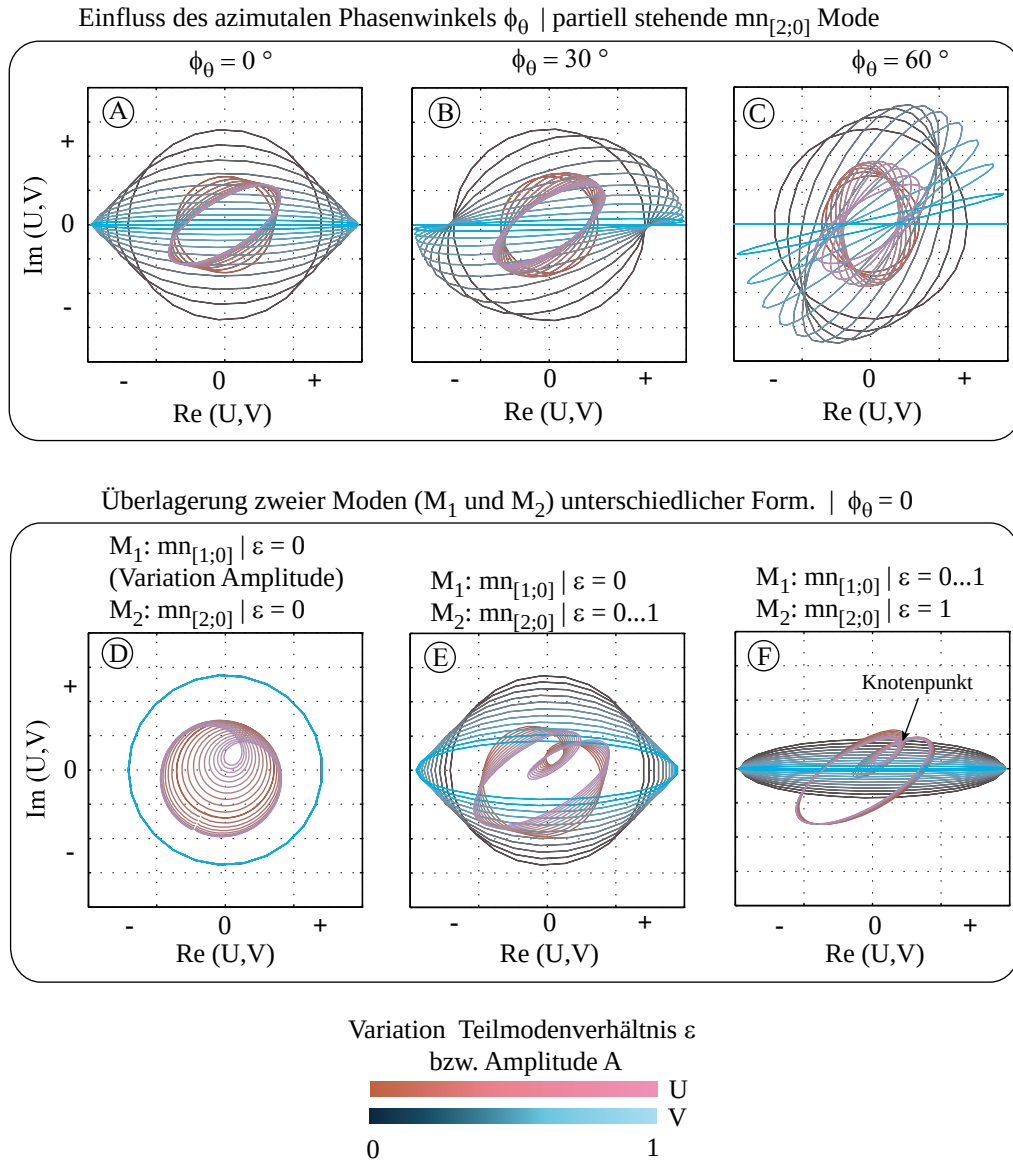


Abbildung 6.10: Ortskurven der Singulärvektoren $\mathbf{V}$ (blau) und $\mathbf{U}$ (rot) für verschiedene Modenzustände und Modenüberlagerungen. Dabei wird eine Amplitudenvariation bzw. Variation des Teilmodenverhältnisses jeweils für eine Teilmode durchgeführt. Die Variationen sind anhand der Farbverläufe kenntlich gemacht.

Mode überlagert, deren Teilmodenverhältnis variiert wird, während in (F) die $mn_{[2;0]}$ Mode steht und das Teilmodenverhältnis der $mn_{[1;0]}$ Mode variiert. Ist an der Überlagerung eine reine Spinning Mode beteiligt, wird immer ein drehender Anteil im Gesamtfeld vorliegen, wie in (E) für die räumliche Modulation mit Hilfe des Singulärwerts $\mathbf{V}$ zu erkennen ist. Wird allerdings eine rein stehende Mode mit einer zweiten Mode beliebigen Teilmodenverhältnisses überlagert (vgl. (D)), tritt in keinem Fall der Einheitskreis auf, sodass das resultierende Gesamtfeld immer über einen stehenden Modenanteil verfügen wird.

Die Ortskurven zeigen zudem einen zwischen den Teilmoden auftretenden Phasenversatz an. Dieser bewirkt die Verschiebung der Modenstrukturen, die eine zusätzliche Drehung

der Ortskurven hervorruft. Deren Struktur bleibt allerdings unbeeinflusst.

Aus den Ortskurven lässt sich schließlich ein Amplituden- bzw. Teilmodenverhältnis ableiten, das als Kennzahl für die Charakterisierung der Modenstruktur dient und in die Auswertalgorithmen implementiert ist.

6.4.2 SVD zur Analyse der Modenamplituden

Neben der Anwendung der SVD auf die Zeitreihen der Messsignale, soll die Idee der Matrixfaktorisierung auch auf die komplexen Amplituden der Azimutalmoden angewandt werden. In diesem Abschnitt wird eine auf der Eigenwertzerlegung basierende Methodik vorgestellt, um die azimutalen Phasenversätze und die Teilmodenverhältnisse für einzelne Moden zu bestimmen. Im Gegensatz zu dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Vorgehen, müssen die aus der AMA stammenden Eingangssignale nicht mehr in die komplexe Ebene transformiert werden. Wird die komplexe Amplitude $\mathbf{A}$ in der $\Re - \Im$ -Ebene aufgespannt, so lässt sich für deren Abbildung eine Ortskurve definieren, die in allgemeiner Form über die quadratische Gleichung

$$z_i(t)^T \mathbf{Y} z_i(t) + g_i^T z_i(t) + c = 0 \quad \text{mit} \quad z_i(t) = [\Re\{\mathbf{A}_{i,j}(t)\}, \Im\{\mathbf{A}_{i,j}(t)\}]^T \quad (6.19)$$

beschrieben ist (Bronstein et al. 2013). Die hier verwendete Matrixnotation bietet sich an, da so entsprechend einfach eine Hauptachsentransformation durchführbar ist (Stewart 2001) und direkt auf die Verschiebung und Drehung der Abbildung geschlossen werden kann. Wie nachstehend gezeigt wird, sind diese ein Maß für den azimutalen Phasenwinkel ϕ_θ und die Verschiebung aus dem Zentrum bei einer der Grundmoden. Ein beliebiger Punkt in der $\Re - \Im$ -Ebene liegt genau dann auf der Ortskurve, wenn Gl.(6.19) erfüllt ist. Dies ist der Fall, wenn die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2}/2 \\ y_{1,2}/2 & y_{2,2} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

symmetrisch ist, so dass für deren Determinante $\det(\mathbf{Y}) > 0$ gilt. Es kann für jeden Punkt der Ortskurve (und damit für jeden Messpunkt) ein aus $\mathbf{Y}$, g_i und c resultierender Koeffizientenvektor $u_k = [y_{11}, y_{12}, y_{22}, g_1, g_2, c]$ aufgestellt werden. Das Ziel dieses ersten Schrittes ist, die Ortskurvenparameter zu bestimmen, um anschließend die eigentliche Hauptachsentransformation durchführen zu können. Dieses Vorgehen lässt sich gut automatisieren und stellt eine mathematisch eindeutige Lösung der Ortskurvenparameter (Ellipsenparameter) dar. Es ist im Gegensatz zu einer geometrischen Methode (vgl. z.B. Ingard (2008)), die anhand von charakteristischen Kurvenparametern die Ortskurven auswertet, stets eindeutig und universell anwendbar. Gander et al. (1994) stellen ein Verfahren vor, mit dem auf Basis der zuvor beschriebenen Singulärwertzerlegung und einem Least-Square-Verfahren eine Ellipse an eine Punkteverteilung angepasst wird. Diese Idee wird für die implementierten Algorithmen zur Bestimmung der Ortskurvenparameter aufgegriffen. Mit den zeitabhängigen Eingabewerten lässt sich unter Berücksichtigung der Gl.(6.19) für $\mathbf{B}u_k = 0$ ein lineares

Gleichungssystem aufstellen, wobei

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} z_{1,1}(t_1)^2 & z_{1,1}(t_1)z_{1,2}(t_1) & z_{1,2}(t_1)^2 & z_{1,1}(t_1) & z_{1,2}(t_1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{m,1}(t_m)^2 & z_{m,1}(t_m)z_{m,2}(t_m) & z_{m,2}(t_m)^2 & z_{m,1}(t_m) & z_{m,2}(t_m) & 1 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

gelten muss. Dieses Gleichungssystem wird nun mit Hilfe eines Least-Square-Verfahrens als Minima-Approximation $\|\mathbf{B}u_k\| = \min$ gelöst (Gander et al. 1994). Um Allgemeingültigkeit zu gewährleisten, bietet es sich an, den Koeffizientenvektor zu normalisieren $\|u_k\| = 1$. Das Gleichungssystem kann nun gelöst werden, in dem die Matrix $\mathbf{B}$ mit Hilfe einer SVD in ihre Singulärwertvektoren und Singulärwerte zerlegt wird. Die Lösung des Minimalproblems ergibt sich durch Aufsuchen der kleinsten Werte des rechtseitigen Singulärvektors $\mathbf{V}$ (vgl. auch Abschnitt 6.4.1). Es gilt $\mathbf{V}_{\min} = u_k$, so dass sich nach Gl.(6.20) die Einträge der Koeffizientenmatrix ergeben.

Ist $\mathbf{Y}$ bekannt, können mit Hilfe einer Eigenwertdekomposition deren Eigenvektoren $\mathbf{Q}$ und die Eigenwertmatrix $\mathbf{S}$ bestimmt werden. Der Eigenvektor ist für den Eingangszustand bzw. das Abbild ein Charakteristikum und bleibt per Definition selbst bei Änderung des Abbildes in seiner Richtung erhalten. Für die Ortskurven der Modenamplituden bedeutet dies, dass die Eigenvektoren $\mathbf{Q}$ bei variierendem Teilmodenverhältnis erhalten bleiben und lediglich über den sich ändernden Eigenwerten skaliert werden. Ein azimuthaler Phasenversatz bewirkt, aufgrund der Verschiebung von Real- zu Imaginärteil des Eingangssignals hingegen, eine Rotation Γ des Abbildes. Der Eigenvektor wird infolgedessen um seinen Ursprung gedreht. Diese Drehung ist proportional zu ϕ_θ und verhält sich gemäß

$$\phi_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi + 1} \quad . \quad (6.22)$$

Für die Eigenwertzerlegung der Koeffizientenmatrix gilt

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T \quad \text{wobei} \quad \mathbf{S} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2) \quad (6.23)$$

Die Eigenvektoren sind orthogonal, so dass sich mit

$$\Gamma = \arctan\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right) \quad (6.24)$$

direkt der Rotationswinkel ergibt. Die Bestimmung der Ortskurvenparameter bzw. Ellipsenparameter, wie etwa den Zentrums punkt oder die Halbachsen, lassen sich durch Substitution der berechneten Werte in Gl.(6.19) bestimmen. Mit Einführung der Hilfsvariablen $\check{z}_i(t) = \mathbf{Q}^T z_i(t)$ und $\check{g}_i = \mathbf{Q}^T g_i$ ergibt sich so

$$\begin{aligned} \check{z}_i^T(t) \mathbf{Q}^T \mathbf{Y} \mathbf{Q} \check{z}_i(t) + \check{g}_i + c &= 0 \quad \text{bzw. in Komponentenform} \\ \mu_1 \check{z}_1^2(t) + \mu_2 \check{z}_2^2(t) + \check{g}_1 \check{z}_1(t) + \check{g}_2 \check{z}_2(t) + c &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Wird diese Gleichung in Normalform gebracht und umgestellt, erhält man direkt den Zentrumsvektor der gedrehten Ortskurve

$$v_i = - \left[\frac{\check{g}_1}{2\mu_1}, \frac{\check{g}_2}{2\mu_2} \right] \quad . \quad (6.26)$$

Mit Hilfe dessen kann die quadratische Gleichung gelöst werden, und die Halbachsen a und b können zu

$$a = \sqrt{v/\mu_1} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{v/\mu_2} \quad \text{wobei} \quad v = \frac{\check{g}_i v_i}{2} - c \quad (6.27)$$

bestimmt werden.

Beispiel

In Abb. 6.11 sind die mit diesem Verfahren ausgewerteten Ortskurven bei variierenden Teilmodenverhältnissen einer $mn_{[2;0]}$ Mode für verschiedene azimutale Phasenwinkel dargestellt. Wie zu erkennen ist, erfolgt mit Änderung von ϕ_θ eine Drehung der ansonsten unbeeinflussten Struktur. ϵ bewirkt lediglich die Stauchung der Ellipse (Skalierung des Eigenvektors über den Eigenwert).

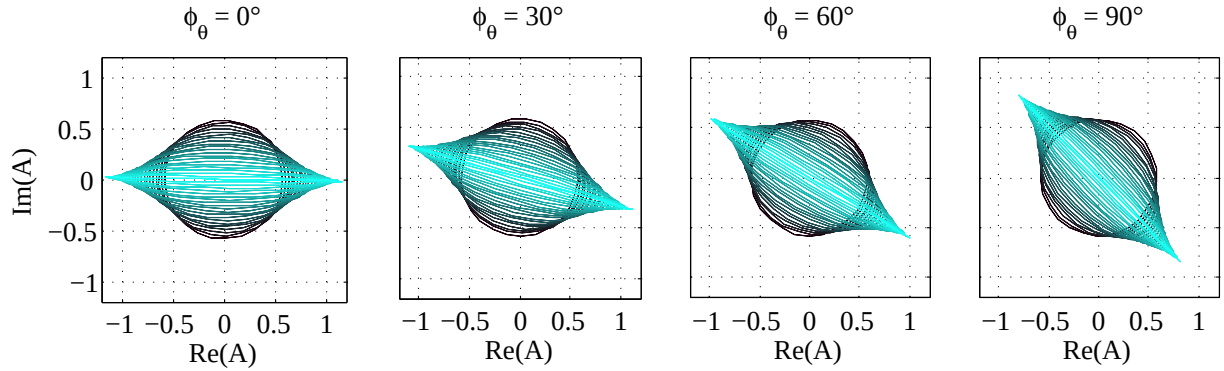


Abbildung 6.11: Ortskurven einer $mn_{[1;0]}$ Mode. Die Variation der Teilmodenverhältnisse ist anhand der Farbverläufe kenntlich gemacht von schwarz ($\epsilon = 0$) nach grün ($\epsilon = 1$).

Azimutaler Phasenversatz und Teilmodenverhältnis

Mit dem Rotationswinkel Γ liegt nun eine Größe vor, die eine eindeutige Bestimmung des azimutalen Phasenversatzes der Teilmoden zulässt. Wird der Modenstruktur allerdings eine Strömung aufgeprägt, tritt eine zusätzliche Verschiebung der azimutalen Struktur auf. Dies wird bereits in Abschnitt 4.2 am Beispiel stehender Azimutalmodes hergeleitet, wobei gezeigt ist, dass eine dem Schallfeld überlagerte Haupt- und Drallströmung die Schallfeldstruktur verzerrt (vgl. Verzerrungswinkel α in Gl. B.122). Diese Erkenntnisse lassen sich unmittelbar auf die Beziehungen der Modenamplituden bzw. Ortskurven anwenden. Nach Gl.(B.119) führen die Strömungseinflüsse über die axialen Wellenzahlen zu einem azimutalen Phasenversatz. Somit lässt sich eine Phasenkorrektur, die proportional zur Wellenzahldifferenz $\Delta k_{\pm x}^{\pm\theta} = k_{\pm x}^{+\theta} - k_{\pm x}^{-\theta}$ ist, einführen, um die der Rotationswinkel der Ortskurven korrigiert werden muss, wenn einzig ϕ_θ von Interesse ist.

Als Folge eines veränderten Überlagerungszustandes der realen und imaginären Anteile der Modenamplituden ergibt sich die Ortskurvenstauchung, die somit ein direktes Maß für das Teilmodenverhältnis ϵ ist. Es lässt sich z.B. über den Quotienten der beiden Halbachsen a und b ein Skalierungsmaß für ϵ definieren. Da die Halbachsdefinition allerdings

6 Analyseverfahren

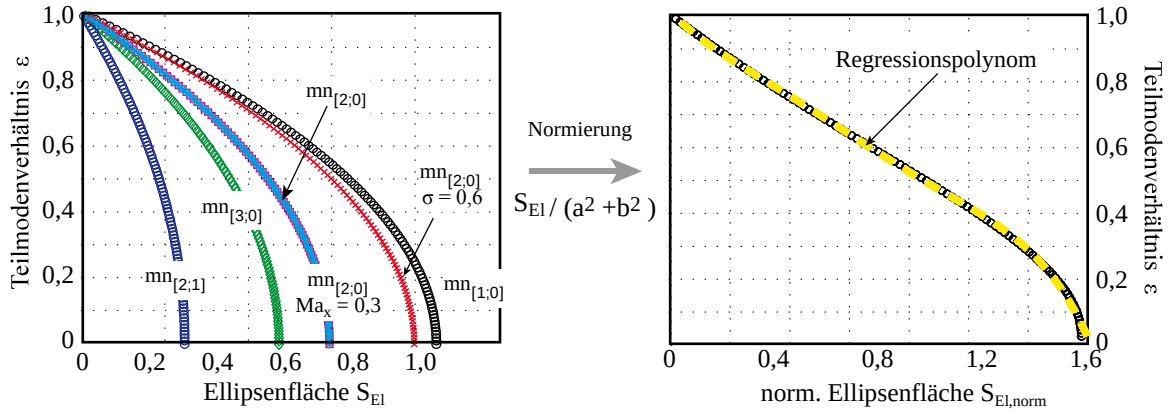


Abbildung 6.12: (links) Teilmodenverhältnis ϵ in Abhängigkeit von der Ellipsenfläche S_{El} für unterschiedliche Moden- und Ausbreitungszustände. (rechts) Normierte Ellipsenfläche $S_{El,norm}$.

vom Quadranten der $\Re - \Im$ -Ebene abhängt, wird mit der Ellipsenfläche $S_{El} = \pi ab$, ein davon unabhängiges Maß bevorzugt. In Abb. 6.12 sind die Teilmodenverhältnisse in Abhängigkeit von der Ellipsenfläche für unterschiedliche Moden- und Ausbreitungszustände dargestellt. Wie sich zeigt, ist S_{El} jedoch von der Modenordnung und von σ abhängig, so dass eine allgemeingültige Bestimmung von ϵ nicht direkt möglich ist. Der Grund ist, dass mit Änderung der Modenordnung bzw. des Nebenverhältnisses zwar die azimuthale Modenstruktur erhalten bleibt, jedoch ändern sich die Beträge der Amplituden bzw. die Energieverteilung, insbesondere, wenn ein radialer Modenanteil wirkt (vgl. Abschnitt C.1). Mit einer Normierung der Ellipsenflächen gemäß

$$S_{El,norm} = \frac{S_{El}}{a^2 + b^2} \quad (6.28)$$

lässt sich eine vom Betrag der Eingangsamplitude unabhängige Größe ermitteln, die einzig vom Teilmodenverhältnis abhängt. Mit $S_{El,norm}$ liegt neben dem Rotationswinkel nun eine weitere Skalierungsgröße zur Charakterisierung der gemessenen Modenstrukturen vor. Der allgemeine Verlauf von $\epsilon(S_{El,norm})$ ist nicht linear, lässt sich aber mit Hilfe eines Regressionspolynoms 5. Ordnung

$$\epsilon(S_{El,norm}) = \sum_{i=0}^5 \alpha_i (S_{El,norm})^i \quad (6.29)$$

approximieren. Die Faktoren α ergeben sich dann zu:

Tabelle 6.1: Koeffizienten für das Regressionspolynom der Gl.(6.29)

α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
-0,5770	2,0080	-2,5583	1,4704	-0,8930	1,0219

Andere Ansätze als SVD

Es zeigt sich, dass die SVD eine sehr effektive Methode zur Wellenzerlegung und zur Analyse der modalen Schallfeldstruktur ist. Neben den Matrix-Dekompositionsverfahren zeigen etwa Feldman (2010) oder Bucher (2004) weitere Methoden auf, wie ohne SVD eine Mode in ihre stehenden und wandernden Anteile zerlegt werden kann. Allerdings wird dabei stets von monochromen und nicht von überlagerten Wellen ausgegangen. Ein Vergleich der unterschiedlichen Methoden erscheint dennoch lohnend. Die Stärke des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens ist, dass sich neben den azimuthalen Phasenwinkeln auch die Teilmodenverhältnisse für eine einzelne, mit Hilfe der Azimutalmodenanalyse separierten Mode, bestimmen lassen. Der entscheidende Ansatz ist die Verwendung der Zeitreihen der komplexen Modenamplituden.

Signalanpassung

Bei der Validierung der Algorithmen stellt sich heraus, dass teilweise falsche Phasenwinkel ϕ_θ und Teilmodenverhältnisse ϵ berechnet werden. Dies tritt insbesondere dann auf, wenn in einem Bereich ähnlicher Ordnung mehrere niedrige Modenamplituden neben einer sehr dominanten existieren. Es zeigt sich, dass es dann bereits in der AMA zu einer Beeinflussung der modalen Amplituden untereinander kommen kann und geringe Oszillationen der Absolutwerte auftreten.

Die SVD-Analyse deutet solche Oberschwingungen allerdings als fiktive Azimutalwinkel, die zu falschen Phasenwinkeln und falschen Teilmodenverhältnissen führen können. Dieses rein numerische Problem ist vermutlich mit einer Energieübertragung in den Transformationsberechnungen zu erklären. Um diese parasitären Einflüsse zu minimieren, wird ein zusätzlicher Dämpfungsalgorithmus in die Analyseroutinen implementiert. Es wird ein Schwellenwert berechnet, der sich als Perzentil der dominanten Modenamplitude ergibt. Nach diesem wird anschließend die Datenmatrix durchsucht und sämtliche Einträge unterhalb dieses Schwellenwertes gelöscht. Ein weiterer Effekt sind fiktive Imaginäranteile, die zu unphysikalischen Oszillationen der Modenamplituden führen können. Auch für diese wird eine Dämpfungsfunktion implementiert, die aktiviert ist, sobald

$$\frac{|\Im(\hat{A})|}{\|\hat{A}\|} < \frac{\|\hat{A}\|}{200} \Rightarrow D \quad (6.30)$$

gilt. Diese Schwellenwertgröße hat sich als besonders effektiv erwiesen, ohne jedoch die Modenstrukturen zu verfälschen.

6.5 Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten

In Abschnitt 4.1 ist bereits die theoretische Bedeutung und Interpretation der modalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten diskutiert worden. Auf Basis dieser Erkenntnisse wird in diesem Abschnitt das verwendete Verfahren zur Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten aus den experimentell ermittelten Schallfeldern beschrieben. Gerade vor dem Hintergrund, dass bei überlagerten Moden keine analytisch geschlossene Lösung zur Bestimmung der

Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten existiert, ist deren Ermittlung anhand der gemessenen Schalldruckdaten wichtig.

Das Analyseverfahren ist Teil der vorgestellten Auswertungskette. So wird zunächst aus den azimutalen Schalldruckinformationen die dominante Modenkomposition bestimmt, mit Hilfe derer anschließend das räumliche Schallfeld simulativ bestimmt wird. Aus den zeitlichen x - θ -Verläufen können dann die Wellenfrontwinkel χ und die Ausbreitungsgeschwindigkeiten ermittelt werden. Dazu werden vorab zwei beliebige Zeitpunkte t_0 und t_1 definiert, an welchen die Felder ausgewertet werden sollen. Im Rahmen einer Sensitivitätsstudie stellt sich heraus, dass der resultierende Zeitversatz $\delta\tau = t_1 - t_0$ in etwa der Dauer einer halben bis zu einer ganzen Periode des Eingangssignals entsprechen sollte, um möglichst genaue Ergebnisse zu erhalten. Würde das Zeitintervall zu klein gewählt werden, so lägen die zur Auswertung verwendeten Positionen der Wellenfronten zu eng beieinander und auftretende Varianzen würden sich überproportional stark auf den Fehler des Ergebnisses auswirken. Ein zu groß gewähltes Zeitintervall würde zu einer Mittlung der Geschwindigkeit über sehr viele Perioden führen, sodass keine Aussage über die eigentliche Momentangeschwindigkeit getroffen werden kann. Da die verwendeten Daten aus der Schallfeldsimulation stammen, liegt, obwohl die Messdaten einzig an einer einzelnen axialen Position aufgenommen werden, ein vollständig bestimmtes Schallfeld in der x - θ -Ebene vor. Aus diesem wird anschließend die Lage der Wellenfronten (Orte gleicher Phase) für die beiden Zeitpunkte t_0 und t_1 bestimmt. Mit Hilfe einer Gradientenbildung werden nach

$$\mathbf{G}_{0,1}(x, \theta, t_{0,1}) = \left| \frac{\partial p'_{ges}(x, R_a, \theta, t_{0,1})}{\partial x_i} \right| \quad (6.31)$$

die Gradientenmatrizen $\mathbf{G}_0(x, \theta, t_0)$ und $\mathbf{G}_1(x, \theta, t_1)$ aus der räumlichen Schalldruckverteilung für beide Zeitpunkte bestimmt. Die Matrizen werden anschließend durchsucht und alle Werte, die unterhalb eines zu definierenden Schwellenwertes S_w liegen $\mathbf{G}_{0,1} \leq S_w$, werden in eine neue Karte übertragen. Diese enthält nun einzig die Verläufe der Schalldruckmaxima und -minima und somit die Positionen der Wellenfronten in der x - θ -Ebene. Abbildung 6.13 (links) zeigt die resultierende Schallfeldstruktur samt Wellenfrontlagen einer überlagerten $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode.

Abbildung 6.13 (rechts) zeigt hingegen die nach Gl.(6.31) berechneten und in die neue Karte übertragenen Positionen der Wellenfronten. Über die Gradientenmatrizen $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_0$ wird zunächst die räumliche Verschiebung in Normalenrichtung ds berechnet, aus der sich mit Hilfe des Wellenfrontwinkels χ die axiale Verschiebung der Wellenfront bestimmen lässt. Mit dem bekannten Zeitversatz $\delta\tau$ kann so direkt auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit geschlossen werden. Für die Ermittlung der Wellenfrontverschiebung steht zum einen eine manuelle Methode zur Verfügung, bei der mit Hilfe der Cursor-Positionen die jeweiligen Koordinaten ausgelesen und anschließend verrechnet werden. Zum anderen können die Verschiebungen automatisch mit Korrelationsverfahren bestimmt werden. Ein überschlägiger Vergleich beider Verfahren wird für jede Auswertung empfohlen, da die Korrelationsmethoden bei sehr komplexen Schalldruckfeldern fehlerhafte Verschiebungen vorhersagen können.

Bei überlagerten Modenfeldern muss die Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit stets in Ausbreitungsrichtung erfolgen. Wie in Abb. 6.14 (links) gezeigt ist, würde die Auswertung an einer festen Umfangsposition zu nicht reproduzierbaren Druckverläufen

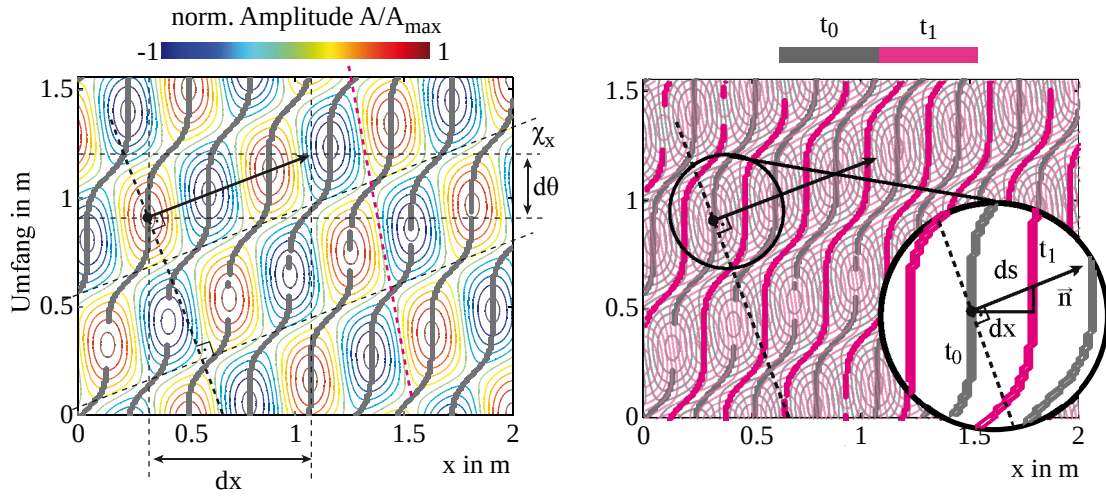


Abbildung 6.13: (links) Schallfeldstruktur in der x - θ -Ebene für eine überlagerte $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode und die mit dem Gradientenverfahren bestimmten Wellenfronten (grau). (rechts) Geometrische Beziehungen zur Bestimmung des zeitlichen Wellenfrontversatzes mit Hilfe dessen die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt wird. Wellenfronten zum Zeitpunkt t_0 in grau; Wellenfronten zum Zeitpunkt t_1 in Magenta.

zwischen den einzelnen Zeitschritten führen. Eine exakte Zuordnung der Wellenfronten ist dann nicht mehr möglich und somit auch keine eindeutige Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Da die Auswertung in den Analyseroutinen automatisiert ist, wird ein spezielles Permutationsverfahren eingesetzt, welches die Schallfeldstruktur um den zuvor bestimmten Ausbreitungswinkel dreht. Somit liegt eine sich in axialer Richtung ausbreitende Struktur vor, welche sehr einfach analysiert werden kann. Das Ergebnis ist in Abb. 6.14 (rechts) dargestellt. Programmiertechnisch wird diese Datenverschiebung über eine Permutation der einzelnen Datenarrayelemente bewerkstelligt, die in Abhängigkeit von dem axialen Index spaltenweise die Arrayeinträge in Umfangsrichtung verschiebt. Es können jedoch nur Schrittweiten von der Größenordnung eines einzelnen Arrayelements des azimutalen Indexes realisiert werden. Um eine möglichst genaue Verschiebung zu erzielen, wird der Datensatz zunächst zerlegt und auf ein, in azimuthaler Richtung verfeinertes, Gitter übertragen. Dazu wird eine zweidimensionale kubische Spline-Interpolation verwendet. Anschließend wird ein Versatzvektor auf Basis des zuvor bestimmten Wellenfrontwinkels berechnet. Die eigentliche Permutation wird über einen Algorithmus gesteuert, der die Einträge des Datenarrays für jede Spalte um den berechneten Versatz verschiebt. Dieser Vorgang wird für jede axiale Position durchgeführt, so dass anschließend die modifizierten Daten in eine neue Karte übertragen werden können (vgl. Abb. 6.14). Aus diesen Datensätzen können eindeutig die Wellenfrontverschiebungen zwischen den beiden Zeitpunkten t_0 und t_1 berechnet werden.

Entscheidend ist, dass die so ermittelten Geschwindigkeiten den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellenfronten selbst entsprechen und nicht deren Axialanteile. Diese müssen anschließend mit Hilfe des Ausbreitungswinkels bestimmt werden. Gemäß der Überlegungen in Abschnitt 4.1.3 handelt es sich bei dieser Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht mehr, wie bei Einzelmoden, um die Phasengeschwindigkeit, sondern vielmehr um eine kombinierte Gruppengeschwindigkeit $c_{gr,komb}$. Deren axiale Komponente ergibt sich nach $c_{gr,komb,x} = c_{gr,komb} \cos \alpha$.

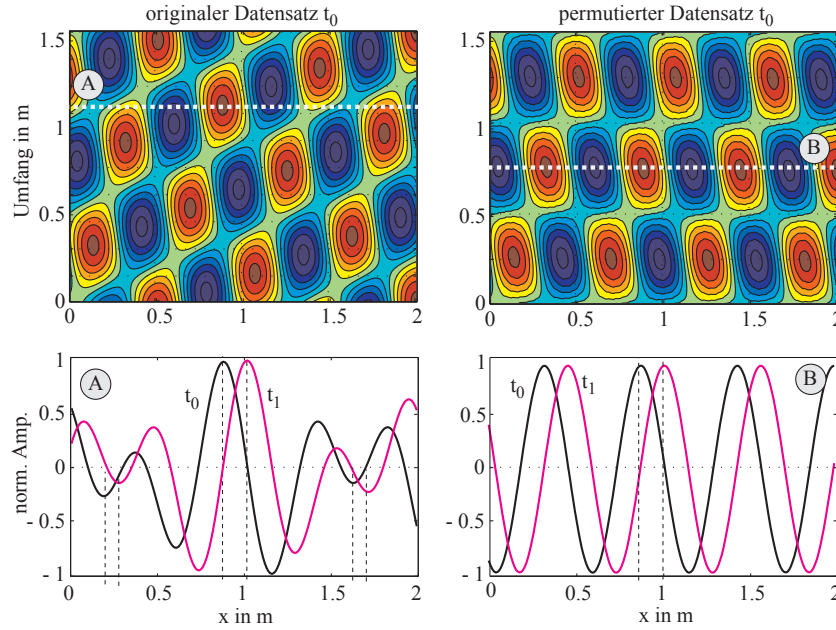


Abbildung 6.14: Prinzip des Permutationsverfahrens zur Drehung der Schallfeldstruktur. (links) Originaler Datensatz der x - θ -Schalldruckverteilung am Referenzzeitpunkt t_0 . Unten sind die Verläufe der norm. Amplitude für eine azimuthale Position für t_0 und t_1 aufgetragen, aus denen sich die Verschiebung berechnen lässt. (rechts) Identisches Vorgehen mit permutierten Datensatz.

Sämtliche Prozessschritte werden für mehrere Zeitintervalle der Messzeit durchgeführt, um im Mittel eine möglichst repräsentative Aussage treffen zu können.

6.6 Verfahren zur Synchronisation und Rekonstruktion der Messsignale

Wie in Abschnitt 2.2 bereits beschrieben ist, wird das Schallfeld am Turbinenausstritt (Segment C - vgl. Abb. 2.4) mit Hilfe eines Mikrofonträgerrings peripher abgetastet. Aus den an jeder azimuthalen Anfahrposition (Messzyklus) aufgenommenen Schalldrücken muss das Gesamtschallfeld rekonstruiert werden. Dies führt zu besonderen Herausforderungen. So müssen zum einen sowohl die strömungsmechanischen und akustischen Randbedingungen als auch die Betriebsparameter der Maschine über dem gesamten Messzeitraum konstant sein bzw. innerhalb eines bestimmten Toleranzbereichs liegen. Hierzu sei z.B. auf Laguna et al. (2013) verwiesen. Zum anderen müssen die Zeitsignale zwischen den Umfangspositionen stets eine definierte Phasenlage zueinander aufweisen. Obwohl der eigentliche Messvorgang automatisiert und stets gleiche Verweil- und Fahrtzeiten der Mikrofontraverse eingestellt sind, wird sich auf Grund vorherrschender Toleranzen immer ein Zeitversatz τ_V zwischen den Aufnahmestartpunkten einer jeden neu angefahrenen Umfangsposition einstellen. Somit müssen für eine korrekte Rekonstruktion des Umfangsschallfeldes die jeweiligen Zeitreihen zeitlich korrigiert und aneinander angepasst werden.

Die Schwierigkeit bei der Rekonstruktion ist, die korrekte Bestimmung eines Zeitversatz-

vektors $\vec{\tau}_V = [\tau_{V,1}, \dots, \tau_{V,i}]^T$ mit dem die einzelnen Zeitreihen eines jeden Messintervalls so verrechnet werden müssen, dass sie die richtige Phasenlage zwischen den einzelnen Umfangspositionen aufweisen. Da die periphere Traverse des Segments C aus konstruktiven Gründen nicht über ein feststehendes Referenzmikrofon verfügt, auf dessen Messwerte alle weiteren Zeitreihen bezogen werden können, werden für die Rekonstruktion zwei unterschiedliche Synchronisationsmethoden entwickelt. Zum einen wird ein Rekonstruktionsverfahren auf Basis des Drehzahlsignals des Turbinenrotors entworfen. Zum anderen soll eine Synchronisation unter Zuhilfenahme von Korrelationen der Schallfeldstrukturen vorgestellt werden. Letztere eignet sich insbesondere für nicht-rotorsynchrone Anregungen, wie etwa die synthetische Schallfeldanregung mit dem Schallgenerator. Beiden Verfahren gemein ist, dass die Phasenlage der Zeitreihen sowohl von der Modenstruktur als auch von den strömungsmechanischen Randbedingungen sowie von der betrachteten Frequenz abhängt. Letzteres erzwingt die Analyse im Frequenzbereich, was bedeutet, dass die Rekonstruktion immer nur für eine definierte Frequenz erfolgt. Der Zeitversatzvektor $\vec{\tau}_V(f)$ ist dementsprechend frequenzabhängig.

6.6.1 Rotorbasierte Synchronisation

Eine oftmals angewandte Methode zur Korrektur zeitversetzter Umfangssignale ist die Synchronisation der Messreihen mit der Rotordrehzahl. Dazu ist auf der Abtriebswelle der Turbine eine Lochscheibe angebracht. Mit einem Hall-Sensor wird das sich bei Drehung ergebende Lochmuster detektiert (vgl. dazu Abschnitt 2.3.1).

Aus diesem wird ein TTL-Signal pro Umdrehung erstellt (TTL - engl.: Transistor-Transistor Logic).

Der entwickelte Auswertalgorithmus liest zunächst die mit den Messdaten synchron abgespeicherten TTL-Signale ein. Mit Hilfe eines Gradientenverfahrens werden in jeder i -ten Messreihe ab einem festen Schwellenwert die aufsteigenden Flanken (Rising Edge) der TTL-Rechtecksignale gesucht. Da diese nicht einem diskreten Zeitimpuls entsprechen, sondern sich vielmehr über mehrere Samples erstrecken, werden die Rechtecksignale durch Boolesche Elemente ersetzt und als Impuls der Amplitude 1 mit einer Breite von einem Sample ersetzt. So ist gewährleistet, dass immer die Zeitpunkte im Maximum der ansteigenden Flanke als

Trigger-Signal verwendet werden. Sind die Pulszeiten bekannt, können die Pulsanzahl pro Messzyklus und die jeweiligen Periodenzeiten bestimmt werden, die auf Grund von Drehzahlschwankungen variieren.

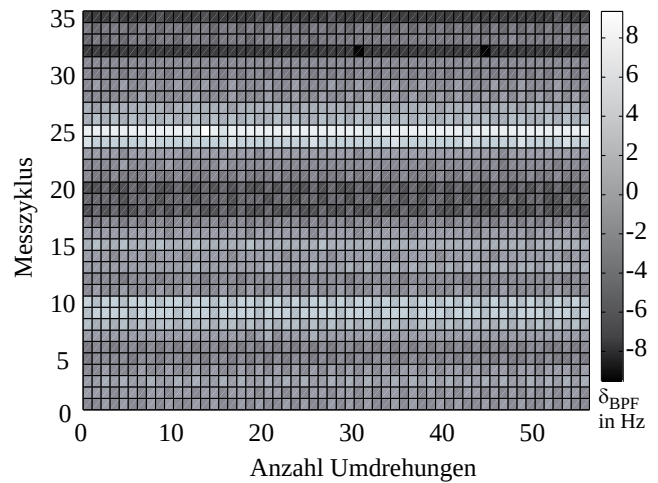


Abbildung 6.15: Abweichung der BPF von der über alle Rotorumdrehungen und Messzyklen gemittelten BPF δ_{BPF} . Beispiel aus den Turbinenmessungen für $n = 3500 \text{ min}^{-1}$

Der Algorithmus sieht zwei mögliche Anwendungen vor. Zum einen kann eine feste Frequenz für die Signalfilterung vorgegeben werden. Zum anderen lassen sich die Periodenabhängigen und BPFs ermitteln und als Filterfrequenz nutzen. Da dieses Rekonstruktionsverfahren auf der Synchronisation der Messreihen mit der Rotordrehzahl basiert, wird die Analyse einzig Aufschluss über Rotor-synchrone Anregungsmechanismen geben können. Dies sind z.B. Rotor-Stator-Interaktionen, die zu dominanten tonalen Spektralkomponenten führen. Die Anregungsfrequenzen $f_{\text{Ex},i}$ entsprechen dabei der BPF und deren Höherharmonischen, welche aufgrund der Drehzahlschwankungen zwischen den Messzyklen variieren. Abbildung 6.15 stellt exemplarisch die sich über einer kompletten Messung einstellenden Abweichungen der BPF ($\delta_{\text{BPF}} = \text{BPF}_i - \overline{\text{BPF}}$) zwischen den einzelnen Messzyklen dar. So kann im Verlauf einer Messung die BPF bis zu 10 Hz variieren. Da die eingesetzten Bandfilter sehr schmal sein müssen, gilt es, jede Messreihe individuell auf ihre aktuelle BPF zu filtern. Dies erhöht den Rechenaufwand drastisch, denn jedes Filter muss neu parametrisiert werden. Die gefilterten Signale der i -Messzyklen werden für die ausgewählte Periode in einem Datenarray zusammengefasst. Um eine einheitliche Länge der Datenarrays zu erhalten, werden die Messreihen auf die kürzeste Periodendauer aller i -Messzyklen gekürzt. Bei den hier auftretenden niedrigen Drehzahlen/ Drehfrequenzen ($n < 8000 \text{ min}^{-1}$) hat dies keinen Einfluss, denn die Drehfrequenz ist um ein Vielfaches kleiner als die betrachtete dominante Frequenz der Schallfelder. Die gekürzte Messreihe wird folglich immer über genügend Perioden für die akustische Analyse verfügen.

Wie die Untersuchungen zeigen, ist dieses Rotor-gekoppelte Synchronisationsverfahren nicht für Rotor-asynchrone Anregungsmechanismen geeignet. Im nachfolgenden Abschnitt wird daher ein im Rahmen dieser Arbeit entwickelter Ansatz vorgestellt, der auf Basis von Korrelationsverfahren arbeitet.

6.6.2 Korrelationsbasierte Synchronisation

Die Idee für die Synchronisation der Messzyklen und damit der Rekonstruktion der Schallfelder im Segment C der Versuchsturbine (vgl. Abb. 2.4) ist es, die zu jedem Messzyklus korrespondierenden Umfangsschallfelder $p'_{\text{ref}}(t, \theta)$ in Segment B auszuwerten und abzugleichen. Da dort, im Gegensatz zu Segment C , stets feste Umfangsmesspositionen vorliegen, lassen sich für jeden Messzyklus, also jede Anfahrposition des Mikrofonträgerrings, die Schalldruckverteilungen einfach bestimmen.

Diese Schalldruckmuster unterscheiden sich zwischen den einzelnen Messzyklen lediglich in ihren Phasen. Die dem Modell zu Grunde liegende Annahme ist, dass die Struktur des azimuthalen Schalldruckfeldes bei nahezu gleichbleibenden Rand- und Maschinenbedingungen bei einer betrachteten Frequenz zwischen den jeweiligen Messzyklen jedoch identisch ist. Durch den Einsatz einer Betriebspunktregelung werden die Maschinenparameter nahezu konstant gehalten, was diese Annahme rechtfertigt. Dennoch kann es gerade bei längeren Messzeiten zu geringen Betriebspunktschwankungen kommen. Durch den Abgleich nicht einer einzigen Umfangsdruckverteilung, sondern des sich über viele Zeitpunkte einstellenden Schalldruckmusters, wird die Anfälligkeit der Auswertung gegen mögliche Abweichungen, statistisch betrachtet, verringert. Somit sind gewisse Abweichungen in der Schalldruckstruktur zwischen den einzelnen Messintervallen bzw. Messzyklen bei Anwendung

6.6 Verfahren zur Synchronisation und Rekonstruktion der Messsignale

dieser Methode tolerabel. Wird in Segment B nun eine Schalldruckverteilung als Referenz genommen, lässt sich berechnen, um wie viele Zeitschritte die Messintervalle der übrigen Messzyklen verschoben werden müssen, um das gleiche Umfangssignal bzw. das gleiche Schalldruckmuster zu erhalten. Der sich daraus ergebende Phasenversatz muss auch für die Signale des Segments C gelten, da diese synchron aufgenommen werden. Zuvor müssen

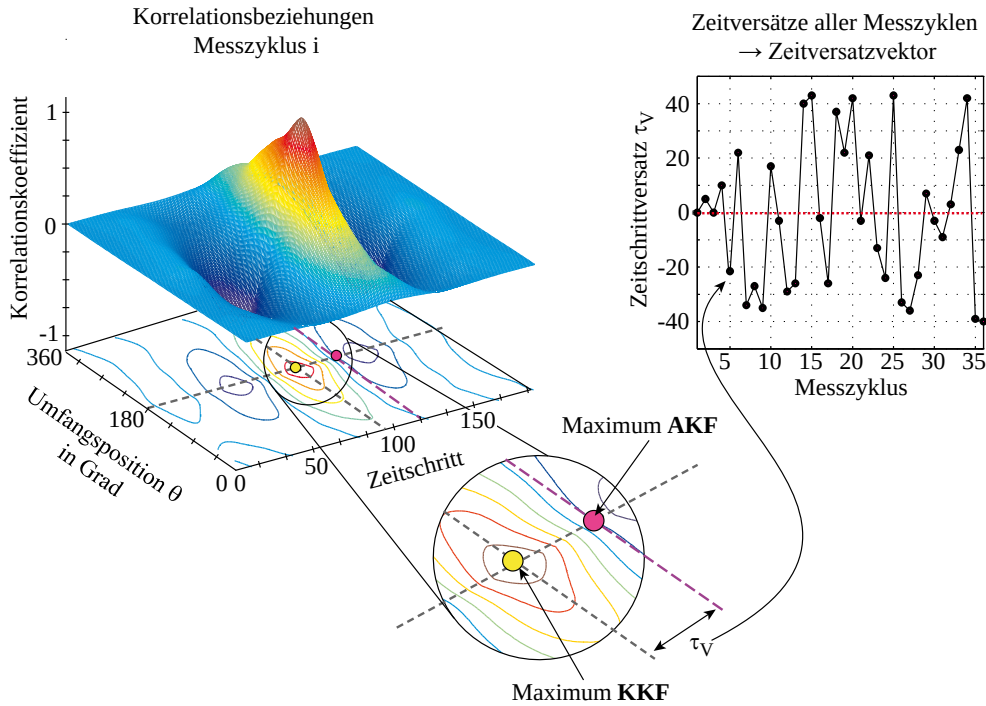


Abbildung 6.16: Darstellung der korrelationsbasierten Auswertung eines exemplarisch ausgewählten Druck-Zeitverlaufs des Messintervalls i des Segments B .

allerdings die Rohdaten auf die zu untersuchende Frequenz f_{Ex} gefiltert werden. Das Band sollte dabei sehr schmal sein, denn eine zentrale Annahme der Auswertung ist die Analyse für eine diskrete Frequenz, bei der das Schallfeld oszilliert.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Methode nutzt zum Zeitreihenabgleich statistische Korrelationsverfahren. Zunächst wird für jeden Messzyklus eine azimutale Schallfeldrekonstruktion des Segment B über eine Zeitdauer von $t_S > 2/f_{\text{Ex}}$ (Messintervall) durchgeführt. Es liegen somit bei der betrachteten Frequenz f_{Ex} im Regelfall $i = 36$ (bei 36 Anfahrpositionen des Mikrofonrings) ausgewertete Messintervalle der Umfangsstruktur vor. Für die Synchronisation werden die Korrelationskoeffizienten der einzelnen Messintervalle verglichen. Um einen definierten Bezugszustand zu erzeugen, wird die Zeitreihe des Referenzintervalls $p'_{\text{ref}}(t, \theta)$ zunächst autokorreliert. Das sich ergebende Maximum des autokorrelierten Signals wird für die spätere Analyse als charakteristischer Bezugspunkt genutzt. Anschließend wird das Referenzintervall mit allen übrigen Messintervallen kreuzkorreliert. Die Autokorrelationsfunktion (AKF) sowie die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

6 Analyseverfahren

ergeben sich nach Kammeyer und Kroschel (2006) zu

$$\begin{aligned} \text{AKF}_{\text{ref},i}(\tau, \theta) &\equiv (p'_{\text{ref}} \star p'_{\text{ref}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p'_{\text{ref}}(t, \theta) p'_{\text{ref}}(t + \tau, \theta) dt \\ \text{und} \\ \text{KKF}_{\text{ref},i}(\tau, \theta) &\equiv (p'_{\text{ref}} \star p'_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} p'_{\text{ref}}(t, \theta) p'_i(t + \tau, \theta) dt \quad . \end{aligned} \quad (6.32)$$

Für die eingesetzten diskreten Korrelationsanweisungen gilt dann mit dem konjugiert-komplexen Schalldruck p_{ref}^*

$$\begin{aligned} \text{AKF}_{\text{ref},i}(\tau, \theta) &\equiv (p'_{\text{ref}} \star p_{\text{ref}}) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} p_{\text{ref}}^*(t, \theta) p'_{\text{ref}}(t + \tau, \theta) \\ \text{und} \\ \text{KKF}_{\text{ref},i}(\tau, \theta) &\equiv (p'_{\text{ref}} \star p'_i) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} p_{\text{ref}}^*(t, \theta) p'_i(t + \tau, \theta) \quad . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Mit Hilfe der Kreuzkorrelation wird folglich die Struktur eines jeden Messintervalls innerhalb des Referenzmusters gesucht. Durch den Vergleich der beiden Ergebnisse lässt sich anschließend der Zeitversatz des i -ten Messintervalls zum Referenzintervall bestimmen, indem die zeitliche Verschiebung $\tau_{V,i} = \text{AKF}(t_S, \theta)_{\text{max},i} - \text{KKF}(t_S, \theta)_{\text{max},i}$ zwischen dem Maximum des Autokorrelationskoeffizientens und den jeweiligen Maxima der Kreuzkorrelationskoeffizienten ermittelt wird. Abbildung 6.16 zeigt exemplarisch das Vorgehen anhand der Verteilung des Kreuzkorrelationskoeffizienten für ein exemplarisch ausgewähltes Messintervall eines Messzyklus der Turbinenversuche (1 stufig, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$, $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, Anregungsfrequenz $f_{\text{Ex}} = 680 \text{ Hz}$). Die Verschiebung zwischen dem KKF- und dem AKF-Maximum entspricht, wie oben beschrieben, dem Zeitversatz τ_V des jeweiligen Messintervalls in Bezug auf die Referenz. Um diesen Wert muss das Messintervall verschoben werden. Nach dem gleichen Prinzip ergeben sich für alle weiteren Messintervalle die entsprechenden Zeitversätze bzw. der Zeitversatzvektor $\vec{\tau}_V$, wie in Abb. 6.16 dargestellt ist. Die um $\vec{\tau}_V$ zeitlich verschobenen Schalldruckstrukturen sind bei gleichem Betriebspunkt in Abb. 6.17 exemplarisch für drei verschiedene Messzyklen Nr. 6, 14 und 33 im Vergleich zu deren unkorrigierten Verläufen dargestellt. Obwohl die modale Grundstruktur identisch ist, sind leichte Abweichungen in deren Form zwischen den einzelnen Schalldruckverläufen zu erkennen. Dies ist auf geringfügig, über die gesamte Messreihe variierende Betriebsbedingungen, in Drehzahl und Massenstrom zurückzuführen.

Für das betrachtete Beispiel ist in Abb. 6.18 ein vollständig rekonstruiertes Schallsignal des Segments C im Vergleich zu dessen Rohsignal dargestellt. Dabei wird der in diesem Abschnitt beschriebene Rekonstruktionsalgorithmus auf Basis der zweidimensionalen Korrelationsmethodik verwendet.

Wie in Abb. 6.18 (links) gezeigt ist, lässt sich mit Hilfe des entwickelten Verfahrens die Schalldruckstruktur $p'_{\text{ref}}(t, \theta)$ in Segment C vollständig rekonstruieren. In dem betrachteten Beispiel erfolgt die Analyse bei der Anregungsfrequenz $f_{\text{Ex}} = 680 \text{ Hz}$. Bei dieser niedrigen

6.6 Verfahren zur Synchronisation und Rekonstruktion der Messsignale

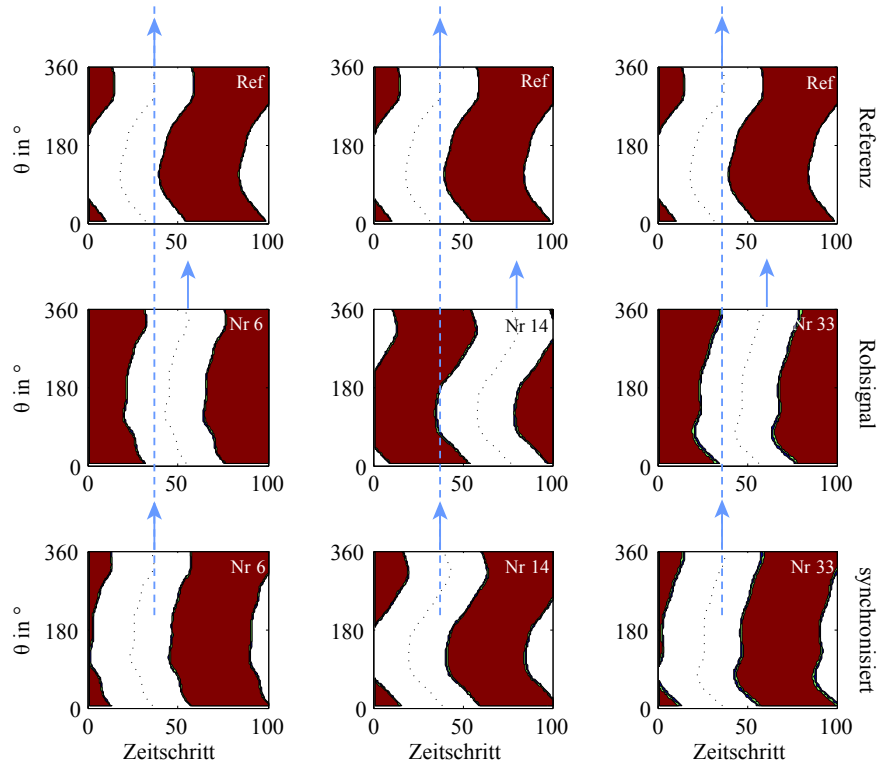


Abbildung 6.17: Vergleich der Schalldruckstrukturen des Segments B für die Messzyklen der Referenz, Nr. 6, Nr. 14 und Nr. 33. (oben) Zeitliche Verteilung des Referenzschallfeldes. (Mitte) Verläufe der unsynchronisierten Schalldruckverteilungen der Messzyklen Nr. 6, Nr. 14 und Nr. 33. (unten) Mit Hilfe der Korrelationsmethoden zeitlich synchronisierte Verläufe der Schalldruckverteilungen

Frequenz sind nur die Grundmode sowie die erste und zweite Azimutalmode ausbreitungsfähig. Exakt diese Moden werden für das korrigierte Schallfeld als dominant berechnet. Zum Vergleich ist in Abb. 6.18 (rechts) die aus den nicht-synchronisierten Messdaten bestimmte Schalldruckstruktur dargestellt. Wie sich sehr deutlich zeigt, ist ohne die Synchronisation der Messzyklen eine korrekte Rekonstruktion des Schallfeldes nicht möglich. Zwar sind auch in diesem Fall die zu erwartenden $mn_{[0,1,2;0]}$ Moden in der Schalldruckstruktur enthalten, doch werden sowohl deren Verteilung als auch deren Amplituden falsch vorhergesagt. Aus dem nicht-synchronisierten Datensatz werden auch weit höhere Moden ($m > 3$) dominant berechnet, was auf Grund der Cut-On Beziehungen nicht korrekt sein kann. Dabei können in diesem Fall modale Einflüsse des Rotornahfeldes ausgeschlossen werden, da das Rohsignal auf einen Frequenzbereich, der weit unter den Rotor-Harmonischen liegt, gefiltert ist.

Zusammenfassend gilt: Mit Hilfe des in dieser Arbeit entwickelten korrelationsbasierten Synchronisationsverfahren können die Messzyklen erfolgreich synchronisiert und das Schallfeld in Segment C kann korrekt rekonstruiert werden. In Abschnitt 8.1.3 wird das Verfahren zur Auswertung der Turbinenversuche eingesetzt. Ergänzend wird in Anhang D.3 ein zusätzlich entwickeltes Verfahren zur Datenqualifizierung vorgestellt, um ein verbessertes Rekonstruktionsergebnis zu erhalten.

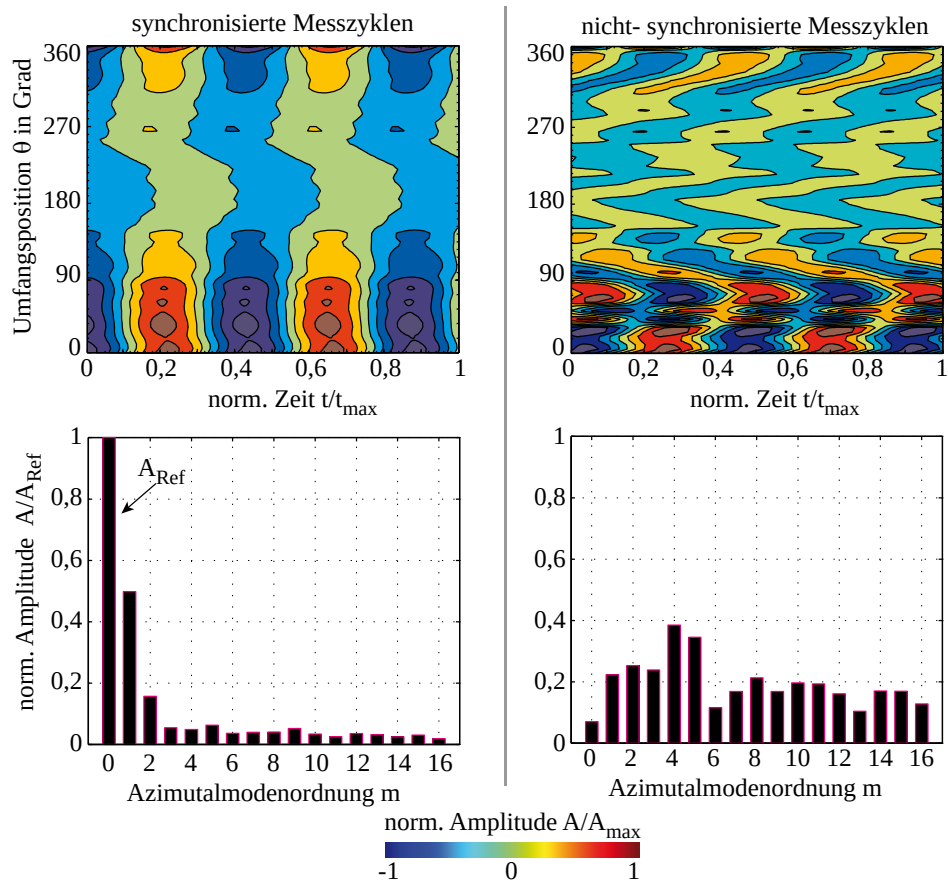


Abbildung 6.18: (oben) Vergleich des zeitlichen Verlaufs der azimuthalen Schallfeldstruktur in Segment C. (links) Synchronisierte Signale, (rechts) nicht-synchronisierte Signale. (unten) Resultierende Modenordnungen - zeitlich gemittelt.

7 Vorversuche und experimentelle Validierung

In diesem Kapitel werden die experimentellen Validierungen der Analysemethoden und des Schalltransportmodells vorgestellt. Die Versuche werden im aeroakustischen Windkanal (AWT) durchgeführt. Dieser eignet sich gut zur experimentellen Überprüfung der theoretischen Modelle, da der Prüfstand weniger komplex ist als die Luftturbine und über bekannte Randbedingungen verfügt.

Das Ziel dieser Untersuchungen ist es die entwickelte hybride Analysemethode vor Anwendung in den Turbinenmessungen experimentell zu verifizieren und deren Einsatzmöglichkeiten zu demonstrieren. Die gewählten Beispiele entsprechen typischen Schallfeldzusammensetzungen, wie sie auch in den Turbinenmessungen auftreten. So werden neben der klassischen Spinning Mode Anregung auch stehende bzw. partiell stehende Schallfelder sowie Schallfelder, bestehend aus mehreren überlagerten Moden, untersucht. Die gewonnenen Erkenntnisse dienen zudem der verbesserten Interpretation der Turbinenschallfelder (vgl. Abschnitt 8.1.1).

Im nachfolgenden Abschnitt 7.1 wird zunächst die der Validierung zu Grunde liegende Strategie vorgestellt. Anschließend wird in Abschnitt 7.2 an einem Beispiel exemplarisch die Validierung der Prozesskette für die Analyse der azimuthalen Schallfeldstruktur beschrieben. Ergänzend dazu sind in Anhang E.2 weitere Beispiele aufgeführt. Nachfolgend werden in Abschnitt 7.3 die Ergebnisse zur Überprüfung der axialen Schallfeldausbreitung diskutiert, während in Abschnitt 7.4 auf die Untersuchung der radialen Schallfeldstruktur eingegangen wird.

7.1 Strategie der experimentellen Validierung

Im Rahmen der Entwicklungsarbeiten werden zunächst mit Hilfe mathematisch bekannter Referenzdaten sämtliche Algorithmen der Analyseverfahren überprüft. Dies bietet den Vorteil exakte Erwartungswerte mit den Programmausgaben vergleichen zu können. Ähnlich verhält es sich für das Schalltransportmodell und die Kopplung mit den Analyseprogrammen. Auch hier werden im Rahmen der Entwicklung und der Programmierung zunächst rein synthetische Referenzdatensätze, deren Zustand zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort in der Domäne bekannt ist, zur Überprüfung der Modelle verwendet. So lassen sich sehr einfach etwaige Fehler identifizieren und beheben. Die Entwicklungsspezifischen Verifikationen werden im Rahmen dieser Arbeit nicht explizit vorgestellt, denn die finalen Modelle sind dahingehend entwickelt, dass sie mathematisch korrekt die Ausgabeparameter bestimmen.

7 Vorversuche und experimentelle Validierung

In diesem Kapitel soll vielmehr die Validierung der gesamten Prozesskette, bestehend aus den Analyseverfahren und dem Schalltransportmodell, mit Hilfe experimenteller Datensätze erfolgen. Dazu ist in Abb. E.1 das prinzipielle Vorgehen der Validierungsstrategie dargestellt, die sich in fünf Schritte unterteilen lässt:

1. Anregung der Schallfelder mit Hilfe des Schallgenerators und Aufnahme der Schalldrücke in der Messstrecke des AWT.
2. Auswertung der an den azimuthalen Messpositionen aufgenommenen Schalldrücke mit den in Kapitel 6 beschriebenen Analyseverfahren und Bestimmung der in Tab. 7.1 aufgeführten charakteristischen Schallfeldparameter.

Tabelle 7.1: Übersicht über die charakteristischen Schallfeldparameter. *TM*: Eingabevariable für Transportmodell; *VT*: Validierungsvariable

Variable	Bedeutung	TM	VT
Modenamplitude A	Wert der komplexen Modenamplituden.	x	x
Teilmodenverhältnis ϵ	Verhältnis der Wellenzusammensetzung einer Azimutalmode. Definiert den Zustand der Mode (drehend, partiell-stehend, stehend).	x	x
azimutaler Phasenversatz $\delta\phi_\theta$	Gibt die Verschiebung der modalen Teilmoden zueinander an.	x	x
zeitlicher Phasenversatz $\delta\phi_t$	Gibt die zeitliche Verschiebung einer Mode in Bezug auf die Gesamtkomposition an.	x	x
Gradient des Phasenversatzes $d\delta\phi/dt$	Bestimmung der Modendrehrichtung.	x	x
globale Ortskurve	Gibt einen Überblick der gesamten Modenkomposition an.		x
modale Ortskurve	Gibt einen Überblick über den Modenzustand an.		x

Dazu werden zunächst aus den diskreten Messwerten die komplexen Amplituden der Azimutalmoden bestimmt. Es erfolgt somit eine Zerlegung des Zeitdatensatzes in seine modalen Bestandteile. Aus diesen wird für jede berücksichtigte Mode mit Hilfe des in Abschnitt 6.4 vorgestellten Faktorisierungsverfahrens das Teilmodenverhältniss ϵ , der azimutale Phasenwinkel ϕ_θ und schließlich die Ortskurve bestimmt. Des Weiteren werden die zeitlichen Phaseninformationen gemäß Abschnitt 6.3.1 und Abschnitt 6.3.2 ermittelt. Für jeden Zeitschritt wird sowohl der Phasenversatz zwischen Real- und Imaginärteil als auch zwischen Absolut- und Real bzw. zwischen Absolut- und Imaginärteil berechnet.

3. Schallfeldberechnung mit dem Schalltransportmodell: Das Schallfeld wird dabei nur auf Basis der, durch die modale Reduktion des Messdatensatzes bestimmten charakteristischen Schallfeldparameter berechnet. Die als Eingabeparameter genutzten Größen sind in Tab. 7.1 aufgeführt. Zusammen mit den geometrischen Größen des Kanals sowie den Strömungs- und Temperaturinformationen wird daraus das räumliche

Schallfeld berechnet. In die Domäne des Transportmodells sind zusätzlich virtuelle Mikrofone implementiert mit Hilfe derer die berechneten Schalldrücke analog zum Experiment aufgenommen werden.

4. Auswertung der in der Schallfeldberechnung aufgezeichneten Schalldrücke mit Hilfe der Analysemethoden. Somit werden analog zum Experiment die charakteristischen Schallfeldparameter des berechneten Schallfelds bestimmt.
5. Vergleich der experimentell ermittelten und der berechneten Schallfelddaten sowie der charakteristischen Schallfeldparameter. So lässt sich identifizieren, inwieweit das mit dem Transportmodell berechnete Schallfeld mit der experimentellen Referenz übereinstimmt.

Für einige Validierungsfälle werden in den Experimenten zusätzlich Schalldrücke in axialer und radialer Richtung aufgenommen. Diese Messergebnisse werden ebenfalls mit den berechneten Daten verglichen, was eine weitere Überprüfung der Ergebnisse des Transportmodells ermöglicht.

Konzept der Schallfeldanregung: Für die ersten Validierungsmessungen werden zunächst nur einfache Schallfelder, bestehend aus einer einzelnen Spinning Mode oder einer stehenden bzw. partiell stehenden Mode, angeregt. Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben ist, werden dazu die Lautsprechereinheiten des Schallgenerators in einer ganz spezifischen Reihenfolge mit einem definierten Phasenwinkel angesteuert. Das Vorgehen der gezielten Ansteuerung sowie die Fähigkeit des Schallgenerators spezifische Modenstrukturen anzuregen, ist vorab im Rahmen von Vorversuchen untersucht worden (vgl. Abschnitt 2.3 oder Bartelt et al. (2013)).

Die Schalldruckstruktur solch gezielt angeregter Felder ist in der gesamten Domäne bekannt. Dies erleichtert in einem ersten Schritt die Auswertung und zeigt, ob die Prozesskette zu den erwarteten Ergebnissen führt.

Für das hier gewählte Validierungskonzept ist die genaue Kenntnis des Modenfelds zwar eine Hilfe, jedoch nicht zwingend notwendig. Der Grund ist, dass der entwickelte Analyseprozess nicht darauf abzielt, ein bereits bekanntes Modenfeld zu reproduzieren, sondern eine unbekannte Schallfeldstruktur in einer Messebene zu analysieren, die charakteristischen Schallfeldparameter zu bestimmen und anschließend auf Basis dieser Parameter das vorhandene Modenfeld zu rekonstruieren. Von daher kann mit dem Schallgenerator theoretisch eine beliebige Schallfeldstruktur angeregt werden, die es stromab in der Messebene zu detektieren und zu analysieren gilt.

Die Validierung des Schalltransportmodells ergibt sich letztendlich aus dem Vergleich der Schallfeldstrukturen und der charakteristischen Schallfeldparameter in der Messebene von Experiment und Berechnung.

Somit lassen sich auch komplexere Schallfelder, die aus mehreren überlagerten Moden zusammengesetzt sind, anregen, deren Ausbreitungsverhalten a priori nicht bekannt ist. Dazu wird z.B. der Schallgenerator Phasen-gleich in der Nähe der Cut-On Frequenz einer interessierenden dominanten Mode betrieben. Diese wird dann aufgrund der Energieverteilung im Schallfeld die höchsten Amplituden aufweisen, doch werden dem Schallfeld weitere Moden überlagert sein, wie in Abschnitt 4.1.5 gezeigt ist.

7.2 Validierung der azimuthalen Schallfeldstruktur

In diesem Abschnitt wird die Validierung des Schalltransportmodells für die Bestimmung der azimuthalen Schallfeldstruktur mit Hilfe einer Messung im AWT ohne Strömungsüberlagerung vorgestellt.

Die Anregungsfrequenz beträgt $f_{\text{Ex}} = 685 \text{ Hz}$ und befindet sich unmittelbar oberhalb der Cut-On Frequenz der $mn_{[2;0]}$ Mode. Die Anregung selbst erfolgt mit Hilfe von 16 in Phase schwingenden Lautsprechern des Schallgenerators und harmonischem Eingangssignal. Da nicht gezielt eine einzelne Spinning Mode über eine phasenversetzte Ansteuerung der Lautsprecher angeregt wird, sind zusätzlich Anteile der $mn_{[0;0]}$ und $mn_{[1;0]}$ Mode zu erwarten. Allerdings liegt die Anregungsfrequenz unmittelbar über der Cut-On Frequenz der $mn_{[2;0]}$ Mode, sodass, wie in Abschnitt 4.1.5 gezeigt ist, diese Mode die energiereichste und damit die dominante ist. Diese Form der Anregung ist gewählt worden, um ein Modenfeld zu erzeugen, das über komplexere Ausbreitungseigenschaften als eine reine Spinning Mode verfügt und bei dem auch die Analyse eines überlagerten Schallfeldes demonstriert werden kann. In Anhang E.2.1 ist im Vergleich dazu die Analyse für eine gezielt angeregte $mn_{[2;0]}$ Spinning Mode dargestellt.

Die Schalldrücke werden in der Messstrecke mit 12 umfangsverteiltern Mikrofonen an der äußeren Rohrwand aufgenommen. Zusätzlich kommen vier Reihen axial gestaffelter Mikrofone, die sich an festen Azimutalpositionen (90° zueinander verteilt) befinden, zum Einsatz. Der allgemeine Versuchsaufbau ist in Abschnitt 2.1 beschrieben.

Die Messdaten werden nach der in Kapitel 6 vorgestellten Methodik ausgewertet. Mittels einer Spektralanalyse (vgl. Abschnitt 6.1) werden zunächst die benötigten Filtereigenschaften, wie die Eckfrequenzen und die Bandbreite definiert. In allen Fällen gilt $f_{F,\text{Eck}} = f_{\text{Ex}} \pm 3\text{Hz}$. Aus den Band-gefilterten Messsignalen wird anschließend das zeitabhängige Umfangssignal rekonstruiert. Wie in Abschnitt 6.2 gezeigt ist, werden dazu zunächst die an den diskreten Mikrofonpositionen aufgenommenen Schalldrücke über den Umfang interpoliert. Der resultierende Gesamtschalldruckverlauf wird mit Hilfe der AMA in seine modalen Bestandteile zerlegt.

Auf Basis der experimentell ermittelten charakteristischen Parameter wird das Schallfeld mit dem Transportmodell nachgerechnet, so dass die Berechnungsergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen verglichen werden können. In der Berechnung werden einzig die voll ausbreitungsfähigen Moden berücksichtigt (modale Reduktion des Messdatensatzes). Tabelle 7.2 gibt einen Überblick über die verwendeten Modellparameter, während Tab. 7.3 die ermittelten Schallfeldparameter aufführt.

Die Ergebnisse des modal zerlegten Gesamtschalldruckverlaufs sind in Abb. 7.1 dargestellt. Die komplexen Modenamplituden sind die Basis für die weiteren Analysen. Wie erwartet, weist das Schallfeld neben der dominanten $mn_{[2;0]}$ Mode, geringe Anteile der Grundmode sowie der $mn_{[1;0]}$ Mode auf, die einen partiell stehenden Charakter hat. Es ist zu erkennen, dass für die $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode sowohl reelle als auch komplexe Modenamplituden im zeitlichen Verlauf vorliegen.

Anhand der Abb. 7.2 (A) zeigt sich, dass für die $mn_{[0;0]}$ Mode der Realteil der Modenamplitude stets in Phase bzw. um $-\pi$ versetzt zu deren Betrag ist, was physikalisch korrekt

Tabelle 7.2: Übersicht über die verwendeten Parameter des Schalltransportmodells.

Größe	Wert	Größe	Wert
a in m/s	342	kD	6,229
Ma_x	0	Ma_θ	0
Sampling Rate f_s in s^{-1}	30000	Samples N	60000
$x_{\max}$ in m	2	Gitterzellen in x	200
$\theta_{\max}$ in m	$2\pi r_a$	Gitterzellen in θ	100
r_a in m	0,2475	Gitterzellen in r	50

Tabelle 7.3: Übersicht über die mit Hilfe der Analyseverfahren ermittelten modalen Ausbreitungsparameter.

Größe	$mn_{[0;0]}$	$mn_{[1;0]}$	$mn_{[2;0]}$
Amplitude in Pa	14,9	12,9	63,1
ϵ	-	0,605	0,566
$\delta\phi_\theta$ in Grad	0	30	-299
$\delta\phi_t$ in Grad	-250	-250	-100
k in m^{-1}	12,585	12,585	12,585
k_x in m^{-1}	12,585	10,151	2,468
k_θ in m^{-1}	0	$\pm 4,040$	$\pm 8,081$
k_r in m^{-1}	0	6,246	9,326
λ_x in m	0,492	0,619	2,546
λ_θ in m	-	1,555	0,777
χ_x in Grad	-72	χ_θ in Grad	18

sein muss, da die Grundmode über keinen Drehanteil verfügt. Anders ist es hingegen bei der $mn_{[1;0]}$ Mode. Dort existiert eine komplexe Amplitude und zwischen Real- und Imaginärteil herrscht ein Phasenversatz von $0 < \delta\phi_\theta(t) < \pi$ vor, was auf den partiell stehenden Charakter der Mode hindeutet. Wie zu erkennen ist, sind die Phasenwinkel $\phi_{\theta,\Im-\Re}$ über eine Periodendauer nicht konstant, sondern weisen zu Periodenbeginn- und ende steigende bzw. fallende Flanken auf. Diese Eigenschaft ist Indiz für die der Mode inhärenten drehenden Anteile (da $\epsilon \neq 1$). Die Drehrichtung lässt sich direkt über das Vorzeichen von $\delta\phi_{\theta,\Im-\Re}$ bestimmen. In diesem Fall ist es rein positiv und die Mode dreht somit in positive Umfangsrichtung. Wie bereits in Abschnitt 6.3.2 herausgearbeitet wurde, sind bei partiell stehenden Moden der Realteil und der Betrag der Mode in Phase. Liegt allerdings ein azimuthaler Phasenwinkel ϕ_θ vor, der die beiden Teilmoden in Umfangsrichtung gegeneinander verschiebt, sind Realteil und Betrag nicht mehr in Phase, wie auch hier für die $mn_{[1;0]}$ Mode zu erkennen ist. Die Teilmodenverhältnisse ϵ und die azimuthalen Phasenversätze $\delta\phi_\theta$ werden mit Hilfe der in Abschnitt 6.4 vorgestellten Faktorisierungsverfahren bestimmt und sind der Tab. 7.3 zu entnehmen.

Ein ähnliches Verhalten ist auch bei der $mn_{[2;0]}$ Mode zu beobachten. Auch diese weist

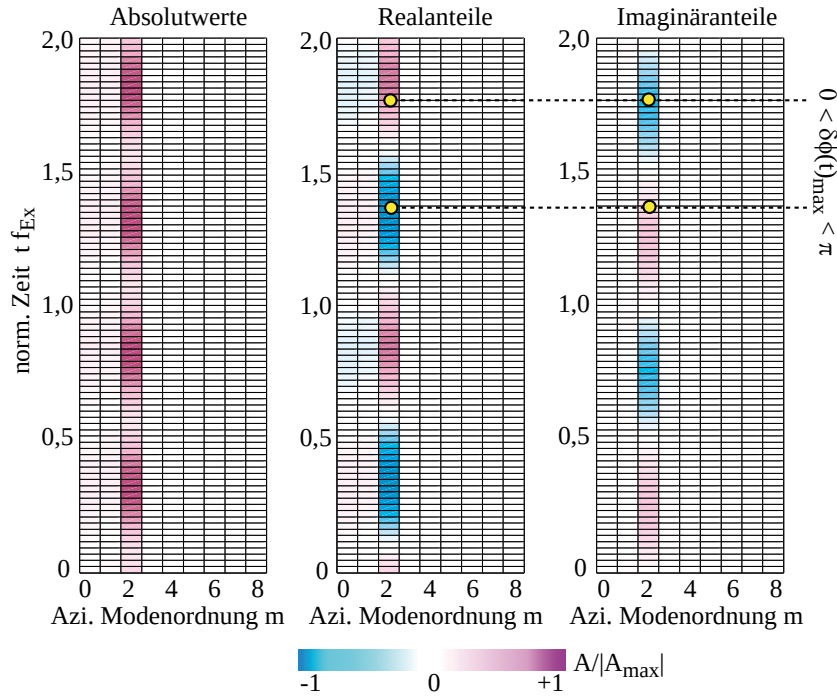


Abbildung 7.1: Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden. Zu erkennen ist die dominante $mn_{[2;0]}$ Mode.

aufgrund des existierenden Teilmodenverhältnisses drehende und stehende Anteile auf, bei einem azimuthalen Phasenversatz von $\delta\phi_\theta = -299^\circ$. Allerdings breitet sich die Mode in negative Umfangsrichtung, also entgegengesetzt der $mn_{[1;0]}$ Mode, aus. Für detaillierte Ausführungen sei zudem auf Abschnitt 6.3.2 und insbesondere auf die Zusammenfassung der Verläufe unterschiedlicher modaler Phasenversätze in Abb. 6.8 und 6.9 verwiesen.

Wie bereits einleitend ausgeführt wurde, werden mit Hilfe der Analyseverfahren zunächst die charakteristischen Schallfeldparameter bestimmt und anschließend als Eingaben für das Schalltransportmodell genutzt, mit dem das Schallfeld nachgerechnet wird. Aus den berechneten Daten werden erneut die charakteristischen Parameter bestimmt. Der Vergleich von experimentellen und berechneten Daten lässt auf die Güte des Schalltransportmodells schließen. Wie die Abb. 7.2 (A) zeigt, stimmen die simulierten Modenamplituden und Phasenversätze $\delta\phi_\theta$ sehr gut mit den experimentell bestimmten überein und weisen maximale Abweichungen in der Amplitude $< 5\%$ zueinander auf. Somit kann davon ausgegangen werden, dass die modalen Eigenschaften mit dem Schalltransportmodell richtig abgebildet werden.

Neben den Moden-spezifischen Parametern, geben die Globalparameter zusätzlich Aufschluss, ob die Berechnung mit Hilfe des Schalltransportmodells korrekt verlaufen ist. Anhand des in Abb. 7.2 (B) dargestellten zeitlichen Phasenversatzes des Gesamtsignals bzw. dessen Gradienten lässt sich erkennen, ob das überlagerte Schallfeld insgesamt stehenden oder drehenden Charakter hat. Deren Berechnung erfolgt mit Hilfe der in Abschnitt 6.3.1 vorgestellten Methoden. Dabei wird der Phasenversatz $\delta\phi_t$ als Differenz zwischen dem ak-

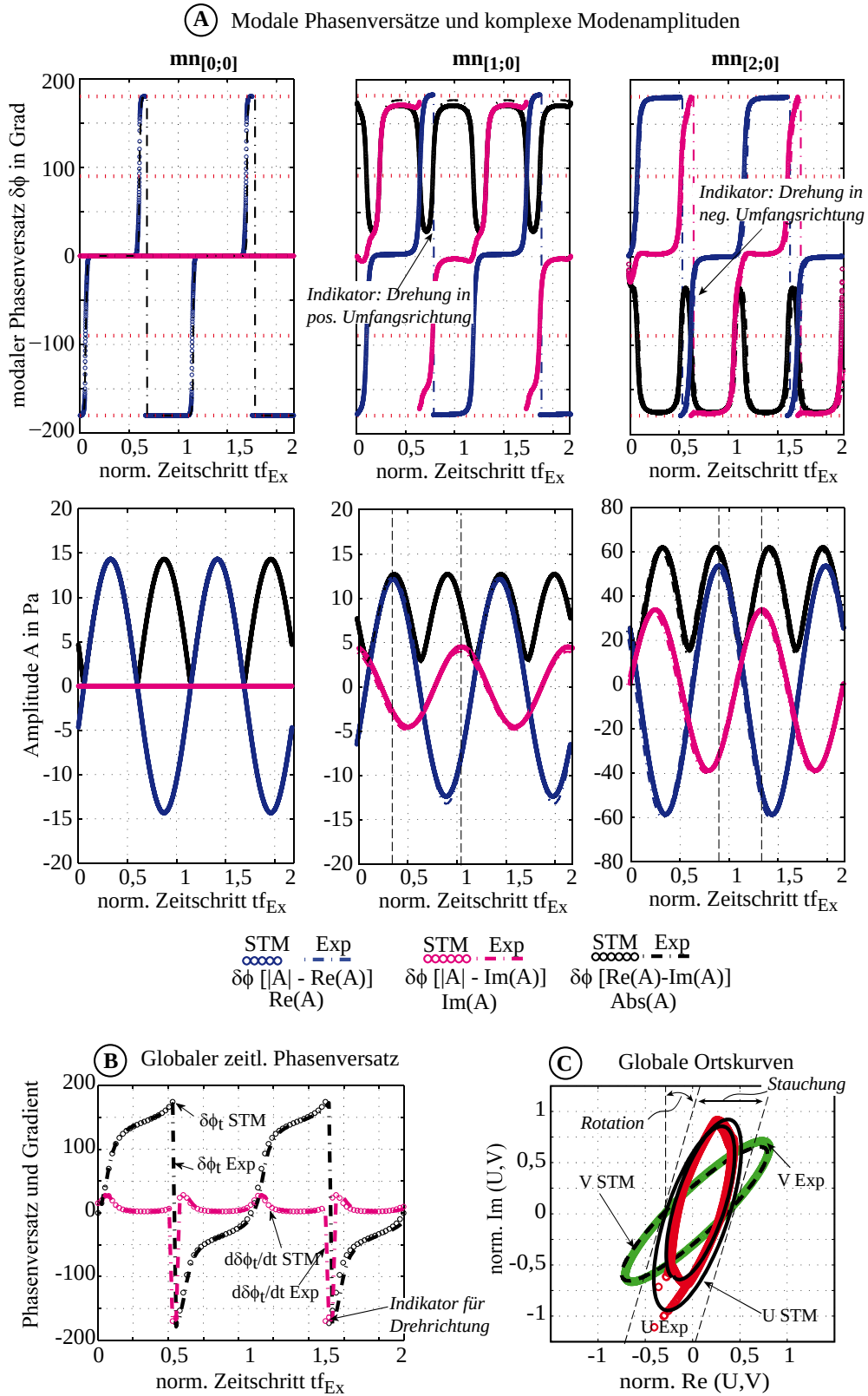


Abbildung 7.2: Vergleich der mit dem Schalltransportmodell (STM) berechneten und den experimentell bestimmten Modenparametern. (A)(oben) Zeitliche Phasenverläufe und Amplitudenverläufe (unten) der komplexen Modenamplituden. (B) Vergleich der globalen Phasenbeziehungen. (C) Vergleich der globalen Ortskurven.

tuellen Phasenwinkel und einer zeitlich zurückliegenden Referenzphase gebildet. Über den Verlauf des zeitlichen Phasenversatzes bzw. dessen Gradienten lässt sich die Drehrichtung des gesamten Schallfeldes angeben. In diesem Fall liegt ein mit der Zeit ansteigender Phasenversatz vor, der somit angibt, dass sich das Feld in negative Umfangsrichtung dreht. Dies ist dem Einfluss der dominanten $mn_{[2;0]}$ Mode geschuldet. Auch hier stimmen die experimentell gemessenen und die berechneten Phasenverläufe exakt überein.

Die Erkenntnisse, die in Abschnitt 6.4 mit den Faktorisierungsverfahren am Beispiel unterschiedlicher Modenbeziehungen herausgearbeitet wurden, lassen sich direkt auf die hier untersuchten Modenfelder übertragen. Die in Abb. 7.2 © gezeigten Ortskurven der Singulärvektoren von $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ weisen keinen Einheitskreis auf, was auf den partiell stehenden Charakter des überlagerten Modenfelds hinweist. Die Stauchung der Ortskurve ist ein Indiz dafür, während ihre Rotation auf einen existierenden Phasenversatz zwischen den Moden hinweist.

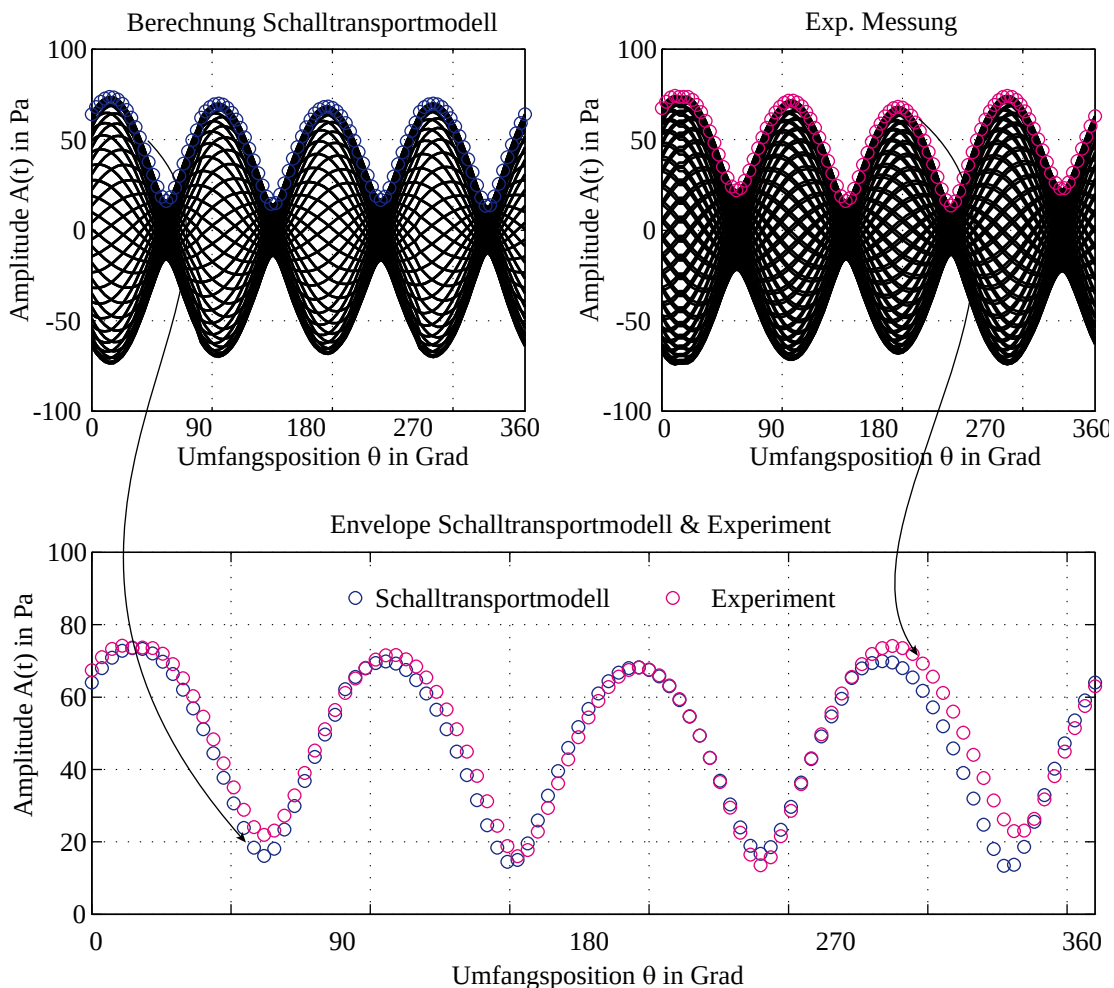


Abbildung 7.3: Zeitverläufe der Umfangsdruckverteilung des überlagerten Modenfelds und der Envelope. Vergleich von Experiment und Berechnung.

Ein weiterer wichtiger Parameter zur Charakterisierung der Modenstruktur ist die Einhül-

lende (Envelope) über die zeitlich-variierenden Umfangsschalldrücke. Dazu wird ein Verfahren entwickelt, das die Envelope aus den experimentellen und berechneten Ergebnissen extrahiert und gegeneinander darstellt (vgl. Abb 7.3). Die Envelope ist ein Indikator für die Zusammensetzung der gesamten Modenstruktur. Der Vergleich von gemessenen und berechneten Verläufen weist eine gute Übereinstimmung auf, was darauf schließen lässt, dass die ermittelten Modenparameter korrekt bestimmt werden. Die Berechnung bildet folglich die Schallfelder richtig ab.

Ergänzend zu dem in diesem Abschnitt diskutierten Validierungsfall, sind im Anhang E.2 weitere Validierungsbeispiele gegeben.

7.3 Validierung der axialen Schallfeldausbreitung

Ein Ziel der Auswertung ist es, auf Basis der charakteristischen Schallfeldparameter die räumlichen Schallfelder mit Hilfe des Schalltransportmodells zu berechnen, die im Experiment aufgrund einer begrenzten Anzahl an Sensoren nicht erfasst werden können. Abbildung 7.4 zeigt dazu die simulierten Schalldruckverläufe an der Rohrwand des AWT zu einem Zeitpunkt t_i , für das im vorherigen Abschnitt 7.2 gewählte Validierungsbeispiel. Zusätzlich sind die berechneten Vektoren der Ausbreitungsgeschwindigkeiten eingetragen (vgl. Abschnitt 4.1.3).

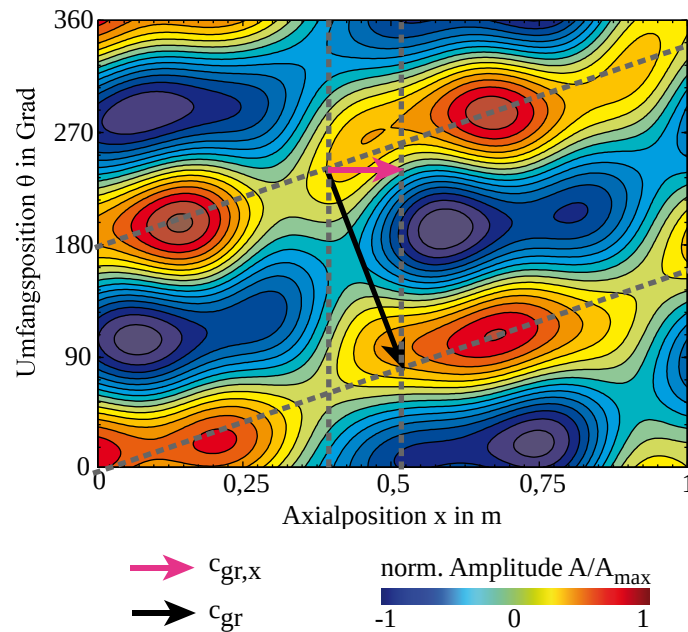


Abbildung 7.4: Mit dem Schalltransportmodell berechnetes Schallfeld in azimuthaler und axialer Richtung an der Kanalwand zu einem Zeitpunkt.

Das Verfahren basiert auf den in Abschnitt 4.1.2 diskutierten Theorien zur Phasen- und Gruppengeschwindigkeit und der in Abschnitt 6.5 vorgestellten Analyse- methode. Da die

treibende $mn_{[2;0]}$ Mode sehr nahe an ihrer Cut-On Frequenz liegt, sind die Ausbreitungswinkel des Gesamtfeldes zwangsläufig sehr flach und die axialen Ausbreitungsgeschwindigkeiten niedrig. Wie bereits in Abschnitt 4.1.2 herausgearbeitet und diskutiert wurde, handelt es sich bei diesen Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Modenverbundes um die Gruppengeschwindigkeit.

Durch die zusätzliche Überlagerung der dominanten $mn_{[2;0]}$ Mode mit der $mn_{[1;0]}$ und der Grundmode, ist die ansonsten helikale Modenstruktur unterbrochen und das Schallfeld weist komplexe Überlagerungszustände auf.

Die mit dem Schalltransportmodell berechneten axialen Schallfelder werden im Rahmen der Versuchskampagne zusätzlich experimentell validiert. Exemplarisch sind dazu in Abb. 7.5 die zeitlichen Schalldruckverläufe entlang des Rohres an einer Umfangsposition $\theta = 45^\circ$ dargestellt. Im AWT werden an gleicher Umfangsposition entsprechend vier axial gestaffelte Mikrofone in die Messstrecke implementiert. Die gemessenen Schalldrücke sind für ausgewählte Zeitpunkte zusätzlich zu den berechneten in Abb. 7.5 als diskrete Werte eingetragen. Generell ist eine gute Übereinstimmung festzustellen. Die räumlichen Schallfelder können folglich rechnerisch nachgebildet werden.

Diese Vergleiche zeigen, dass die entwickelte Methodik zur Analyse und Berechnung überlagerter Schallfelder in Rohren einsetzbar ist. Weitere Validierungsfälle sind in Anhang E.2 gegeben und bestätigen diese Aussage. Somit können sowohl die Analyseverfahren als auch das Schalltransportmodell zur Untersuchung der Turbinenschallfelder eingesetzt werden.

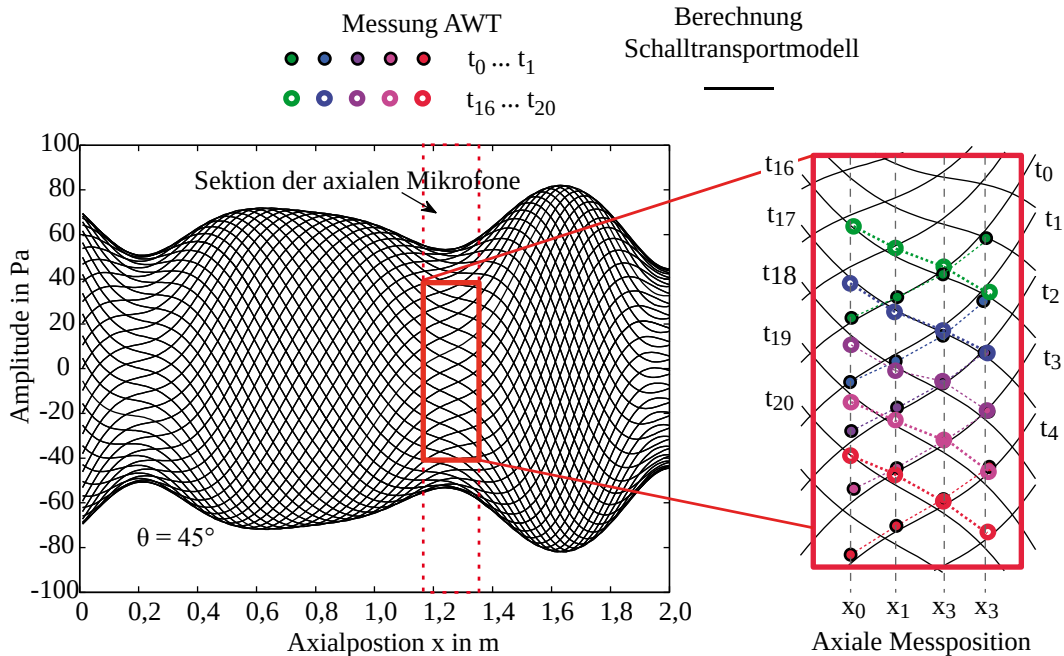


Abbildung 7.5: Axiale Schalldruckverläufe in der Messstrecke des AWT. Vergleich der berechneten und experimentell bestimmten Schalldrücke.

7.4 Validierung der radialen Schallfeldstruktur

Wie bereits beschrieben wurde, ist die Fähigkeit beliebig überlagerte Modenfelder zu berechnen eine zentrale Funktion des Schalltransportmodells. Dem zu Grunde liegt jedoch die korrekte Bestimmung der Einzelmoden. Das Modell muss folglich in der Lage sein, sowohl die Druckverteilungen in Umfangsrichtung als auch in radialer Richtung korrekt zu bestimmen. Nachdem im vorherigen Abschnitt die Analyse der azimuthalen Schallfeldstrukturen behandelt worden ist, soll sich in diesem Abschnitt auf die Schallausbreitung in radialer Richtung konzentriert werden. Dabei werden die Berechnungsergebnisse des Transportmodells mit den experimentellen Messergebnissen für die Anregung unterschiedlicher Modenfelder verglichen.

7.4.1 Radiale Schallfeldstruktur ohne Strömungsüberlagerung

Die Messungen dieser Versuchsreihe erfolgen in der Messstrecke des AWT ohne Strömungsüberlagerung. Die Schallfelder werden dabei mit Hilfe des Schallgenerators angeregt. Zur Erzeugung reiner Spinning Modes wird die in Abschnitt 2.3 beschriebene phasenversetzte Ansteuerung der Lautsprecher gewählt, während stehende Moden mit einer phasengleichen Ansteuerung erzeugt werden. Die Schalldrücke werden in der Messstrecke mit Hilfe von 12 umfangsverteilter Mikrofonen an einer axialen Position aufgenommen. Für die Bestimmung der radialen Schallfeldstruktur wird zusätzlich ein Mikrofonrechen eingesetzt, mit dem zeitgleich an 8 radialen Positionen gemessen wird. Die radiale Schalldruckverteilung lässt sich durch Interpolation auf Basis dieser Stützstellen rekonstruieren und die radiale Modenordnung bestimmen. Aus den Messdaten werden nun, analog zu dem in Abschnitt 7.1 beschriebenen Vorgehen, die charakteristischen Schallfeldparameter bestimmt, auf Basis derer das räumliche Schallfeld mit dem Schalltransportmodell berechnet wird. In den Berechnungen wird zusätzlich zu den azimuthalen Modeninformationen nun auch noch die Radialmodenordnung berücksichtigt.

Abbildung 7.6 zeigt für vier ausgewählte Moden (Spinning Modes und stehende Moden) die experimentell bestimmten und berechneten radialen Schalldruckverteilungen. Ein Vergleich der Verläufe in ①, ② und ③ zeigt, dass sowohl für die $mn_{[1;0]}$, die $mn_{[2;0]}$ als auch für die $mn_{[0;1]}$ Mode eine gute Übereinstimmung zwischen den experimentellen und berechneten Ergebnissen vorliegt. Wie die Untersuchungen zeigen, hat, im Gegensatz zur Modenordnung, die Art der azimuthalen Schallfeldstruktur (spinning oder stehend) keinen Einfluss auf die Ausprägung der radialen Schalldruckverteilung (vgl. ① und ②).

In Abb. 7.6 ④ sind hingegen die radialen Schalldruckverläufe einer überlagerten Modenkombination dargestellt. Dabei wird die bereits in Abschnitt 7.2 beschriebene gezielte Anregung unmittelbar über der Cut-On Frequenz der dominanten Mode eingesetzt. Die hier untersuchte Modenkombination ist eine Überlagerung der dominanten $mn_{[3;0]}$ Spinning-Mode mit einer stehenden $mn_{[0;1]}$ Mode ($A_{mn_{[0;1]}} = 0, 2A_{mn_{[0;3]}}$). Wie die Ergebnisse zeigen, bildet das Modell auch bei unterschiedlich überlagerten Moden die radiale Schalldruckstruktur zumindest qualitativ korrekt ab.

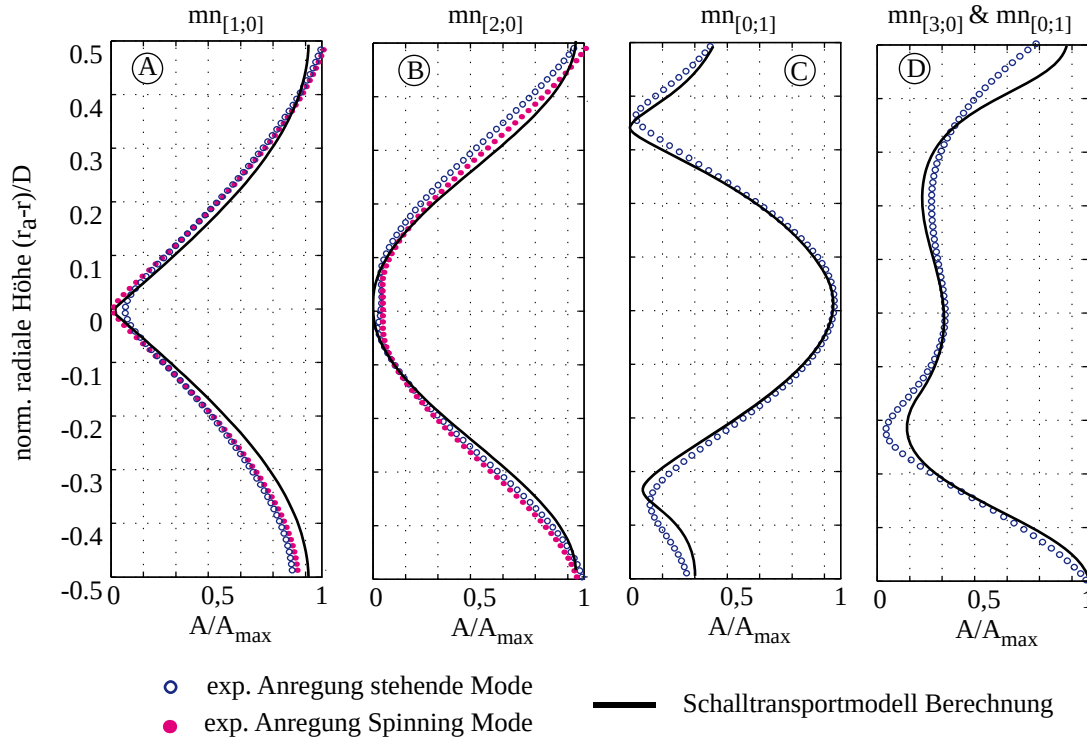


Abbildung 7.6: Normierte Amplituden $A/A_{\max}$ der experimentell gemessenen und der berechneten radialen Schalldruckverteilungen für unterschiedliche Modenformen.

7.4.2 Radiale Schallfeldstruktur bei Strömungsüberlagerung

Nachdem die Validierung des Schalltransportmodells für den strömungsfreien Fall vorgestellt wurde, sollen in diesem Abschnitt abschließend einige Ergebnisse der Untersuchung der radialen Schallfeldstrukturen bei überlagerter Grundströmung diskutiert werden. Für die ausgewählten Anregungszustände werden die Schallfelder analog zu den Beschreibungen in Abschnitt 7.4 mit dem Schalltransportmodell berechnet. Dazu werden die sich aus der Analyse der experimentellen Untersuchungen ergebenden charakteristischen Schallfeldparameter und die radialen Schallfeldinformation als Berechnungsvorgaben des Transportmodells verwendet.

Für diese Versuchsreihen wird eine speziell traversierbare Mikrofonsonde eingesetzt, so dass sich die Messstellendichte in radialer Richtung erhöhen lässt. Damit wird das Schallfeld an 30 Stützstellen bis 60% des Rohrdurchmessers traversiert. Die Messungen werden sowohl für den strömungsfreien als auch für eine überlagerte Grundströmung bei $\dot{m} = 9 \text{ kg/s}$, was $Ma_x = 0,11$ entspricht, durchgeführt. Da der Fokus dieser Arbeit auf den Transportmechanismen azimuthaler Moden liegt, soll das Schalldruckprofil für die radiale Grundmode $n = 0$ untersucht werden.

Die Ergebnisse sind in Abb. 7.7 exemplarisch für eine $mn_{[0;0]}$, $mn_{[2;0]}$, $mn_{[3;0]}$ und $mn_{[4;0]}$ Mode gegenübergestellt. Eine detaillierte Diskussion zum Verhalten radialer Schalldruckstrukturen in Rohrleitungen ist in Anhang C.1 gegeben. Gemäß dieser theoretischen Ausführungen ändert sich die Form des radialen Schalldruckprofils bei Strömungsüberlagerung

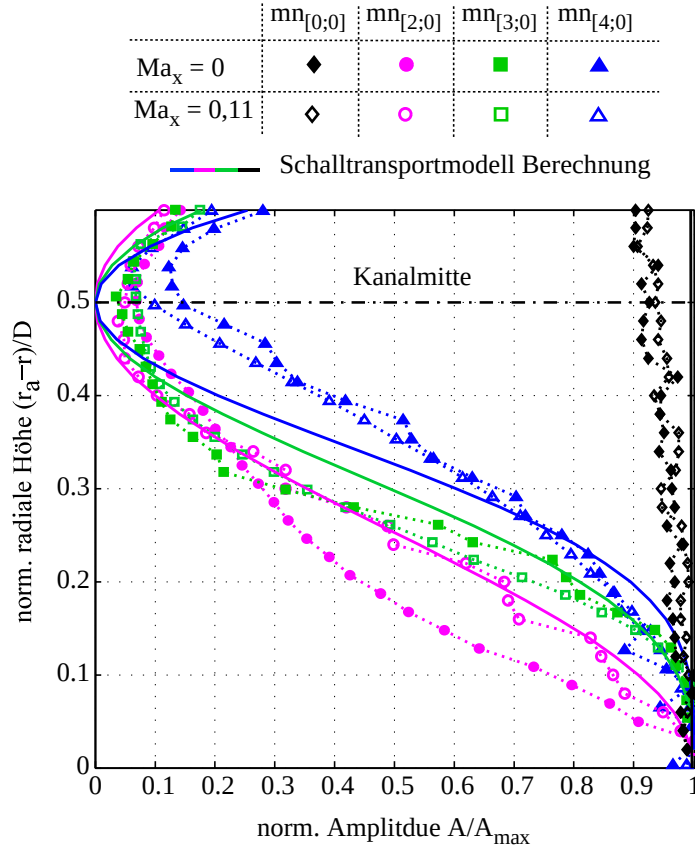


Abbildung 7.7: Vergleich von experimentellen und berechneten radialen Schalldruckverteilung für $n = 0$ und $m = 0, 2, 3, 4$ bei $\sigma = 0$ für den strömungsfreien und strömungsüberlagerten Fall.

nicht (Annahme: keine Schereffekte und keine gekoppelte Drall- und Axialströmung). Dies zeigen auch die Berechnungen mit dem Schalltransportmodell, die sowohl für den strömungsfreien als auch den strömungsüberlagerten Fall exakt die gleichen Ergebnisse liefern. Diese Eigenschaft wird ebenfalls durch die Experimente bestätigt, wie anhand der Verläufe $p'(r)$ für die $mn_{[0;0]}$, $mn_{[3;0]}$ und $mn_{[4;0]}$ Mode zu erkennen ist. Einzig für die $mn_{[2;0]}$ Mode ist eine ausgeprägte Abweichung zwischen dem strömungsfreien und strömungsüberlagerten Fall zu erkennen. Die Analyse zeigt, dass bei der gewählten Anregungsfrequenz im Experiment die $mn_{[2;0]}$ Mode für den strömungsfreien Zustand noch nicht vollständig ausgeprägt ist. Erst durch die Überlagerung der Hauptströmung und die damit verbundene Verringerung der Cut-On Frequenz, bildet sich diese vollständig aus.

Die Verteilung der radialen Schallfeldstruktur in Rohrleitungen ist, der Theorie nach, abhängig von der Ordnung der Umfangsmode, wie in Anhang C.1 (Abb. C.5) gezeigt ist. So weisen die Amplituden in der Rohrmitte stets ein Minimum und an der Kanalausßenwand ein Maximum auf. Ebenfalls ist mit zunehmender Azimutalmodeordnung eine Verschiebung der wirkenden Schalldruckstruktur hin zur Kanalausßenwand zu erwarten. Diese Effekte sind sowohl für die experimentellen als auch für die mit dem Transportmodell berechneten Validierungsfälle zu beobachten (vgl. Abb. 7.7).

Zwar werden alle Messergebnisse auf die jeweilige Anregungsfrequenz gefiltert, doch sind

7 Vorversuche und experimentelle Validierung

bei Strömungsüberlagerung die Einflüsse der zusätzlich, durch die Strömung angeregten Modenstrukturen, unverkennbar. Die Tatsache, dass in der Rohrmitte in allen Fällen die Amplituden nicht dem theoretisch zu erwartenden Wert von Null entsprechen, legt den Schluss nahe, dass der gezielt angeregten Azimutalmode zumindest die Grundmode als weitere überlagert ist, was zu einer konstanten Amplitudenverschiebung führt.

Der Vergleich der experimentell ermittelten radialen Schalldruckprofile mit den berechneten zeigt, dass das Transportmodell in der Lage ist, auch bei Strömungsüberlagerung die wirkenden Schalldruckstrukturen zumindest qualitativ korrekt zu bestimmen. Geringe Abweichungen ($< 10\%$) treten allerdings aufgrund der strömungsinduzierten Schallanregung und der damit verbundenen wirkenden Nahfeldeffekte auf, die das Schalltransportmodell nicht abbilden kann.

8 Turbinenversuche

Nachdem im vorherigen Kapitel die experimentelle Validierung der entwickelten Analysemethoden und des Schalltransportmodells vorgestellt wurde, widmet sich dieses Kapitel den Schalltransportuntersuchungen in der Versuchsturbine. Basis der Auswertung ist der validierte hybride Analyseansatz, der eine vertiefte Untersuchung der Schallfelder und der Transportmechanismen innerhalb der Turbine erst ermöglicht.

Die Experimente sind Teil einer umfangreichen Versuchsreihe zum Schalltransport in Niederdruckturbinen, die im Rahmen des Forschungsverbundes „Bürgerndahes Flugezeug“ am Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik der Leibniz Universität Hannover durchgeführt wird. Da die ausführliche Darstellung aller Versuchsergebnisse der breit angelegten Messkampagne den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde, werden lediglich die wichtigsten Ergebnisse zur Untersuchung der Schalltransmission durch die Turbinenstufen bei verschiedenen Betriebsparametern präsentiert.

8.1 Schalltransportuntersuchungen in der Versuchsturbine

Das Ziel der experimentellen Turbinenversuche ist es, unter Einsatz des hybriden Analyseverfahrens, neue Erkenntnisse über die akustischen Transport- und Transmissionseigenschaften eines in eine Niederdruckturbine eingekoppelten Schallfeldes zu erlangen. Die Untersuchungen werden für unterschiedliche Betriebszustände und Stufenkonfigurationen durchgeführt, wobei ein Schwerpunkt die Analyse der modalen Schallfeldstruktur darstellt. In diesem Abschnitt wird das generelle Vorgehen zur Untersuchung der Schallfelder vor und hinter einer ein- und zweistufigen Turbinenkonfiguration vorgestellt, und die wichtigsten Ergebnisse werden diskutiert.

Nach der Datenaufbereitung und -rekonstruktion wird zunächst eine Spektralanalyse durchgeführt, die in Abschnitt 8.1.1 beschrieben ist. Im Anschluss daran erfolgen die eigentlichen Modalanalysen (vgl. Abschnitt 8.1.3) und der hybride Analyseansatz wird für die Turbinenanwendung qualifiziert.

Während die Schallfelder und deren Ausbreitungseigenschaften vor und hinter der/den Turbinenstufe/n bestimmt werden können, lassen sich diese innerhalb der Stufe messtechnisch nicht erfassen. Aus diesem Grund wird die Stufe als unbekanntes, akustisches Übertragungselement definiert und die Transmission durch dieses stellvertretend für den Transport über die Stufe betrachtet. Die Ergebnisse sind in Abschnitt 8.1.2 dargestellt.

Der verwendete Versuchsaufbau ist eingehend in Abschnitt 2.2 beschrieben. In den Einlauf der Luftturbine wird ein synthetisch erzeugtes Schallfeld eingekoppelt, welches durch

den Strömungskanal und die Turbine wandert. Der Fokus liegt dabei nicht auf der Einkopplung einer einzelnen spezifischen Mode, sondern vielmehr auf der Schallfeldanregung mit mehreren umfangsverteilten Monopolquellen bei einer definierten Frequenz. So wird versucht, die Schallsituation eines realen Triebwerks am Austritt der Brennkammer nachzubilden.

Da sich diese Arbeit vorwiegend auf die Untersuchung azimuthaler Moden konzentriert, wird das Schallfeld sowohl vor, als auch hinter der/den Stufe/n mit rein umfangsverteilten Mikrofonen aufgenommen. In Ergänzung werden für die gleichen Turbinenbetriebszustände von Laguna (2015) Ergebnisse zur radialen Modenanalyse vorgestellt.

8.1.1 Spektralanalyse der Turbinenschallfelder

Bevor in diesem Abschnitt die Schalleistungsdichte-Spektren der Turbinenschallfelder untersucht werden, sollen einige einführende Bemerkungen zur Messdatenverarbeitung gemacht werden. Die zur Spektralanalyse eingesetzte Methode ist in Abschnitt 6.1 detailliert beschrieben. Die Spektren werden aus einem großen Zeitdatenintervall ($N > 60000$) generiert, wobei lediglich die ersten 10000 Samples abgeschnitten werden, so dass Einschwingvorgänge unberücksichtigt bleiben.

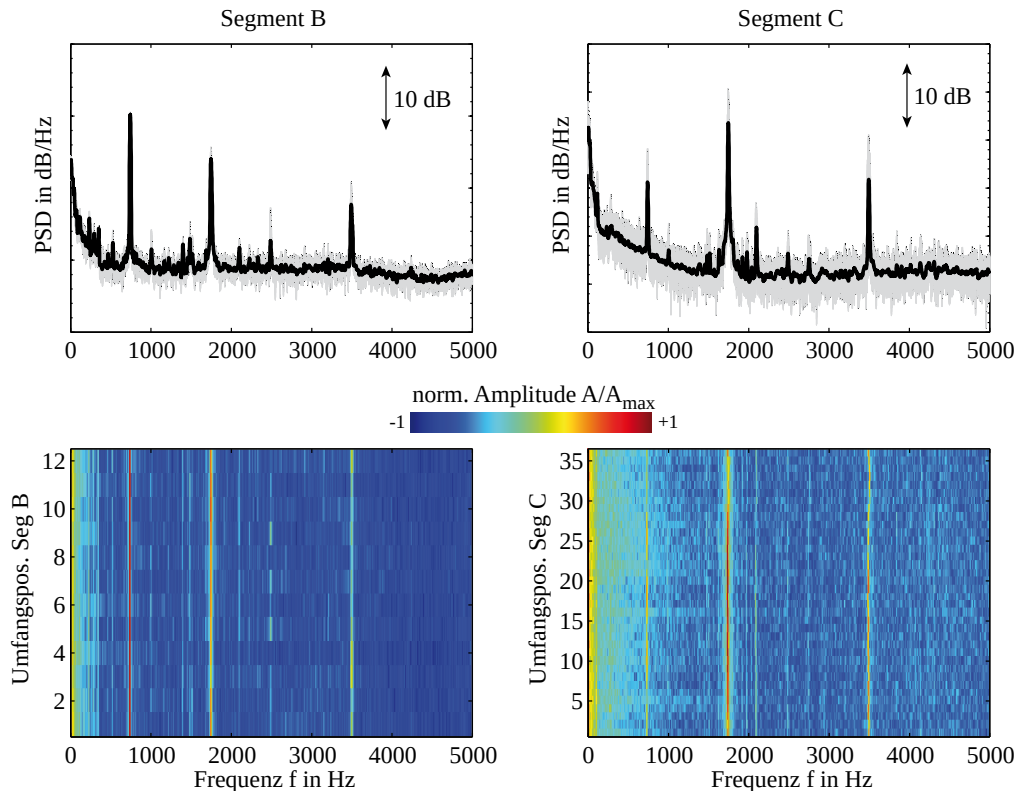


Abbildung 8.1: (oben) Spektren in den Segmenten *B* und *C* für einen Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$, $f_{\text{Ex}} = 750 \text{ Hz}$. In grau: Schwankungsbereiche über die einzelnen Messzyklen. In schwarz: Korrespondierende Mittelwerte. (unten) Spektren für jedes Mikrofon bzw. jede Umfangsposition bei gleichem Betriebspunkt.

8.1 Schalltransportuntersuchungen in der Versuchsturbine

Vor dem Eintritt in die Turbine werden die Spektren aus den Signalen aller Umfangsmikrofone des Segments *B* gebildet. So werden auch die azimuthalen Amplitudenvariationen der Schallfeldstruktur berücksichtigt. Wie in Abschnitt 2.3.1 bereits beschrieben ist, werden hinter der Stufe (Segment *C*) die azimuthalen Schallfelder über *i*-Umfangspositionen mit Hilfe des Mikrofonträgersrings traversiert. Für jeden der *i*-Messzyklen wird aus den Zeitdaten ein Spektrum ermittelt. Aus allen *i*-Spektren wird im Anschluss ein resultierendes Gesamtspektrum durch Mittelung bestimmt. Abbildung 8.1 verdeutlicht die Notwendigkeit dieses Mittelungsprozesses. Wie zu erkennen ist, schwanken zwischen den Messzyklen, also den Umfangspositionen des Segments *C*, die Amplituden einer einzelnen Frequenz teilweise stark, und die Auswertung bei nur einem Messzyklus würde zu nicht repräsentativen Ergebnissen führen. Eine Mittelung der Spektren über die einzelnen Messzyklen ist somit erforderlich. In Abb. 8.2 sind die Leistungsdichtespektren P_{SD} nach Welch (vgl.

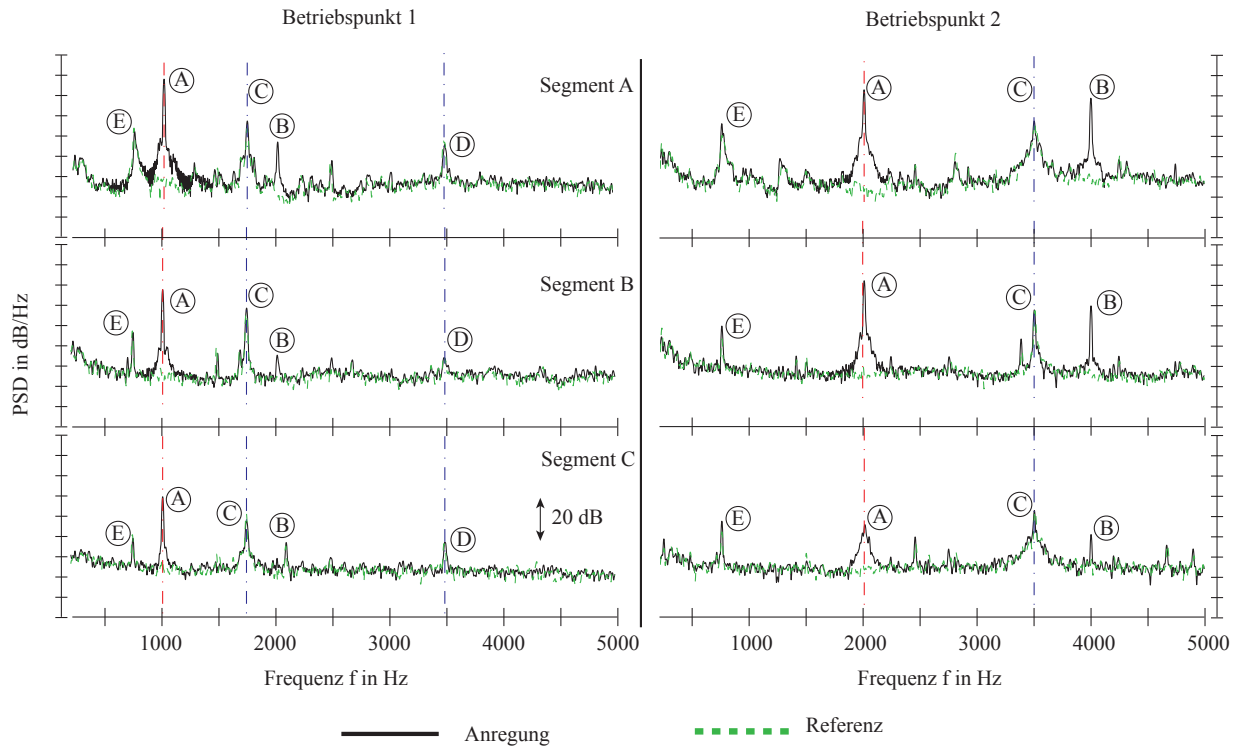


Abbildung 8.2: Spektren der drei Messebenen (Segment A, B, C) für zwei unterschiedliche Betriebspunkte. (links) Betriebspunkt 1: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$, $f_{Ex} = 1000 \text{ Hz}$. (rechts) Betriebspunkt 2: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$, $f_{Ex} = 2000 \text{ Hz}$.

Abschnitt 6.1.2) aller drei Messebenen für zwei verschiedene Betriebspunkte der einstufigen Turbinenkonfiguration aufgetragen. In beiden Fällen liegt mit $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ der gleiche Massenstrom vor, doch ist die Drehzahl im zweiten Betriebspunkt mit $n = 7000 \text{ min}^{-1}$ doppelt so hoch wie im ersten. Darüber hinaus unterscheiden sich die Anregungsfrequenzen. Zusätzlich zu den Spektren der synthetisch angeregten Schallfelder sind die Spektren der korrespondierenden Referenzmessungen ohne Anregung aufgetragen.

In beiden Fällen sind im Spektrum eindeutig die Anregungsfrequenzen bei $f_{Ex} = 1000 \text{ Hz}$ bzw. 2000 Hz zu identifizieren, deren Amplituden bei Durchtritt durch die Maschine abnehmen (siehe ①). Während unmittelbar hinter dem Schallgenerator in Segment A die

Amplituden am höchsten sind, fallen sie zwischen Segment *B* und *C* deutlich ab. Diese Eigenschaft lässt direkt Rückschlüsse auf die Transmissionsfähigkeit der Stufe zu. Der Vergleich von angeregtem Schallfeld und dem Referenzschallfeld zeigt deutlich, dass die hohen Amplituden bei den Anregungsfrequenzen in (A) einzig auf die synthetische Anregung zurückzuführen und nicht Maschinen- bzw. Betriebspunkt-abhängig sind. Die Eingangsamplituden sind allerdings von der Leistungscharakteristik des Schallgenerators bzw. der Lautsprecher abhängig, wie in Abschnitt 2.3 erläutert ist. So sind gerade bei Frequenzen unter 1 kHz teilweise sehr geringe Eingangsamplituden festzustellen, was allerdings keine Auswirkung auf das Transport- und Transmissionsverhalten der Stufe mit sich führt. Neben der eigentlichen Anregung treten auch Höherharmonische auf (siehe (B)), für die ein gleiches Verhalten zu beobachten ist. An den Punkten (C) und (D) sind die Maschinen-synchronen Anregungsfrequenzen, also die Schaufelpassierfrequenzen (BPF), und deren erste Harmonische zu erkennen. Wie der Vergleich der beiden Betriebspunkte zeigt, ändern sich diese mit der Drehzahl. Für den 30 schaufeligen Rotor stellt sich eine BPF von 1750 Hz bzw. 3500 Hz ein. Neben der synthetischen Anregung stellt die Rotor-Stator Interaktion stets die dominante Schallquelle dar.

Beide in Abb. 8.2 gezeigten Spektren weisen bei ca. $f_{\text{Ex}} = 750$ Hz (Punkt (E)) eine weitere dominante Frequenz auf. Wie ein Vergleich mit anderen Betrieb- und Anregungszuständen zeigt, ist diese Frequenz weder von der synthetischen Anregung noch von der Drehzahl abhängig. Sie tritt stets bei einem Massenstrom von $\dot{m} = 5$ kg/s auf. Aufgrund der Drehzahlunabhängigkeit können lager- oder rotordynamische Anregungen ausgeschlossen werden. Es wird ebenfalls eine parasitäre Anregung durch die Versorgungseinheiten (Schraubenkompressoren) ausgeschlossen. Diese werden bei allen Betriebspunkten bei konstanter Drehzahl betrieben, und die Massenstromvariation wird lediglich über die gezielte Ansteuerung von Bypass-Ventilen bewerkstelligt. Im Falle einer Anregung müsste die Verdichter-BPF unabhängig vom Massenstrom stets bei einer konstanten Frequenz zu identifizieren sein, was nicht der Fall ist. Da diese Spektralkomponenten lediglich bei $\dot{m} = 5$ kg/s für alle Drehzahlen auftreten und in Segment *A* stets am höchsten sind, liegt der Schluss nahe, dass es sich um eine strömungsinduzierte Anregung im Bereich des Turbinen-einlaufs handelt. Eine Möglichkeit einer solch schmalbandigen Anregung ist das Auftreten von Resonatoreffekten in der Anlaufstrecke oder im Schallgenerator. Dies wird allerdings ausgeschlossen, da der identische Schallgeneratöraufbau auch in den Vorversuchen im AWT bei gleichen Massenstrombedingungen verwendet wird, in denen keine Anregung auftritt. Eine weitere Möglichkeit ist die Schallfeldanregung auf Grund von Wirbelablösungen hinter in die Strömung eingebrachten Objekte (Sonden, Streben, etc.). Mit der gegebenen Anregungsfrequenz lässt sich über die Strouhalzahl Str der Durchmesser eines kreis- oder tropfenförmigen Gegenstands abschätzen. Für den vorliegenden Fall würde dieser bei ca. 7,5 mm liegen, was in etwa dem Durchmesser der in die Einlaufstrecke implementierten Druck- und Temperatursonden entspricht.

Die durchgeführte Spektralanalyse ist der erste Baustein der Auswertungskette. Die Ergebnisse liefern zum einen Einblick in die spektrale Verteilung der dominanten Frequenzen und werden z.B. benötigt, um die Filtereigenschaften abzustimmen. Zum anderen geben sie Aufschluss über die Schallfelddämpfung innerhalb der Maschine. Diese Analyse ist Ge-

genstand des nachfolgenden Abschnitts.

8.1.2 Schalltransport über die Stufe - Stufentransmission

Wie bereits einleitend beschrieben ist, wird der Schalltransport über die Stufe mit Hilfe der Transmission charakterisiert. Um den Einfluss des Betriebszustandes auf das spektrale Transmissionsverhalten der eingekoppelten Schallfelder zu untersuchen, wird in dem zu interessierenden Frequenzintervall der Transmissionsverlust ΔT_R über die Stufe/n gebildet, welcher auch als normierte Durchgangsdämpfung verstanden werden kann

$$\Delta T_R(f, m, n) = \frac{P_{SD, \text{Seg C}}(f) - P_{SD, \text{Seg B}}(f)}{|P_{SD, \text{Seg B}}|} . \quad (8.1)$$

Dieser wird als Differenz der Ein- und Ausgangsamplituden der Leistungsspektraldichten P_{SD} in Bezug auf das Mittel der Eingangsamplitude des Segments B definiert. So lässt sich direkt das Dämpfungs- und Verstärkungsverhalten im Anregungszustand identifizieren. Die Auswertung wird für sämtliche Betriebspunkte und Anregungszustände sowohl für die einstufige als auch die zweistufige Luftturbinenkonfiguration durchgeführt. Damit liegt eine breite Datenbasis vor, die eine Identifizierung von Trends und Tendenzen ermöglicht. In den Versuchsreihen werden neben dem Massenstrom und damit der Strömungsgeschwindigkeit auch die Drehzahl variiert. Aus den in Segment B und C gemessenen Schalldrücken wird im Anschluss gemäß Gl.(8.1) der Transmissionsverlust ΔT_R bestimmt. Die Ergebnisse sind zusammenfassend in Abb. 8.3 dargestellt.

Wie zu erkennen ist, liegt sowohl für die ein- als auch die zweistufige Konfiguration eine starke Frequenzabhängigkeit des Transmissions- bzw. Dämpfungsverhaltens mit einer ausgeprägten Charakteristik (S-Schlag) vor. Im einstufigen Fall ist ausgehend von $f_{Ex} = 340$ Hz zunächst eine hohe Transmission zu beobachten, die für alle Betriebspunkte bei $f_{Ex} = 680$ Hz ein Maximum aufweist. Hier tritt sogar der Fall ein, dass die Schallleistungen hinter der Stufe höher sind als vor dem Turbineneintritt. Da dieser Effekt Betriebspunkt-unabhängig ist und lediglich für ein sehr schmales Band auftritt, wird es sich vermutlich um eine Kammerresonanz im hinteren Turbinenstrang handeln. Mit steigender Anregungsfrequenz nimmt dann die Transmission durch die Stufe bis zu einem Schwellwertbereich zwischen $f_{Ex} = 2000$ und 2500 Hz nahezu linear ab. Für Frequenzen oberhalb des Schwellwertbereichs nimmt die Transmission wieder zu. Das bedeutet, dass die Leistung der eingekoppelten Schallfelder zwischen $f_{Ex} = 680$ Hz und $f_{Ex} = 2500$ Hz zunehmend gedämpft wird. Bei der zweistufigen Konfiguration ist ebenfalls eine Betriebspunkt-übergreifende Charakteristik (Doppel-S-Schlag) festzustellen, wenngleich auch nicht so ausgeprägt wie im Fall der einstufigen Turbine. Wie in Abb. 8.3 zu erkennen ist, treten auch hier wieder Bereiche sehr geringer Dämpfung und die bereits beschriebenen Schwellbereiche auf.

Aus der offenen Literatur sind keine vergleichbaren Experimente bekannt, die den Schalltransport eines Rotor-asynchron in eine Turbine eingekoppelten Schallfeldes untersuchen. Einzig Doyle und Matta (1977) veröffentlichen umfangreiche Messergebnisse zu den Schalltransmissionsuntersuchungen an einer ein- und dreistufigen Turbine, die bereits in den

1970er Jahren im Rahmen der Entwicklung des GE CF6-50 Triebwerks durchgeführt worden sind. Darauf aufbauend entwickeln Matta und Mani (1979) ein einfaches Transmissionsmodell auf Actuator Disk Basis.

Wie in dieser Arbeit herausgestellt ist, beschreiben auch Doyle und Matta (1977) einen charakteristischen Dämpfungsverlauf für die eingekoppelten Schallfelder in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz. Dieses als „Bathtub“-Verlauf bezeichnete Verhalten, zeigt zu sehr niedrigen und sehr hohen Frequenzen hin eine hohe Dämpfung. Zwar sind die Maschinenparameter nicht mit der in dieser Arbeit eingesetzten Luftturbine identisch, so dass die beschriebenen Effekte Frequenz-verschoben auftreten, doch zeigen die von Doyle und Matta (1977) präsentierten Ergebnisse auch die hier gefundenen S-Schlagverläufe auf, die dort im mittleren Bereich des Transmissionspektrums auftreten. Dies legt den Schluss nahe, dass es sich dabei um ein charakteristisches Transportphänomen handelt.

Die Untersuchungen in der Luftturbine zeigen, dass bei den vorherrschenden Versuchsbedingungen und Betriebsverhältnissen die Transmissionscharakteristik nicht bzw. nur marginal von Massenstrom und Rotordrehzahl abhängt. Dieser Effekt wird auch von Doyle und Matta (1977) beschrieben. Vielmehr wirkt sich die Anzahl der Stufen auf die Transmissionseigenschaften aus. Wie zu beobachten ist, scheint sich durch die Implementierung der zweiten Stufe lediglich der Amplitudengang nicht aber der Betrag der Transmissionsverluste an sich zu ändern.

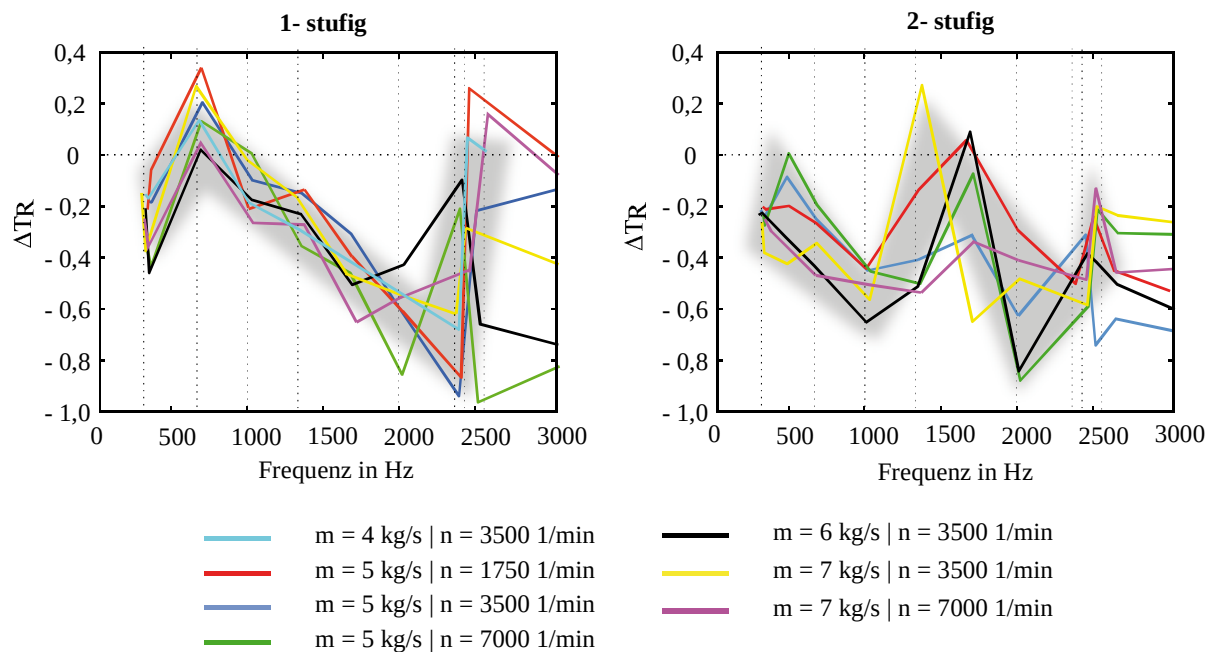


Abbildung 8.3: Zusammenstellung der Transmissionsverluste für unterschiedliche Betriebspunkte der einstufigen (links) und zweistufigen (rechts) Turbinenkonfiguration.

Die experimentellen Untersuchungen von Doyle und Matta (1977) geben zwar einen umfassenden Einblick in das globale Transmissionsverhalten von Turbinen, jedoch werden aufgrund der verwendeten geringen Sensoranzahl keine Aussagen zu den modalen Schall-

transportmechanismen gegeben. Diese sind allerdings die Basis für die beobachteten Transmissionsverläufe. Mit den entwickelten Analysemethoden wird im nachfolgenden Abschnitt die modale Struktur der in die Stufe ein- und austretenden Schallfelder untersucht.

Analyse der modalen Cut-On Eigenschaften

Vor der eigentlichen Behandlung der modalen Schallfeldstruktur wird eine Cut-On-Analyse durchgeführt. In Abhängigkeit vom Betriebspunkt und den geometrischen Abmessungen werden die ausbreitungsfähigen Moden für jedes Segment bestimmt. Abbildung 8.4 stellt

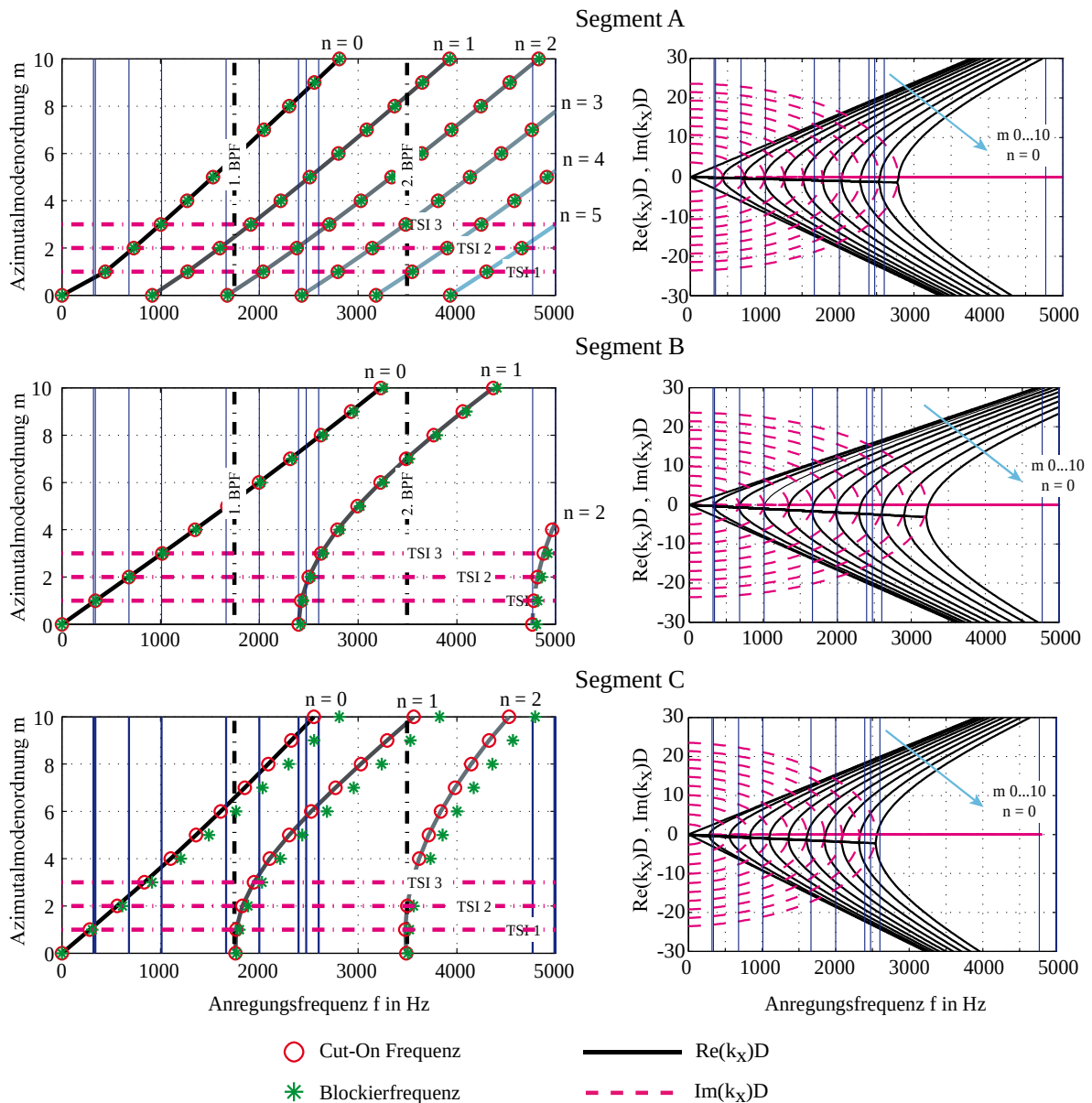


Abbildung 8.4: Übersicht der Ergebnisse der Cut-On Analyse für den Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$. (links) Ausbreitungsfähige Moden in Abhängigkeit von der Frequenz für die Segmente A, B und C. (rechts) Korrespondierende Dispersionsdiagramme.

für die einstufige Turbinenkonfiguration die ausbreitungsfähigen Azimutal- und Radialmoden als Funktion der Anregungsfrequenz f_{Ex} dar. Zusätzlich sind in den Diagrammen die Anregungsfrequenzen sowie die BPFs und die Tyler-Sofrin-Interaktionsmoden (TSI) eingezeichnet. Aufgrund des Nabenkörpers sind im Gegensatz zum Turbineneintritt (Segment A) in Segment B und C wesentlich weniger Radialmoden ausbreitungsfähig. So tritt in Segment B die erste Radialmode ab einer Frequenz von $f_{\text{Ex}} = 2396$ Hz auf, während bereits acht Azimutalmoden anregbar sind. Hinter der Stufe ist eine Verschiebung der Cut-On Grenze hin zu niedrigen Frequenzen zu beobachten. Dieser Effekt ist neben der Vergrößerung des Kanalquerschnitts vorwiegend auf die vorherrschende Drallüberlagerung zurückzuführen. Dies bewirkt, dass sich bereits ab $f_{\text{Ex}} = 1838$ Hz die erste Radialmode ausbilden kann, die in diesem Fall fast mit der ersten BPF zusammenfällt.

Zusätzlich sind in Abb. 8.4 die korrespondierenden Dispersionsdiagramme dargestellt (vgl. Abschnitt 4.1.4). Aufgrund der axialen Strömung bilden sich ab der Cut-On-Frequenz zwei asymmetrische Äste der axialen Wellenzahl aus. Des Weiteren tritt die Blockierfrequenz auf, die entscheidend für die Modenausbreitung in Strömungsrichtung ist. Wie die Analysen zeigen, wirken diese Effekte insbesondere in den Segmenten B und C, so dass hier anstelle der Cut-On-Frequenz die Blockierfrequenz zu verwenden ist. Dieser Effekt verstärkt sich insbesondere zu höheren Radialmoden hin.

Wie zu erkennen ist, wird die Schallfeldanregung so ausgeführt, dass die Anregungsfrequenzen in unmittelbarer Nähe der Cut-On-Frequenzen der $mn_{[1...10;0]}$ Moden des Segments B liegen. Ein Vergleich der Segmente B und C zeigt, dass diese Moden hinter der Stufe bereits Cut-On, also voll ausbreitungsfähig, sind - selbst unter Berücksichtigung der Blockierfrequenzen.

Diese Cut-On Analyse ermöglicht die prinzipielle Einordnung der Ausbreitungsfähigkeit akustischer Moden in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen und Strömungszuständen. Ob sich eine Mode tatsächlich im Fernfeld auch ausbreitet, ist mit dieser Analyse hingegen nicht direkt bestimmbar. Dafür sind vielmehr die Anregungsart und die vorherrschenden Übertragungszustände im Kanal entscheidend. Dies wird im nachfolgenden Abschnitt untersucht.

8.1.3 Modenanalyse der angeregten Schallfelder

In Abb. 8.5 sind die Amplitudendifferenzen der zwischen Turbinenein- und austritt (Segment B und C) auftretenden Azimutalmoden $mn_{[0...5;0]}$ für die verschiedenen Anregungsfrequenzen gegenübergestellt. Es wird nur die einstufige Konfiguration betrachtet. Im linken Diagramm sind die Amplitudendifferenzen ΔA auf den Betrag der bei der jeweiligen Anregungsfrequenz auftretenden maximalen Amplitudendifferenz $\Delta A_{\text{max},f}$ bezogen. So lässt sich die Dämpfung der akustischen Energie der fünf Azimutalmoden bei einer definierten Anregungsfrequenz vergleichen. Im rechten Diagramm sind hingegen die Amplitudendifferenzen mit dem Betrag der im gesamten Spektrum auftretenden maximalen Amplitudendifferenz ΔA_{max} normiert. Dies erlaubt die Verteilung der modalen Dämpfung über das gesamte Spektrum zu vergleichen.

Wie zu erkennen ist, weist die Grundmode bei allen Anregungsfrequenzen, außer bei $f_{\text{Ex}} = 2630$ Hz, die höchsten modalen Transmissionsverluste auf. Für $f_{\text{Ex}} = 2380$ Hz sind diese maximal, das heißt, hier tritt die höchste Dämpfung der Grundmode ein. Dieser Effekt be-

8.1 Schalltransportuntersuchungen in der Versuchsturbine

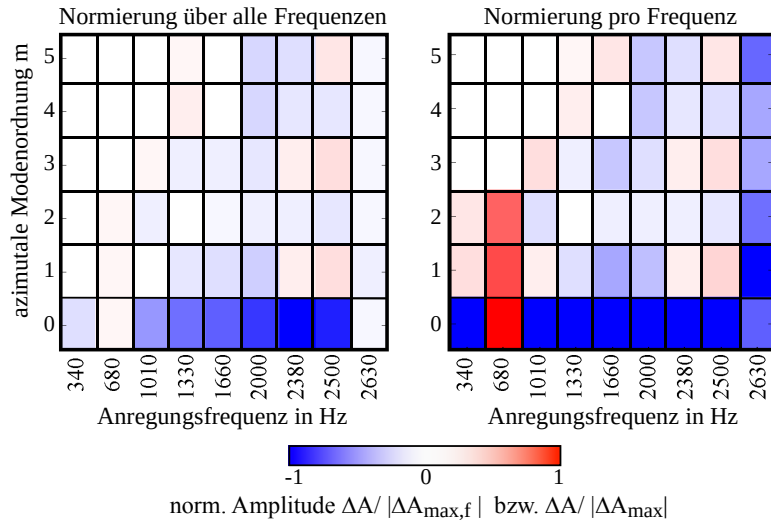


Abbildung 8.5: Vergleich der Amplitudendifferenzen einzelner Azimutalmoden m bei verschiedenen Anregungszuständen des Betriebspunktes $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$. (links) Normierung der Amplitudendifferenz auf den Betrag der maximalen Amplitudendifferenz separat für jede einzelne Anregungsfrequenz. (rechts) Normierung der Amplitudendifferenz auf den Betrag der höchsten Amplitudendifferenz aller Anregungsfrequenzen.

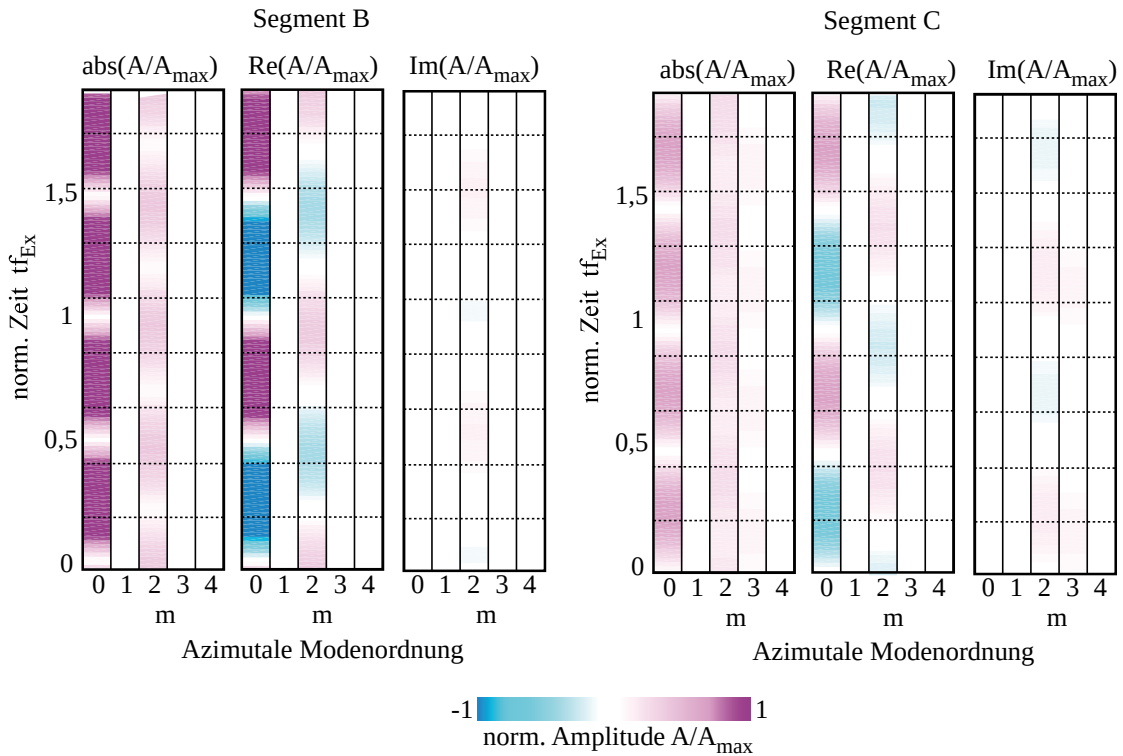


Abbildung 8.6: Ergebnisse der Wellenanalyse für den betrachteten Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$ für Segment B (vor Stufe) und Segment C (hinter Stufe). Übersicht über die komplexen Modenamplituden.

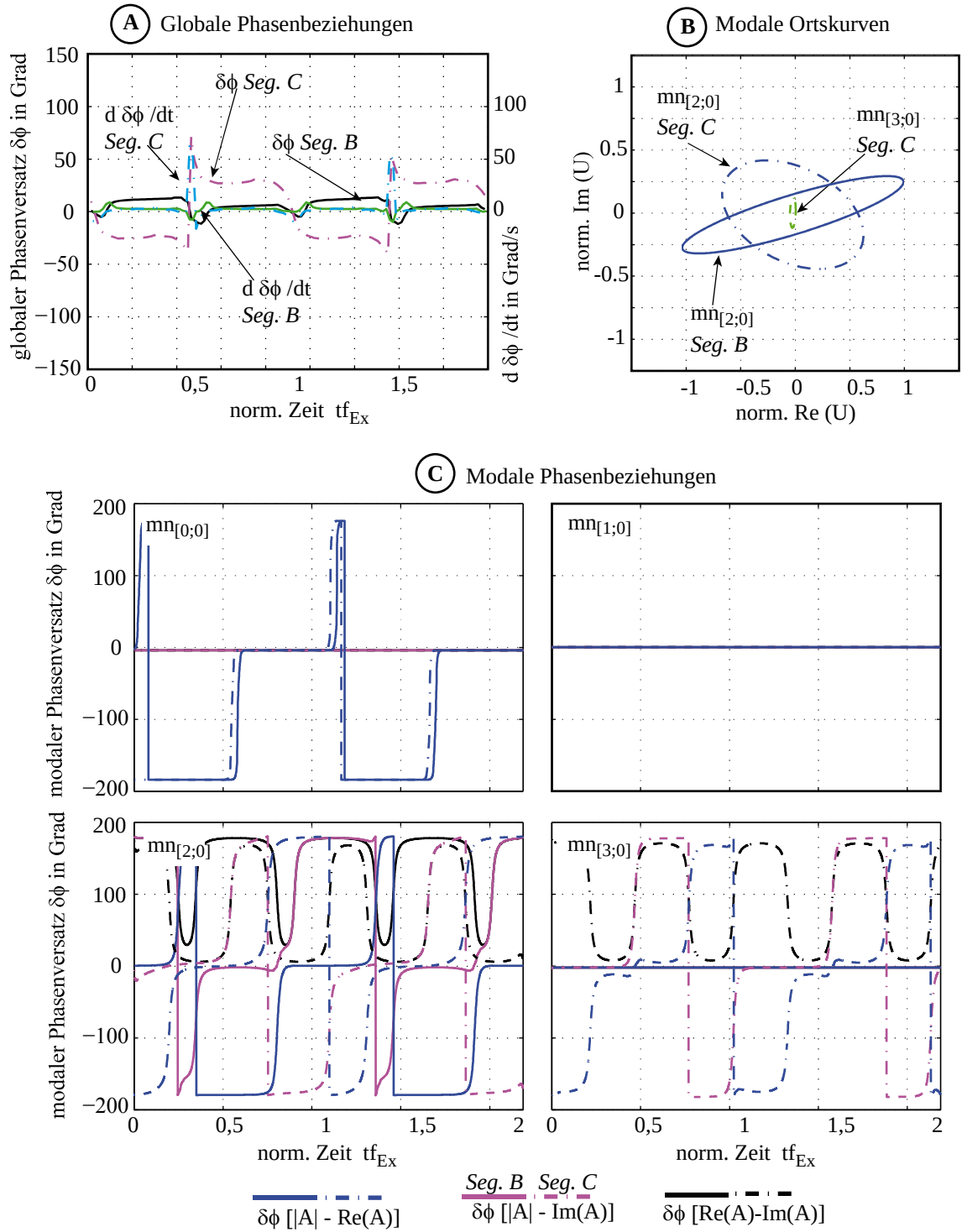


Abbildung 8.7: Ergebnisse der Wellenanalyse für den betrachteten Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$ für Segment *B* (vor Stufe) und Segment *C* (hinter Stufe). (A) Vergleich der globalen Phasenlagen und deren Gradienten. (B) Übersicht über die Ortskurven der einzelnen Moden des überlagerten Feldes. (C) Übersicht über die modalen Phasenbeziehungen für ausgewählte Moden.

einflusst maßgeblich das spektrale Transmissionsverhalten, wie auch im Vergleich mit Abb. 8.3 deutlich wird. Der dort beschriebene Anstieg der Transmission nach dem Schwellwert ist auch anhand der modalen Amplitudendifferenzen zu erkennen. So sind bei $f_{\text{Ex}} = 2630$ Hz sämtliche Modendifferenzen nahezu null. Bei dieser hohen Anregungsfrequenz ist nun nicht mehr die Grundmode dominant, sondern die $mn_{[1;n]}$ Mode, die allerdings auch als Radialmode auftreten kann.

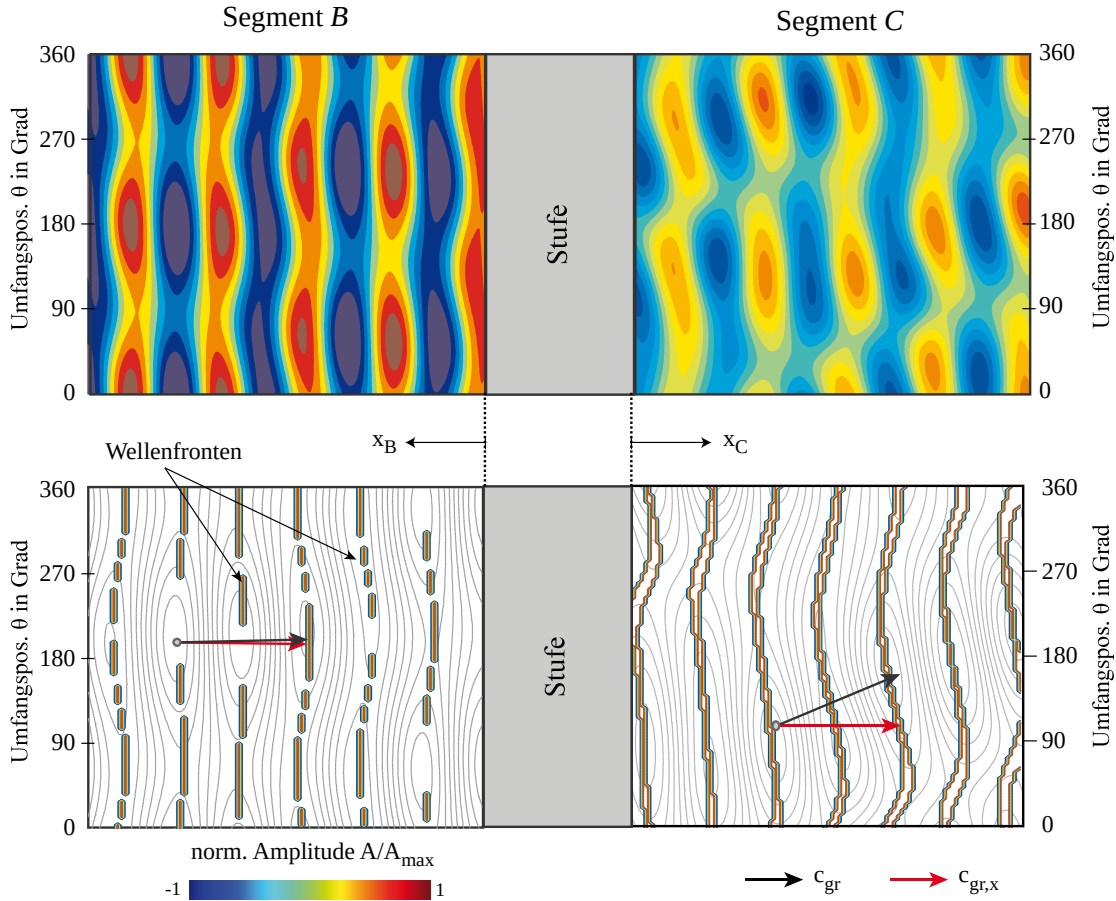


Abbildung 8.8: (oben) Berechnete Schallfeldausbreitung in axialer Richtung für Segment *B* (vor Stufe) und Segment *C* (hinter Stufe) zu einem Zeitpunkt für $\dot{m} = 5$ kg/s und $n = 3500$ min⁻¹ bei $f_{\text{Ex}} = 1010$ Hz. (unten) Resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeiten des überlagerten Modenfeldes.

Bei Durchtritt durch die Turbine verändert sich in den meisten Fällen die Struktur des Schallfeldes. Es treten zwei Effekte auf: Zum einen ändern sich die Teilmodenzustände, zum anderen ist die Gesamtzusammensetzung der einzelnen Moden verändert. Diese Eigenschaften sind deutlich an dem in Abb. 8.6 und Abb. 8.7 dargestellten Beispiel für $f_{\text{Ex}} = 1010$ Hz zu erkennen. Die $mn_{[2;0]}$ Mode liegt in Segment *B* als partiell stehende Mode mit hohem Teilmodenverhältnis ($\epsilon = 0,73$) vor, während sie in Segment *C* ein wesentlich geringeres Teilmodenverhältnis zeigt. Dies wird sowohl an der Ortskurve ② (vgl. Abb. 8.7) als auch an den komplexen Phasenlagen ③ deutlich, indem der Realteil der Ortskurve dominiert bzw. $\delta\phi_{\text{R-3}}$ eine hohen Phasenversatz aufweist.

8 Turbinenversuche

Die $mn_{[3;0]}$ Mode ist vor Turbineneintritt noch nicht ausbreitungsfähig. Erst im Strömungskanal hinter der Stufe breitet sich diese bei der Anregungsfrequenz von $f_{\text{Ex}} = 1010$ Hz aus, wie auch in Abb. 8.7 (B) zu erkennen ist. Sie weist einen partiell stehenden Charakter mit einem Teilmodenverhältnis von $\epsilon = 0,6$ auf, was direkt über die komplexen modalen Phasenbeziehungen ersichtlich ist (C).

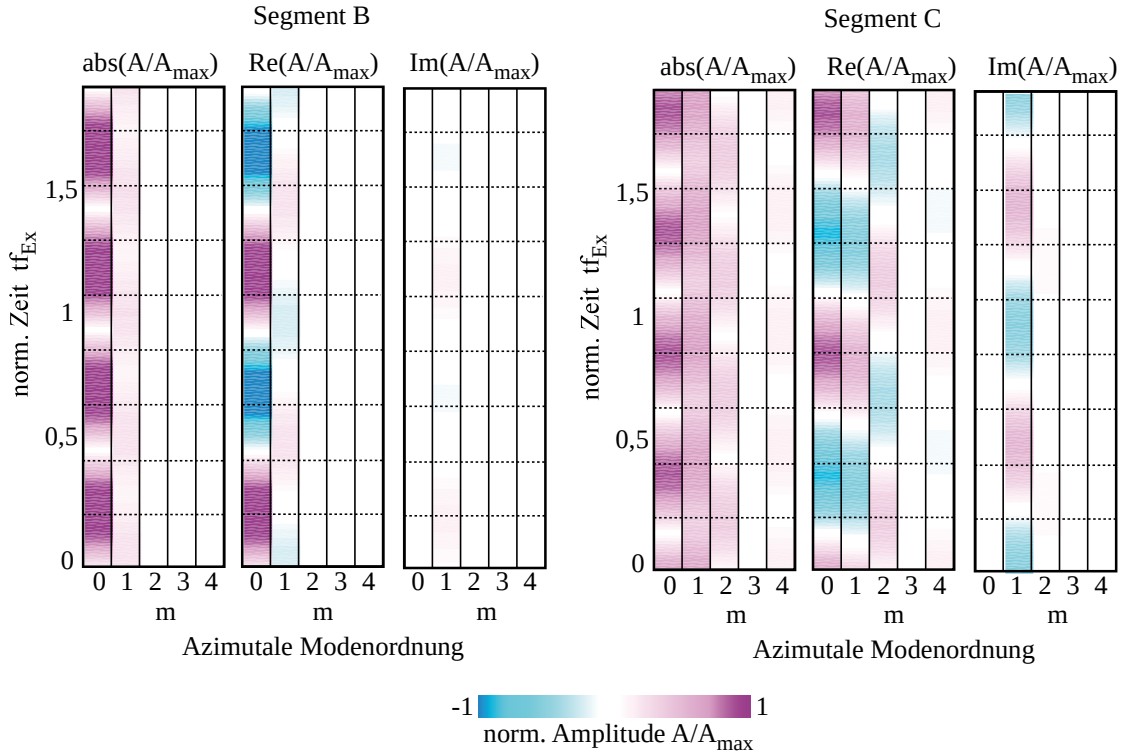


Abbildung 8.9: Übersicht der Ergebnisse der Wellenanalyse für den betrachteten Betriebspunkt $\dot{m} = 5$ kg/s und $n = 3500$ min⁻¹ bei $f_{\text{Ex}} = 680$ Hz für Segment B (vor Stufe) und Segment C (hinter Stufe). Übersicht über die komplexen Modenamplituden.

Eine Dämpfung über der Stufe tritt für die $mn_{[2;0]}$ Mode nicht bzw. nur geringfügig auf. Auch bei dieser Anregungsfrequenz sind die globalen Transmissionsverluste im Wesentlichen auf die überproportional starke Dämpfung der Grundmode zurückzuführen. Dies geht sowohl aus den Modendifferenzen als auch aus der Modenanalyse hervor. Die überproportional hohe Dämpfung der dominanten $mn_{[0;0]}$ Mode bewirkt, dass das Schallfeld hinter der Stufe wesentlich stärker von der $mn_{[2;0]}$ Mode geprägt ist. Das Feld hat nun einen drehenden Charakter, wie anhand der globalen Phasenbeziehungen in Abb. 8.7 (A) erkennbar ist. Abbildung 8.8 stellt dazu die mit dem Transportmodell berechnete axiale Ausbreitung des Schallfeldes vor sowie hinter der Stufe dar und gibt einen Vergleich der Ausbreitungsgeschwindigkeiten gemäß der in Abschnitt 4.1.3 angestellten theoretischen Überlegungen.

Noch deutlicher treten diese Effekte für den Sonderfall bei einer Anregung von $f_{\text{Ex}} = 680$ Hz auf. Wie in Abb. 8.9 zu erkennen ist, ist auch hier die Grundmode wieder dominant, doch weisen die übrigen Azimutalmoden hinter der Stufe wesentlich höhere Amplituden als vor der Stufe auf. Die ebenfalls detektierte $mn_{[4;0]}$ Mode ist auf Nahfeldeffekte zurückzuführen

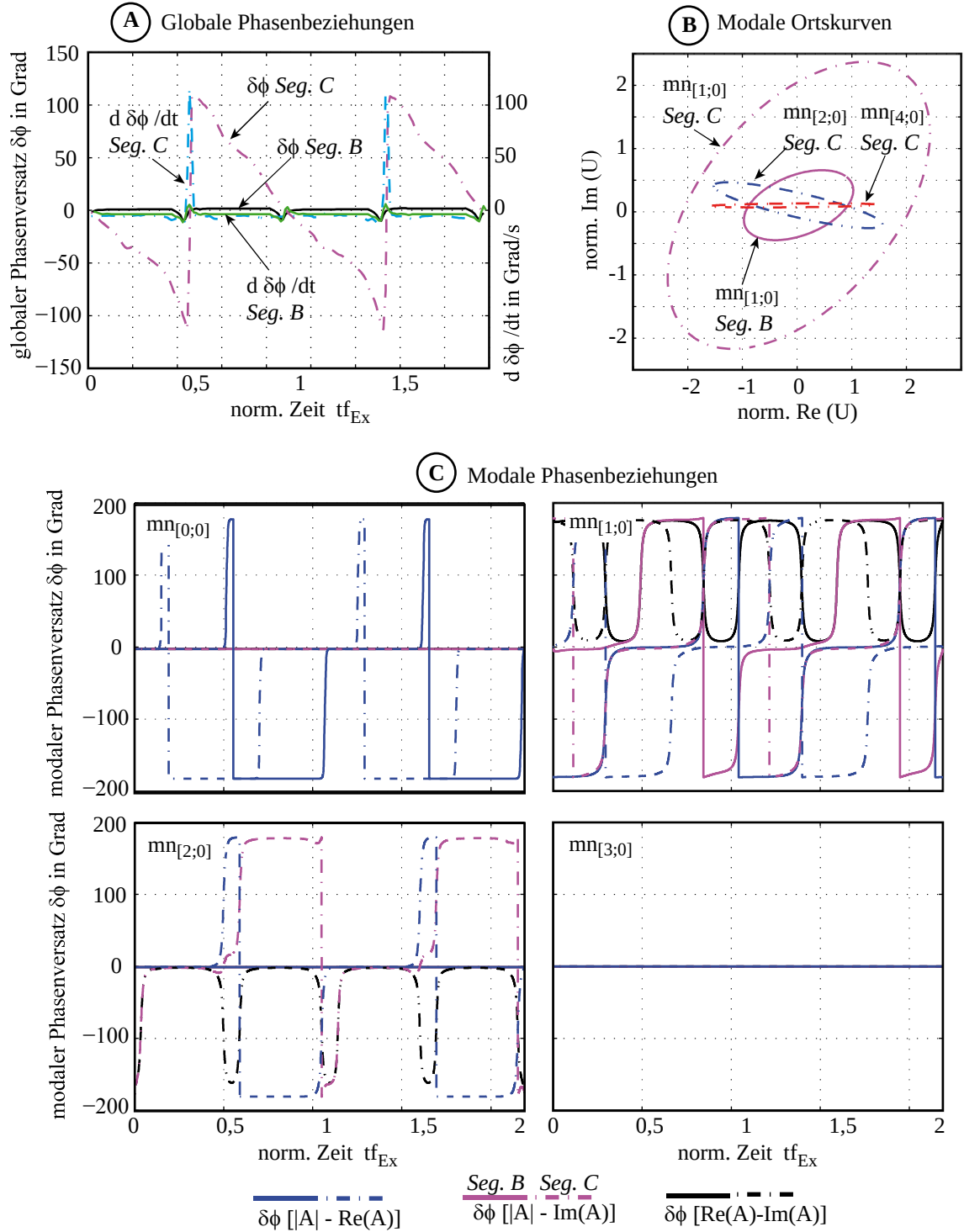


Abbildung 8.10: Übersicht der Ergebnisse der Wellenanalyse für den betrachteten Betriebspunkt $\dot{m} = 5$ kg/s und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{Ex} = 680 \text{ Hz}$ für Segment B (vor Stufe) und Segment C (hinter Stufe). (A) Vergleich der globalen Phasenlagen und deren Gradienten. (B) Übersicht über die Ortskurven der einzelnen Moden des überlagerten Feldes. (C) Übersicht über die modalen Phasenbeziehungen für ausgewählte Moden.

und ist im Fernfeld nicht ausbreitungsfähig. Insbesondere die $mn_{[1;0]}$ Mode ist im Segment C dominant und bewirkt dort den drehenden Charakter des gesamten Schallfeldes, wie anhand der globalen Phasen $\delta\phi$ deutlich wird (vgl. Abb.8.10, (A)). Zusätzlich ist nun auch die $mn_{[2;0]}$ Mode angeregt, die sich allerdings entgegen der $mn_{[1;0]}$ Mode ausbreitet, wie anhand der modalen Phasenlagen zu erkennen ist (vgl. (C)). Die Existenz der höheren Azimutalmoden hinter der Stufe ist der Grund für das im globalen Transmissionsverlauf (vgl. Abb. 8.3) auftretende positive ΔT_R . Wie die Modalanalyse zeigt, ist dabei nicht mehr die Grundmode der entscheidende Einflussfaktor, sondern die hohen Amplituden der $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode, die vermutlich gezielt durch eine auftretende Kanalresonanz angeregt werden.

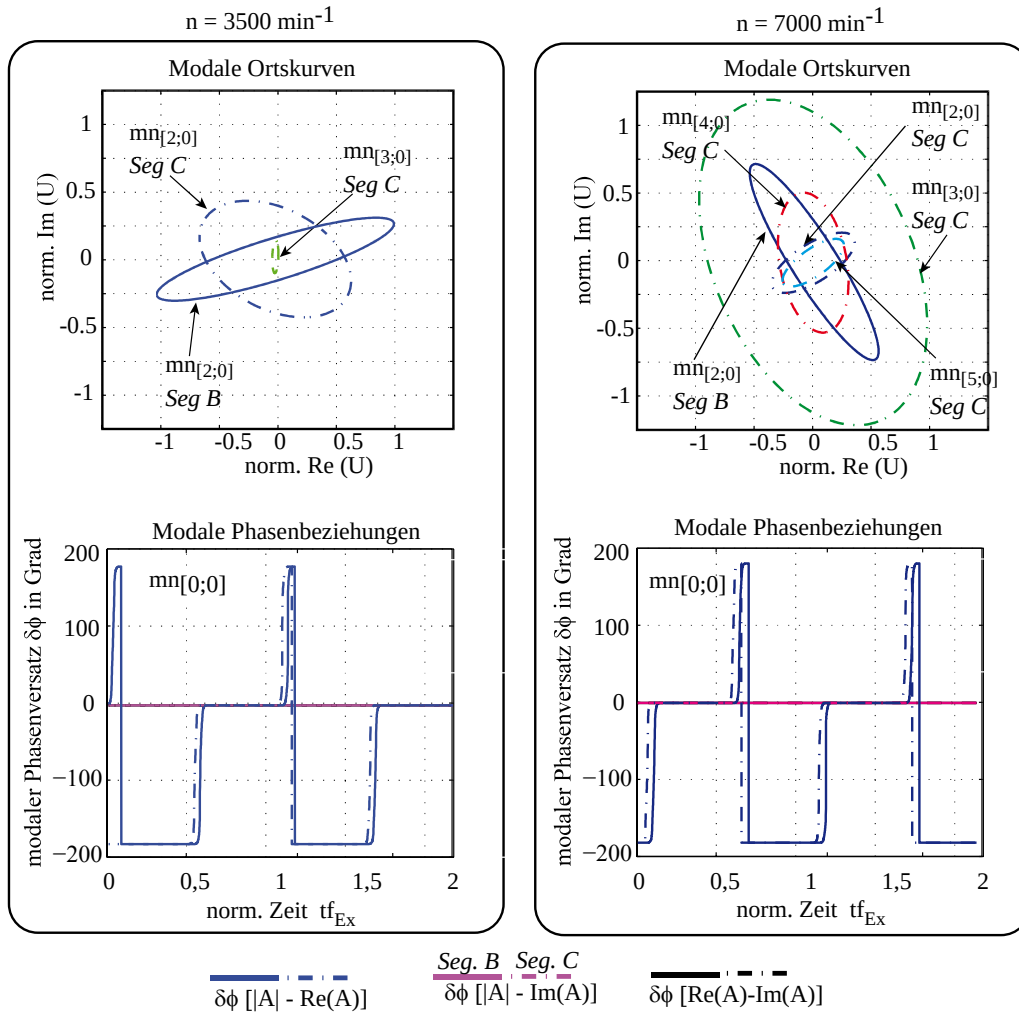


Abbildung 8.11: Vergleich der Moden in Segment B und C für zwei unterschiedliche Betriebspunkte $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ und $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 7000 \text{ min}^{-1}$ bei einer Anregungsfrequenz von $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$. (oben) Ortskurven. (unten) Modale Phasenbeziehungen der $m_{[0;0]}$ Mode.

Aus den Ergebnissen lässt sich schlussfolgern, dass das spektrale Transmissionsverhalten maßgeblich von der Dämpfung der jeweils dominanten Mode abhängt. In den Versuchen ist dies in den meisten Fällen die Grundmode. Höhere Azimutalmoden haben dann nur einen

untergeordneten Effekt. Wie die Modenanalysen zeigen, wird die Grundmode in ihrer modalen Struktur bei Stufendurchtritt hingegen kaum beeinflusst. Zwar nimmt die Amplitude teilweise massiv ab, doch ändert sich die Phasenlage kaum, wie es bei höheren Azimutalmoden der Fall ist. Die Änderung der komplexen Phasen und des Teilmodenverhältnisses ϵ ist dabei entscheidend von dem Betriebszustand der Maschine (Drehzahl, Massenstrom, Drall) geprägt. Diese Effekte haben lediglich auf höhere Moden einen Einfluss, während die Grundmode nahezu unbeeinflusst bleibt.

In Abb. 8.11 ist dies für einen Anregungszustand mit $f_{\text{Ex}} = 1010$ Hz bei zwei unterschiedlichen Betriebszuständen ($n = 3500 \text{ min}^{-1}$ und $n = 7000 \text{ min}^{-1}$) verdeutlicht. Wie für die Grundmode zu erkennen ist, sind die Phasenlagen vor und hinter der Stufe nahezu unabhängig vom Betriebspunkt. Die Ortskurven der höheren Azimutalmoden zeigen hingegen, dass bei Variation der Drehzahl eine Veränderung der modalen Struktur auftritt. Dies ist eine Erklärung dafür, dass die spektrale Transmission in den Untersuchungen kaum von der Drehzahl und dem Betriebspunkt abhängt, da die dominante Mode fast immer die Grundmode ist.

Berechnung der räumlichen Schallfeldstrukturen

Der in Abb. 8.8 gezeigte axiale Schallfeldverlauf wird mit Hilfe des in Kapitel 5 vorgestellten Transportmodells berechnet. Mit diesen Ergebnissen ist eine vertiefte Analyse der axialen Ausbreitungseigenschaften möglich.

Wie ebenfalls in Abb. 8.8 dargestellt ist, werden auf Basis dieser Daten z.B. die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des gesamten Modenfelds bestimmt. Die experimentellen Randbedingungen entstammen der Modenanalyse, deren Ergebnisse auszugsweise in Abb. 8.6 und Abb. 8.7 zusammengestellt sind. Die Berechnung basiert auf den rein azimuthal gemessenen Schalldrücken in den Segmenten B und C .

Während in Kapitel 7 die experimentelle Validierung des hybriden Analyseansatzes im AWT vorgestellt wurde, zeigen die in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse, dass die Methodik auch für die Turbinenmessungen geeignet ist. Dazu werden in Abb. 8.12 beispielhaft für die Anregung von $f_{\text{Ex}} = 1010$ Hz die experimentellen und die mit dem Schalltransportmodell berechneten Schalldruckverläufe $p'(\theta, t)$ in den Messebenen verglichen. Es zeigt sich, dass mit dem Transportmodell eine qualitativ gute Reproduktion des experimentell gemessenen Schallfelds möglich ist. Selbst hinter der Stufe, wo eine starke Drallüberlagerung des akustischen Feldes vorliegt und die experimentellen Daten über das Synchronisationsverfahren zusammengesetzt werden. Der hybride Ansatz eignet sich folglich auch zur simulativen Untersuchung der Turbinenschallfelder. In den Messergebnissen auftretende Artefakte können allerdings nicht abgebildet werden.

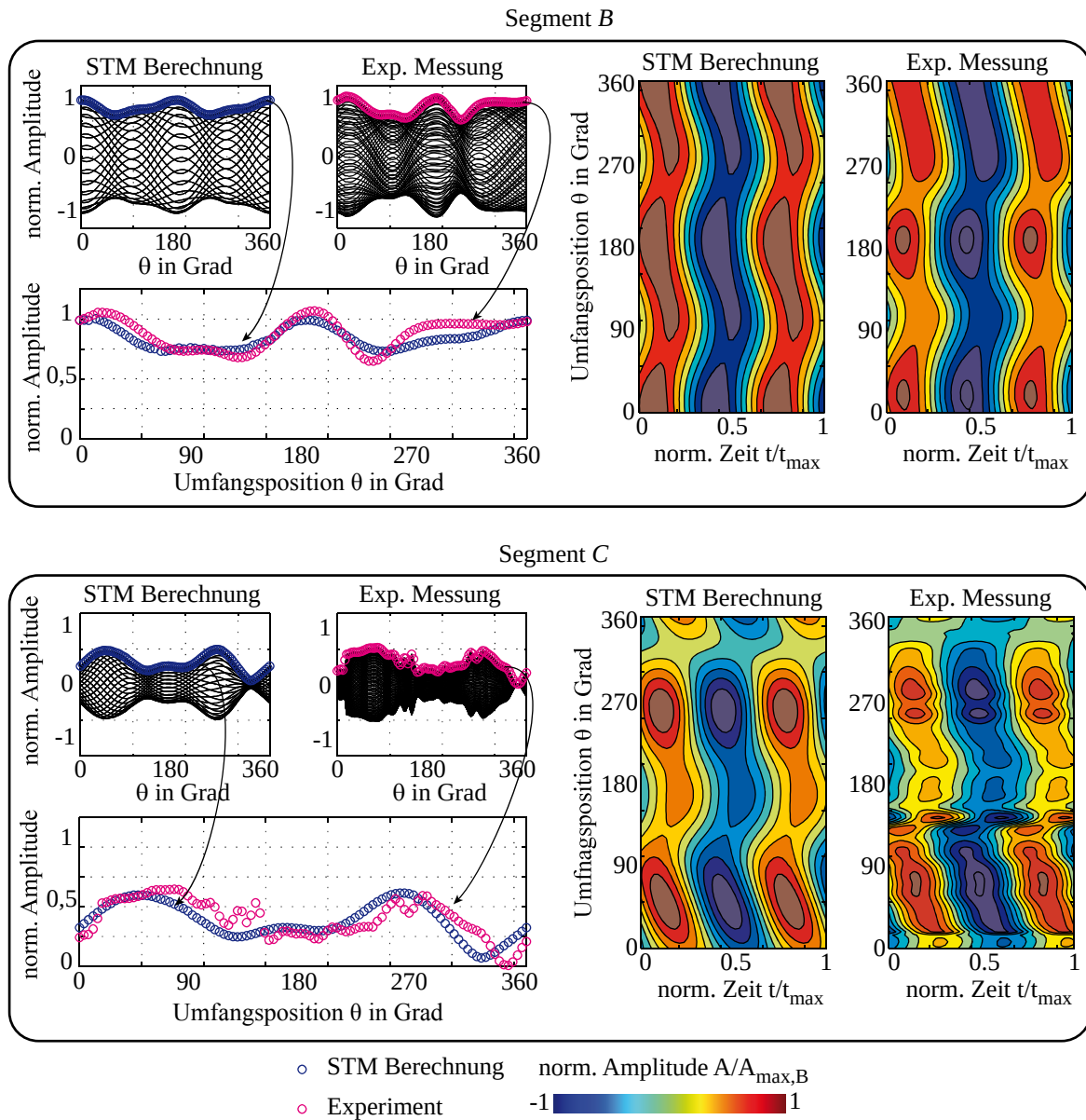


Abbildung 8.12: Qualifizierung der Schallfeldberechnung für Segment B (vor der Stufe) und Segment C (hinter der Stufe) anhand der zeitabhängigen Envelopen (links) und den Schalldruckverläufen $p'(\theta, t)$. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe des Schalltransportmodells (STM) unter Verwendung der experimentell ermittelten Randbedingungen bei dem Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$ und $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ bei $f_{\text{Ex}} = 1010 \text{ Hz}$.

9 Schlussfolgerungen und Ausblick

9.1 Schlussfolgerungen

In dieser Arbeit wird der Transport von Schallfeldern untersucht, die Rotor-asynchron in eine ein- und zweistufige Niederdruckturbine eingekoppelt werden, um einen Beitrag zum besseren Verständnis der komplexen Transportmechanismen in Turbomaschinen zu leisten.

In Flugtriebwerken lassen sich aufgrund der Zugänglichkeit und des begrenzten Bau- raums nur eine geringe Anzahl an Sensoren implementieren. Durch eine Reduktion der Sensoren verringern sich jedoch allgemein die Auswertungsmöglichkeiten. Somit sind Mess- und Analyseverfahren, die mit einer geringen Anzahl an Messstellen auskommen, von be- sonderer Bedeutung. Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist somit die Entwicklung eines hybriden Analyseansatzes, bei dem die Auswertung sowohl auf die Ergebnisse einer expe- rimentellen Messung als auch auf die Ergebnisse einer analytischen Schallfeldberechnung zurückgreift. Es wird demonstriert, dass komplexe Schallfelder auf Basis an nur wenigen Stützstellen experimentell ermittelter Randbedingungen simuliert werden können, um so das komplette Abbild des zeitlichen und räumlichen Schalldruckverlaufs zu ermitteln.

Die experimentellen Untersuchungen belegen, dass gerade bei Rotor-asynchroner Schall- feldanregung in den seltensten Fällen reine Spinning Modes im Schallfeld auftreten. Es liegen hingegen vielfältig überlagerte Einzelmoden vor, die sowohl drehenden als auch ste- henden bzw. partiell stehenden Charakter haben. Die überlagerten Modenfelder sind dabei maßgeblich von den Zuständen der dominanten Einzelmoden abhängig. Der in dieser Arbeit verwendete Teilmodenansatz erweist sich zur Abbildung der komplexen Überlagerungszu- stände als sehr hilfreich.

Das entwickelte Schalltransportmodell ist in der Lage, beliebig überlagerte Moden in Kreis- und Ringkreiskanälen zu berechnen. Die Lösung der Wellengleichung erfolgt dabei analytisch und berücksichtigt sowohl eine axiale Strömungsüberlagerung als auch Drall. Das resultierende Gesamtschallfeld wird schließlich aus der Überlagerung der energiereichsten Moden berechnet. Dazu kann jede einzelne Mode separat mit einem Teilmodenverhältnis sowie einem zeitlichen und räumlichen Phasenwinkel justiert werden. Die Experimente zei- gen, dass gerade diese Parameter zur korrekten Abbildung des Schallfeldes notwendig sind. Bereits geringe Abweichungen zwischen den Phasenlagen der einzelnen Moden verändern das Ergebnis merklich.

Zur Bestimmung der axialen Wellenzahlen ist in dem Transportmodell eine Approxi- mation nach Kousen (1995) implementiert. Im Rahmen von Voruntersuchungen hat ein Vergleich der gängigen in der offenen Literatur beschriebenen Ansätze gezeigt, dass das Approximationsmodell nach Kousen bei Drallüberlagerung die besten Ergebnisse für einen

numerischen Testfall liefert. Das hingegen oftmals verwendete Modell nach Ghiladi (1981) erweist sich als fehlerhaft, so dass dessen Einsatz nicht empfohlen wird.

Etablierte Methoden zur Bestimmung der Modenstruktur geben zwar Auskunft über die Modenverteilung im Schallfeld, deren Amplituden und Ausbreitungsrichtungen, doch liefern sie weder direkte Informationen über die azimuthalen und zeitlichen Phasenbeziehungen, noch über die Teilmodenverhältnisse. Damit ist keine Aussage möglich, ob es sich um eine drehende oder stehende Mode handelt. Die experimentellen Untersuchungen in der Turbine zeigen jedoch, dass gerade diese Informationen für die korrekte Rekonstruktion des Schallfeldes wichtig sind und maßgeblich das Transport- und Transmissionsverhalten durch die Maschine beeinflussen.

Es wird herausgearbeitet, dass sich mit Hilfe der modalen Phasenbeziehungen und der Amplitudenverhältnisse die Schallfeldstruktur einfach beschreiben und nachbilden lässt. Dabei hat es sich als sehr wichtig herausgestellt, den Imaginär- und Realteil der komplexen Modenamplitude, und nicht wie üblich, nur deren Betrag zu betrachten. Die Bestimmung des zeitlichen und räumlichen Phasenversatzes wird mit einer Hilbert-Transformation durchgeführt, welche für diese Anwendung wesentlich bessere Ergebnisse liefert als beispielsweise die klassischen Fourier- oder Laplace-Transformationen.

Es zeigt sich, dass die Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer überlagerten Modenstruktur sehr kompliziert ist, denn die resultierenden Geschwindigkeiten folgen nicht mehr den klassischen Ansätzen der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, wie dies bei reinen Spinning Modes der Fall ist. Es liegt quasi eine modale Dispersion vor, da die Gesamtenergie des Schalldruckfelds auf die jeweiligen Moden verteilt ist, die sich alle mit unterschiedlicher Geschwindigkeit im Wellenkanal ausbreiten. Die resultierende Gruppengeschwindigkeit kann nun als gemittelte Ausbreitungsgeschwindigkeit verstanden werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird gezeigt, dass eine einfache vektorielle Addition der Ausbreitungsgeschwindigkeiten der beteiligten Teilmoden jedoch nur für ein Teilmodenverhältnis von $\epsilon = 1$ zulässig ist. Liegen hingegen Moden bzw. Teilmoden unterschiedlicher Ordnung, Amplitude oder gar Frequenz vor, ist eine solch einfache Addition nicht mehr zulässig. In dieser Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, mit dem eine geometrische Bestimmung der resultierenden Gesamtgeschwindigkeit möglich ist.

Auf Basis der analytischen Überlegungen und der experimentellen Beobachtungen wird eine neue Analysemethodik entwickelt, mit Hilfe derer azimuthale Schallfelder eingehend untersucht werden können. Mit einer Azimutalmodenanalyse werden dazu die Zeitreihen zunächst in ihre modalen Bestandteile zerlegt. Der entscheidende Ansatz der Methodik ist die Verwendung der zeitabhängigen, komplexen Modenamplituden und nicht etwa zeitgemittelter Größen. Das entwickelte Analyseverfahren nutzt dabei eine Singulärwertzerlegung (SVD). Damit lassen sich neben den azimuthalen Phasenwinkeln auch die Teilmodenverhältnisse und Ortskurven bestimmen. Wie sich herausstellt, ist die SVD eine sehr effektive Methode zur Wellenzerlegung und zur Analyse der modalen Schallfeldstruktur. Im Rahmen dieser Arbeit ist bei Weitem nicht das ganze Potential dieses Verfahrens ausgeschöpft worden. Es ist auch ein Transfer in andere Disziplinen, wie etwa die aeroelastischen Untersuchungen von Schaufelkranzschwingungen, Rotoren oder Wellenbahnen, denkbar.

Nachdem die Analysemodelle in einem aeroakustischen Windkanal für Rohranwendungen experimentell verifiziert worden sind, werden umfangreiche Untersuchungen in einer Versuchsturbine durchgeführt. Diese liefern eine breite Datenbasis für die Beschreibung der Transport- und Transmissionsmechanismen Rotor-asynchron angeregter Schallfelder in Niederdruckturbinen. Die gewonnenen Erkenntnisse sind für die Entwicklung und Verbesserung von Schalltransmissionsmodellen wichtig. Die Messung der akustischen Signale hinter der/den Turbinenstufe/n erfolgt mit Hilfe einer Umfangstraversierung, so dass das Schallfeld anschließend aus allen Messpositionen rekonstruiert werden muss. Eine gängige Methode ist die Synchronisation der akustischen Messdaten mit der Rotordrehzahl. Wie die Untersuchungen jedoch zeigen, ist dies für Rotor-asynchron eingekoppelte Schallfelder nicht möglich. Die neu entwickelte Rekonstruktionsmethode nutzt Korrelationsverfahren zum Abgleich ganzer Schallfelder zwischen den jeweiligen Messpositionen. Dies gewährleistet eine von den Anregungszuständen unabhängige Schallfeldrekonstruktion.

Die in die Turbinenstufen ein- und austretenden Schallfelder weisen ein charakteristisches Transmissionsverhalten auf. Dieser S-Schlag-förmige Verlauf zeigt, dass die Schallfelder bis zu einem Schwellwert über der Stufe stets gedämpft werden. Die eingekoppelte akustische Energie nimmt folglich ab. Allerdings treten sehr schmalbandige Bereiche auf, in denen sogar eine Verstärkung des Schalldrucks zu beobachten ist. Dieser Betriebspunkt-unabhängige Effekt lässt vermuten, dass es sich dabei um akustische Resonanzen handelt. Mit Hilfe der Modenanalyse wird gezeigt, dass die hohen Transmissionsverluste vorwiegend auf die Dämpfung der dominanten Grundmode zurückzuführen sind. Wird eine zweite Stufe implementiert, ist dies nicht mit einer generellen Erhöhung der Dämpfung verbunden. Vielmehr bildet sich eine andere Transmissionscharakteristik aus, bei etwa gleichbleibender Maximaldämpfung.

In den Untersuchungen zeigt sich, dass die Transmission nicht bzw. nur marginal von der Drehzahl abhängt. Diese wichtige Erkenntnis wird auch durch die Arbeiten von Doyle und Matta (1977) bestätigt. So lässt sich schlussfolgern, dass die Rotation zur Bestimmung der Stufentransmission bei dominanter Grundmode vernachlässigbar ist. Dies kann z.B. für die numerische Simulation akustischer Transmissionsvorgänge oder die Entwicklung von Transmissionsmodellen wichtig sein. Wie allerdings auch gezeigt ist, werden die höheren Azimutalmoden durchaus durch Drehzahleffekte beeinflusst.

Sowohl die Erkenntnisse zum Ausbreitungsverhalten stehender bzw. partiell stehender Azimutalmoden, als auch die entwickelten Analyseverfahren sowie die Ergebnisse zur Stufentransmission dienen dazu, zukünftig verbesserte Analysen komplexer Schallfelder in Turbomaschinen durchführen zu können. Gerade für Transport- und Transmissionsuntersuchungen, bei denen nicht Rotor-synchrone Anregungsmechanismen betrachtet werden sollen, stellen die entwickelten Methoden ein wichtiges Instrument dar.

9.2 Ausblick

Verbesserte Schalltransport- und Transmissionsmodelle sind für die Entwicklung neuer Flugtriebwerke von großer Bedeutung. Diese müssen jedoch mit Hilfe qualifizierter Experimente validiert werden. Wie die Turbinenversuche zeigen, spielt die Rotordrehzahl in den hier untersuchten Fällen nur eine untergeordnete Rolle für die Transmission durch die Schaufelgitter bzw. Stufen. Es bietet sich an, zunächst präzise Qualifizierungsexperimente durch rein stehende Schaufelgitter durchzuführen, um die wichtigsten Einflussparameter unter bekannten strömungsmechanischen und akustischen Randbedingungen zu ermitteln. Mögliche Variationen sind neben den thermodynamischen Größen, wie dem Stufeneintrittsdruck, der Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit auch die Profilgeometrie, das Nabenvverhältnis, die Schaufel- und Stufenanzahl sowie die Axialabstände der Schaufelreihen zueinander.

Für solche Grundlagenuntersuchungen eignet sich der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte akustische Windkanal AWT. Dessen modularer Aufbau erlaubt die einfache Erweiterung um einen Nabenkörper und beliebig gestaltete Gitterkaskaden bzw. Stufen. Da die Messstrecke in ihrer Länge variabel ist, können unterschiedlich große Varianten implementiert werden. Durch Einsatz eines Nabenkörpers und die Erweiterung der Luftversorgung lassen sich Turbomaschinen-ähnliche Strömungsbedingungen (Mach-Zahl und Re-Zahl) generieren. Ein weiterer Vorteil des AWT ist, dass dieser druckaufgeladen operieren kann, was nach Doyle und Matta (1977) ein entscheidender Einflussparameter für die Transmission ist. Die in der Versuchsturbine konstruktiv bedingt gegebenen Beschränkungen der Sensorplatzierungen sind im AWT nicht vorhanden. Die gute Zugänglichkeit des Strömungs-führenden Kanals und der Stufe erlaubt eine variable Messstellenverteilung und damit eine optimale Datenermittlung.

In einem zweiten, nachfolgenden Schritt können die an einem stehenden Schaufelgitter gewonnenen Erkenntnisse auf rotierende Gitter übertragen werden. Durch die gezielte Einkopplung einzelner Moden ließen sich so die in der vorliegenden Arbeit beobachteten Effekte vertiefend untersuchen. Der Fokus dieser Arbeiten sollte dabei auf der Untersuchung komplexer Strömungs- und Drallfelder liegen. Neben der Betrachtung rein azimuthaler Moden, ist eine Erweiterung der Modelle und Analyseverfahren auf die Behandlung radialer Moden wichtig.

Auf simulativer Seite sollte das analytische Transportmodell um die Möglichkeit erweitert werden, auch die Stufentransmission berechnen zu können. Zusätzlich sollte der Einsatz rein numerischer Verfahren (CAA) angedacht werden. Diese könnten gerade für realistische Kanalgeometrien und komplexe Strömungsfelder anstelle des analytischen Transportmodells eingesetzt werden. Zuvor sollte ein Vergleich der beiden Verfahren angestellt werden.

A Anhang Prüfstände

A.1 Anhang AWT

Die experimentelle Bestimmung der aerodynamischen und akustischen Eigenschaften des Prüfstands ist Gegenstand einer umfangreichen Inbetriebnahme-Messkampagne, die notwendig ist um nachfolgende Untersuchungen unter definierten Randbedingungen durchführen zu können. Im Rahmen dieser Arbeit sollen jedoch lediglich einige relevante Ergebnisse der Strömungsfeldvermessungen und der Reflexionsmessungen des Systemabschlusses vorgestellt und diskutiert werden. Für eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse sei auf Bartelt et al. (2012) verwiesen. Exakte aeroakustische Untersuchungen erfordern stets ein bekanntes Strömungsfeld, das zunächst homogen und drallfrei sein sollte. Nur so lassen sich eindeutig Rückschlüsse über den Einfluss der überlagerten Grundströmung auf die eigentlichen Schalltransport- und quellmechanismen ziehen. Darauf aufbauend kann die Strömungssituation sukzessive komplexer gestaltet werden, in dem etwa gezielt ein Strömungsdrall aufgeprägt oder lokal die Turbulenz erhöht wird. Im Rahmen der Qualifizierungsmessungen wird daher das Strömungsfeld innerhalb der Messstrecke für verschiedene Betriebspunkte unter Einsatz unterschiedlicher Messtechniken quantifiziert. Dabei soll unter anderem überprüft werden, ob das Strömungsfeld homogen und drallfrei ist, denn numerischen Berechnungen haben im Auslegungsprozess gezeigt, dass Wirbelablösungen hinter dem Konuselement des Schalldämpferdiffusors entstehen, die sich möglicherweise bis in die Messstrecke hinein ausbreiten können. Da aus akustischen Gründen auf den Einsatz von Gleichrichtern und Turbulenzsieben verzichtet wird, sind die Strömungsfeldvermessungen von besonderer Relevanz. Die Untersuchungen werden unter anderem mit Hilfe eines endoskopischen Stereo-PIV Verfahren durchgeführt, dessen Versuchsaufbau in Abb.A.1 gezeigt ist. Durch den Einsatz von zwei Kameras ist es möglich die räumlichen Strömungsvektoren in einer Ebene zu bestimmen, so dass sich Aussagen über alle drei Geschwindigkeitskomponenten treffen lassen. Die Verwendung von Endoskopen ermöglicht zum einen eine Verbreiterung des Gesichtsfeldwinkels und damit eine Vergrößerung des Messausschnitts, zum anderen werden so nur sehr kleine Zugangsbohrungen in der Messstrecke benötigt, so dass auf große Sichtfenster verzichtet werden kann. Nachteilig ist hingegen die starke optische Verzerrung der Aufnahmen insbesondere in den Randzonen. Mit Hilfe spezieller Entzerrungsalgorithmen höherer Ordnung lassen sich diese Effekte jedoch korrigieren. Abbildung A.1 zeigt die aufbereiteten Ergebnisse in zwei senkrecht zueinander stehenden Messebenen innerhalb der Kernströmung der Messstrecke für zwei unterschiedliche Betriebspunkte bei $Re_D = 9,3 \cdot 10^5$ und $Re_D = 12,5 \cdot 10^5$. Wie zu erkennen ist, ist die Strömung in der Messstrecke für jeden Betriebspunkt sehr homogen und gerichtet.

Dies zeigen auch die Ergebnisse der zusätzlich durchgeführten pneumatischen Druckmessungen zur Bestimmung der Total- und statischen Drücke. Dazu wird mit Hilfe einer 5-Lochsonde das Strömungsfeld in radialer Richtung an mehreren Umfangspositionen der

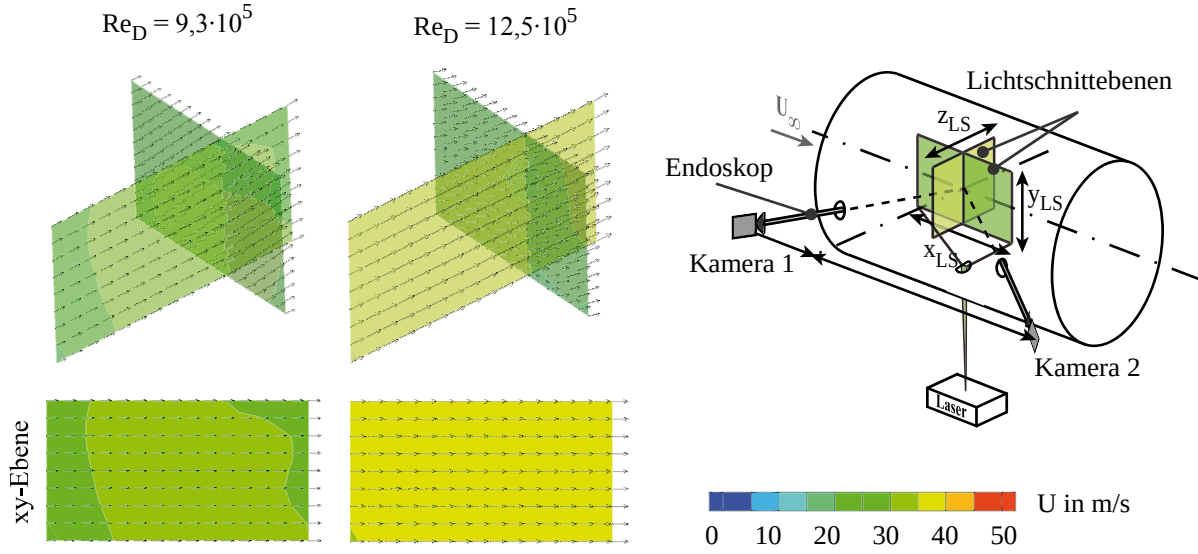


Abbildung A.1: (rechts) Aufbau der PIV-Messungen mit Kameraendoskopen und offener Laserführung. (links) Ergebnisse der PIV-Messungen für verschiedene Betriebszustände

Messstrecke traversiert. Anschließend werden aus den Druck- und Temperaturwerten die Machzahl-Verteilungen nach

$$Ma_{ges} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{p_{tot}}{p_{stat}} \right)^{\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} - 1 \right)}} \quad (A.1)$$

bestimmen. Diese sind in Abb. A.2 für verschiedene Betriebspunkte dargestellt, wobei sich stets ein vollturbulentes Rohrströmungsprofil ohne ersichtliche lokale Diskontinuitäten einstellt.

Analog zu den pneumatischen Vermessungen des Strömungsfeldes, werden auch die radialen Verläufe der Turbulenzintensitäten aufgenommen, wie ebenfalls in Abb.A.2 gezeigt ist. Dazu werden für verschiedene Betriebszustände die turbulenten Schwankungsgrößen mit Hilfe einer 1D-Hitzdrahtanemometrie bestimmt. Wie zu erkennen ist, sind die Radialverläufe des Turbulenzgrads $T_U = \sqrt{u_i'^2} / \bar{u}_\infty$ über dem Rohrquerschnitt ebenfalls homogen und liegen mit 3-8% in den zu erwartenden Bereichen für voll-turbulente Rohrströmungen (in Abhängigkeit von der Hauptströmungsgeschwindigkeit).

Neben der Bestimmung der aerodynamischen Randbedingungen ist es auch notwendig die akustischen Eigenschaften, insbesondere die Reflexionseigenschaften der stromauf und stromab der Messstrecke angebrachten Komponenten zu bestimmen. Exemplarisch soll hier das Reflexionsverhalten des reflexionsarmen Abschlusses vorgestellt werden. Dazu wird die Messstrecke von dem Schalldämpferelement entkoppelt. Mit Hilfe eines speziellen Lautsprechersystems, welches an das offene Ende der Messstrecke montiert wird, werden anschließend gezielt Schallfelder in der Messstrecke für ein breites Frequenzband von 300 bis 5000 Hz angeregt. Die Schallwellen wandern durch die Messstrecke und den reflexionsarmen Abschluss, wo sie allerdings partiell reflektiert werden. Zur Bestimmung des Reflexionsverhaltens werden über dem Umfang des Rohres mehrere Mikrofonpaare an je zwei axial

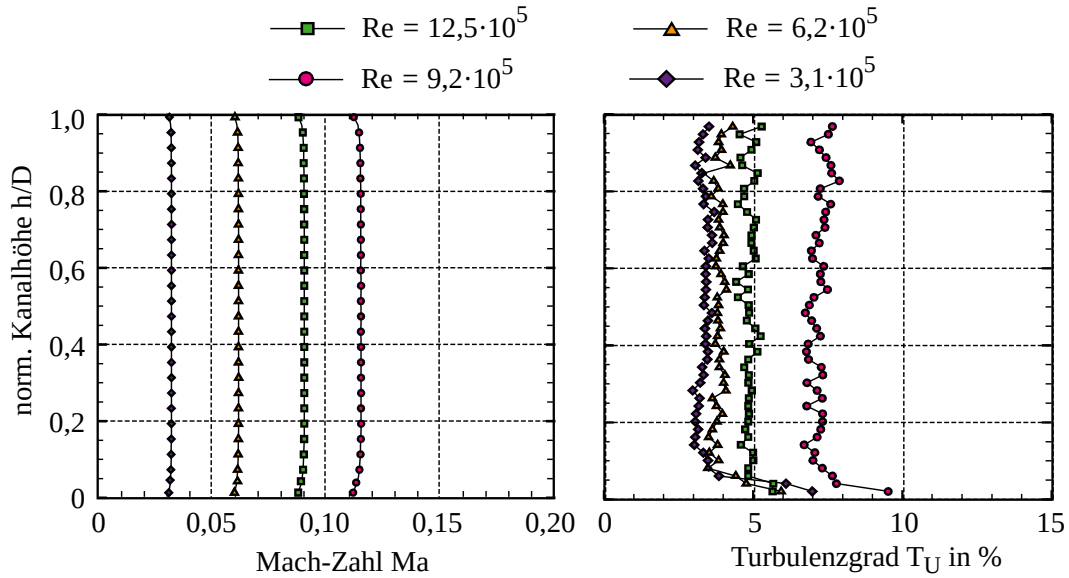


Abbildung A.2: (links) Verläufe der Mach-Zahlen über dem Rohrquerschnitt für verschiedene Betriebspunkte. (rechts) Verläufe des isotropen Turbulenzgrads über dem Rohrquerschnitt für verschiedene Betriebspunkte

gestaffelten Positionen vor den Eintritt des Abschlusses platziert. Somit lassen sich auch Moden höherer Ordnung auflösen.

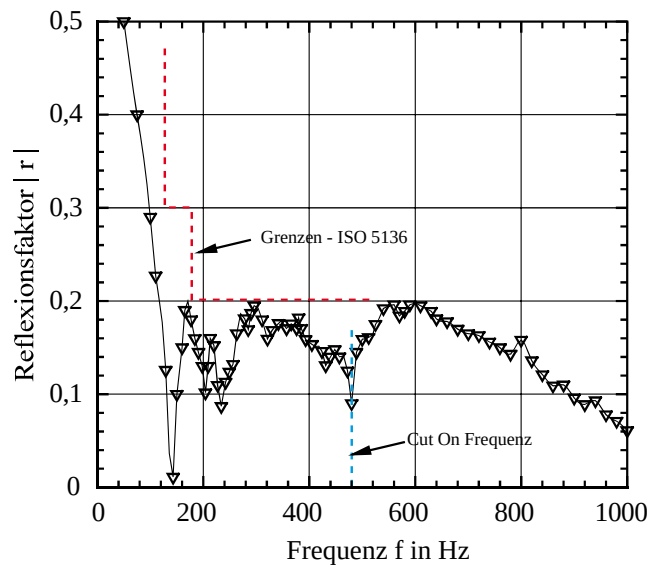


Abbildung A.3: Frequenzspektrum des Reflexionsfaktors für den reflektionsarmen Abschluss

Abbildung A.3 zeigt den resultierenden Verlauf des Reflexionsfaktors. Es ist zu erkennen, dass bereits für Frequenzen $f \geq 125$ Hz der Reflexionsfaktor $r < 0,2$ ist. Dies ist ein nach Norm DIN EN ISO 5136 empfohlener Grenzwert für reflexionsarme Abschlüsse. Über ein weites Frequenzband ist das Reflexionsverhalten des Systems sehr gering, wie Abb. A.3 zeigt. Dies bestätigt die Auslegungsstrategie und zeigt dass der Prüfstand gut für akustische Messungen geeignet ist.

A.2 Anhang Luftturbine

A.2.1 Kennfelder der Turbinenversuche

Parallel zu den akustischen Untersuchungen werden während der Messungen die thermodynamischen Betriebsparameter der Turbine aufgenommen. Mit Hilfe der globalen Maschinenparameter, wie den Ein- und Austrittsdrücken bzw. Temperaturen wird für die angefahrenen Betriebspunkte ein Kennfeld erstellt.

Generell werden Kennfelder zur Charakterisierung der Betriebseigenschaften von Turbomaschinen herangezogen. Ein Kennfeld setzt sich aus mehreren Kennlinien zusammen, die eine Beziehung zwischen zwei voneinander abhängigen physikalischen Größen herstellen. Für Turbinen sind dies typischerweise der Massenstrom und das sich einstellende Druckverhältnis π_{tot} oder der Wirkungsgrad. Da bei diesen akustischen Untersuchungen keine Leistungsbilanzen und Wirkungsgradbetrachtungen erfolgen sollen, werden einzig $\pi\dot{m}$ -Kennlinien zur Charakterisierung der Betriebspunkte bei unterschiedlichen Drehzahlen herangezogen. Abbildung A.4 stellt die für die ein- und zweistufige Turbinenkonfiguration bestimmten Kennfelder dar. Das Totaldruckverhältnis ergibt sich über die Turbine als Quotient von $\pi_{\text{tot}} = p_{\text{tot,Ein}}/p_{\text{tot,Aus}}$. Die Totaldrücke werden am Eintritt mit Hilfe eines in der Rohrmitte befindlichen Prandtl-Rohrs gemessen, während jene am Austritt mit Hilfe der Sondentraversierungen bestimmt werden.

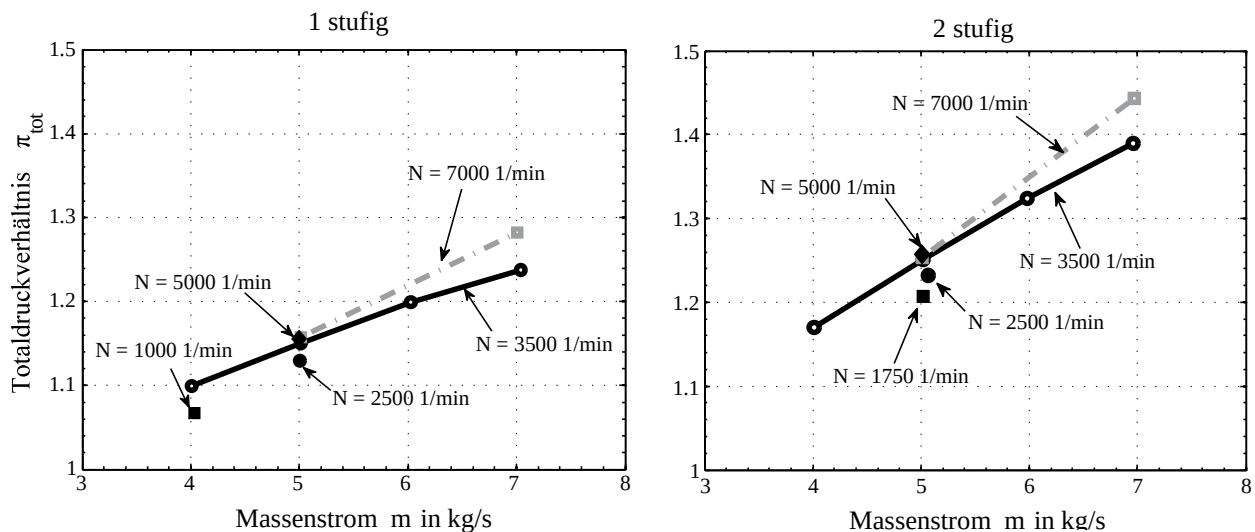


Abbildung A.4: Kennfeld der einstufigen (links) und zweistufigen (rechts) Luftturbinenkonfiguration

Auch wenn für die verwendete ein- und zweistufige Turbinenkonfiguration nur wenig vergleichbare Messungen vorangegangener Versuchsreihen existieren, sind etwa bei Evers (1985) oder Zehner (1980) einige Kennfelder zu finden, die der Plausibilitätsprüfung dienen. Die dort vorgestellten Kennfeldtrends stimmen gut mit den im Rahmen dieser Arbeit neu vermessenen Kennlinienverläufen überein.

A.2.2 Druck- und Temperaturprofil im Turbinenzulauf

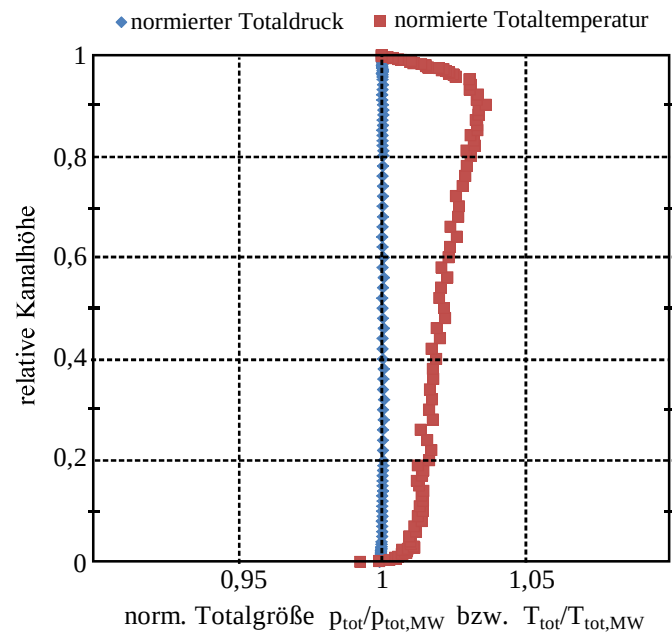


Abbildung A.5: Vermessene Profile des Totaldrucks und der Totaltemperatur über der Kanalhöhe des Turbinenzulaufs. Hier exemplarisch: $\dot{m} = 6,4 \text{ kg/s}$ $n = 6400 \text{ min}^{-1}$, 2-stufige Konfiguration

A.2.3 Bestimmung des Strömungsfelds

Neben der Aufnahme der globalen Messgrößen werden auch Strömungsfeldtraversierungen durchgeführt, mit Hilfe derer sich die Strömungsvektoren über dem Kanalquerschnitt bestimmen lassen. Die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung ist für die korrekte Auswertung der akustischen Messdaten notwendig, da die überlagerte Grund- und Drallströmung die Ausbreitungsfähigkeit der akustischen Moden beeinflusst.

Im Rahmen dieser Messkampagne wird für jeden angefahrenen Betriebspunkt (vgl. Abb. A.4) das Strömungsfeld über der Kanalhöhe an zwei unterschiedlichen Umfangspositionen traversiert. Die Messebene befindet sich stromab des Rotor 1 und vor dem ersten Mikrofon der Traversiereinheit. Es wird lediglich das Abströmfeld hinter dem Rotor 1 vermessen (Segment *C*), da hier hohe Drallanteile zu erwarten sind. Das Strömungsfeld im Eintritt (Segment *A* und *B*) wird als gerichtet und drallfrei angenommen. Die Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeiten in diesen Segmenten erfolgt rechnerisch über die inkompressiblen Kontinuitätsbeziehungen. Vorversuche haben gezeigt, dass diese Annahmen zulässig sind.

Der Kanal wird an 21 Punkten mit Hilfe von pneumatischen 5-Lochsonden mit integrierem Thermoelement abgetastet. Dies ermöglicht neben der Bestimmung der räumlichen Strömungsvektoren auch die Bestimmung der lokalen Totaltemperatur. Die Sonden werden mit Hilfe von Sondenverstelleinheiten vollautomatisch ausgerichtet. Detaillierte Informationen zu diesem Messverfahren sind z.B. in Binner (2011) zu finden.

Die Vermessung des Strömungsfelds erfolgt mit dem sogenannten Druckabgleichverfahren. Dazu wird die Sonde an die entsprechende Radialposition gefahren und automatisch in Hauptströmungsrichtung ausgerichtet. Die finale Winkelposition ergibt sich, wenn der aus den beiden seitlichen Bohrungen gebildete Differenzdruck unter einen definierten Schwellwert fällt und an der mittleren Bohrung ein Druckmaximum vorliegt. Wie Bubolz (2004) zeigt, muss zusätzlich zu den so bestimmten Winkeln ein weiterer Fehlwinkel verrechnet werden, der sich aus einer Kalibrierkurve für eine bestimmte Machzahl und Druckdifferenz interpolieren lässt. Auf eine detaillierte Beschreibung des relativ aufwendigen Verfahrens zur Bestimmung der Strömungswinkel sowie der statischen und totalen Drücke wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet und auf die einschlägige Literatur verwiesen. Mit Hilfe der iterativ bestimmten totalen und statischen Drücke lässt sich nach

$$\text{Ma} = \sqrt{\left[\left(\frac{p_{\text{tot}}}{p_{\text{stat}}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \frac{2}{\kappa-1}} \quad (\text{A.2})$$

die lokale Mach-Zahl errechnen, aus der sich wiederum die Totaltemperatur T_{tot} und die statische Temperatur T_{stat} ergeben

$$T_{\text{tot}} = T \frac{1 + \text{Ma}^2 \frac{\kappa-1}{2}}{1 + \text{Ma}^2 \text{Rec} \frac{\kappa-1}{2}} \quad \text{und} \quad T_{\text{stat}} = T_{\text{tot}} \left(\frac{p_{\text{tot}}}{p_{\text{stat}}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad (\text{A.3})$$

die zur Bestimmung der lokalen Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa R T_{\text{stat}}}$ benötigt werden. In Gl.(A.3) ist noch ein von Bubolz (2004) vorgeschlagener Recovery-Faktor Rec der Temperaturkalibrierung enthalten. Über die Mach-Zahl, die Schallgeschwindigkeit a und die

gemessenen Strömungswinkel α und γ lassen sich mit

$$\begin{aligned} c_x(r) &= c(r) \cos \gamma(r) \cos \alpha(r) \\ c_\theta(r) &= c(r) \cos \gamma(r) \sin \alpha(r) \\ c_r(r) &= c(r) \sin \gamma(r) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

schließlich die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten bestimmen. Dabei ist für Strömungswinkel $\alpha < \pi/2$ die Drallkomponente c_θ negativ und damit entgegen der Rotordrehrichtung ausgerichtet, während sich für $\alpha > \pi/2$ eine mit der Rotordrehrichtung ausbreitende Drallkomponente einstellt.

Abbildung A.6 zeigt beispielhaft eine Strömungsfeldvermessung für den Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$ (vgl. Kennfeld Abb. A.4) der einstufigen Luftturbinenkonfiguration.

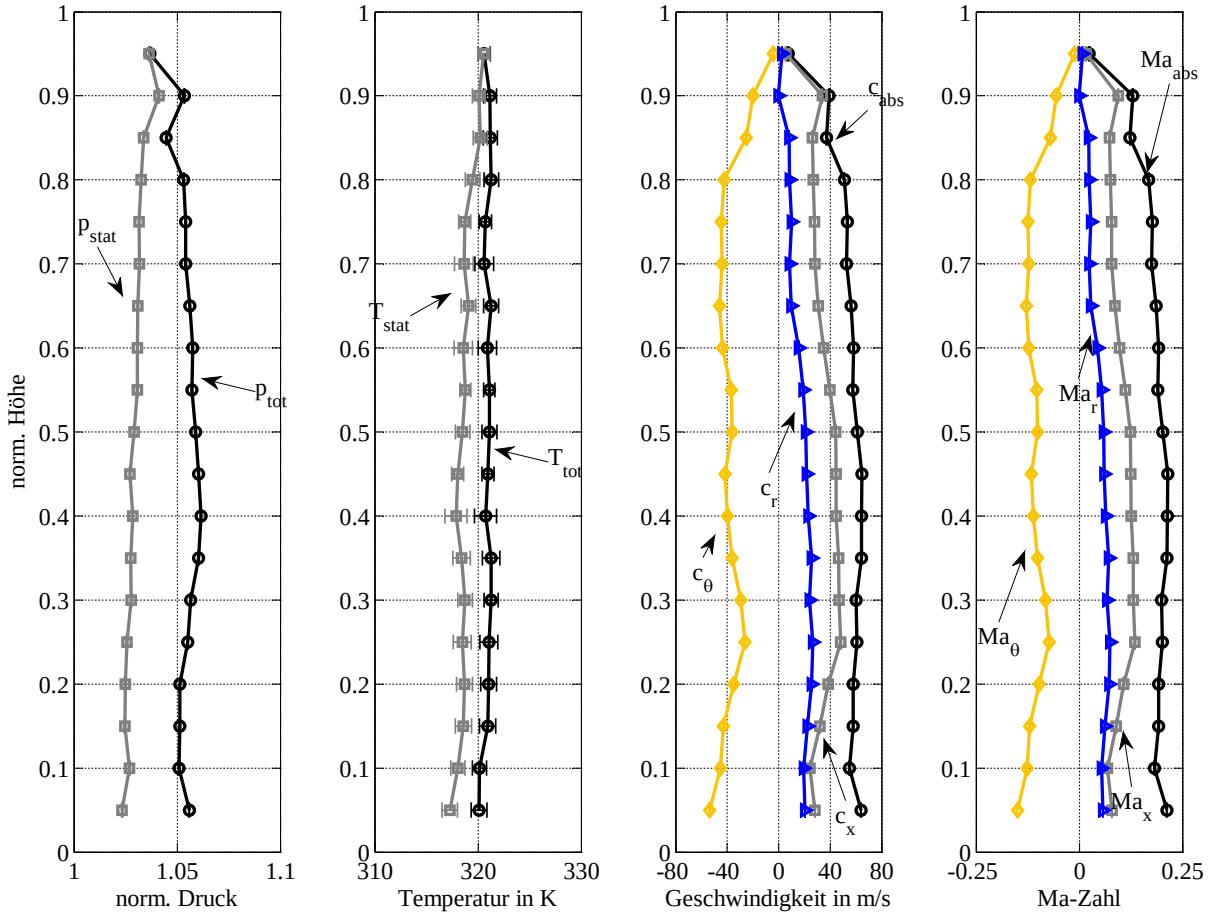


Abbildung A.6: Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine für den Betriebspunkt $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

Wie zu erkennen ist, sind die Druck- und Temperaturverläufe über der Kanalhöhe nahezu konstant, so dass ebenfalls von einer konstanten Schallgeschwindigkeit ausgegangen werden kann.

B Anhang mathematische Erläuterungen und Herleitungen

B.1 Ausbreitungsgleichung für p' und u'_i bei Strömungsüberlagerung

Ausgangslage für die Herleitung der in Abschnitt 3.1 gegebenen Ausbreitungsgleichung der akustischen Störgrößen sind zum einen die Impulsgleichung, die sich aus den Cauchy'schen Bewegungsgleichung (Spurk und Aksel 2007) ableiten, und zum anderen die Kontinuitätsbeziehungen. Erstere lassen sich nach Bird et al. (2007) in Zylinderkoordinaten für ein reibungsfreies Fluid ohne Körperkräfte zu

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial t} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\tilde{u}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \theta} + \tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial r} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (\text{B.1})$$

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial t} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial x} + \frac{\tilde{u}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial r} + \frac{\tilde{u}_\theta \tilde{u}_r}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \quad (\text{B.2})$$

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial t} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x} + \frac{\tilde{u}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} + \tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} - \frac{\tilde{u}_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \quad (\text{B.3})$$

angeben, wobei $\tilde{u}_\theta^2/r$ der Zentrifugalkraft und $(\tilde{u}_\theta \tilde{u}_r)/r$ der Corioliskraft entsprechen. Die allgemeine Form der Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten ergibt sich hingegen zu

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\rho} r \tilde{u}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{\rho} \tilde{u}_\theta) + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\rho} \tilde{u}_x) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Da für akustische Signale lediglich die Ausbreitung einer Störinformation (p' , u'_i , ρ' , ...) relevant ist, kann die betrachtete physikalische Größe mit Hilfe eines Störansatzes in einen rein ortsabhängigen und zeitlich stationären (.) sowie einen zeitlich und räumlich fluktuierenden Anteil (.)' zerlegt werden. Für eine beliebige zeit- und ortsabhängige Transportgröße $\tilde{\phi}(x, t)$ lässt sich mit

$$\tilde{\phi}(x_i, t) = \phi(x_i) + \epsilon \phi'(x_i, t) \quad (\text{B.5})$$

ein allgemeinen Störansatz formulieren, wobei $\tilde{\phi}(x_i, t)$ stellvertretend für die jeweiligen Transportgrößen der Erhaltungsgleichungen steht. Der Störgröße $\phi'(x_i, t)$ wird zusätzlich ein Amplitudenfaktor ϵ zugeordnet, wobei die Störgrößenamplitude um ein Vielfaches kleiner ist als die Amplitude der stationären Größe.

Die Transportgrößen der Erhaltungsgleichungen (Gl.(B.1) bis Gl.(B.4)) lassen sich nun durch den Störgrößenansatz der Gl.(B.5) substituieren. Anschließend werden die so erweiterten Differentialgleichungen in einem fiktiven Arbeitspunkt linearisiert (vgl. Delfs

2009, Goldstein 1976). Dies ist zulässig, solange für die Amplituden $|A(p', u'_i, \rho', \dots)| \ll |A(p, u_i, \rho, \dots)|$ gilt. Dabei ist einzig die Änderung der eigentlichen Störgröße $(\cdot)'$ von Bedeutung, so dass die Differentialgleichungen nach dem zuvor eingeführten Amplitudenfaktor ϵ differenziert werden. Dementsprechend entfallen alle von ϵ unabhängigen Terme, während die linear von der Störgröße abhängigen Anteile bestehen bleiben. Terme höherer Ordnung werden durch eine Grenzwertbetrachtung $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi'(x_i, t)$ eliminiert, denn für die sehr kleinen Störampplituden gilt $\epsilon^2 \ll \epsilon$. Die linearisierten Kontinuitäts- und Impulsgleichungen in Zylinderkoordinaten ergeben sich schließlich zu (vgl. (Kousen 1999, Yourkovich 1976)) :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + u'_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{u'_r}{r} \right) = 0 \quad (\text{B.6})$$

und

$$\rho \left(\frac{\partial u'_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_x}{\partial \theta} + u'_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (\text{B.7})$$

$$\rho \left(\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_\theta}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + u'_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u'_r \frac{u_\theta}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \quad (\text{B.8})$$

$$\rho \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta}{r} u'_\theta \right) = - \frac{\partial p'}{\partial r} + \rho' \frac{u_\theta^2}{r} \quad (\text{B.9})$$

Dabei wird von einer stationären und isentropen Hauptströmung ausgegangen, was eine gängige thermodynamische Annahme für die vereinfachte Modellierung idealer Turbinenströmungen ist (Traupel 1977). Weiterhin wird angenommen, dass sich das Strömungsfeld nur in radialer Richtung über der Kanalhöhe ändert. Die Strömung sei folglich in axialer und azimuthaler Richtung voll ausgeprägt und somit konstant. Durch diese strömungsmechanische Annahme einer rein von der Kanalhöhe abhängigen Grundströmung, entfallen die Gradienten $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial \theta$ der stationären Größen. Dementsprechend werden sich auch die Dichte $\rho(r)$ und die Schallgeschwindigkeit $a(r)$ nur in radialer Richtung ändern. Nicht-isentropie Temperaturschichtungen sind ausgeschlossen.

Wird nun Gl.(B.7) nach $\partial/\partial x$ differenziert ergibt sich:

$$\rho \left[\frac{\partial^2 u'_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_x}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u'_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right] = - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (\text{B.10})$$

Da $\rho = f(r)$ gilt, entfallen bei der Ableitung (Produktregel) die Differentiale $\partial \rho / \partial x$. Des Weiteren werden aufgrund der zuvor beschriebenen strömungsmechanischen Annahmen die Gradienten $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial \theta$ der stationären Größen eliminiert. Aufgelöst ergibt sich Gl.(B.10) somit zu:

$$\rho \left[\frac{\partial^2 u'_x}{\partial t \partial x} + u_x \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial x} \right] = - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (\text{B.11})$$

Gl.(B.8) wird hingegen nach $1/r (\partial/\partial \theta)$ differenziert, so dass sich

$$\frac{\rho}{r} \left[\frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(u_x \frac{\partial u'_\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(u'_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(u'_r \frac{u_\theta}{r} \right) \right] = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.12})$$

B.1 Ausbreitungsgleichung für p' und u'_i bei Strömungsüberlagerung

ergibt. Auch hier entfällt das Differential $\partial\rho/\partial\theta$, da die Dichte einzig eine Funktion der radialen Höhe ist. Die Gradienten $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial\theta$ der stationären Größen werden ebenfalls eliminiert. Aufgelöst folgt für Gl.(B.12)

$$\frac{\rho}{r} \left[\frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial t \partial \theta} + u_x \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} \quad . \quad (\text{B.13})$$

Bei der Ableitung der linearisierten, radialen Impulsgleichung (Gl. B.9) nach $\partial/\partial r$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial r} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - 2u'_\theta \frac{u_\theta}{r} \right) + \\ & \rho \left[\frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(2u'_\theta \frac{u_\theta}{r} \right) \right] = -\frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho' \frac{u_\theta^2}{r} \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

entfällt hingegen nicht der Dichtegradient, da $\rho = f(r)$. Aufgelöst ergibt sich Gl.(B.14) zu

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial t} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial x} + u_x \frac{\partial^2 u'_r}{\partial x \partial r} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u_\theta}{r} \right] \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial \theta} \right) - 2u'_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u_\theta}{r} \right] - \frac{2u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} \right] \\ & = -\frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \left(\frac{u_\theta^2}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \rho' \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u_\theta^2}{r} \right] \right) - \frac{\partial \rho}{\partial r} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - 2u'_\theta \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Werden zunächst nur die linken Seiten der Gl.(B.11), Gl.(B.13) und Gl.(B.15) addiert und zusammengefasst folgt:

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial \theta \partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} \right) + \right. \\ & \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial u_x}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \\ & \left. \frac{2u'_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - 2u'_\theta \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} \right] = \dots \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Dabei muss das Differential $\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u_\theta}{r} \right]$ mit Hilfe der Quotientenregel zu $\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2}$ abgeleitet werden. Analog zur Addition der linken Seiten werden die rechten Seiten der Gl.(B.11), Gl.(B.13) und Gl.(B.15) addiert, so dass Gl.(B.16) zu

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial^2 u'_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial t \partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial t \partial \theta} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) + \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial u_x}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{2u'_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - 2u'_\theta \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} \right] \\ & = -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{u_\theta^2}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} + 2u_\theta \frac{\rho'}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial r} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} u_\theta u'_\theta \right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

zusammengefasst werden kann. Für die weitere Herleitung wird ein perfektes Gas angenommen, so dass sich über die thermische Zustandsgleichung mit $p \propto \rho a^2$ ein Zusammenhang

zwischen der Dichte ρ , dem Druck p und der Schallgeschwindigkeit a ergibt, der ebenfalls für die Schwankungsgrößen $(.)'$ gilt. Allgemein gelten die Druck-Dichtebeziehungen

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \tilde{p}(\tilde{\rho}, \tilde{s}) \\ \text{bzw. für eine isentrope Zustandsänderung} \\ \tilde{p} &= \tilde{p}(\tilde{\rho}) \quad ,\end{aligned}\tag{B.18}$$

welche zunächst jedoch nicht weiter spezifiziert sind. Die Linearisierung erfolgt für den isentropen Fall daher anders als zuvor für die übrigen Erhaltungsgleichung gezeigt wurde, indem $\tilde{p}(\tilde{\rho})$ in eine Taylor-Reihe entwickelt wird

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\tilde{\rho}) &= p(\rho) + (\tilde{\rho} - \rho) \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho) + \dots \\ \text{mit} \\ \tilde{p}(\tilde{\rho}) - p(\rho) &= p' \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\rho} - \rho = \rho' \\ p' &= \rho' \frac{\partial p}{\partial \rho}|_s + \dots \\ p' &= \rho' a^2(\rho) \quad .\end{aligned}\tag{B.19}$$

So lässt sich mit Hilfe der linearisierten Druck-Dichtebeziehung ein direkter Zusammenhang zwischen dem Schalldruck p' und der Dichtestörung ρ' herleiten. Da die Fluktuationsprozesse der Schallausbreitung isentrop verlaufen (Delfs 2009), kann der Dichtegradient $\frac{\partial p}{\partial \rho}|_s$ direkt über die Schallgeschwindigkeit a^2 ausgedrückt werden, die selbst eine Funktion der Dichte ist. Diese Zusammenhänge lassen sich in die linearisierte Kontinuitätsgleichung substituieren, so dass sich Gl.(B.6) zu

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) &= -\frac{\rho u'_r}{r} - \frac{\partial \rho'}{\partial t} - u_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} - u'_r \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ \Rightarrow (...) &= -\frac{u'_r}{r} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + u'_r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \\ \Rightarrow (...) &= -\frac{u'_r}{r} - \frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + u_x \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \right) - \frac{u'_r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}\end{aligned}\tag{B.20}$$

umformen lässt. Über den Dichtegradienten des Terms $\frac{u'_r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}$ wird die sich über der Kanalhöhe einstellende Struktur des Strömungsfelds berücksichtigt, die in Abhängigkeit einer vorherrschenden Schichtung und/oder eines überlagerten Dralls entsprechend beeinflusst ist. Im Folgenden sei zunächst jedoch die allgemeingültige Form mit Hilfe des nicht weiter spezifizierten Dichtegradienten angegeben. So besteht im Nachhinein die Möglichkeit entsprechende Drallmodelle zu implementieren.

Zuvor werden die Terme der Gl.(B.20) für die weitere Berechnung vorbereitet und entsprechend nach der Zeit sowie der axialen und azimuthalen Ausbreitungsrichtung abgeleitet.

B.1 Ausbreitungsgleichung für p' und u'_i bei Strömungsüberlagerung

Für die Zeitableitung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial \theta \partial t} = \\ &- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho a^2} \right) [\dots] - \frac{1}{\rho a^2} \left[\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u_\theta}{r} \right] \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial t} \right) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} + u_x \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} \right) \right] - \\ &\frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial t} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) - u'_r \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{u'_r}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial t} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Da die Strömung als stationär angenommen wird, entfallen in Gl.(B.21) die zeitlichen Ableitungen der Hauptströmungsgrößen (Dichte und Geschwindigkeiten), was schließlich zu

$$\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial \theta \partial t} = -\frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + u_x \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial t} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial t} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \quad (\text{B.22})$$

führt, während sich die Ableitung der Gl.(B.20) in axialer Richtung mit $u_x \partial / \partial x$ zu

$$\begin{aligned} u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} \right) &= u_x \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} + \frac{u_x}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial \theta \partial x} + u_x \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial x} = \\ &- u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho a^2} \right) [\dots] - \frac{1}{\rho a^2} \left(u_x \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} + u_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial x} \right) - \\ &\frac{u_x}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial x} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) - u'_r u_x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{u'_r u_x}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial x} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

ergibt. Analog zu Gl.(B.22) kann die Gl.(B.23) weiter vereinfacht werden. Da von einer in axialer Richtung vollständig ausgeprägten Hauptströmung ausgegangen wird, entfallen die räumlichen Ableitung der Hauptströmungsgrößen in axialer Richtung

$$u_x \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} + \frac{u_x}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial \theta \partial x} + u_x \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial x} = -\frac{1}{\rho a^2} \left(u_x \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} + \frac{u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial x} + u_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) - \frac{u_x}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial x} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \quad (\text{B.24})$$

Für die Ableitung der Gl.(B.20) in Umfangsrichtung nach $\frac{u_\theta}{r} \partial / \partial \theta$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_r}{\partial r} \right) &= \frac{u_\theta}{r} \left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial \theta^2} \right) = \\ &- \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho a^2} \right) [\dots] - \frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial \theta} + \frac{u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial \theta} + \frac{u_\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} \right) - \\ &\frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) - \frac{u'_r u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{u'_r u_\theta}{r \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Auch in diesem Fall lassen sich die Beziehungen vereinfachen, da die Strömung in Umfangsrichtung als konstant angenommen wird und somit die Ableitung der Hauptströmungsgrößen nach θ entfallen

$$\frac{u_\theta}{r} \left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial \theta^2} \right) = -\frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial \theta} + \frac{u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial \theta} + \frac{u_\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \quad (\text{B.26})$$

Diese Lösungen werden schließlich in Gl.(B.17) substituiert

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + u_x \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial t} \right) - \frac{\rho}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial t} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) - \\
 & \frac{1}{a^2} \left(u_x \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + \frac{u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial \theta} + u_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) - \frac{\rho u_x}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial x} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) - \\
 & \frac{1}{a^2} \left(\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial t} + \frac{u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial \theta} + \frac{u_\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\rho u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \\
 & \rho \left(2 \frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{2u'_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - 2 \frac{u_\theta u'_\theta}{r^2} - 2 \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} \right) = \\
 & -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{u_\theta^2}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \rho' \frac{2u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\
 & -\frac{\partial \rho}{\partial r} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} u_\theta u'_\theta \right) .
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

Zusammengefasst folgt:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + u_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{u_\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + 2u_x \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + 2 \frac{u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial \theta} + 2 \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial t} \right) - \\
 & \frac{\rho}{r} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right) + \\
 & 2\rho \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta u'_\theta}{r^2} - \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} \right) = \\
 & -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{u_\theta^2}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \rho' \frac{2u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\
 & -\frac{\partial \rho}{\partial r} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} u_\theta u'_\theta \right) .
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

Unter Verwendung der linearisierten Druck-Dichtebeziehung nach Gl.(B.19) lässt sich die Störgröße der Dichte ρ' durch $p'/a^2(\rho)$ ersetzen. Da jedoch die Dichte ρ von der Kanalhöhe abhängt, liegt auch eine radiale Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit vor, so dass $\frac{\partial \rho'}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{a^2(\rho)} \right)$ gelten muss. Werden weiterhin die Mach-Zahlen eingeführt, lässt sich Gl.(B.27)

final zu

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \text{Ma}_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\text{Ma}_\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + 2a \text{Ma}_x \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\text{Ma}_\theta \text{Ma}_x}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial \theta} + 2a \frac{\text{Ma}_\theta}{r} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial t} - \\
 & \frac{\rho}{r} \left(1 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right) + \\
 & 2\rho \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta u'_\theta}{r^2} - \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} \right) = \\
 & -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{u_\theta^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{a^2} \right) + \frac{2\text{Ma}_\theta p'}{r a} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\
 & -\frac{\partial \rho}{\partial r} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} u_\theta u'_\theta \right) .
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

bestimmen. Dabei handelt es sich allerdings nicht um eine Wellengleichung des Schalldrucks, da in Gl.(B.29) neben dem Schalldruck p' auch noch die drei Komponenten der Schallschnelle u'_i enthalten sind, und sie somit nicht direkt gelöst werden kann.

Hinweis: Die mit Gl.(B.29) gegebenen Zusammenhänge sind für die Beschreibung des Schalltransports in einer Drall-überlagerten isentropen Hauptströmung zulässig und stellen eine allgemeingültige Beschreibung für diesen Fall dar. In nachfolgenden Schritten kann noch über ein spezifisches Drallmodell der radiale Dichtegradient ersetzt werden (vgl. Kousen (1999)).

In der offenen Literatur wird bei Yourkovich (1976) zur Herleitung einer radialen Ausbreitungsgleichung eine ähnliche Herangehensweise gewählt. Allerdings wird dort für die finale Lösung unzulässigerweise von einer konstanten Schallgeschwindigkeit über der Kanalhöhe ausgegangen, obwohl eine radiale Dichtevariation berücksichtigt wird. Aus diesem Grund werden für die weiteren Ausführungen nicht die dort in kompakterer Form angegebenen Beziehungen verwendet, sondern die Gl.(B.29) genutzt.

B.2 Konvektive Wellengleichungen in Zylinderkoordinaten

Die in Gl.(3.13) gegebene Form der konvektiven Wellengleichung zeigt die direkte Überführbarkeit der Differentialgleichungen aus dem kartesischen in das zylindrische Koordinatensystem. Eine Transformation in Zylinderkoordinaten bedarf aufgrund des Laplace-Operators ∇^2 und der zweifachen Ableitungen des totalen Differentials einer besonderen Behandlung. Davon sind jedoch lediglich die räumlichen Ableitungen betroffen, wohingegen die zeitlichen Differentiale unbeeinflusst sind. Die zweifache Ortsableitung (Laplace-Operator) der physikalischen Größe lässt sich mit

$$\nabla_{zyl}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{B.30}$$

in Zylinderkoordinaten angeben. Die konvektiven Terme $u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ der substantiellen Ableitung D/Dt müssen ebenfalls transformiert werden, so dass sich mit

$$u_i \frac{\partial}{\partial x_i} = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{B.31})$$

schließlich die zweite Ableitung des totalen Differentials in Zylinderkoordinaten zu

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u_r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + \frac{2u_\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \theta} + \\ &2u_x \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \frac{2u_r u_\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + 2u_r u_x \frac{\partial^2}{\partial r \partial x} + \frac{2u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} + u_r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \\ &\left(\frac{u_\theta}{r} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

angeben lässt. Für den Fall einer über dem Rohrquerschnitt konstanten Geschwindigkeitsverteilung, entfallen alle Terme mit den in Gl.(B.32) enthaltenen u_r und u_θ Komponenten sowie die radiale Ableitung der axialen Geschwindigkeit u_x

$$\frac{D^2}{Dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u_x \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (\text{B.33})$$

Werden diese Rechenanweisungen auf die konvektive Wellengleichung angewandt, ergibt sich der in Gl.(3.13) gegebene Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \text{Ma}_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{2\text{Ma}_x}{a} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} \\ \Rightarrow & \\ \frac{1}{a^2} \frac{D^2 p'}{Dt^2} &= \nabla^2 p' \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

B.3 Lösung der konvektiven Wellengleichungen in Zylinderkoordinaten

Im Folgenden soll eine Lösung der konvektiven Wellengleichungen zur analytischen Beschreibung der Schallfelder in zylindrischen Rohren hergeleitet werden. Viele technisch komplexe Problemstellungen lassen sich oftmals auf einfache Zylindergeometrien reduzieren. Gerade für die mathematische Beschreibung der Schallausbreitung in Turbomaschinen stellen Kreis- und Ringkreiskanäle eine gute Näherung dar. So soll detailliert das Vorgehen zur Lösung der konvektiven Wellengleichung für einen einfachen Kreiskanal bei Überlagerung mit einer konstanten Grundströmung beschrieben werden.

Für eine rein axiale Kanaldurchströmung mit einer konstanten Strömungsmachzahl Ma_x vereinfacht sich die allgemeine Form der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten zu:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{2Ma_x}{a} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} + Ma_x^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (B.35)$$

Für diese homogene Differentialgleichung 2. Ordnung wird eine Lösung für den Schalldruck $p'(x, r, \theta, t)$ gesucht. Eine allgemeine Lösung lässt sich mit Hilfe eines harmonischen Separationsansatzes gemäß

$$p'(x, r, \theta, t) = \Re\{f(x)g(r)h(\theta)e^{-i\omega t}\} \quad (B.36)$$

angeben, wobei die drei Ausbreitungsfunktionen $f(x)$, $g(r)$ und $h(\theta)$ die Schallausbreitung in alle Raumrichtungen beschreiben, während der Zeitterm über den harmonischen Teil $e^{-i\omega t}$ berücksichtigt wird. Wird dieser Ansatz auf die einzelnen Ableitungen der Gl.(B.35) angewendet, lässt sich Gl.(B.35) nach anschließender Division durch die einzelnen Ausbreitungsfunktionen zu

$$\begin{aligned} & (1 - Ma_x^2) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \frac{1}{f(x)} - 2ikMa_x \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{1}{f(x)} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} \frac{1}{g(r)} + \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} \frac{1}{g(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h(\theta)}{\partial \theta^2} \frac{1}{h(\theta)} + k^2 = 0. \end{aligned} \quad (B.37)$$

zusammenfassen, wobei die Wellenzahl k bereits für ω/a eingeführt worden ist. Diese gemischte Differentialgleichung kann nun sukzessiv für jede einzelne Ausbreitungsfunktion gelöst werden. Dazu gilt es Gl.(B.37) derart umzustellen, dass die jeweils von einer der drei Variablen x , r und θ abhängigen Terme separiert sind.

Für die von der Umfangskomponente abhängigen Terme ergibt sich damit entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(\theta)} \frac{\partial^2 h(\theta)}{\partial \theta^2} &= (1 - Ma_x^2) \frac{r^2}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - 2ikMa_x \frac{r^2}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \\ &+ \frac{r}{g(r)} \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{r^2}{g(r)} \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} + r^2 k^2. \end{aligned} \quad (B.38)$$

Da sämtliche Terme der rechten Seite von θ unabhängig sind, können diese zu einer Konstanten m^2 zusammengefasst werden, so dass mit

$$\frac{1}{h(\theta)} \frac{d^2 h(\theta)}{d\theta^2} = -m^2 \quad (B.39)$$

eine gewöhnliche homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Wellenausbreitung in Umfangsrichtung vorliegt, für deren Lösung mit

$$h(\theta) = \hat{A}_1 e^{-im\theta} + \hat{B}_1 e^{im\theta} \quad (\text{B.40})$$

ein einfacher Exponentialansatz existiert. Dieser entspricht aufgrund seiner Komplexwertigkeit mathematisch einer Drehbewegung und beschreibt folglich eine in und eine entgegen des Uhrzeigersinns drehende Umfangswelle, wobei die Drehrichtung über das Vorzeichen des Exponentens festgelegt wird. Damit sich die Welle überhaupt ausbilden kann, ist ein stetiger Verlauf von $h(\theta)$ in Umfangsrichtung gefordert, was unmittelbar zu einer 2π -Periodizität führt. Die noch unbekannte Variable m kann dementsprechend nur positive ganzzahlige Werte

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{mit } m \in \mathbb{N} \quad (\text{B.41})$$

annehmen. Anschaulich beschrieben, entspricht m der Anzahl der Wellenfronten pro Umlauf und bestimmt, wie sich später zeigen wird, die Ordnung der Umfangsmode. Wie zu erkennen ist, ist eine genaue Lösung der Differentialgleichung so noch nicht möglich, da m nicht eindeutig definiert ist und einen beliebigen, positiven, ganzzahligen Wert annehmen kann.

Da die einzelnen Ausbreitungsfunktionen der Gl.(B.37) miteinander gekoppelt sind, kann eine genaue Festlegung erst erfolgen, wenn die Lösungen der axialen $f(x)$ und radialen $g(r)$ Ausbreitungsfunktion bekannt sind. Letztere ergibt sich nach dem gleichen Vorgehen wie für die Umfangskomponente $h(\theta)$, indem die Terme der Gl.(B.37) nun jedoch nach $g(r)$ geordnet und die Terme der axialen Ausbreitungsfunktion $f(x)$ zu einer weiteren Konstanten β zusammengefasst werden. So ergibt sich für die radiale Wellenausbreitung mit

$$\frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \left(\beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) g(r) = 0 \quad (\text{B.42})$$

eine Besselsche Differentialgleichung. Für diese hyperbolische Differentialgleichungsart gibt es mathematisch eindeutige Lösungen als Kombination von linear voneinander unabhängigen Zylinderfunktionen - der Besselfunktion J_m und der Neumannfunktion Y_m (Besselfunktion zweiter Art). Wie etwa Farlow (1993) angibt, lässt sich für Gl.(B.42) mit

$$g(r) = K J_m(\beta r) + Q Y_m(\beta r) \quad (\text{B.43})$$

eine Lösung für die Ausbreitungsfunktion $g(r)$ mit den Bessel- und Neumanfunktionen m -ter Ordnung bestimmen. K und Q entsprechen noch unbekannten Skalierungskoeffizienten der beiden Zylinderfunktionen (Amplituden des radialen Schallfeldes). Diese sind linear von einander abhängig (vgl. Farlow 1993), so dass im Folgenden K zu eins gesetzt werden kann und die Amplitudenvariation lediglich über Q erfolgt. Wie sich nachstehend zeigen wird, spielen für die Lösung der Besselschen-Differentialgleichung die Extremstellen der Bessel- und Neumannfunktionen eine große Rolle. Jedes J_m und Y_m besitzt unendlich viele lokale Extrema n , wie es in den Funktionsverläufen der Abb. B.1 angedeutet ist. Um diese Eigenschaft auch in der Nomenklatur zu berücksichtigen, wird zusätzlich der Index n eingeführt. Mit den genannten Vereinfachungen und Konventionserweiterungen ergibt sich Gl.(B.43) zu:

$$g_{mn}(r) = J_m(\beta_{mn} r) + Q_{mn} Y_m(\beta_{mn} r) \quad (\text{B.44})$$

B.3 Lösung der konvektiven Wellengleichungen in Zylinderkoordinaten

Bereits an dieser Stelle lässt sich der unmittelbare Zusammenhang zwischen der radialen und azimuthalen Wellenausbreitung erkennen. Es ist die zuvor definierte Variable m , die sowohl die Gestalt der Welle in Umfangsrichtung vorgibt, als auch die Ordnung der Zylinderfunktionen und der Konstanten β_{mn} definiert.

Zur weiteren Lösung der Differentialgleichung werden als Randbedingung schallharte Wände angenommen. Mit dieser Randbedingung lässt sich über die linearisierten Euler-Gleichung ein Zusammenhang zwischen der Schallschnelle und dem Schalldruck herstellen. Da die Wand Masse undurchlässig ist, muss die an der Oberfläche der Gehäusewand (bei $r = r_a$) und der Nabe (bei $r = r_i$) wirkende Schallschnelle $u'(r)$ zu Null werden. Über die linearisierte Euler-Gleichung

$$\frac{Du'_i}{Dt} + u'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (\text{B.45})$$

folgt unmittelbar, dass bei $u'(r) = 0$ der Schalldruckgradient $\partial p'/\partial x_i = 0$ wird bzw. der Schalldruck p' ein Maximum aufweist. Da die in Gl.(B.44) gegebene Ausbreitungsfunktion den Schalldruckverlauf in radialer Richtung repräsentiert, gilt diese Randbedingung auch für $g_{mn}(r)$, so dass

$$\frac{\partial}{\partial r} [J_m(\beta_{mn}r) + Q_{mn}Y_m(\beta_{mn}r)]_{r=r_i; r_a} = 0 \quad (\text{B.46})$$

gelten muss. Schafheitlin (1908) gibt mit

$$\frac{\partial Z_\ell(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2} [Z_{\ell-1}(\xi) - Z_{\ell+1}(\xi)] \quad (\text{B.47})$$

eine allgemeingültige Rekursionsvorschrift zur Ableitung von Zylinderfunktionen $Z_\ell(\xi)$ an, die auch für Ableitung der in Gl.(B.46) gegebenen Ausbreitungsfunktion an Gehäuse- und Nabenradius genutzt werden kann. Durch Umstellen lässt sich nach der unbekannten Variablen Q_{mn} gemäß

$$Q_{mn} = -\frac{[J_{m-1}(\beta_{mn}r_a) - J_{m+1}(\beta_{mn}r_a)]}{[Y_{m-1}(\beta_{mn}r_a) - Y_{m+1}(\beta_{mn}r_a)]} = \frac{[J_{m-1}(\beta_{mn}r_i) - J_{m+1}(\beta_{mn}r_i)]}{[Y_{m-1}(\beta_{mn}r_i) - Y_{m+1}(\beta_{mn}r_i)]} \quad (\text{B.48})$$

auffösen. Damit ergibt sich Q_{mn} wiederum als Linearkombination der Bessel- und Neumannfunktionen. Eine unmittelbare Lösung der Ausbreitungsgleichung g_{mn} ist allerdings in dieser Form nicht möglich, da die Konstante β_{mn} nicht bekannt ist. Diese lässt sich allerdings aus Gl.(B.48) über eine Nullstellenermittlung bestimmen. Mit Einführung des Nabenverhältnisses $\sigma = r_i/r_a$ und der Variablen

$$\mu_{mn} = \beta_{mn}r_a \quad (\text{B.49})$$

ergibt sich durch Umstellen mit

$$\begin{aligned} \Psi_m(\mu_{mn}, \sigma) &= [J_{m-1}(\mu_{mn}) - J_{m+1}(\mu_{mn})] [Y_{m-1}(\mu_{mn}\sigma) - Y_{m+1}(\mu_{mn}\sigma)] \\ &\quad - [J_{m-1}(\mu_{mn}\sigma) - J_{m+1}(\mu_{mn}\sigma)] [Y_{m-1}(\mu_{mn}) - Y_{m+1}(\mu_{mn})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

ein einfaches Gleichungssystem, dessen Lösung durch Bestimmung der Nullstellen erfolgt. Dabei wird deutlich, dass es sich bei der Variablen μ_{mn} um die n -te Nullstelle der Bestimmungsgleichung $\Psi_m(\mu_{mn}, \sigma)$ handelt - also den Eigenwert der Zylinderfunktionen. Über

Gl.(B.49) ist auch der Zusammenhang zwischen μ_{mn} und der Variablen β gegeben, welche auch als radiale Wellenzahl verstanden werden kann. Um deren Charakter als Wellenzahl zu verdeutlichen, soll β nachstehend als k_r bezeichnet werden. Das Amplitudenverhältnis Q_{mn} nach Gl.(B.48) ergibt sich so schließlich zu

$$Q_{[mn]}^{(\sigma)} = -\frac{\left[J_{m-1}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r_a) - J_{m+1}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r_a)\right]}{\left[Y_{m-1}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r_a) - Y_{m+1}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r_a)\right]} = -\frac{\left[J_{m-1}(\mu_{mn}^{(\sigma)}) - J_{m+1}(\mu_{mn}^{(\sigma)})\right]}{\left[Y_{m-1}(\mu_{mn}^{(\sigma)}) - Y_{m+1}(\mu_{mn}^{(\sigma)})\right]} \quad (\text{B.51})$$

und die radiale Ausbreitungsfunktion $g(r)$ nach Gl.(B.44) final zu

$$g_{mn}(r) = \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)} = J_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) + Q_{[mn]}^{(\sigma)} Y_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r). \quad (\text{B.52})$$

Im Gegensatz zu der azimuthalen Wellenausbreitung hängt die radiale vom Nabenverhältnis σ ab. Die Herleitung der Gl.(B.52) erfolgt für einen Ringkreiskanal mit definiertem Nabenverhältnis. Soll hingegen die radiale Wellenausbreitung in einem einfachen Kreiskanal ohne Nabe bestimmt werden, vereinfacht sich Gl.(B.52) durch Wegfall Neumannfunktion Y_m zu

$$\Lambda_{[mn]} = J_m(k_{r,[mn]} r). \quad (\text{B.53})$$

Durch Grenzwertbetrachtung ergibt sich für die Neumannfunktion $\lim_{r \rightarrow 0} Y_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)} r) = -\infty$. Dementsprechend würde im Rohrmittelpunkt eine Singularität vorliegen und der Schalldruck würde theoretisch unendlich große Werte annehmen, was physikalisch nicht sinnvoll ist, zumal von Quellfreiheit im gesamten Volumen ausgegangen wird. Aus diesem Grund muss der zweite Term der rechten Seite in Gl.(B.52) zur Beschreibung der Wellengleichung im einfachen Kreiskanal verschwinden. Dann ist auch der Eigenwert μ_{mn} nicht mehr vom Nabenverhältnis abhängig und die Bestimmungsgleichung Ψ vereinfacht sich dementsprechend zu:

$$\Psi_m(\mu_{mn}) = [J_{m-1}(\mu_{mn}) - J_{m+1}(\mu_{mn})] = 0 \quad (\text{B.54})$$

Nachdem nun mit Gl.(B.40) und Gl.(B.52) Ausbreitungsfunktionen der Schallwelle in azimuthaler und radialer Richtung vorliegen, wird in einem letzten Schritt eine Ausbreitungsfunktion für die axiale Richtung $f(x)$ hergeleitet. Dazu werden zunächst die bereits bekannten Lösungen der azimuthalen und radialen Ausbreitungsfunktionen nach Gl.(B.40) und Gl.(B.52) in die Ausgangsgleichung Gl.(B.37) eingesetzt, so dass

$$(1 - \text{Ma}_x^2) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \frac{1}{f(x)} - 2ik\text{Ma}_x \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{1}{f(x)} - k_{r,[mn]}^{(\sigma)2} + k^2 = 0 \quad (\text{B.55})$$

für die allgemeine Ausbreitungsgleichung folgt. Dabei ist bereits das in Gl.(B.42) gegebene β_{mn} durch die radiale Wellenzahl $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ ersetzt worden, über die das radiale und azimuthale Wellenfeld miteinander gekoppelt sind. Bei Gl.(B.55) handelt es sich um ein typisches Sturm-Liouville-Eigenwertproblem. Zu dessen Lösung wird für die noch unbekannte axiale Ausbreitungsgleichung $f(x)$ mit

$$f(x) = \hat{A}_2 e^{-i\alpha_{[mn]}^+ x} + \hat{B}_2 e^{-i\alpha_{[mn]}^- x} \quad (\text{B.56})$$

B.3 Lösung der konvektiven Wellengleichungen in Zylinderkoordinaten

ein einfacher harmonischer Ansatz verwendet, der eine Wellenausbreitung in positiver und negativer x -Richtung beschreibt. Zur vollständigen Beschreibung des Wellenfeldes gilt es jedoch, die noch unbekannten Eigenwerte $\alpha_{[mn]}^\pm$ der Ansatzfunktion zu bestimmen. Wie sich nachstehen zeigen wird, handelt es sich dabei um die axiale Wellenzahl $k_{x[mn]}^\pm$, die analog zur radialen Wellenzahl (vgl. Gl.B.52) entsprechend verwendet werden soll.

Mit Hilfe der Ansatzfunktion lassen sich die entsprechenden Ableitung in Gl.(B.55) bestimmen, sodass sich

$$\begin{aligned} & - (1 - \text{Ma}_x^2) \frac{k_{x[mn]}^{\pm 2} \left(\hat{A}_2 e^{-ik_{x[mn]}^+ x} + \hat{B}_2 e^{-ik_{x[mn]}^- x} \right)}{\hat{A}_2 e^{-ik_{x[mn]}^+ x} + \hat{B}_2 e^{-ik_{x[mn]}^- x}} \\ & - 2ik\text{Ma}_x \frac{ik_{x[mn]}^\pm \left(\hat{A}_2 e^{-ik_{x[mn]}^+ x} + \hat{B}_2 e^{-ik_{x[mn]}^- x} \right)}{\hat{A}_2 e^{-ik_{x[mn]}^+ x} + \hat{B}_2 e^{-ik_{x[mn]}^- x}} - k_{r,[mn]}^{(\sigma)2} + k^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

bzw.

$$- (1 - \text{Ma}_x^2) k_{x[mn]}^{\pm 2} - 2k\text{Ma}_x k_{x[mn]}^\pm - k_{r,[mn]}^{(\sigma)2} + k^2 = 0 \quad (\text{B.58})$$

ergibt. Dabei sind die einzelnen Eigenwerte der Lösung $k_{x[mn]}^+$ und $k_{x[mn]}^-$ zu $k_{x[mn]}^\pm$ zusammengefasst worden, was möglich ist, da sie sich vom Betrag her nicht unterscheiden. Die in Gl.(B.58) gegebene quadratische Gleichung lässt sich nach einigem Umformen mit Hilfe der p-q-Formel auflösen und der Eigenwert bestimmen. Dieser entspricht gemäß

$$k_{x[mn]}^\pm = \frac{k\text{Ma}_x \pm \sqrt{k^2 - (1 - \text{Ma}_x^2) k_{r,[mn]}^{(\sigma)2}}}{(1 - \text{Ma}_x^2)} \quad (\text{B.59})$$

der axialen Wellenzahl, die die Wellenausbreitung durch den Kanal beschreibt. Wie in Gl.(B.59) zu erkennen ist, sind über die radiale Wellenzahl $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ alle drei Ausbreitungsrichtungen miteinander gekoppelt.

B.4 Erläuterungen zur radialen Ausbreitungsgleichung für ein akustisches Potential

Nachfolgend soll die in Abschnitt 3.2.2 zur numerischen Eigenwertbestimmung verwendete radiale Ausbreitungsgleichung (vgl. Gl.(3.27)) eingehend erklärt und die wichtigsten Ansätze hergeleitet werden. Die Herleitung selbst geht auf die umfangreichen Arbeiten von Golubev und Atassi (1995, 1996, 1998) sowie Atassi und Golubev (1998) zurück, die in mehreren analytischen Studien den Einfluss einer Drallströmung auf die Ausbreitungseigenschaften einer in die Strömung eingekoppelten instationären Störgrößen untersuchen. So lässt sich nach Atassi und Golubev (1998) ein turbomaschinenähnliches Hauptströmungsfeld unter der Annahme eines stationären und isentropen Zustands gemäß

$$u_i(x_i) = u_\infty e_x + \left(\Omega r + \frac{\Gamma}{r} \right) e_\theta \quad (\text{B.60})$$

aus einer homogenen axialen Hauptströmung $u_{\infty,x}$ und einem überlagerten Drallanteil modellieren. e_x und e_θ entsprechen den Einheitsvektoren in axialer und azimuthaler Richtung. Dieser einfache Superpositionsansatz wird ursprünglich von Kerrebrock (1977) eingeführt, wobei die Drallströmung selbst aus einem Festkörperwirbel Ωr und einem Potentialwirbel Γ/r angenähert wird. Über die Wirbelstärke Ω und die Zirkulation Γ werden die jeweiligen Wirbelkomponenten zueinander in Beziehung gesetzt.

Die der weiteren Herleitung zugrunde liegenden Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie ergeben sich in ihrer linearisierten Form nach Goldstein (1978) zu

$$\rho \left[\frac{Du'_i}{Dt} + u'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \rho' u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (\text{B.61})$$

$$\frac{D\rho'}{Dt} + \rho' \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u'_i) = 0 \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{Ds'}{Dt} = 0. \quad (\text{B.63})$$

Unter Vernachlässigung von Entropiestörungen, formuliert Goldstein (1978) aus diesen eine linearisierte Euler- und Druckgleichung gemäß

$$\frac{Du'_i}{Dt} + u'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p'}{\rho} \right) \quad (\text{B.64})$$

bzw.

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p'}{a^2 \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u'_i) = 0. \quad (\text{B.65})$$

Diese Gleichungen stellen die Basis für die weitere Formulierungen der Ausbreitungsgleichungen dar. So führen Golubev und Atassi (1998) mit

$$u'_i(x_i, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + u'_{i,R} \quad (\text{B.66})$$

einen spezifischen Zerlegungsansatzes der Störgrößengeschwindigkeit ein.

B.4 Erläuterungen zur radialen Ausbreitungsgleichung für ein akustisches Potential

Dieser, bereits von Goldstein (1978) formulierte Ansatz, zerlegt die instationäre Geschwindigkeit $u'_i(x_i, t)$ in einen reinen (akustischen) Potentialteil $\text{rot } \nabla \Phi = 0$ und einen rotatorischen Teil $\text{rot } \vec{u}'_R \neq 0$ (Vorticity-Anteil). Die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der jeweiligen Störung sind grundlegend verschieden. Während sich die akustisch induzierten Moden mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, werden die rotatorisch induzierten Moden rein konvektiv transportiert – also mit der Geschwindigkeit des hydrodynamischen Feldes. Aus diesem Grund werden diese Moden oftmals als hydrodynamische bezeichnet.

Aufgrund dieses Zerlegungsansatzes besitzt nach Goldstein (1978) die klassische Definition für das Geschwindigkeitspotential

$$p' = -\rho \frac{D\Phi}{Dt} \quad (\text{B.67})$$

Gültigkeit und stellt eine direkte Beziehung zwischen dem Schalldruck p' und dem Geschwindigkeitspotential Φ her. Golubev und Atassi (1998) überführen somit die linearisierten Erhaltungsgleichungen der Gl.(B.64) und Gl.(B.65) jeweils in einfache inhomogene Differentialgleichungen

$$\frac{Du'_{i,R}}{Dt} + u'_{j,R} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\epsilon_{ijk} (2\Omega e_x) \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (\text{B.68})$$

bzw.

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{a^2} \frac{D\Phi}{Dt} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u'_{i,R}). \quad (\text{B.69})$$

Wie zu erkennen ist, beschreibt dabei Gl.(B.68) den Transport der Vorticity-Störung $u'_{i,R}$, während Gl.(B.69) einer konvektiven Wellengleichung für das Geschwindigkeitspotential entspricht.

Dabei koppeln sowohl Gl.(B.68) als auch Gl.(B.69) den Vorticity- und den Potentialteil der instationären Geschwindigkeit. Wie Atassi und Golubev (1998) zeigen, sind die in einer Drallströmung auftretenden Zentrifugal- und Corioliskräfte für die Kopplung verantwortlich. In diesem Fall kann eine stromauf induzierte Störung nicht länger in voneinander unabhängige Potential-, Vorticity- und Entropie-Moden unterteilt werden.

Die Eigenschaften der resultierenden akustischen und hydrodynamischen Moden hängen sowohl von der Struktur des stromauf liegenden Strömungsfeldes als auch der Form der dort induzierten instationären Störgröße ab. So zeigen die in Gl.(B.68) und Gl.(B.69) gegebenen Zusammenhänge, dass die Vorticity-Störungen stets ein instationäres, hydrodynamisches Druckfeld induzieren. Ist die stromauf induzierte Störung allerdings rein akustisch, entfallen die Vorticity-Anteile $u'_{i,R} = 0$ und die Ausbreitung der akustischen Moden wird einzig über Gl.(B.69) – nun jedoch in homogener Form – beschrieben. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass in einem Vorticity-freien Strömungsfeld eine rein akustische Störung niemals eine Vorticity-Störung induzieren kann.

Ist auf der anderen Seite die Störung rein konvektiv, muss die inhomogene Form der Gl.(B.69) vollständig gelöst werden, um zusätzlich die durch Vorticity-Störungen induzierten hydrodynamischen Druckschwankungen zu bestimmen. Umfangreiche Studien sind

dazu in Golubev und Atassi (1998) oder Kousen (1999) gegeben, deren Lösung stets eines komplexen numerischen Ansatzes bedarf.

Wird der Einfluss, der dem Störungsfeld überlagerten Hauptströmung auf die Ausbreitung akustischer und hydrodynamischer Moden betrachtet, zeigt sich, dass bei einem Festkörperdrall ($\Omega \neq 0$ und $\Gamma = 0$), die resultierende Strömung über der Kanalhöhe nicht mehr gleichförmig ist. Die in den Transportgleichungen auftretenden Corioliskräfte bewirken dann eine konvektive Ablenkung der Strömungsteilchen von ihrem ursprünglichen Transportpfad. Nach Gl.(B.68) und Gl.(B.69) führt dies zu einer direkten Kopplung der akustischen und der Vorticity-Störung. Dann werden die eintretenden akustischen Anteile eine Vorticity-Störung induzieren und andersrum, so dass in der Domäne nicht nur rein akustische oder hydrodynamische Moden vorliegen, sondern stets beide Formen.

Bei einem Potentialansatz ergibt sich die Hauptströmung aus der Überlagerung einer axialen Strömung und eines Potentialwirbels, während die Festkörperwirbel-Anteile verschwinden ($\Omega = 0$). Die nicht-konvektiven Moden sind nur noch potentialabhängig und nach Gl.(B.68) wird eine eintretende rein akustische Störung keine Vorticity-Störung induzieren können.

In Anlehnung an Golubev und Atassi (1996) wird für den hier betrachteten Fall von einer Potentialströmung ausgegangen, was in guter Näherung dem Strömungsfeld hinter einem Turbinenrotor entspricht. So vereinfacht sich der in Gl.(B.60) gegebene Geschwindigkeitsansatz zu $u_i(x_i) = u_\infty e_x + \Gamma / r e_\theta$ und es gelten die zuvor diskutierten Eigenschaften einer Potentialströmung. Durch den gewählten Zerlegungsansatz nach Goldstein (1978) lassen sich die Vorticity-Moden von den Druckmoden trennen (vgl. Gl. (B.66)). Da in dieser Arbeit nur die Ausbreitung eines in eine Strömung eingekoppelten Schallfeldes betrachtet wird, ist für die nachfolgende Herleitung einzig der Transport der akustischen Störgröße $\Phi \neq 0$ von Belang und die Wirbel-induzierten Störungen werden vernachlässigt $u'_{i,R} = 0$. Nach Golubev und Atassi (1996) vereinfacht sich für diesen Fall die Gl.(B.69) zu

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{a^2} \frac{D\Phi}{Dt} \right)}_{\textcircled{A}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)}_{\textcircled{B}} = 0 \quad (\text{B.70})$$

Die Auflösung der substantiellen Ableitung $\textcircled{A}$ ergibt sich unter Anwendung der Produktregel zu

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{a^2} \frac{D\Phi}{Dt} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{a^2} \right) \frac{D\Phi}{Dt} + \frac{1}{a^2} \frac{D^2 \Phi}{Dt^2}. \quad (\text{B.71})$$

Wobei für den ersten Term in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{a^2} \right) \frac{D\Phi}{Dt} = \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a^2} \right] + u_x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{a^2} \right] + u_r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{a^2} \right] + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{a^2} \right] \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

B.4 Erläuterungen zur radialen Ausbreitungsgleichung für ein akustisches Potential

gilt. Unter Berücksichtigung einer rein stationären und in axialer sowie azimuthaler Richtung vollständig ausgeprägten Strömung, verbleibt für die Ableitung der Schallgeschwindigkeit lediglich der Gradient in radialer Richtung

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{a^2} \right) \frac{D\Phi}{Dt} = u_r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{a^2} \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad . \quad (\text{B.73})$$

In guter Näherung kann für die Rohrströmung eine dominante Axial- und Drallströmung angenommen werden, so dass die radiale Strömungskomponente u_r vernachlässigt werden kann. Damit entfällt der komplette Term.

Entsprechend lässt sich unter diesen Annahmen die Gl.(B.70) zu

$$\underbrace{\frac{1}{a^2} \frac{D^2 \Phi}{Dt^2}}_{\textcircled{C}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)}_{\textcircled{D}} = 0 \quad (\text{B.74})$$

vereinfachen. Die Auflösung der substantiellen Ableitung in Gl.(B.74) $\textcircled{C}$ in Zylinderkoordinaten ergibt sich unter Anwendung der Produktregel zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{D^2 \Phi}{Dt^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2u_r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial r} + \frac{2u_\theta}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \theta} + 2u_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \frac{2u_r u_\theta}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + 2u_r u_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial x} + \right. \\ \left. \frac{2u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial x} + u_r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \left(\frac{u_\theta}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + u_x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Bei Vernachlässigung der radialen Strömungskomponente u_r vereinfacht sich Gl.(B.75) zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{D^2 \Phi}{Dt^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{2u_\theta}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \theta} + 2u_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \right. \\ \left. \frac{2u_\theta u_x}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial x} + \left(\frac{u_\theta}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + u_x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Mit

$$\Phi(x, r, \theta, t) = \varphi(r) e^{i[\mu_{\text{[mn]}}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \quad (\text{B.77})$$

wird eine harmonische Ansatzfunktion eingeführt, die das akustische Potential als Abhängige der Kanalhöhe beschreibt. Für diese Ansatzfunktion lassen sich die entsprechenden

zeitlichen und räumlichen Ableitungen einfach bestimmen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\omega^2 \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -\mu_{[\text{mn}]}^{2*\pm} \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} &= -m^2 \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} &= \mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} \omega \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial t} &= m\omega \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \theta} &= -\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} m \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \quad .
 \end{aligned} \tag{B.78}$$

Diese werden anschließend für die entsprechenden Terme der Gl.(B.77) eingesetzt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a^2} \frac{D^2 \Phi}{Dt^2} &= \frac{1}{a^2} \left(-\omega^2 + \frac{2u_\theta}{r} m\omega + 2u_x \mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} \omega - \frac{2u_\theta u_x}{r} \mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} m - \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{u_\theta}{r} \right)^2 m^2 - u_x^2 \mu_{[\text{mn}]}^{2*\pm} \right) \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \quad ,
 \end{aligned} \tag{B.79}$$

was zusammengefasst schließlich zu

$$\frac{1}{a^2} \frac{D^2 \Phi}{Dt^2} = -\frac{1}{a^2} \left(u_x \mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} + \frac{u_\theta}{r} m - \omega \right)^2 \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \quad . \tag{B.80}$$

führt.

Die Lösung des Terms $\textcircled{D}$ der Gl.(B.74) erfolgt zunächst über Anwendung der Produktregel, da sowohl die Dichte als auch das akustische Potential ortsabhängig sind

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}_{\textcircled{D}_1} - \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}}_{\textcircled{D}_2} \quad . \tag{B.81}$$

Der Term $\textcircled{D}_2$ entspricht dabei dem Laplace Operator des akustischen Potentials, der sich in Zylinderkoordinaten für ein Skalar zu

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tag{B.82}$$

ergibt. Wie zu erkennen ist, lassen sich zuvor die in Gl.(B.82) gegebenen Terme durch die in Gl.(B.78) angeführten Ableitungen substituieren, so dass sich

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} - \frac{m^2}{r^2} \varphi(r) - \mu_{[\text{mn}]}^{2*\pm} \varphi(r) \right) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \tag{B.83}$$

ergibt.

Der Term $\textcircled{D}_1$ lässt sich hingegen folgendermaßen umformen

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial x_i} \quad . \quad (\text{B.84})$$

Sowohl das Potential Φ als auch die Dichte ρ sind rein skalare Größen, so dass auch deren Produkt bzw. das Produkt ihrer Gradienten skalar ist:

$$-\left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial r}}{\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}} \right) \cdot \left(\frac{\frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r}}{\frac{1}{r} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial \theta}} \right) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial x} \right) \quad . \quad (\text{B.85})$$

Da die Dichte einzig eine Funktion der radialen Höhe r ist, entfallen die Gradienten in diesen beiden Koordinatenrichtungen x und θ , so dass für Gl.(B.85) in Zylinderkoordinaten gilt:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \quad (\text{B.86})$$

Es ist in Gl.(B.86) der bereits zuvor verwendete Ansatz für das akustische Potential nach Gl.(B.77) eingeführt worden.

Werden die Ergebnisse der Gl.(B.78), Gl.(B.82) und Gl.(B.86) zusammen in die Ausgangsgleichung Gl.(B.74) eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a^2} \left(u_x \mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} + \frac{u_\theta}{r} m - \omega \right)^2 \varphi(r) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} - \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} \\ & - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} - \frac{m^2}{r^2} \varphi(r) - \mu_{[\text{mn}]}^{*2\pm} \varphi(r) \right) e^{i[\mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} x + m\theta - \omega t]} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

Dies lässt sich weiter zu

$$\left[-\frac{1}{a^2} \left(u_x \mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} + \frac{u_\theta}{r} m - \omega \right)^2 - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m^2}{r^2} + \mu_{[\text{mn}]}^{*2\pm} \right] \varphi(r) = 0 \quad (\text{B.88})$$

zusammenfassen und vereinfachen.

Da sowohl die Dichte als auch das akustische Potential rein skalare Größen sind, die in diesem Fall nur von der radialen Komponente abhängen, lassen sich die partiellen Differential in gewöhnliche umwandeln. Durch Umstellen kann Gl.(B.88) weiter zu

$$\left[\frac{d}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{d \ln(\rho)}{dr} \right) \frac{d}{dr} + \frac{1}{a^2} \left(u_x \mu_{[\text{mn}]}^{*\pm} + \frac{u_\theta}{r} m - \omega \right)^2 - \frac{m^2}{r^2} - \mu_{[\text{mn}]}^{*2\pm} \right] \varphi(r) = 0 \quad (\text{B.89})$$

vereinfacht werden. Im letzten Schritt lassen sich noch die Mach-Zahlen einführen.

B.5 Beweis der radialen Wellenzahlen

Es soll gezeigt werden, dass die radialen Wellenzahlen $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ der in Tab. 3.1 zusammengestellten bzw. nach Gl.(3.28) berechneten axialen Wellenzahlen $k_{x[mn]}^{\pm}$ den analytischen des strömungsfreien Falls entsprechen. Dazu wird mit Hilfe einer Koordinatentransformation das Schalldruckfeld in das rotierende Strömungssystem übertragen und die Ausbreitungseigenschaften bestimmt (vgl. auch Keller 2013). Das sich in einem Rohr ausbreitende Druckfeld einer Mode ergibt sich nach Gl.(3.24). Da das Relativitätsprinzip auch für die transformierte Lösung gilt, muss das Druckfeld im rotierenden, also bewegten System $(\dots)_B$, dem im ruhenden System entsprechen $(\dots)_F$

$$p'_{F,[mn]}(x, r, \theta, t) = p'_{B,[mn]}(x, r, \theta, t) \quad . \quad (\text{B.90})$$

Wird ein Festkörperwirbel als Drallmodell angesetzt, so gilt für die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Radius

$$u_{\theta}(r) = \frac{u_{\theta,r_a}}{r_a} r = \frac{\text{Ma}_{\theta} a}{r_a} r \quad , \quad (\text{B.91})$$

was direkt zu der Transformationsansweisung

$$\theta_B = \theta_F - \phi_{u,\theta}(r) \equiv \theta_F - \frac{u_{\theta}(r)}{r} t = \theta_F - \frac{\text{Ma}_{\theta} a}{r_a} t \quad (\text{B.92})$$

führt. Dabei lässt sich die Winkelkoordinate des bewegten Systems in Bezug auf das feste Referenzsystem unter Berücksichtigung eines vom Radius abhängigen Phasenwinkels $\phi_{u,\theta}(r)$ bestimmen. Werden diese Transformationsansätze in Schallfeldgleichungen Gl.(3.24) unter Berücksichtigung der Zusammenhänge nach Gl.(B.94) eingesetzt, ergibt sich nach Kürzung

$$\begin{aligned} e^{i(k_{x,F[mn]}^{\pm} x - m\theta_F + \omega_F t)} &= e^{i(k_{x,B[mn]}^{\pm} x - m\theta_B + \omega_B t)} \\ \implies \\ k_{x[mn]}^{\pm} x - m\theta_F + \omega_F t &= k_{x[mn]}^{\pm} x - m\theta_B + \omega_B t \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.93})$$

Diese Beziehung muss im gesamten System gelten und somit auch bei $x = 0$. Mit $\omega = \theta/t$ und der Definition der Wellenzahl $k = \omega/a$ führt dies unmittelbar zu den Winkelgeschwindigkeiten des bewegten Systems in Abhängigkeit von der Drallgeschwindigkeit Ma_{θ} und der allgemeinen Wellenzahl k , die sowohl im ruhenden als auch im bewegten System identisch ist

$$\omega_B = \omega_F - \frac{\text{Ma}_{\theta} a}{r_a} \quad . \quad (\text{B.94})$$

Wie Keller (2013) zeigt, müssen bei solchen Transformationen die axialen Wellenzahlen in beiden Bezugssystemen gleich sein, da ansonsten die Zusammenhänge nach Gl.(B.93) nicht gelten können. Aus diesen Lösungen lässt sich über die allgemeine Wellenzahl k ein einfacher Zusammenhang zwischen den Bezugssystemen herstellen. Wird k in die allgemeine

Beziehung der axialen Wellenzahl für den Strömungsfall nach Gl.(B.59) als $k = k_B = \omega_B/a$ eingesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 k_{x[mn]}^{\pm} &= \frac{k_B \text{Ma}_x \pm \sqrt{k^2 - (1 - \text{Ma}_x^2) k_{r,[mn]}^{(\sigma)^2}}}{(1 - \text{Ma}_x^2)} \\
 \implies & \\
 k_{x[mn]}^{\pm} &= \frac{(k - m\text{Ma}_{\theta}/r_a) \text{Ma}_x \pm \sqrt{(k - m\text{Ma}_{\theta}/r_a)^2 - (1 - \text{Ma}_x^2) k_{r,[mn]}^{(\sigma)^2}}}{(1 - \text{Ma}_x^2)} .
 \end{aligned} \tag{B.95}$$

Wie gezeigt ist, wird zur Herleitung dieses Modells auf die ursprüngliche Definition der axialen Wellenzahl zurückgegriffen und lediglich mit Hilfe eines Transformationsansatzes das Drallfeld implementiert. Davon bleibt die radiale Wellenzahl unberücksichtigt.

B.6 Zylinderfunktionen

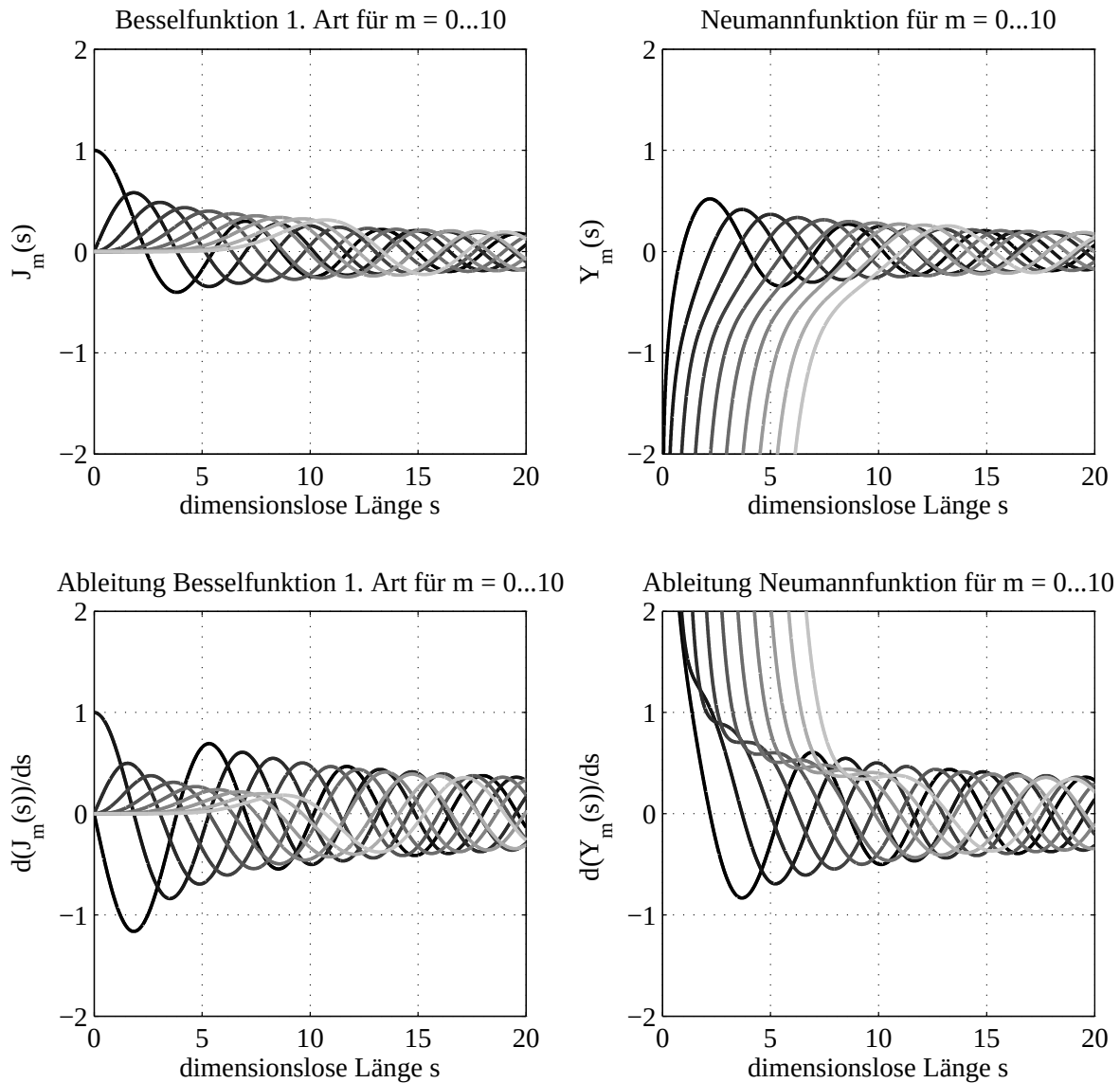


Abbildung B.1: Zylinderfunktionen der Ordnung $m = 0 \dots 10$. (oben, links) Verlauf der Besselfunktionen 1. Art J_m . (oben, rechts) Verlauf der Neumannfunktionen 1. Art Y_m . (unten, links) Verlauf der ersten Ableitung der Besselfunktionen 1. Art. (unten, rechts) Verlauf der ersten Ableitung der Neumannfunktionen 1. Art. Die Schwarz-Weiß-Verläufe entsprechen der Ordnung m . Von dunkel ($m = 0$) nach hell

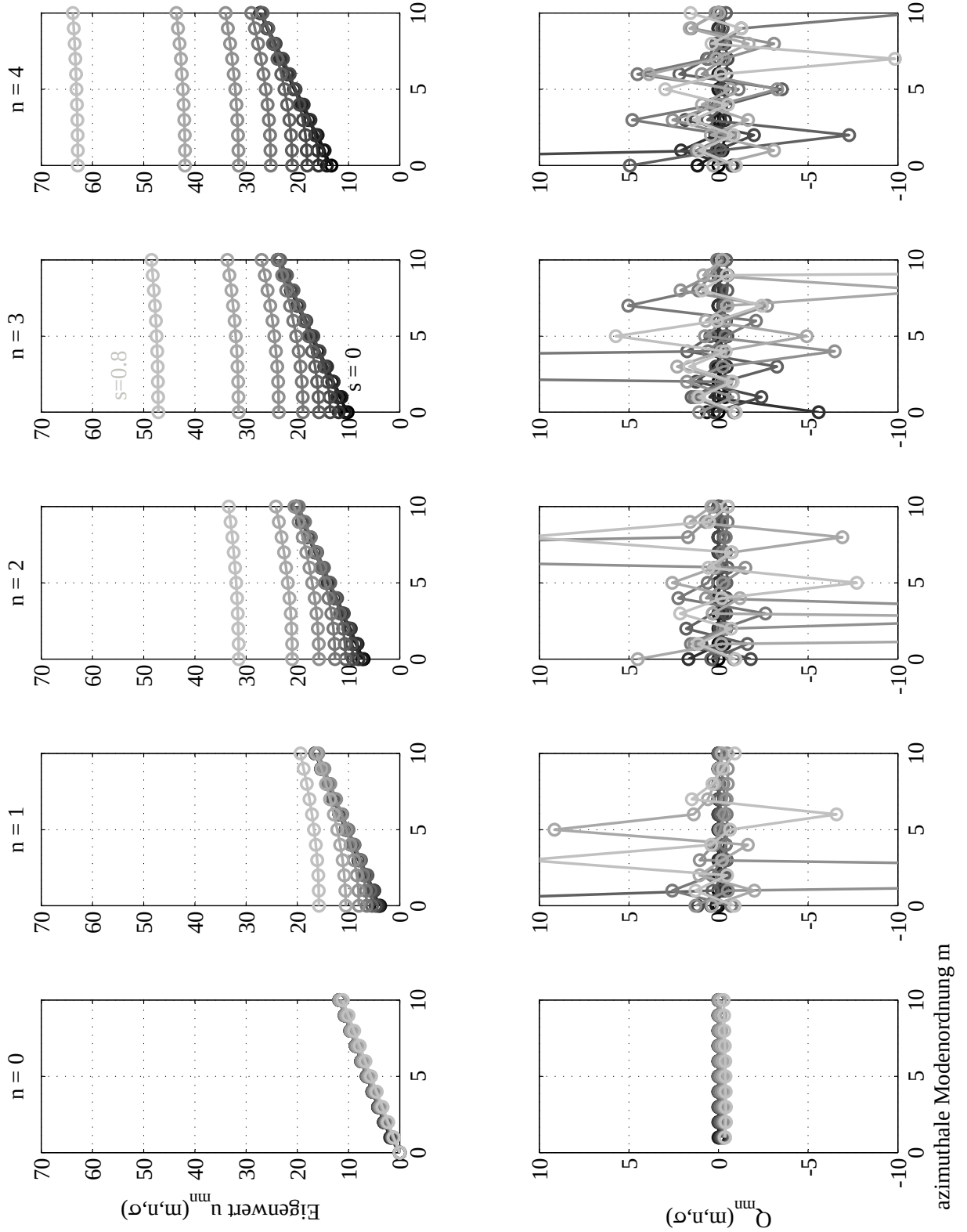


Abbildung B.2: Verläufe der Zylinderfunktionen. (oben) Verläufe der Eigenwerte μ_{mn} und Q_{mn} als Abhängige der azimuthalen Modenordnung für verschiedene Nabenverhältnisse $\sigma = 0 \dots 0.9$ und verschiedene Radialmodenordnungen n . Die Schwarz-Weiß-Verläufe entsprechen der Ordnung m . Von dunkel ($m = 0$) nach hell

B.7 Herleitung der Gruppengeschwindigkeit

Wie in Abschnitt 4.1.2 ausgeführt ist, beschreibt die Gruppengeschwindigkeit den Energietransport der akustischen Mode. Die zugrundeliegende Theorie bedient sich dabei wellenmechanischer Ansätze. Generell wird erst Information bzw. Energie transportiert, wenn die Amplituden monochromatischer Wellen moduliert sind. D.h. die Gruppengeschwindigkeit ergibt sich aus der Überlagerung mehrerer harmonischer Wellen eines schmalen Frequenzbandes. Ein solches von Raum und Zeit abhängiges Wellenpaket $\Phi(\vec{x}, t)$ lässt sich z.B. in eine Fourier-Reihe um die betrachtete Einzelfrequenz entwickeln

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int F(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} d\vec{k} \quad . \quad (\text{B.96})$$

Dabei entspricht $F(\vec{k})$ der Spektralfunktion. Aufgrund der Dispersionsrelation muss die Frequenz $\omega(\vec{k})$ eine Funktion des Wellenzahlvektors $\vec{k}$ sein. Da für die Modulation ein sehr schmales Frequenzband von Belang ist, wird die Reihe um eine Einzelfrequenz $\omega_0 = \omega(\vec{k}_0)$ entwickelt. Für den Wellenzahlvektor gilt dann entsprechend $\vec{k} \rightarrow \vec{k}_0$.

Die Herleitung der Gruppengeschwindigkeit soll nun direkt über eine Energiebetrachtung erfolgen, was zugleich den direkten Zusammenhang der Wellen- und der Energieausbreitung verdeutlicht. Der hier verwendete Ansatz bedient sich allgemeingültiger, quantenmechanischer Gesetzmäßigkeiten und besitzt daher auch für die Ausbreitung longitudinaler Schallwellen Gültigkeit. Das Plancksche Wirkungsquantum h setzt in allgemeingültiger Form die Energie eines Teilchens nach

$$E(\vec{k}) = h\omega(\vec{k}) \quad (\text{B.97})$$

in das Verhältnis zu seiner Schwingfrequenz. Um die von Wellenzahlraum abhängige Bandenergie des Wellenpaketes zu bestimmen, wird diese in eine Taylor-Reihe (vgl. Bronstein et al. 2013) entwickelt. Da der betrachtete Wellenzahlbereich $|\vec{k} - \vec{k}_0|$ gegenüber $\vec{k}$ sehr klein ist, lässt sich in guter Näherung die Taylor-Approximation nach den ersten beiden Termen abbrechen, so dass

$$E(\vec{k}) = E(\vec{k}_0) + (\vec{k} - \vec{k}_0) \frac{\partial E(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \bigg|_{\vec{k}=\vec{k}_0} + \dots \quad (\text{B.98})$$

gilt. Analog zu Gl.(B.97) lässt sich mit

$$\frac{\partial E(\vec{k})}{\partial \vec{k}} = h \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \quad (\text{B.99})$$

eine Beziehung zwischen den Differentialen der Frequenz und der Energie herstellen. Für die Frequenz folgt damit:

$$\omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_0) + (\vec{k} - \vec{k}_0) \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \bigg|_{\vec{k}=\vec{k}_0} + \dots \quad (\text{B.100})$$

Mit dieser Beziehung erweitert sich Gl.(B.96) zu:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int F(\vec{k}) e^{i[\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t - (\vec{k} - \vec{k}_0) \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} t]} d\vec{k} \quad (\text{B.101})$$

B.7 Herleitung der Gruppengeschwindigkeit

Wird weiterhin $\vec{k} = \vec{k}_0 + (\vec{k} - \vec{k}_0)$ einführt ergibt sich schließlich

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int F(\vec{k}) e^{i[\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t]} e^{i[(\vec{k} - \vec{k}_0)(\vec{x} - \frac{\partial\omega(\vec{k})}{\partial\vec{k}}t)]} d\vec{k} \quad (\text{B.102})$$

Die Phase entspricht dabei der eigentlichen Modulationsbedingung, die zumindest in der linearen Akustik konstant ist. So führt

$$\vec{x} - \frac{\partial\omega(\vec{k})}{\partial\vec{k}}t = 0 \quad (\text{B.103})$$

direkt auf die Gruppengeschwindigkeit

$$c_{\text{gr}} \equiv \frac{\partial\omega(\vec{k})}{\partial\vec{k}} \quad (\text{B.104})$$

bzw.

$$c_{\text{gr}} \equiv \frac{1}{h} \frac{\partial E(\vec{k})}{\partial\vec{k}} \quad (\text{B.105})$$

B.8 Herleitung der Gruppen- und Phasengeschwindigkeit unter Strömungseinfluss

In diesem Abschnitt soll die axiale Wellenzahl k_x in eine vom Cut-Off-Verhältnis ξ abhängige Form gebracht werden, um anschließend aus dieser die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei überlagerter Grundströmung herzuleiten. Rice et al. (1979) definiert das Cut-Off-Verhältnis mit

$$\xi = \frac{k}{k_{\text{Cut-Off}}} = \frac{\omega}{\omega_{\text{Cut-Off}}} = \frac{kr_a}{\sqrt{1 - \text{Ma}_x \mu_{mn}}} \quad (\text{B.106})$$

über den Quotienten von Kreisfrequenz zu Cut-Off-Frequenz der zu betrachtenden Mode. Die axiale Wellenzahl ist bereits in Gl.(B.59) zu

$$k_x = \frac{-k\text{Ma}_x \pm \sqrt{k^2 - (1 - \text{Ma}_x^2) \left(\frac{\mu_{mn}}{r_a}\right)^2}}{1 - \text{Ma}_x^2} \quad (\text{B.107})$$

hergeleitet worden. Wird Gl.(B.106) nach

$$\mu_{mn} = \frac{kr_a}{\xi \sqrt{1 - \text{Ma}_x}} \quad (\text{B.108})$$

umgestellt, so lassen sich die Eigenwerte der Gl.(B.107) ersetzen. Dies führt dann zu der axialen Wellenzahl als Abhängige des Cut-Off-Verhältnisses

$$k_x = \frac{-k\text{Ma}_x \pm \sqrt{k^2 - (1 - \text{Ma}_x^2) \left(\frac{k^2 r_a^2}{\xi^2 (1 - \text{Ma}_x^2) r_a^2}\right)}}{1 - \text{Ma}_x^2} \quad (\text{B.109})$$

$$k_x = \frac{k \left[\pm \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} - \text{Ma}_x \right]}{1 - \text{Ma}_x^2} \quad (\text{B.110})$$

Mit diesem k_x lässt sich nun zunächst die axiale Phasengeschwindigkeit nach

$$c_{\text{ph},x} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega (1 - \text{Ma}_x^2)}{k \left[\pm \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} - \text{Ma}_x \right]} \quad (\text{B.111})$$

bzw.

$$c_{\text{ph},x} = \frac{a (1 - \text{Ma}_x^2)}{\pm \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} - \text{Ma}_x} \quad (\text{B.112})$$

herleiten.

Die axiale Gruppengeschwindigkeit lässt sich ebenfalls mit der in Gl.(B.110) gegebenen axialen Wellenzahl herleiten. Allgemein gilt $c_{\text{gr},x} = \partial\omega/\partial k_x$. Rienstra und Hirschberg (2011) zeigen, dass dies äquivalent zu $(\partial k_x/\partial\omega)^{-1}$ ist. So gilt:

$$c_{\text{gr},x} = \left\{ \frac{\partial}{\partial\omega} \left[\frac{k \left[\pm \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2} - \text{Ma}_x} \right]}{1 - \text{Ma}_x^2} \right] \right\}^{-1} \quad (\text{B.113})$$

Nach Auflösung der Wellenzahl $k = \omega/a$ und des Cut-Off-Verhältnisses (vgl. Gl.(B.106)) gilt:

$$c_{\text{gr},x} = \left\{ \frac{\partial}{\partial\omega} \left[\frac{\frac{w}{a} \left[\pm \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{Cut-Off}}^2}{\omega^2} - \text{Ma}_x} \right]}{1 - \text{Ma}_x^2} \right] \right\}^{-1} \quad (\text{B.114})$$

Diese Beziehung lässt sich nach ω ableiten. Dies führt zu:

$$c_{\text{gr},x} = \left[\frac{\omega_{\text{Cut-Off}}^2}{\omega^2 a (1 - \text{Ma}_x^2)} \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{Cut-Off}}^2}{\omega^2}} \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{Cut-Off}}^2}{\omega^2}}}{a (1 - \text{Ma}_x^2)} \right]^{-1} \quad (\text{B.115})$$

Durch entsprechendes Umstellen und Auflösen lässt sich Gl.(B.115) in

$$c_{\text{gr},x} = \frac{a (1 - \text{Ma}_x^2) \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{Cut-Off}}^2}{\omega^2}}}{\text{Ma}_x \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{Cut-Off}}^2}{\omega^2}} \mp 1} \quad (\text{B.116})$$

überführen, was schließlich zu der gesuchten axialen Gruppengeschwindigkeit führt

$$c_{\text{gr},x} = \frac{a (1 - \text{Ma}_x^2) \sqrt{1 - \xi^{-2}}}{\text{Ma}_x \sqrt{1 - \xi^{-2}} \mp 1} . \quad (\text{B.117})$$

B.9 Herleitung des Verzerrungswinkels

Der in Gl.(4.30) angegebene Verzerrungswinkel α einer stehenden Azimutalmode bei Strömungsüberlagerung lässt sich mit Hilfe der Gl.(4.24) für eine in positive Axialrichtung ausbreitende stehende Umfangsmode gemäß

$$p'_{[mn]}(x, r, \theta, t) = 0 = \Re \left\{ \Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}r) \cdot \left[\hat{A}_{+x} \cos \left(m\theta + (k_{+x}^{+\theta} - k_{+x}^{-\theta}) \frac{x}{2} \right) e^{i/2[(k_{+x}^{+\theta} + k_{+x}^{-\theta})x]} \right] e^{-i\omega t} \right\} \quad (\text{B.118})$$

herleiten. Trivialer Weise muss nur der cos-Term berücksichtigt werden damit $\Re\{\dots\} = 0$ gilt. Es gilt folglich die Nullstellen der Druckverteilungen in azimuthaler Richtung zu finden, da diese einen definierten Zustand der Wellenfronten beschreiben. Da die Mode nur für reelle Werte ausbreitungsfähig ist, sei nachfolgend stets vom rein reellen Zustand ausgegangen. Durch einfaches Eliminieren lässt sich die Gl.(B.118) weiter zu

$$\cos \left(m\theta + (k_{+x}^{+\theta} - k_{+x}^{-\theta}) \frac{x}{2} \right) = 0 \quad (\text{B.119})$$

vereinfachen, so dass sich schließlich für den Umfangswinkel

$$\theta = \frac{1}{2m} (3\pi n - (k_{+x}^{+\theta} - k_{+x}^{-\theta}) x) \quad (\text{B.120})$$

ergibt. Dabei ist n ein Vielfaches der Nullstellen, das im Folgenden zu $n = 1$ gesetzt werden kann. Um den Verzerrungswinkel α zu beschreiben, lässt sich auf einem beliebigen x -Intervall $\Delta x = x_i - x_{i+1}$ ein entsprechendes Umfangswinkel-Intervall $\Delta\theta$ angeben, die sich beide nach

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta x} \right) = \frac{\left[\frac{1}{2m} (3\pi - (k_{+x}^{+\theta} - k_{+x}^{-\theta}) x_i) \right] - \left[\frac{1}{2m} (3\pi - (k_{+x}^{+\theta} - k_{+x}^{-\theta}) x_{i+1}) \right]}{x_i - x_{i+1}} \quad (\text{B.121})$$

ins Verhältnis setzen lassen. Somit ergibt sich schließlich der Verzerrungswinkel α zu:

$$\alpha = \pi/2 \pm \arctan \left(\frac{-k_{+x}^{+\theta} - k_{+x}^{-\theta}}{2m} \right) \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.122})$$

Dabei ist bereits der Einfluss des Quadranten und die Richtung des Dralls $\pm Ma_\theta$ berücksichtigt. Aus Gl.(B.119) ist direkt ersichtlich, dass bei einer Wellenzahldifferenz $\delta k_{\pm x}^{\pm\theta} = k_{\pm x}^{+\theta} - k_{\pm x}^{-\theta}$ ein zusätzlicher Faktor im Cosinus-Term auftritt, der die Modenstruktur festlegt.

C Anhang Moden

C.1 Radiale Schallfeldausbreitung akustischer Moden

In Ergänzung zu der Beschreibung azimuthaler Modenfelder in Kapitel 4, sollen in diesem Abschnitt wichtige Ausarbeitungen zur Untersuchungen der radialen Ausbreitungseigenschaften vorgestellt werden, da deren Kenntnis unablässig für die experimentelle Untersuchungen komplexer Schallfeldstrukturen in Rohrleitungssystemen und deren Analyse ist. Neben den bereits in Abschnitt 4.1 behandelten azimuthalen Moden spielen in der Kanalakustik auch die radialen Moden eine entscheidende Rolle, denn die dem Schallfeld inhärente akustische Energie ergibt sich stets aus der Summe beider Anteile. In Abschnitt 3.2.1 wird zur Lösung der akustischen Wellengleichung eine spezielle radiale Ausbreitungsgleichung hergeleitet. Für den strömungsfreien Fall existiert für diese eine mathematisch eindeutige Lösung, da sich die Differentialgleichung als Sturm-Liouville-Problem formulieren lässt. Soll hingegen ein überlagertes Strömungsfeld berücksichtigt werden, ist eine analytisch Lösung nur für eine über dem Rohrquerschnitt konstante Geschwindigkeitsverteilung möglich. Soll darüber hinaus eine Drallströmung berücksichtigt werden, so existieren nur für einen Festkörperwirbel unter Vernachlässigung von Schereffekten, bzw. unter Vernachlässigung einer Kopplung der Geschwindigkeitsfelder, geschlossene Lösungen, wie im Rahmen dieser Arbeit hergeleitet ist (vgl. Anhang B.5). Liegen komplexe Strömungsfelder mit radialen Geschwindigkeitsgradienten vor, so müssen zur Lösung der radialen Ausbreitungsgleichung die in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten numerischen Verfahren eingesetzt werden, wie z.B. Kousen (1999), Golubev und Atassi (1996) oder Yourkovich (1976) zeigen. Das Ziel dieses Kapitels ist es jedoch die grundlegenden Einflüsse einer Strömungsüberlagerung und der Rohrgeometrie auf die Form des Schallfeldes rein analytisch zu untersuchen, um so die wichtigsten physikalischen Effekte herauszuarbeiten.

C.1.1 Untersuchung der Radialstruktur

Gerade bei Triebwerksanwendungen wird die radiale Schallfeldstruktur maßgeblich durch die Kanalgeometrie und einen möglichen Nabenkörper beeinflusst. Abbildung C.1 zeigt dazu exemplarisch einen Längsschnitt durch ein zylindrisches Rohr mit und ohne Nabenkörper für eine $mn_{[2;2]}$ Mode. Wie zu erkennen ist, bilden sich in beiden Fällen stets zwei Knoten in radialer Richtung aus, doch ist das Schalldruckmuster bei vorhandenem Nabenkörper stark gestaucht. Nachfolgend sollen diese Einflüsse der Kanalversperrung eingehender untersucht werden.

In der in Gl.(3.24) gegebenen Schalldruckbeziehung für eine spezifische Mode entspricht $\Lambda_{[mn]}^{(\sigma)}(k_{r,[mn]}^{(\sigma)}r)$ dem radialen Anteil der Schalldruckverteilung. Wie in Abschnitt B.3 her-

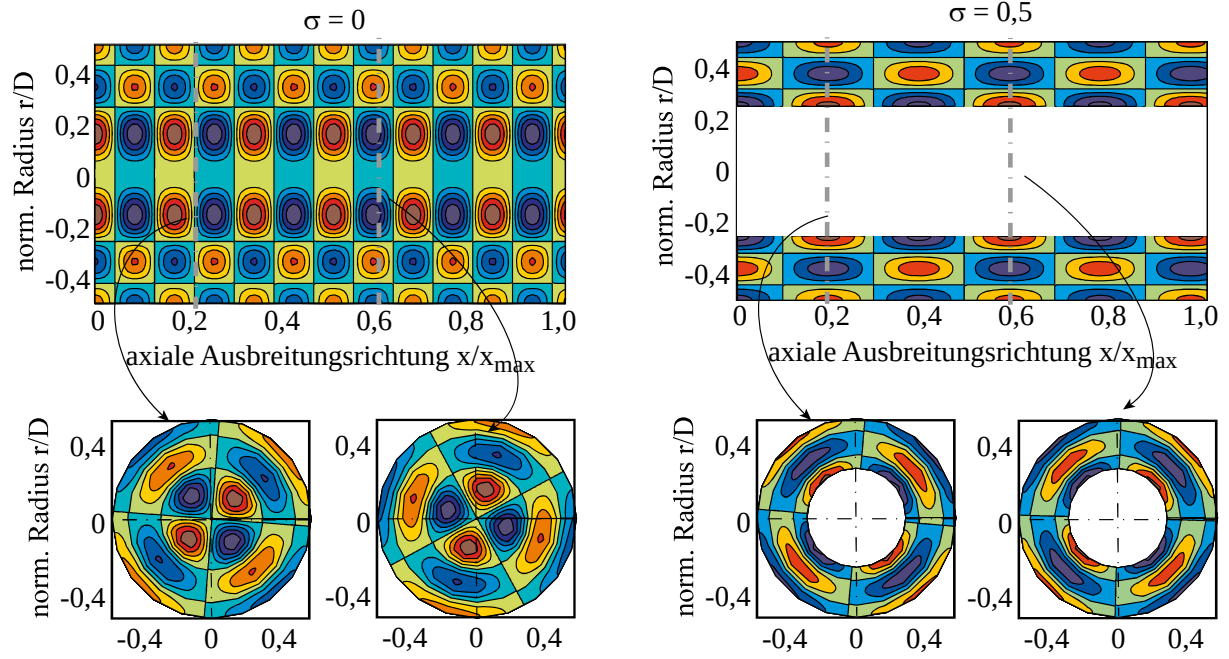


Abbildung C.1: Modale Schalldruckverteilung einer $mn_{[2;2]}$ Mode in einem Kreis- und Ringkreiskanal ($\sigma = 0, 5$) bei einer Anregung von $kD = 27, 5$

geleitet wird, ist dieser Term als Linearkombination der Besselfunktion $J_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)}r)$ und Neumannfunktion $Y_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)}r)$ gemäß

$$\Lambda_{[mn]}^{(\sigma)} = J_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)}r) + Q_{[mn]}^{(\sigma)}Y_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)}r) \quad (\text{C.1})$$

definiert, der eine entsprechende Anpassung der radialen Wellenstruktur vornimmt. Q_{mn} kann dabei als Amplitudenverhältnis der beiden Zylinderfunktionen zueinander verstanden werden, das sich nach Gl.(B.48) über die Bestimmung der n -ten Extremwerte bzw. der Nullstellen der n -ten Ableitung ergibt. Dieser Vorfaktor gewichtet den Anteil der Neumannfunktion an der Gesamtlösung wenn eine Nabenkörper vorhanden ist. Im Fall einer einfachen Zylindergeometrie ohne Nabenkörper entfällt $Y_m(k_{r,[mn]}^{(\sigma)}r)$ und das radiale Schallfeld wird einzig über den Verlauf der Besselfunktion bestimmt. In den Abb. B.1 sind dazu die Verläufe der beiden Zylinderfunktionen dargestellt.

Wie anhand der Gl.(C.1) zu erkennen ist, wird die radiale Schallfeldstruktur einzig über die geometrischen Abmessungen (über das Nabenverhältnis σ) und über die Modenordnungen m und n festgelegt. Physikalisch gesehen führt dies zu einer stehenden Welle, die sich zwischen den schallharten Berandungen der Kanalwände bzw. der Kanalwand und der Nabe ausbreitet. Somit liegen im zeitlichen Verlauf die Konten und Amplitudenmaxima stets an den gleichen Radialpositionen. Lediglich durch den Schwingungsterm der Gesamtlösung $\exp(-i\omega t)$ (vgl. Gl.3.24) wird die Amplitude oszillieren.

Bei Betrachtung des radialen Schalldruckprofils fällt zunächst auf, dass sich in Abhängigkeit der radialen Modenordnung n ein definiertes Schalldruckprofil über dem Radius

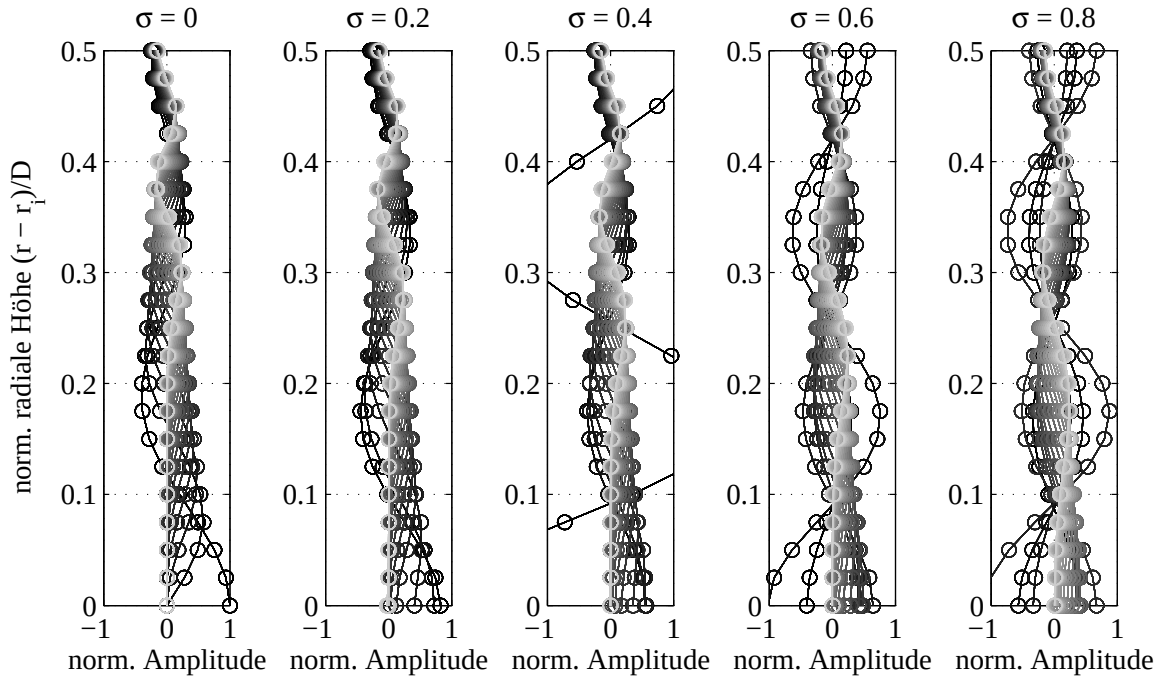


Abbildung C.2: Radiale Schalldruckverteilung der Radialmodenordnung $n = 3$ für $m = 0 \dots 20$ und verschiedenen Nabenverhältnissen. Schwarz-Weiß-Verläufe entsprechen der azimutalen Modenordnung (von dunkel $m = 0$ nach hell $m = 20$).

einstellt. Dabei muss auf Grund der akustischen Randbedingungen an den Rohrwänden ein Schalldruckmaxima liegen, während sich zwischen den schallharten Berandungen entsprechend n Knoten einstellen. Wie in Abb. C.2 exemplarisch für die Radialmodenordnung $n = 3$ zu erkennen ist, sind diese dabei jedoch nicht zwangsläufig äquidistant über dem Radius verteilt. Es liegt vielmehr eine von der azimutalen Modenordnung mn und dem Nabenverhältnis σ abhängige radiale Verschiebung in Richtung der Außenwand vor. Ebenso weisen die lokalen Maxima unterschiedliche Amplituden auf. Auch hier lässt sich deutlich der Einfluss des Nabenverhältnisses erkennen. So wird für $\sigma = 0$ der radiale Schalldruckverlauf direkt durch die Besselfunktion J_m vorgegeben (vgl. Abb. B.1). Folglich entspricht z.B. der Amplitudenverlauf bei $m = 0$ jenem der Besselfunktion J_0 mit einem lokalen Maximum genau in der Rohrmitte und einem an der Rohraußenwand. Für höhere Umfangsmoden ist hingegen der Schalldruck in der Mitte des Kreiskanals immer Null und die radiale Verteilung der Knoten verschiebt sich zunehmend in Richtung der Außenwand, an der sich per Randbedingungsdefinition immer ein lokales Maximum befinden muss. Mit der Verschiebung der Knoten geht theoretisch auch eine radiale Verschiebung der Energieverteilung einher. Um diese Phänomene eingehender zu untersuchen, sind in Abb. C.3 exemplarisch die radialen Schalldruckverläufe für $\sigma = 0$ und $\sigma = 0,6$ dargestellt und zusätzlich die mit variierendem m auftretenden Verschiebungen der Knotenpositionen sowie die Amplitudenmaxima aufgetragen. Für $\sigma = 0$ ist zu erkennen, dass die Maxima bzw. die Knoten mit zunehmender Umfangsmodenordnung asymptotisch gegen einen Grenzwert laufen, was bedeutet, dass für sehr hohe Modenordnungen keine radiale Streuung der Maxima bzw. Knotenposition mehr auftritt und die radiale Schallfeldstruktur unabhängig von m wird. Diese Tendenz wird mit steigendem Nabenverhältnis noch verstärkt wie ebenfalls in Abb.

C.3 am Beispiel $\sigma = 0,6$ verdeutlicht wird. Dort tritt nur noch eine sehr geringe radiale Streuung der Knoten und Maxima auf. Insbesondere die der Außenwand nächst-stehenden Knoten zeigen nur eine geringe Variation der Knotenpositionen in radialer Richtung.

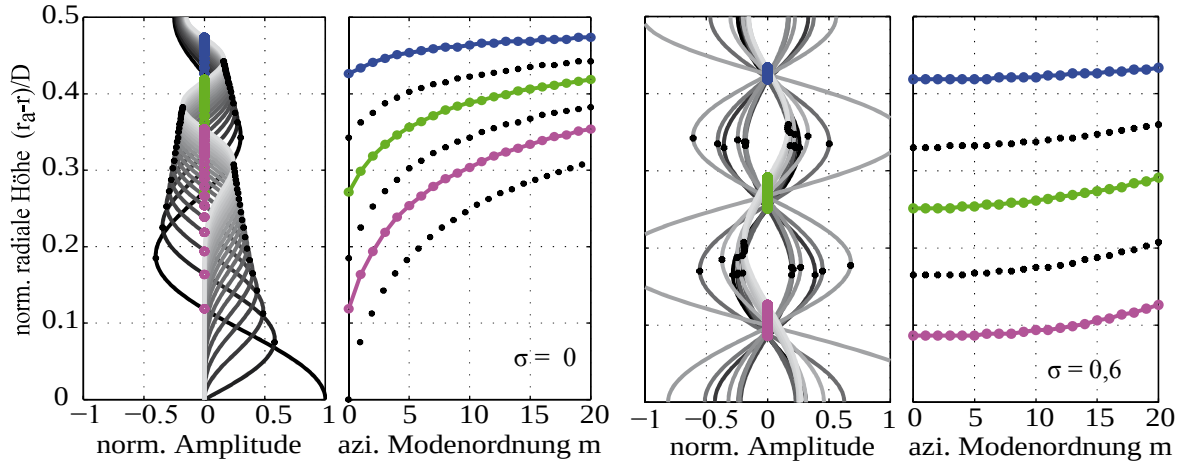


Abbildung C.3: (links) Verläufe des radialen Schalldruckprofils für verschiedene Azimutalmodenordnungen $m = 0 \dots 20$ bei $n = 3$ und $\sigma = 0$. (rechts) Verläufe des radialen Schallprofils für verschiedene Azimutalmodenordnungen $m = 0 \dots 20$ bei $n = 3$ und $\sigma = 0,6$. o = Knotenlinien | * = Maxima der Amplituden

Diese Effekte lassen sich mit dem Verhalten der Eigenwerte bzw. der Bestimmungsgleichung nach Gl.(B.49), Gl.(B.50) und Gl.(B.54) erklären.

Wie bereits beschrieben ist, gehen die Eigenwerte $\mu_{mn}^{(\sigma)}$ über die radiale Wellenzahl $k_{r,[mn]}^{(\sigma)} = \mu_{mn}^{(\sigma)} / r_a$ in die Zylinderfunktionen ein. Dementsprechend wirken sich die Einflüsse der Eigenwerte unmittelbar auf die radiale Schallfeldstruktur aus. Auch der Amplitudenfaktor Q_{mn} hängt von $k_{r,[mn]}^{(\sigma)}$ ab, wobei der Einfluss des Nabenverhältnisses und der Modenordnung über die Bestimmungsgleichung Ψ festgelegt ist. Da sich Q_{mn} über das Verhältnis der Ableitungen von Bessel- zu Neumannfunktion

$$Q_{[mn]}^{(\sigma)} = - \frac{\left[J_{m-1}(\mu_{mn}^{(\sigma)}) - J_{m+1}(\mu_{mn}^{(\sigma)}) \right]}{\left[Y_{m-1}(\mu_{mn}^{(\sigma)}) - Y_{m+1}(\mu_{mn}^{(\sigma)}) \right]} = \frac{dJ_m(\mu_{mn}^{(\sigma)})}{dY_m(\mu_{mn}^{(\sigma)})} \quad (\text{C.2})$$

an der betrachteten Nullstelle ergibt, werden nur im Fall $\sigma > 0$ Werte ungleich Null auftreten. Sobald eine höhere Radialmode n vorliegt, wird Q_{mn} für $\sigma \neq 0$ reellwertig und oszilliert um den Nullwert, wie es in Abb. B.2 dargestellt ist. Um diesen Anteil wird dann die Neumannfunktion bei vorhandener Nabe gewichtet und entsprechend die radiale Schallstruktur angepasst. Während für den einfachen Kreiskanal die in Q_{mn} eingehenden Eigenwerte exakt den Nullstellen der Besselfunktion J_m entsprechen, sind bei vorhandenem Nabenkörper die Eigenwerte über die Nullstellen der Bestimmungsgleichung Ψ definiert. Dann entsprechen die Nullstellen nicht jenen der Besselfunktion, so dass $Q_{mn} \neq 0$ wird. Die auftretenden Oszillationen von Q_{mn} sind insbesondere für große Nabenverhältnisse bei hohen radialen Modenordnungen aber kleinen Umfangsmodenordnungen m zu beobachten. Für $n = 0$ treten sie allerdings nicht auf, obwohl Q_{mn} auch da vom Nabenverhältnis und

der Azimutalmodenordnung abhängt. Dies lässt den Schluss nahe, dass die radiale Modenordnung für die beobachteten Oszillationen des Amplitudenverhältnis Q_{mn} verantwortlich ist.

Wie anhand der Eigenwertbestimmung in Gl.(B.50) zu erkennen ist, hängen die Eigenwerte einzig von den Zylinderfunktionen ab und werden z.B. nicht durch das Strömungsfeld beeinflusst.

Zur Interpretation der sich über der Kanalhöhe einstellenden radialen Schalldruckverteilung müssen neben den Amplitudenverhältnissen auch, die sich in Abhängigkeit von dem Nabenverhältnis und der Modenordnung mn ergebenden Eigenwerte betrachtet werden. In

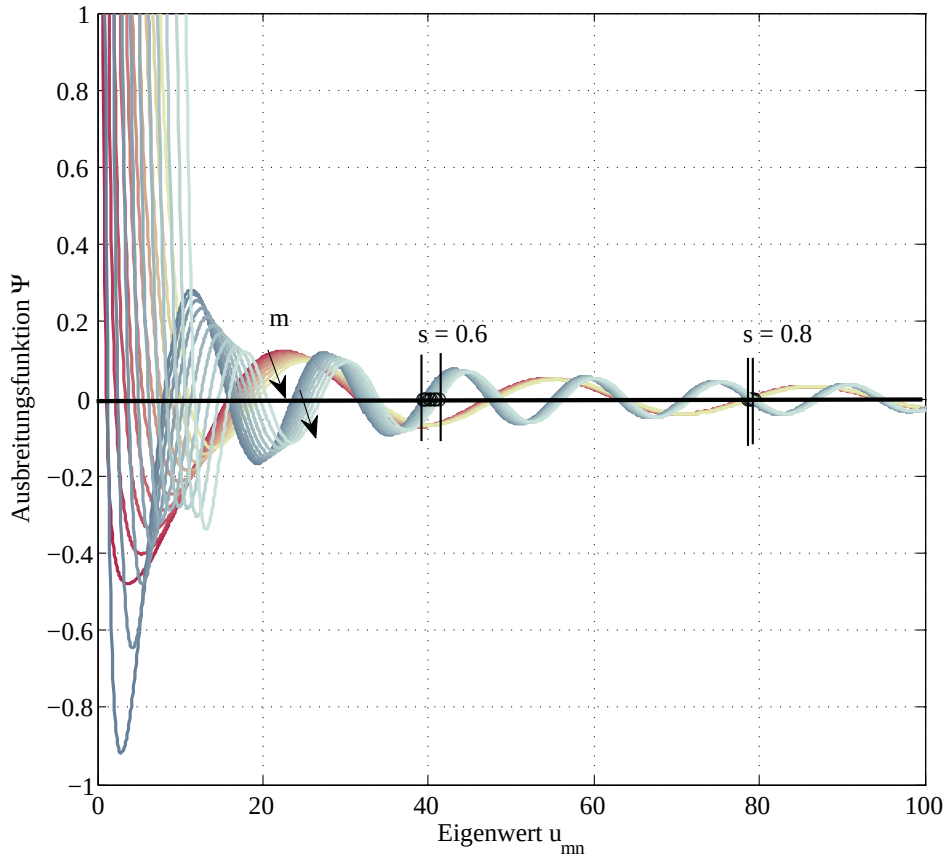


Abbildung C.4: Verläufe der Bestimmungsgleichung Ψ als Abhängige der Eigenwerte μ_{mn} für verschiedene Azimutalmodenordnung $m = 0 \dots 10$ und $n = 5$. Rot: Nabenverhältnis $\sigma = 0,6$ bzw. blau: $\sigma = 0,8$. Zusätzlich sind die Variationen s der entsprechenden Nullstellen eingetragen.

Abb. B.2 sind dazu die Verläufe der Eigenwerte für verschiedene Nabenverhältnisse und Radialmodenordnungen n über der Azimutalmodenordnung m aufgetragen. Für den einfachsten Fall mit $n = 0$ steigt μ_{mn} unabhängig vom Nabenverhältnis bei variierendem m annähernd linear an. Für höhere radiale Moden wirkt sich der Einfluss des Nabenverhältnis wesentlich stärker aus. Während für geringe σ ein, wie im Fall $n = 0$, annähernd linearer Anstieg der Eigenwerte zu beobachten ist, steigen bei großen Nabenverhältnissen die Eigenwerte überproportional stark an. Gleichzeitig flachen jedoch ihrer Verläufe ab. Das bedeutet, dass für hohe Radialmoden n und große Nabenverhältnisse der Einfluss der Azi-

mutalmodenordnung auf die radialen Eigenwerte gering ist. Zu erklären ist dies mit dem Verhalten der Bestimmungsgleichung Ψ , welche dann nahezu unabhängig von m ist. Dieses Verhalten wird auch in Abb. C.4 am Beispiel zweier unterschiedlicher Nabenverhältnisse für die Modenordnung $n = 5$ verdeutlicht.

Die in Abb. C.2 und Abb. C.3 gezeigten radialen Verteilungen der Knoten gehen folglich bei einem einfachen Kreiskanal auf das Verhalten der Besselfunktionen und bei einem Ringkreiskanal auf das Verhalten der Bestimmungsgleichung Ψ zurück.

Einen Sonderfall stellt die Radialmodenordnungen $n = 0$ dar, also eine rein azimutale Mode. Obwohl die Schalldruckverläufe keine Knoten in radialer Richtung aufweisen, liegt eine radiale Abhängigkeit des Schalldrucks von der Ordnung der Umfangsmode und dem Nabenverhältnis vor, wie in Abb. C.5 gezeigt ist. Generell lassen sich auch hier die gleichen Tendenzen wie bei höheren Radialmoden feststellen. So sind für den einfachen Kreiskanal die Amplituden in der Rohrmitte für $m > 0$ stets Null während für $m = 0$ ein konstanter Wert vorliegt. Da es sich dabei um eine ebene Welle handelt, muss der Schalldruck über der Kanalhöhe entsprechend konstant verlaufen. Für höhere Umfangsmode nähert sich dieser jedoch von seinem Minimum in der Rohrmitte ausgehend zum Maximum an der Kanalaußenwand hin parabelförmig an. Der Verlauf ist auch hier durch das Verhalten der Besselfunktionen vorgegeben. Mit zunehmender Modenordnung m ist ebenfalls eine Verschiebung der wirkenden Schalldruckstruktur zur Kanalaußenwand hin zu beobachten, wobei generell die Amplituden abnehmen. Auch bei vorhandenem Nabenverhältnis sind diese Tendenzen zu erkennen, wenngleich die akustischen Randbedingungen einen Schalldruck $p \neq 0$ an Nabe und Gehäuse erfordern.

Mit Hilfe der analytischen Betrachtungen können wichtige Erkenntnisse für das Transportverhalten akustischer Moden in Turbomaschinen gewonnen werden. Gerade die Tatsache, dass eine radiale Verschiebung der Schalldruckmaxima und damit der Schallenergie hin zur Kanalwand eintritt, zeigt etwa, dass mit Hilfe spezieller Impedanzbelegungen der Kanalwände ein Großteil der akustischen Energie dissipieren lässt. Dieses Prinzip kann z.B. genutzt werden, um effektive Schalldämpfersysteme zu entwickeln.

Im Rahmen dieser Arbeit soll schwerpunktmäßig die azimutale Modenausbreitungen in einer Luftturbine untersucht werden. Anhand der in diesem Abschnitt herausgearbeiteten Erkenntnissen zur radialen Schallfeldstruktur zeigt sich, dass mit Hilfe der in den Messungen eingesetzten Wanddrucksensoren bei rein azimutaler Modenanregung stets die Schalldruckmaxima erfasst werden. Weitere Maxima in radialer Richtung sind nicht zu erwarten. So kann davon ausgegangen werden, dass auch die Energiemaxima erfasst werden.

C.1.2 Radiale Modenstrukturen bei Überlagerung

In komplexen Schallfeldern realer Turbomaschinen treten eine Vielzahl überlagerter Moden auf, die als Spinning sowie als stehende bzw. als partiell stehende Moden vorliegen können. Da die Modenfelder miteinander gekoppelt sind, werden sich diese stets in Abhängigkeit ihrer radialen und azimutalen Ausbreitungseigenschaften ergeben. In diesem Abschnitt sollen auf Basis analytischer Betrachtungen einige grundlegende Eigenschaften überlagerter

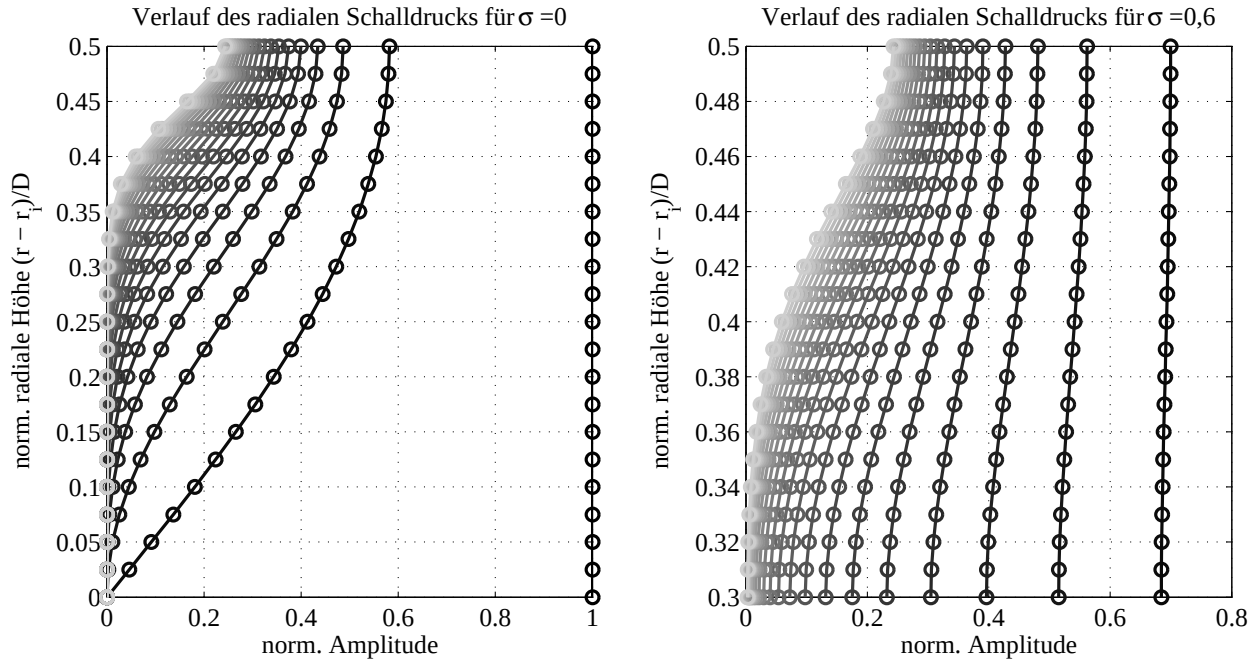


Abbildung C.5: Radiale Schalldruckverteilung der Radialmodenordnung $n = 0$ für variierendes m . (links) $\sigma = 0$, (rechts) $\sigma = 0,6$. Schwarz-Weiß-Verläufe entsprechen der azimuthalen Modenordnung (von dunkel $m = 0$ nach hell $m = 20$).

Moden untersucht werden. Diese Erkenntnisse sind insbesondere für die Analyse typischer Turbinenschallfelder notwendig, dienen aber auch zur Interpretation der im AWT gemessenen Schallfelder.

Bei einer rein azimuthalen Mode werden im zeitlichen Verlauf keine radialen Knoten auftreten, wie in Abb. C.6 am Beispiel der $mn_{[1;0]}$ Mode gezeigt ist. Da die Mode rotiert, lassen sich unabhängig von der Umfangsposition über eine Periode stets die gleichen radialen Schalldruckstrukturen ermitteln. Ein identisches Verhalten tritt auch für eine einzelne mn Mode auf, die allerdings n -Knoten in radialer Richtung aufweist. Dann sind die Beträge der an der Kanalwand gemessenen Amplituden geringer als im Fall rein azimuthaler Moden gleicher Ordnung m . Für gemischte mn Moden werden aufgrund des existierenden Radialanteils die Amplitudenmaxima in radialer Richtung verschoben und treten folglich nicht mehr an der Kanalwand auf. Zwar wird sich stets ein lokales Schalldruckmaximum an der schallharten Außenwand ausbilden, doch ist dies nicht zwangsläufig das globale, wie bei einer rein azimuthalen Mode. Das globale Maximum wird entsprechend durch die Radialmodenordnung n vorgegeben und damit auch die Energieverteilung.

Bei einer einfachen stehenden Umfangsmode liegt im zeitlichen Verlauf hingegen immer eine von der Umfangsposition abhängige Druckverteilung vor. Dies gilt sowohl für die azimuthale als auch die radiale Richtung. Auch hier tritt, wie bei den Spinning Modes bei einer gemischten mn Mode eine Energieverteilung der radialen Schalldruckverteilung auf, so dass geringere Amplituden an der Rohraußenwand gemessen werden, wie in Abb. C.6 am Beispiel der $mn_{[1;1]}$ Mode gezeigt ist. Durch die feste Modenstruktur kann es vorkommen, dass umfangsabhängige Interferenzmuster entstehen, bei denen in radialer Richtung

die Modenstrukturen partiell gar keine Knoten aufweisen. Dies verdeutlicht, dass zur korrekten Radialfeldanalyse bei stehenden Moden die Messung an mehreren Umfangsposition durchgeführt werden sollte.

Anders sieht es hingegen aus, wenn zwei rein azimutale Moden unterschiedlicher Ordnung m überlagert sind. In Abb. C.6 ist dies am Beispiel der Überlagerung einer $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode verdeutlicht. Bei Spinning Modes führt dies zu einem komplexen Interferenzmuster des Schalldruckprofils in Umfangsrichtung, was sich über die Wandamplituden wiederum auf den zeitlichen Verlauf der Radialstruktur in Abhängigkeit der Umfangsposition auswirkt. Aufgrund der sich einstellenden Interferenzmuster sind in Abhängigkeit von der Umfangskoordinate dann für einzelne radialen Zeitverläufe sogar Nulldurchgänge zu beobachten, die von der vorgegeben Modenordnung her nicht auftreten können. Durch eine Veränderung des azimutalen Phasenwinkels können diese Strukturen beeinflusst werden. Entscheidend ist jedoch, dass die Envelope der radialen Zeitverläufe nur der Modenordnung n entsprechende Knoten aufweist. Im Fall rein azimutaler Moden liegen also keine Nullstellen, außer in der Rohrmitte, vor. Folglich hängt auch hier die Amplitude sowie der zeitliche Verlauf der radialen Schalldruckverteilung von der Umfangsposition ab. Zur Charakterisierung der radialen Schalldruckstruktur bietet es sich also die Einhüllenden oder ein Äquivalent an. Bei unterschiedlichen Drehrichtungen der Spinning Modes verstärken sich diese Effekte.

Wird eine der Moden hingegen mit einem azimutalen Phasenversatz belegt, so bewirkt dies zunächst eine Verschiebung des azimutalen Interferenzmusters in Umfangsrichtung. Eine Änderung dessen Struktur tritt hingegen nicht auf. Einhergehend wird auch die radiale Schalldruckstruktur in Umfangsrichtung verschoben, was bedeutet, dass bei einer festen Messposition andere Radialverläufe gemessen werden.

Bei der Überlagerung zweier azimutaler, stehender Moden, werden sich in Umfangsrichtung wesentlich komplexe Interferenzmuster als bei überlagerten Spinning Modes einstellen. Somit sind über die Verläufe der Wandamplituden auch die Strukturen der radialen Verteilungen betroffen und hängen unmittelbar von der Umfangsposition ab.

In Abb. C.6 ist weiterhin die aus der Überlagerung einer rein azimutalen und einer gemischten mn Mode resultierende Schallfeldstruktur am Beispiel einer $mn_{[2;0]}$ und $mn_{[1;1]}$ Mode verdeutlicht. Da die Radialmode nun eine andere Amplitudenverteilung in radialer Richtung, als die reine Umfangsmode aufweist, wird auch die überlagerte Azimutalmodenstruktur beeinflusst sein. Zusätzlich treten lokale Variationen der radialen Schalldruckverteilung auf. Beide Effekte führen zwangsläufig zu Umfangspositions-abhängigen Messergebnissen. Ein überlagerter Phasenversatz wirkt sich in Umfangsrichtung, wie im oberen Fall, einzig auf die Verschiebung der Envelopenform in Umfangsrichtung aus. In radialer Richtung bewirkt dieser hingegen eine Änderung der gesamten Struktur. Der Grund ist, dass sich in radialer Richtung stehende Wellen ausbreiten, die bei veränderten azimutalem Phasenwinkel anders überlagert werden. Dies führt zwangsläufig zu von der Umfangsposition abhängigen Messergebnissen.

Bei der Überlagerung zweier stehender Moden bzw. partiell stehender Moden, werden in Umfangsrichtung wieder komplexe Schallfelder auftreten, die über keine einheitliche

C.1 Radiale Schallfeldausbreitung akustischer Moden

Schalldruckverteilung in Umfangsrichtung verfügen. Somit werden an der Kanalwand lokal variierende Amplituden auftreten, wie in Abb. C.6 zu erkennen ist. Ein Phasenversatz führt in radialer Richtung, wie im Fall der Spinning Modes, ebenfalls zu einer Änderung der Struktur, da auch hier zwei stehende Wellen überlagert werden.

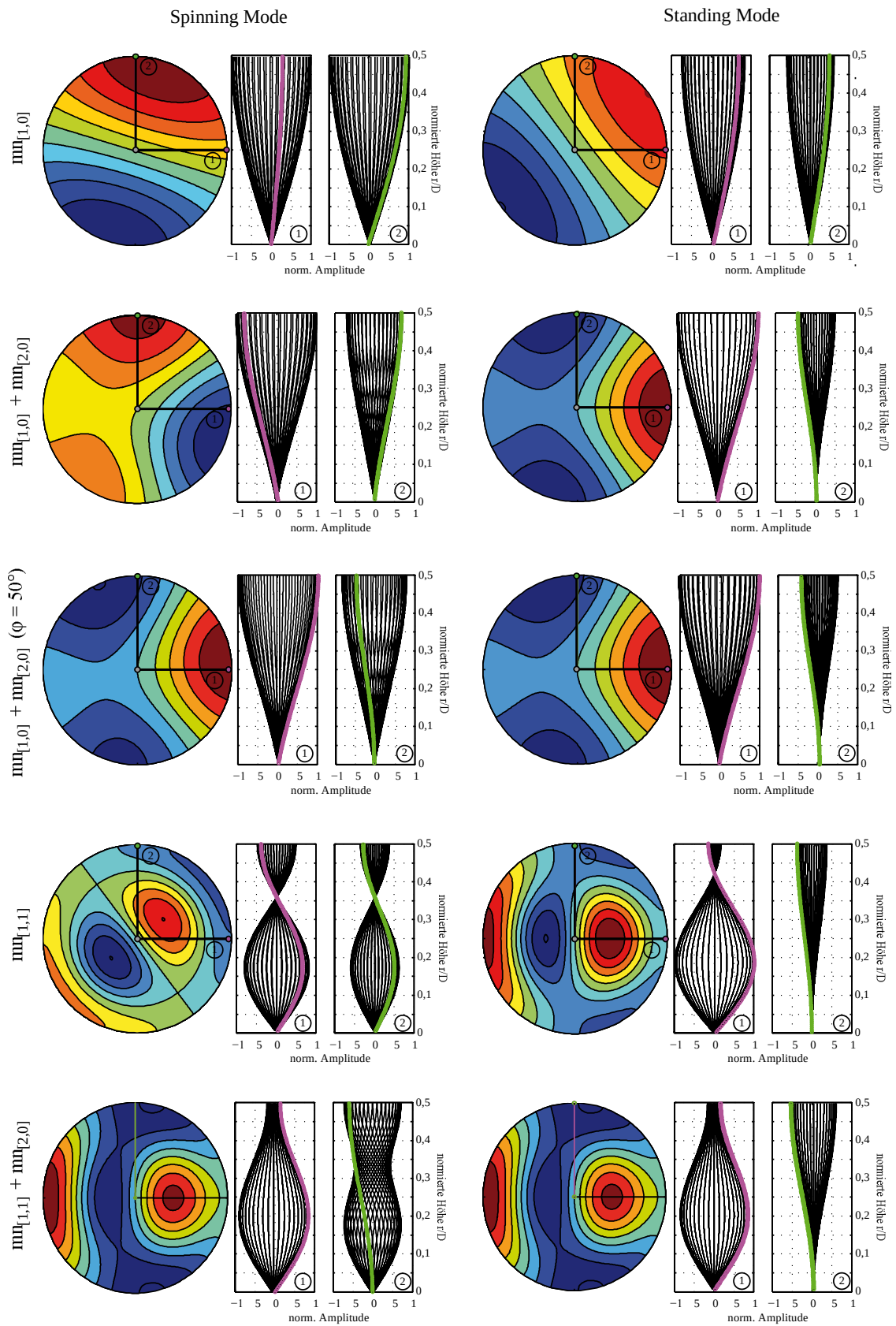


Abbildung C.6: Beeinflussung der radialen Modenstruktur bei Überlagerung niedriger Moden.

C.2 Projektion der Modenwinkel

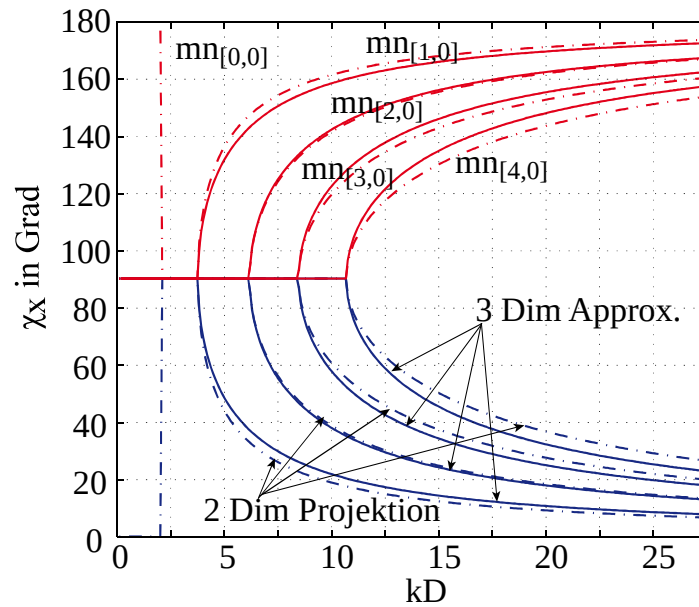
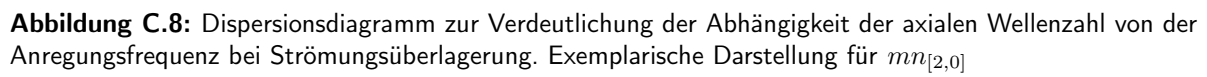


Abbildung C.7: Axialer Modenwinkel χ_x in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz kD für unterschiedliche Azimutalmoden. Vergleich der Bestimmungsverfahren als dreidimensionale Approximation nach Rice et al. (1979) (Referenz) und der zweidimensionalen Projektion. Vergrößerte Darstellung der Abb. 4.5



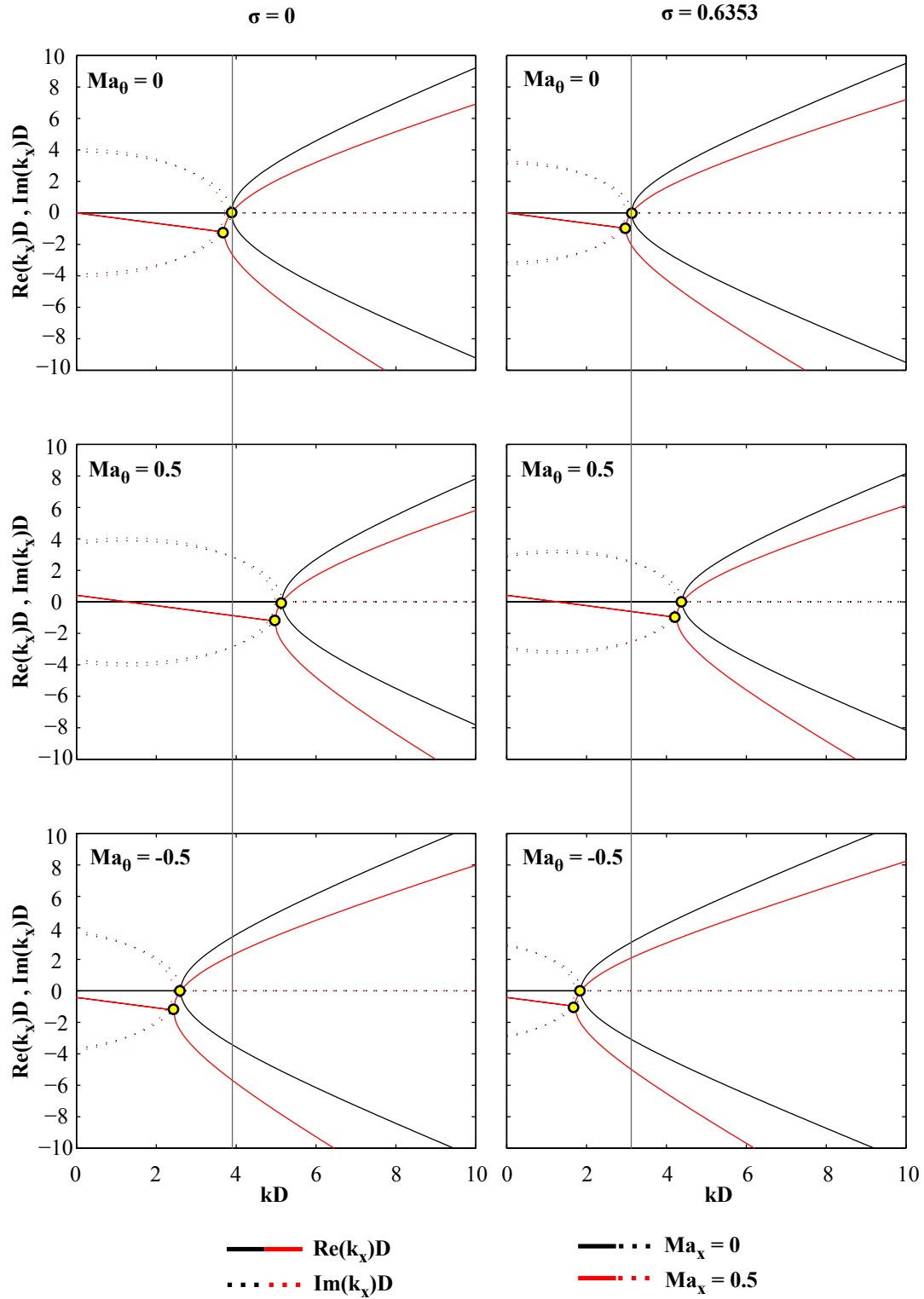


Abbildung C.9: Dispersionsdiagramme zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der axialen Wellenzahl von der Anregungsfrequenz bei Strömungs- und Drallüberlagerung. Exemplarische Darstellung für eine $mn_{[2,0]}$ bei unterschiedlichen Nabenverhältnissen $\sigma = 0$ (Kreiskanal) und $\sigma = 0.635$ (Ringkeiskanal der Luftturbine)

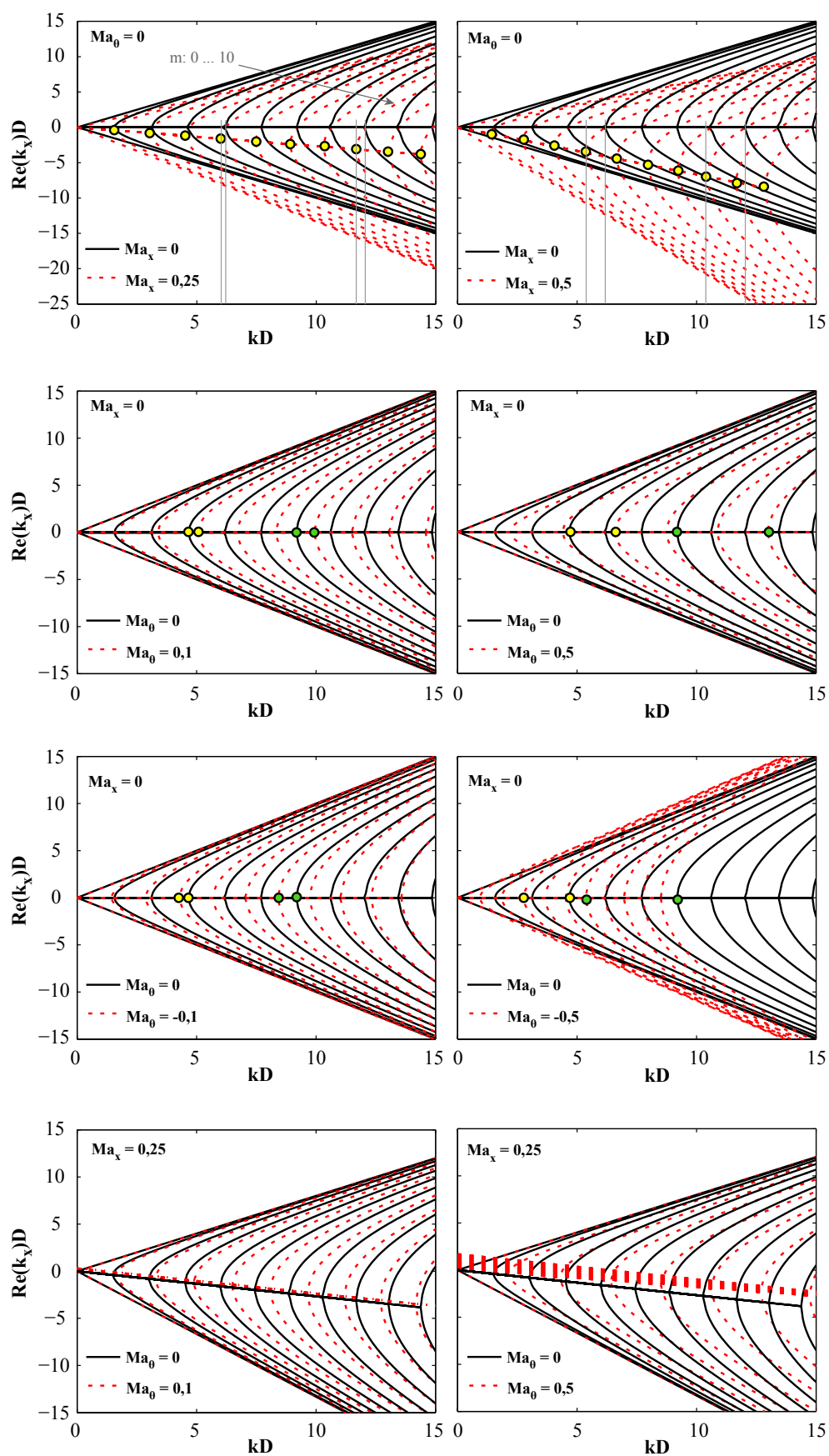


Abbildung C.10: Dispersionsdiagramme für variierende Umfangsmodenordnung m bei $n = 0$ und $\sigma = 0.635$ (Ringkeiskanal Luftturbine). Die Diagramme verdeutlichen den Einfluss der Strömungseigenschaften auf das modale Ausbreitungsverhalten

C.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit überlagerter Modenfelder

Wie in Abschnitt 4.1.3 ausführlich beschrieben ist, gelten für mehrfach überlagerte Modenfelder die typischen Gesetzmäßigkeiten der Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten nur noch eingeschränkt. Die Wellenfronten des Gesamtfelds breiten sich dann nicht mehr, wie etwa bei einzelnen Moden, mit der Phasengeschwindigkeit aus, sondern folgen Gruppengeschwindigkeits-ähnlichen Gesetzmäßigkeiten. Die mathematische Bestimmung der Gesamtgeschwindigkeit gestaltet sich kompliziert, denn es liegt keine lineare Superposition der einzelnen Modengeschwindigkeiten vor. Zur Verdeutlichung werden die bereits in Abb. 4.7 vorgestellten Überlagerungen einer $mn_{[1,0]}$ und $mn_{[2,0]}$ Mode unterschiedlicher Drehrichtungen wieder aufgegriffen.

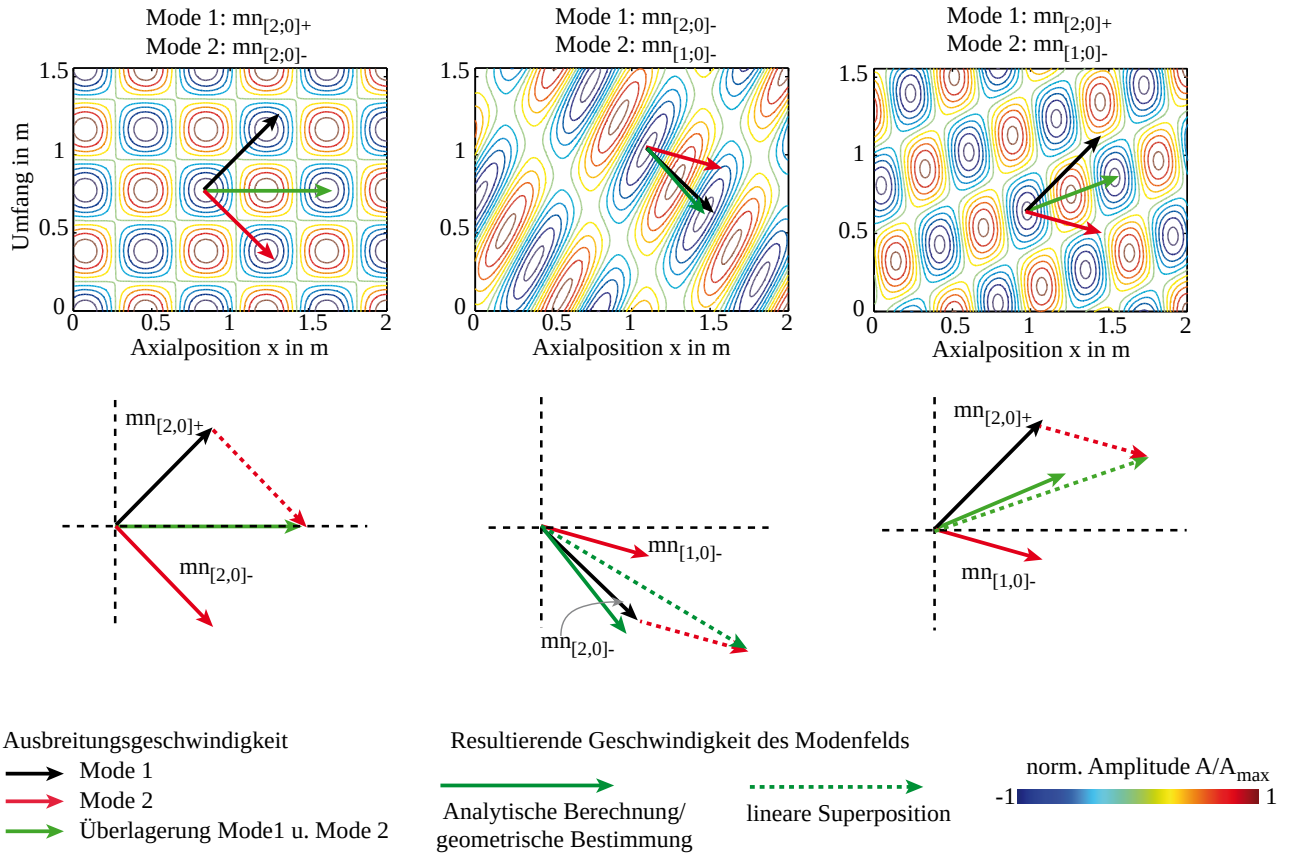


Abbildung C.11: Ausbreitungsgeschwindigkeiten unterschiedlich überlagerter Spinning Modes am Beispiel von $mn_{[1,0]}$ und $mn_{[2,0]}$ Moden. Der rote und schwarze Pfeil entsprechen den Geschwindigkeitsvektoren der Einzelmoden, während der grüne Pfeil dem resultierenden Geschwindigkeitsvektor des überlagerten Zustands entspricht. Neben den simulierten bzw. geometrisch ermittelten Gesamtgeschwindigkeiten sind auch die linear superpositionierten Geschwindigkeiten dargestellt.

Aus den Geschwindigkeiten der einzelnen Moden werden nun, neben den geometrisch ermittelten bzw. aus der Simulation berechneten Gesamtgeschwindigkeiten, auch die Gesamtgeschwindigkeiten auf Basis einer linearen Superposition bestimmt. Beide Ergebnisse sind in Abb. C.11 gegenübergestellt. Wie zu erkennen ist, stimmen die linear superpo-

sitionierten Gesamtgeschwindigkeiten nur im Falle einer reinen stehenden Mode mit den korrekten Ergebnissen überein. Sobald die Ausbreitungsrichtungen der (Teil-) Moden nicht mehr orthogonal zueinander sind, ist eine lineare Superposition der modalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten nicht mehr zulässig die resultierende Gesamtgeschwindigkeit des überlagerten Modenfelds zu bestimmen. Dann stimmt die Gesamtgeschwindigkeit weder vom Betrag noch vom Winkel mit den korrekten Ergebnissen überein.

D Anhang Analyseverfahren

D.1 Signalfilterung bei Strömungsüberlagerung

In Abschnitt 6.1.3 ist bereits ausführlich auf Bedeutung einer gut abgestimmten Signalfilterung eingegangen worden. Nachstehend soll diese Notwendigkeit an einem weiteren Beispiel einer experimentellen Messungen am AWT verdeutlicht werden. Dazu werden im AWT die radialen Schalldruckstrukturen mit und ohne Strömungsüberlagerung analog zu dem in Abschnitt 7.4.2 vorgestellten Verfahren mit Hilfe einer Mikrofonsonde aufgenommen. In

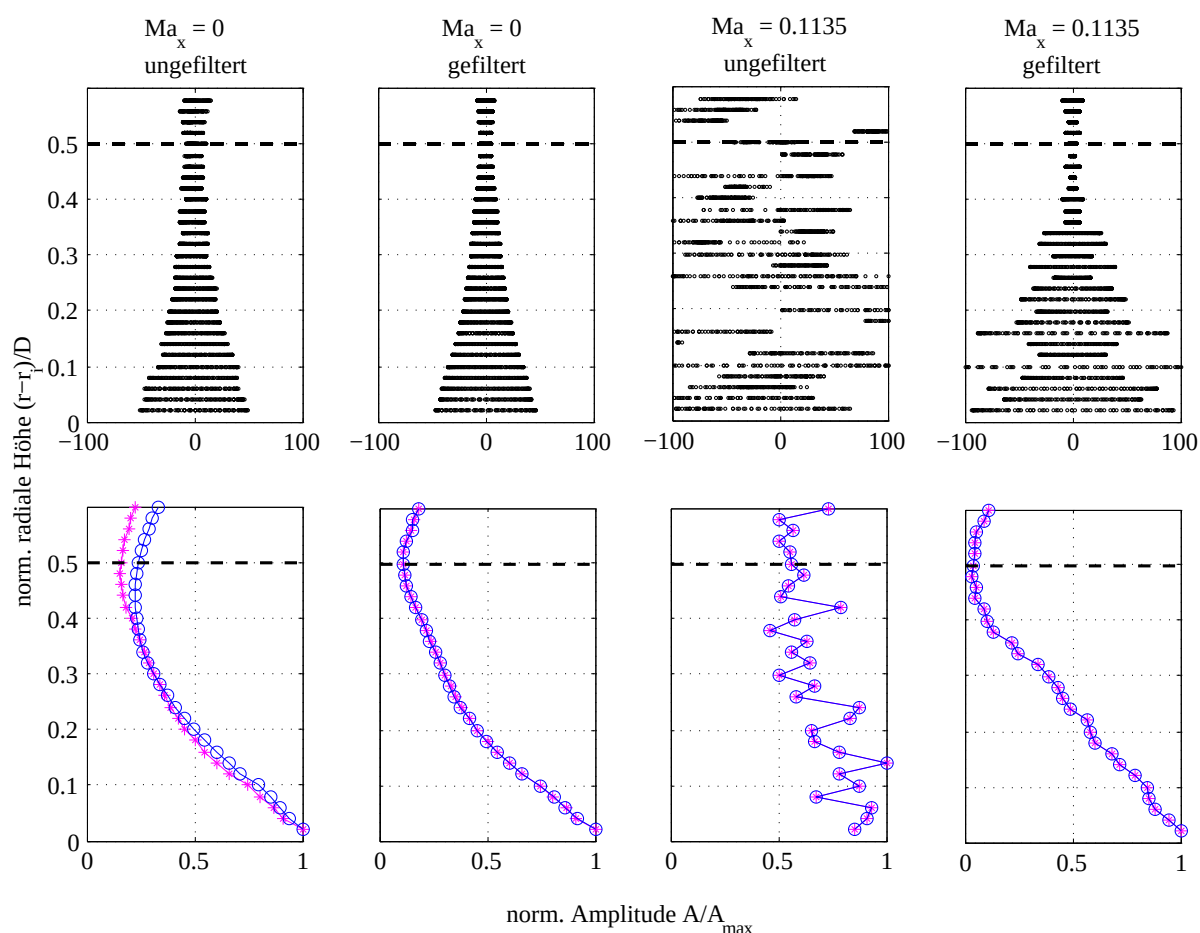


Abbildung D.1: Experimentell gemessene radiale Schalldruckverteilung für den strömungsfreien und strömungsüberlagerten ($Ma_x = 0,11$) Fall bei Anregung einer $mn_{[2;0]}$ Mode. Abstimmung eines Bandpass-Filters auf die jeweilige Anregungsfrequenz. (oben) Schwingungsamplituden im zeitlichen Verlauf. (unten) radiale Schalldruckverteilung für RMS-Werte (— o —) und Maximalwerte (— * —).

Abb. D.1 ist dazu für eine angeregte $mn_{[2;0]}$ Mode das allgemeine Auswertungsprinzip verdeutlicht. An jedem Messpunkt werden die oszillierenden Schalldrücke aufgenommen. Obwohl es sich in radialer Richtung um eine zwischen den Kanalwänden stehende Welle handelt, müssen die Schalldrücke zwangsläufig um ihre Ruhelage oszillieren. Allerdings ist die Amplitudenstruktur durch die stehende Radialwelle geprägt, wie in Abb. D.1 (oben) gezeigt ist. Dazu ist an jedem radialen Messpunkt die zeitlich variierende Amplitude über eine Periode der Anregungsfrequenz dargestellt. Es werden sowohl die Messergebnisse des strömungsfreien als auch des strömungsüberlagerten Falls für gefilterte und ungefilterte Signale verglichen.

Auch wenn die Amplituden betragsmäßig mit der Zeit variieren, so bleibt die Amplituden- bzw. Modenstruktur erhalten. Diese wird anschließend aus den Zeitdaten bestimmt. In Abb. D.1 (unten) sind die normierten Amplituden für zwei verschiedene Bestimmungsarten (RMS-Werte und Maximalwerte) aufgetragen. An diesem Beispiel zeigt sich sehr deutlich, dass, besonders bei Messungen mit einer überlagerten Hauptströmung, eine gut abgestimmte Bandpass-Filterung unerlässlich ist. Für die Messung unter Strömungseinfluss ist ohne Filterung keine modale Schallfeldstruktur zu identifizieren, da das Schalldruckfeld von einer Vielzahl überlagerter Störungen beeinflusst ist. Diese resultieren aus strömungs-induzierten Schallquellen innerhalb des Rohres. Erst durch die Verwendung eines Frequenz-abgestimmten Filters ist die Ermittlung der angeregten Radialmodenstruktur möglich. Für die Auswertungen wird der RMS-Wert gewählt.

D.2 Zusatz Phasenanalyse

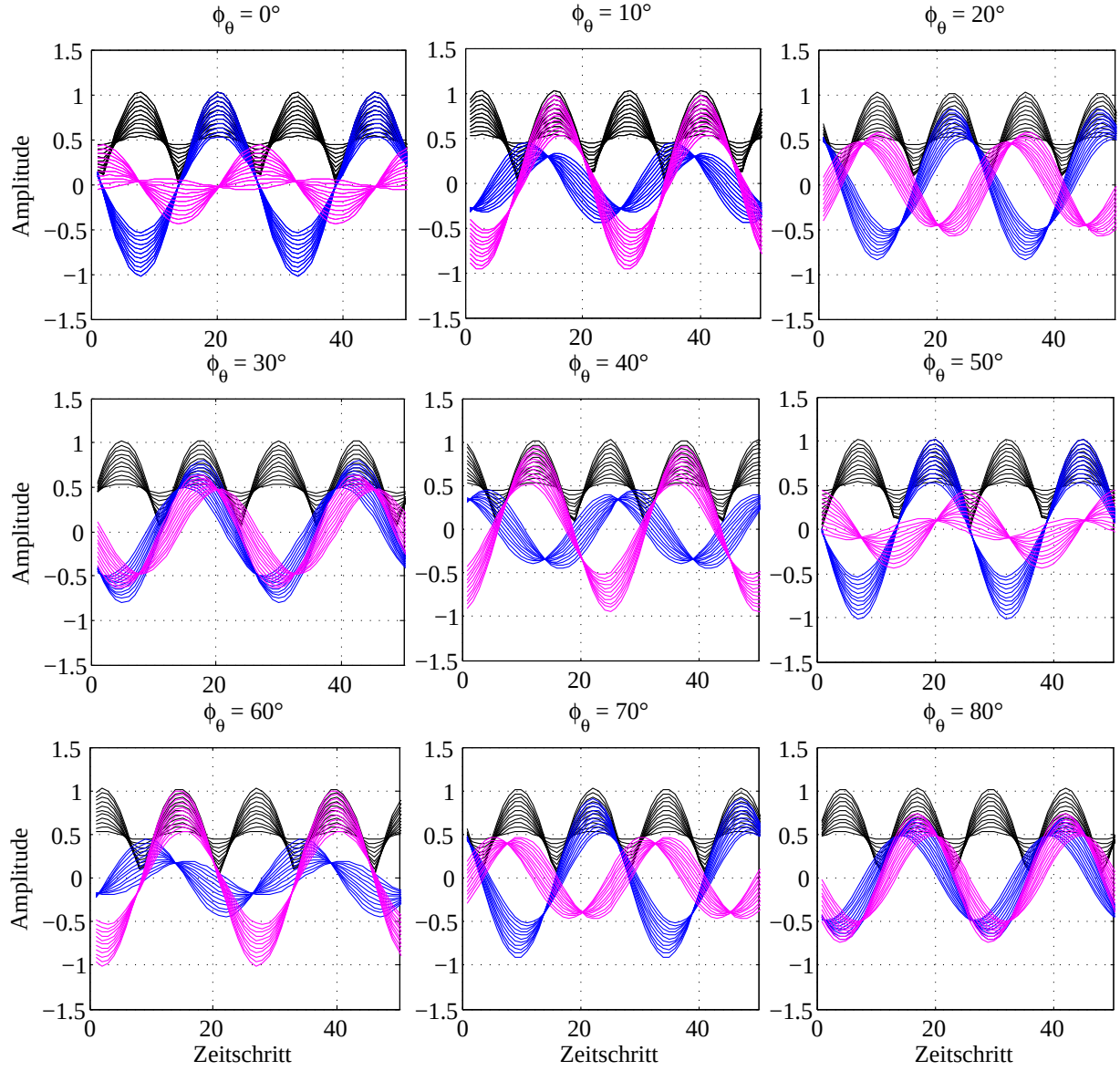


Abbildung D.2: Zeitliche Verläufe der komplexen Amplituden für eine $mn_{[1;0]}$ Mode bei unterschiedlichen Amplituden der Teilmoden (Teilmodenverhältnis ϵ) und variierendem azimuthalen Phasenwinkel ϕ_θ . Schwarz: $|\mathbf{A}|$; blau: $\Re\{\mathbf{A}\}$; magenta: $\Im\{\mathbf{A}\}$

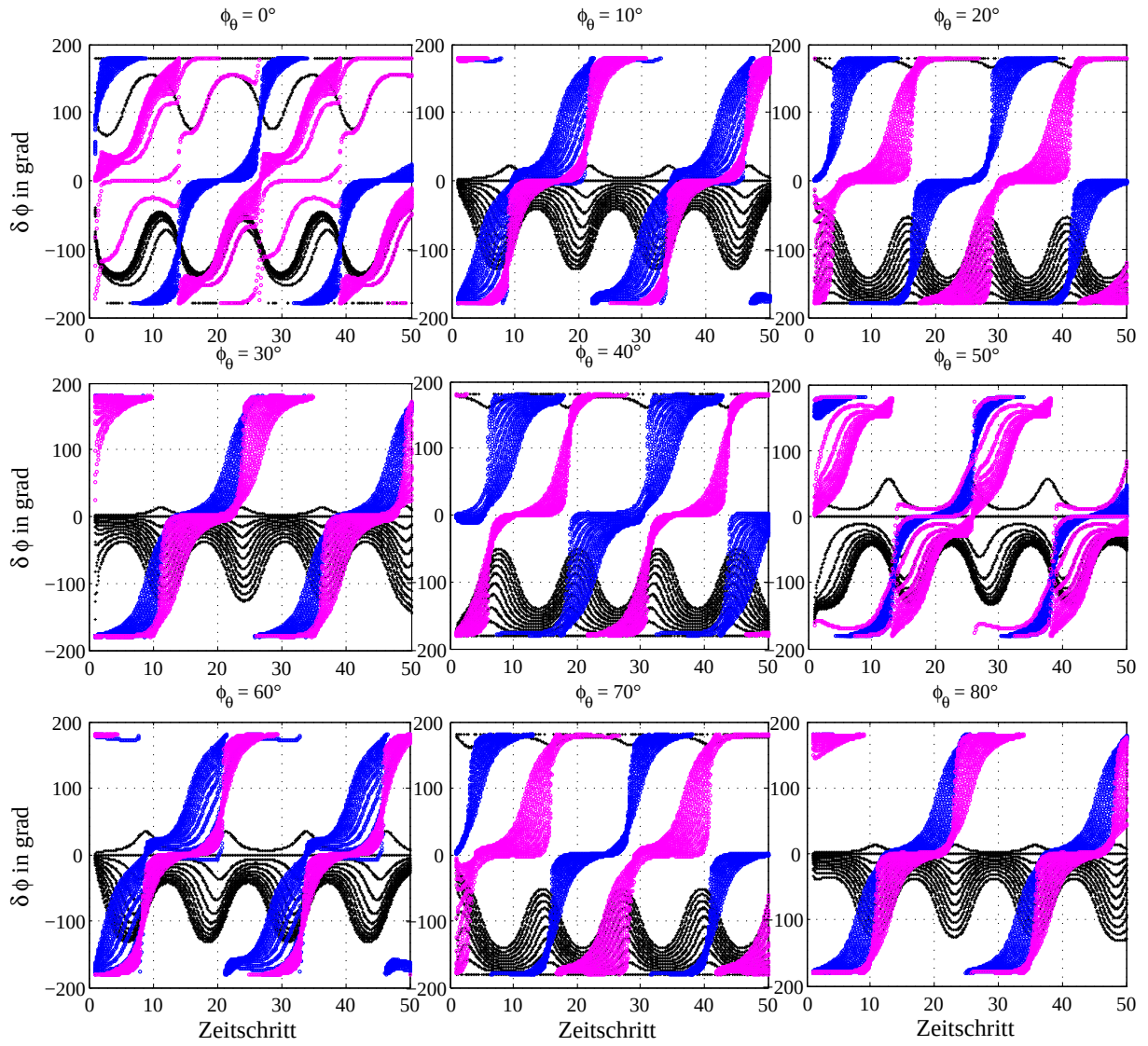


Abbildung D.3: Zu den in Abb. D.2 gezeigten zeitlichen Verläufen der komplexen Amplitude korrespondierende Phasenversätze ϕ_θ der Wellenkomponenten zueinander. Schwarz: ϕ_θ zwischen $\Im\{\mathbf{A}\}$ und $\Re\{\mathbf{A}\}$; blau: ϕ_θ zwischen $|\mathbf{A}|$ und $\Re\{\mathbf{A}\}$; magenta: ϕ_θ zwischen $|\mathbf{A}|$ und $\Im\{\mathbf{A}\}$

D.3 Datenqualifizierung für das Synchronisationsverfahren

Nachdem in Abschnitt 6.6.2 das korrelationsbasierte Verfahren zur Schallfeldsynchronisation vorgestellt wurde, wird in diesem Anhang eine zur weiteren Datenqualifizierung entwickelte Methode beschrieben.

Um ein gutes Rekonstruktionsergebnis zu erhalten, werden die Datensätze zunächst mittels einer speziellen Suchroutine sortiert und anschließend qualifiziert. Als dimensionsloses Gütemaß wird der Korrelationskoeffizient $R(p'_{\text{ref}}, p'_i)$ verwendet, der zwischen dem Referenzschallfeld und den einzelnen Schallfeldern eines jeden Messzyklus für das Segment B berechnet wird. Dieser ist über die Kovarianz $\text{Cov}(\dots)$ bzw. die Standardabweichung σ gemäß

$$R(p'_{\text{ref}}, p'_i) = \frac{\text{Cov}(p'_{\text{ref}}, p'_i)}{\sqrt{\text{Cov}(p'_{\text{ref}}, p'_{\text{ref}})\text{Cov}(p'_i, p'_i)}} = \frac{\text{Cov}(p'_{\text{ref}}, p'_i)}{\sigma(p'_{\text{ref}})\sigma(p'_i)} \quad (\text{D.1})$$

definiert. Für $|R(p'_{\text{ref}}, p'_i)| \rightarrow 1$ liegt eine lineare Korrelation zwischen den beiden Eingangssignalen vor, während bei $R(p'_{\text{ref}}, p'_i) \rightarrow 0$ diese nicht (linear) korrelieren.

Die Analyse erfolgt für alle Zeitwerte der einzelnen Messzyklen. Dabei wird das Gesamtsignal zunächst in definierte Zeitintervalle unterteilt, die mindestens dem Vierfachen der betrachteten Periodendauer entsprechen. So ist gewährleistet, dass die Auswertung nicht auf einer einzelnen Zeitsequenz basiert, sondern statistisch repräsentativ ist. Anschließend wird pro Messzyklus für jedes Intervall ein Korrelationskoeffizient berechnet. Liegt dieser im Mittel (Mittelung über alle Teilintervalle) unterhalb eines zu definierenden Schwellenwertes, so werden die entsprechenden Datenreihen aussortiert. Ein Beispiel ist in Abb. D.4 dargestellt. Bei der Anpassung des Schwellenwertes muss die maximal aufzulösende Azimutalmodenordnung beachtet werden. So darf die Sensoranzahl durch die Sortierung bzw. Eliminierung nicht unter die minimal geforderte Stützstellenanzahl fallen (vgl. Abschnitt 6.2).

Bei der korrelationsbasierten Synchronisation werden ganze Muster abgeglichen und nicht nur einzelne Moden. Dies erlaubt auch eine Auswertung, wenn mehrere Moden bei einer Oszillationsfrequenz überlagert sind. In einem solchen Fall würde eine rein modale Betrachtung nicht funktionieren, da die resultierende Schalldruckstruktur im überlagerten Fall von dem einer einzelnen Mode abweicht.

Bei der Datenqualifizierung ist in vielen Fällen eine Amplitudenkorrektur notwendig. Wie sich in den experimentellen Untersuchungen herausstellt, kann die Amplitude des angeregten Signals im Mittel zwischen den Messzyklen schwanken. Sind die Schwankungen zu hoch, führt dies zu einem fehlerhaft rekonstruierten Schallfeld des Segments C (vgl. Abschnitt 2.2, Abb. 2.4), da das azimutale Gesamtschallfeld aus den Signalen aller Messzyklen rekonstruiert wird. Liegen bspw. bei einem Messzyklus niedrigere Amplituden des Anregungssignals vor als bei den verbleibenden Messzyklen, würde der Rekonstruktionsalgorithmus für diese Umfangsposition einen zu geringen Schalldruck berechnen, was schließlich zur Bestimmung einer falschen Modenstruktur führt. Dementsprechend müssen die Amplituden korrigiert werden. Da diese Korrektur nur für die synthetisch angeregten Schallfelder relevant ist, müssen die über die gesamte Messzeit auftretenden Amplitudenva-

riationen auch in Segment B auftreten. So lässt sich ein Normierungsverfahren entwickeln, das alle Messdaten auf die Maximalamplitude des ersten Messzyklus des Segments B referenziert: Mit $\kappa_A = p'_{B,\max,i}/p'_{B,\max,1}$ sei ein Faktor definiert, mit dem sich alle weiteren Werte zu $p'_{B,i}/\kappa_A \wedge p'_{C,i}/\kappa_A$ normieren lassen. Die Normierung auf den Maximalwert hat sich im Vergleich mit anderen möglichen Referenzgrößen (Mittelwert, RMS-Wert, etc.) als die Beste erwiesen.

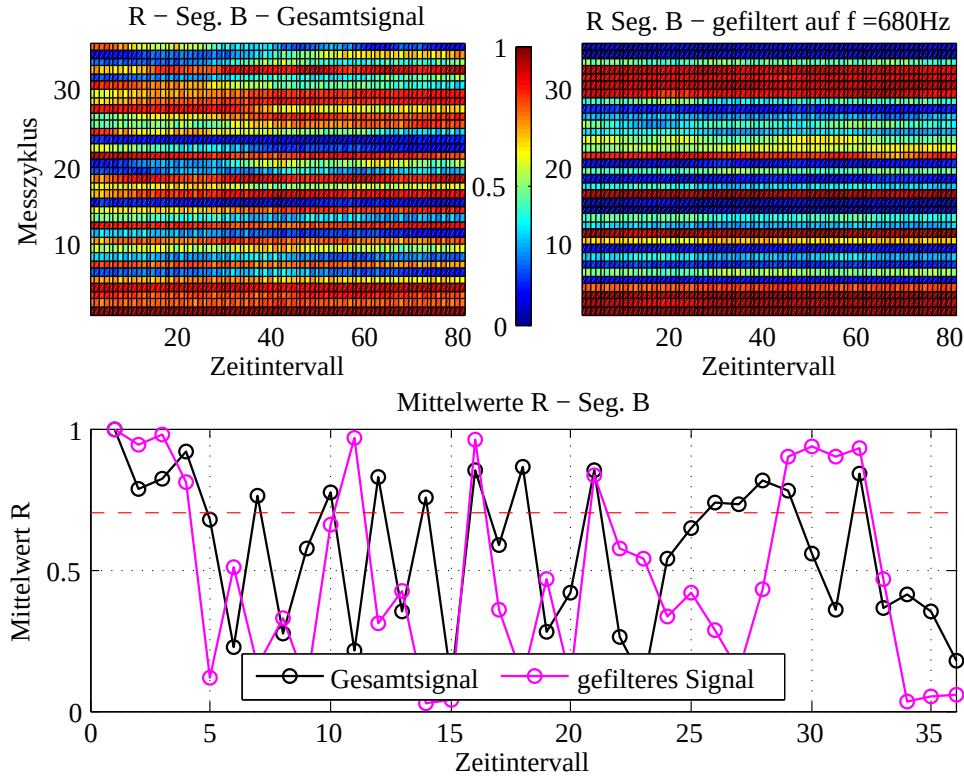


Abbildung D.4: Prinzip des Qualifizierungsverfahrens der Messreihen mit Hilfe der Korrelationskoeffizienten. (oben) Korrelationskoeffizienten für das Gesamtsignal (links) und das auf die Anregungsfrequenz von $f = 680$ Hz gefilterte Signal (rechts) über die Zeitintervalle. (unten) Korrespondierende Mittelwerte die zur Selektion der Messwerte herangezogen werden.

E Anhang Experimente

E.1 Übersicht Validierungsstrategie

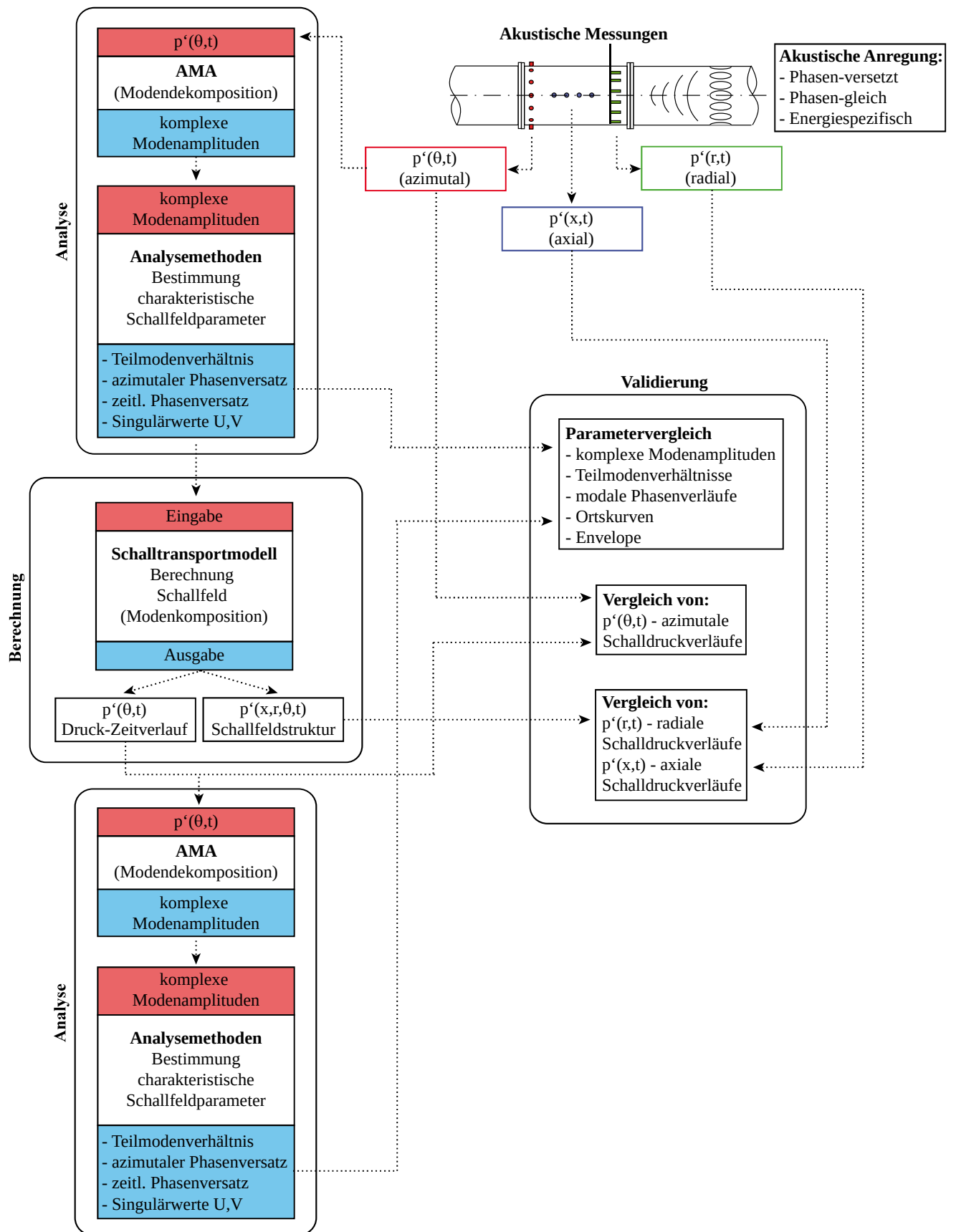


Abbildung E.1: Schematischer Ablauf der Schalltransportmodell-Validierung im AWT

E.2 Validierungsmessungen AWT

In Ergänzung zu der in Abschnitt 7.2 vorgestellten Validierung der Prozesskette für die azimutale Schallausbreitung, werden nachstehend zwei weitere Validierungsfälle vorgestellt. Das zugrunde liegende Validierungsprinzip ist in Abschnitt 7.1 eingehend erklärt.

In Abschnitt E.2.1 wird dazu eine Schallfeld, bestehend aus einer dominanten $mn_{[2;0]}$ Spinning Mode, genutzt. Die Messungen werden im AWT ohne Strömungsüberlagerung durchgeführt. In Abschnitt E.2.2 kommt hingegen eine komplexe Kombination aus einer $mn_{[1;0]}$, einer $mn_{[2;0]}$ Spinning Mode sowie einer $mn_{[3;0]}$ partiell stehenden Mode bei Strömungsüberlagerung zum Einsatz.

E.2.1 Validierungsfall II.

Die Anregung erfolgt bei einer Frequenz von $kD = 6.2661$ mit dem Schallgenerator unter Einsatz einer phasenversetzten Quellansteuerung. Mit Hilfe der Analyseverfahren werden die in Tab. E.1 aufgeführten Schallfeldparameter ermittelt.

Größe	$mn_{[0;0]}$	$mn_{[1;0]}$	$mn_{[2;0]}$
Amplitude (RMS) in Pa	2,5	2,14	15,4
ϵ	0	0,601	0,10
ϕ_θ	0	25,9	-201
ϕ_t	-10	-16	-25
k in m^{-1}	12,584	12,584	12,584
k_x in m^{-1}	12,584	10,150	2,468
k_θ in m^{-1}	0	$\pm 4,040$	$\pm 8,081$
k_r in m^{-1}	0	6,246	9,327
λ_x in m	0,492	0,619	2,546
λ_θ in m	-	1,555	0,777
χ_x in grad	-73	χ_θ in grad	17

Tabelle E.1: Übersicht über die modalen Ausbreitungsparameter

Wie zu erkennen ist, ist die gezielt angeregte $mn_{[2;0]}$ Mode die dominierende Mode. Die Grundmode sowie die $mn_{[1;0]}$ Mode, sind theoretisch Cut-On, doch weisen sie nur sehr geringe Amplituden auf, die in etwa 15% der $mn_{[2;0]}$ Mode entsprechen. In Abb. E.2 ist dieser Zusammenhang anhand der Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden dargestellt.

Analog zu den Ausführungen des Abschnitts 7.2 sind in Abb. E.3 die Phasenbeziehungen und Ortskurven der experimentell bestimmten Schallfelder den berechneten gegenübergestellt. Wie zu erkennen ist, stimmen die berechneten Werte mit den Werten der Validierungsexperimente überein.

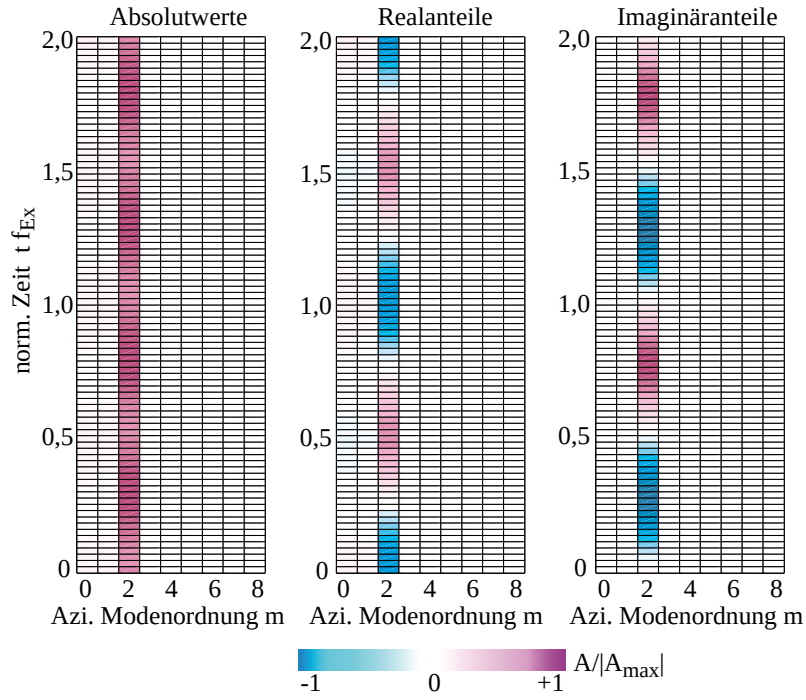


Abbildung E.2: Zeitverläufe der komplexen Modenamplituden (dominante $mn_{[2;0]}$ Mode)

Dies bestätigt auch der Vergleich der Envelopen von Experiment und Berechnung, wie in Abb. E.4 gezeigt ist.

In den Abb. E.5 sind darüber hinaus die Schalldruckverläufe $p'(\theta, t)$ des Experiments und der Berechnung gegenübergestellt.

Schließlich lässt sich mit Hilfe des Schalltransportmodells die axiale Schallausbreitung entlang des Kanals berechnen, wie in Abb. E.6 gezeigt ist.

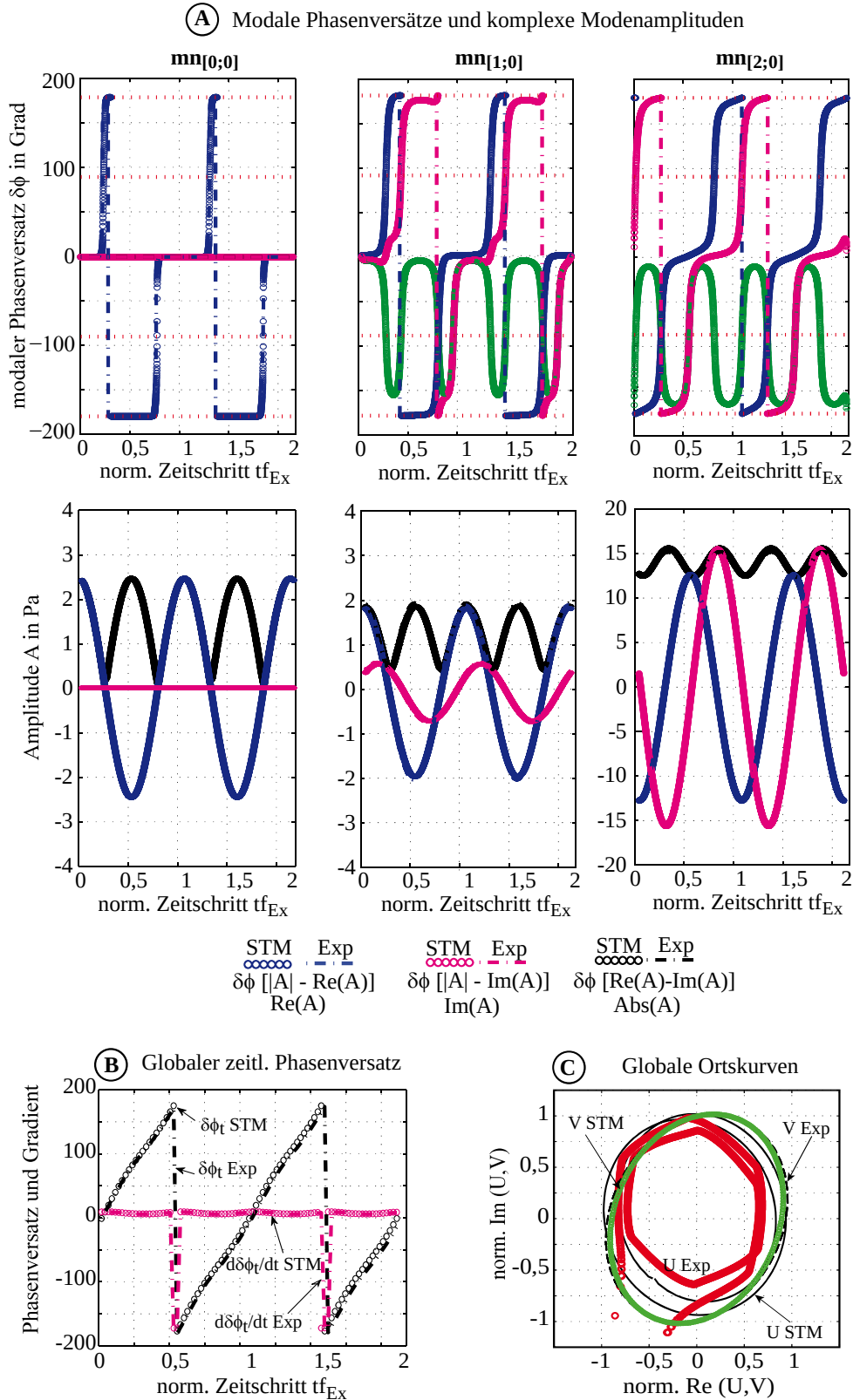


Abbildung E.3: Vergleich von Experiment und Berechnung. (A) zeitliche Phasenverläufe (oben) und Amplitudenverläufe (unten) der komplexen Modenamplituden für die $mn_{[0;0]}$, $mn_{[1;0]}$ und $mn_{[2;0]}$ Mode. (B) Vergleich der globalen Phasenbeziehungen. (C) Vergleich der globalen Ortskurven

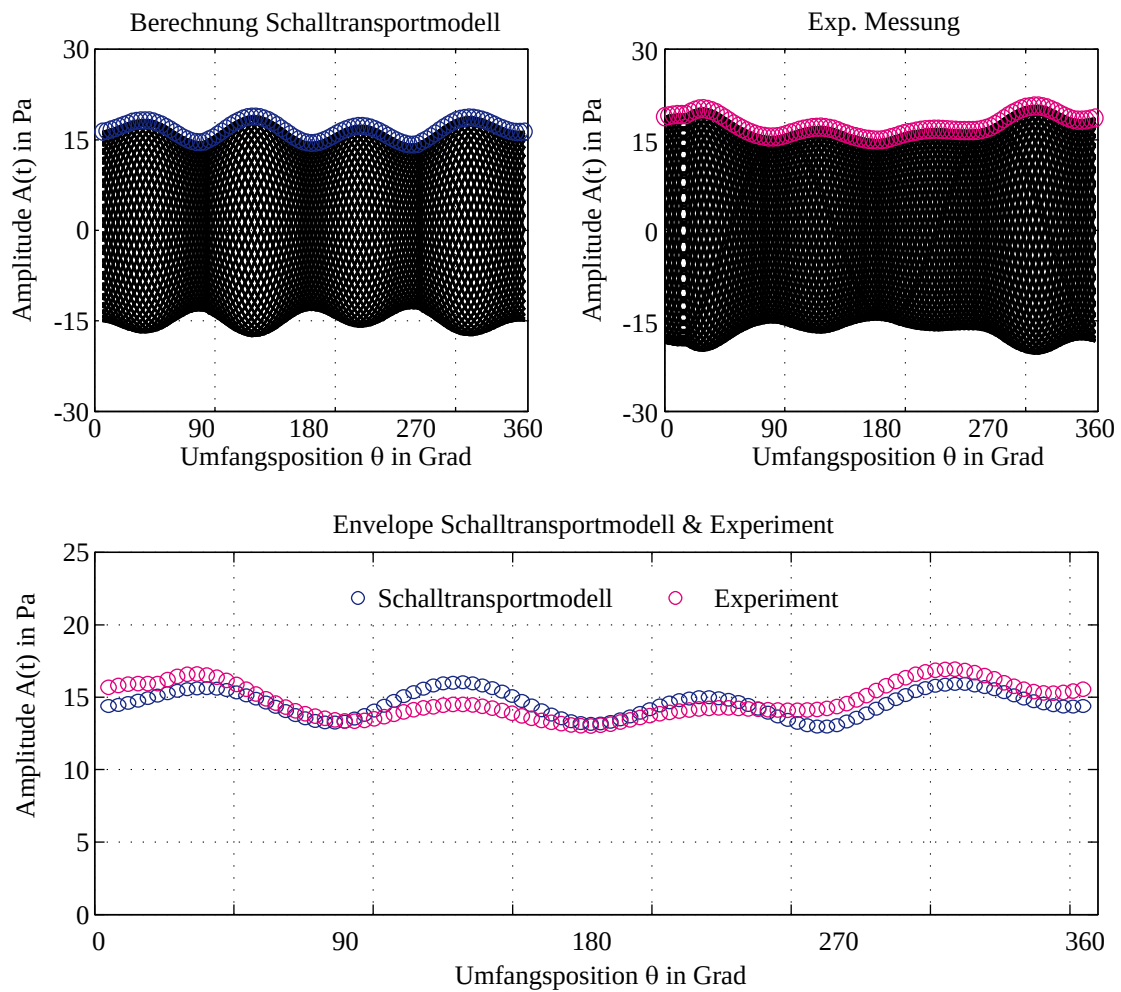


Abbildung E.4: Zeitverläufe der Umfangsdruckverteilung und Bestimmung der Envelope. Vergleich von Experiment und Berechnung

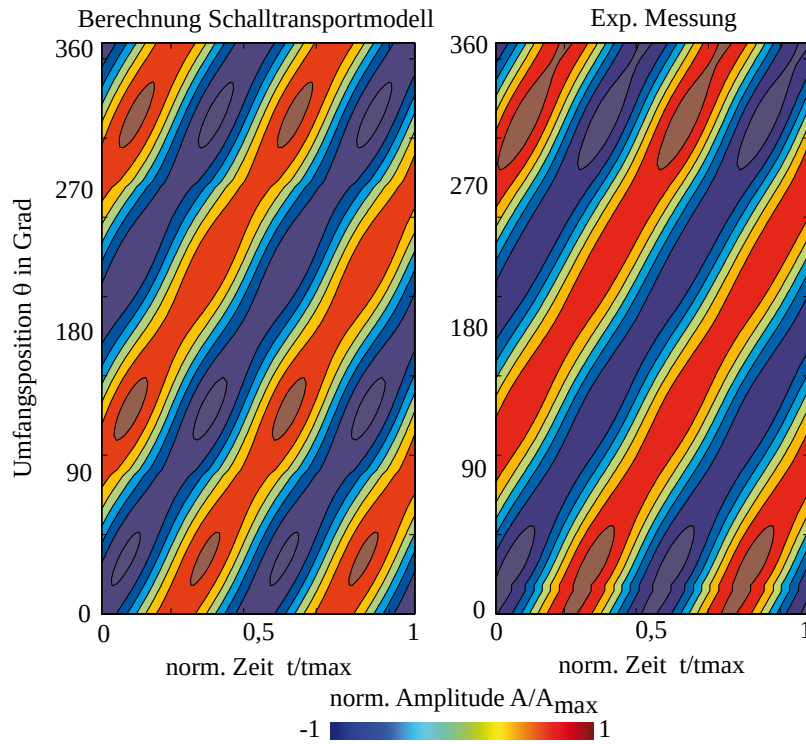


Abbildung E.5: Vergleich der gemessenen und berechneten Schalldruckverläufe $p'(\theta, t)$ in azimuthaler Richtung an der Kanalwand.

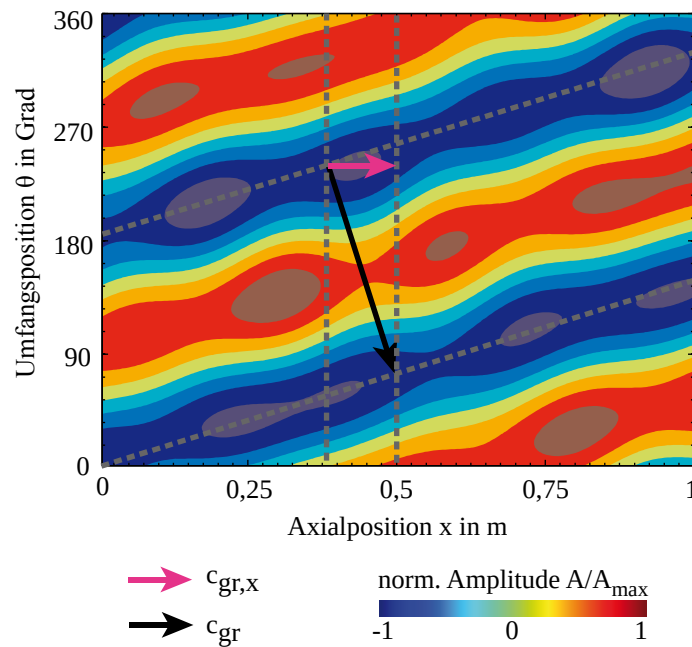


Abbildung E.6: Mit dem Schalltransportmodell berechnetes Schallfeld in azimuthaler und axialer Richtung an der Kanalwand an einem Zeitpunkt t .

E.2.2 Validierungsfall III.

Dem angeregten Schallfeld ist eine axiale Grundströmung von $Ma_x = 0,11$ überlagert. Die Anregung erfolgt bei einer Frequenz von $kD = 8,594$. Mit Hilfe der Analyseverfahren werden die in Tab. E.2 aufgeführten Schallfeldparameter ermittelt.

Größe	$mn_{[0;0]}$	$mn_{[1;0]}$	$mn_{[2;0]}$	$mn_{[3;0]}$
Amplitude (RMS) in Pa	29,3	27,5	30	25,6
ϵ	0	0,40	0,24	0,71
ϕ_θ	0	-297,7	-195,3	19,15
ϕ_t	-125	-83	-60	174
k in m^{-1}	17,36	17,36	17,36	17,36
k_x in m^{-1}	19,29	17,61	14,15	5,81
k_θ in m^{-1}	0	$\pm 4,03$	$\pm 8,08$	$\pm 12,12$
k_r in m^{-1}	0	6,24	9,32	11,88
λ_x in m	0,33	0,36	0,44	1,08
λ_θ in m	-	1,55	0,78	0,52

Tabelle E.2: Übersicht über die modalen Ausbreitungsparameter

In Abb. E.7 und Abb. E.8 sind die Ergebnisse der modalen Phasenversätze und die zeitabhängigen komplexen Amplituden dargestellt. In allen Fällen stimmen die experimentellen Ergebnisse exakt mit den berechneten überein.

In Abb. E.9 (A) und (B) sind hingen die globalen Phasenbeziehungen und Ortskurven für die experimentell bestimmten Schallfelder den mit dem Schalltransportmodell berechneten Größen gegenübergestellt. Wie zu erkennen ist, stimmen auch hier die berechneten Werte mit den Ergebnissen der Validierungsexperimente überein. Zusätzlich sind in Abb. E.9 (C) die Envelopen dargestellt, die diese Tendenzen bestätigen.

In den Abb. E.10 sind darüber hinaus die Schalldruckverläufe $p'(\theta, t)$ des Experiments und der Berechnung gegenübergestellt.

Mit Hilfe des Schalltransportmodells lässt sich die axiale Schallausbreitung entlang des Kanals berechnen, wie abschließend in Abb. E.11 gezeigt ist.

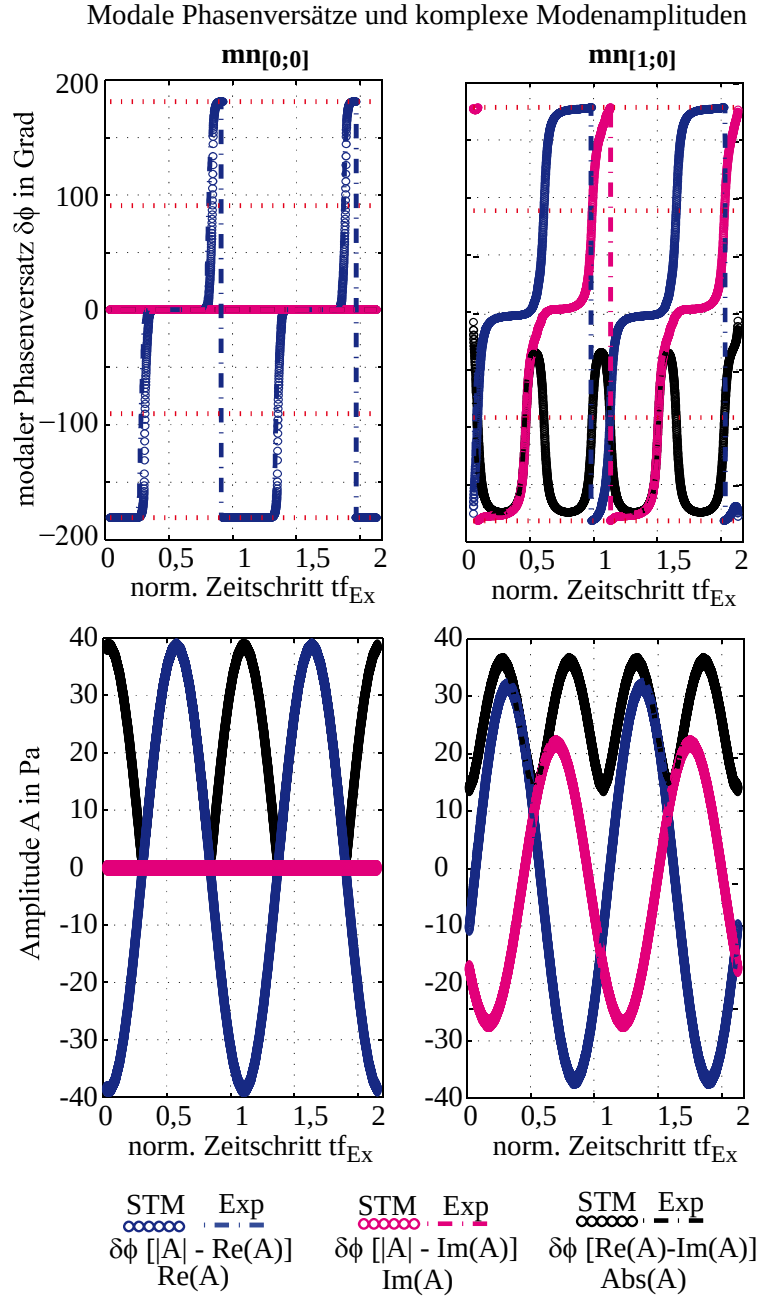


Abbildung E.7: Vergleich von Experiment und Berechnung. Gegenüberstellung der zeitlichen Verläufe der komplexen Amplituden und Phasenversätze für die $mn_{[0;0]}$ und die $mn_{[1;0]}$ Mode. (Kurven liegen in allen Fällen übereinander)

Modale Phasenversätze und komplexe Modenamplituden

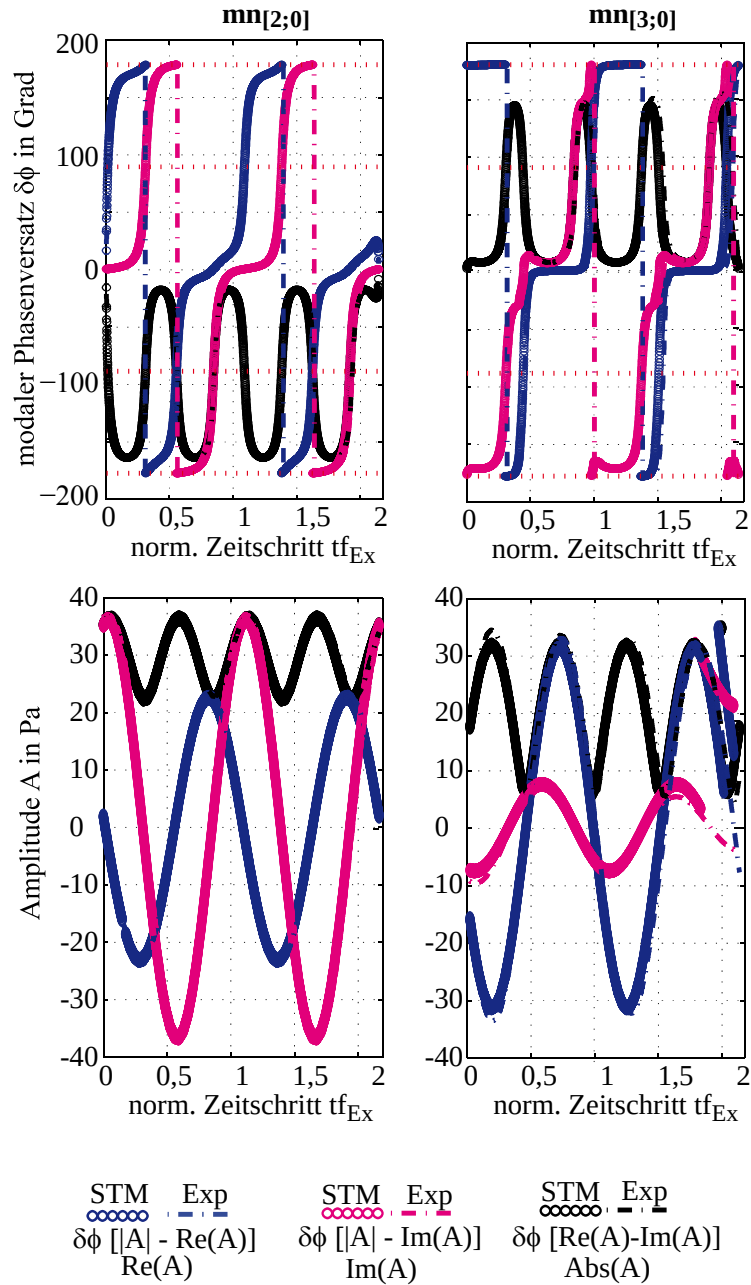


Abbildung E.8: Vergleich von Experiment und Berechnung. Gegenüberstellung der zeitlichen Verläufe der komplexen Amplituden und Phasenversätze für die $mn_{[2;0]}$ und die $mn_{[3;0]}$ Mode. (Kurven liegen in allen Fällen übereinander)

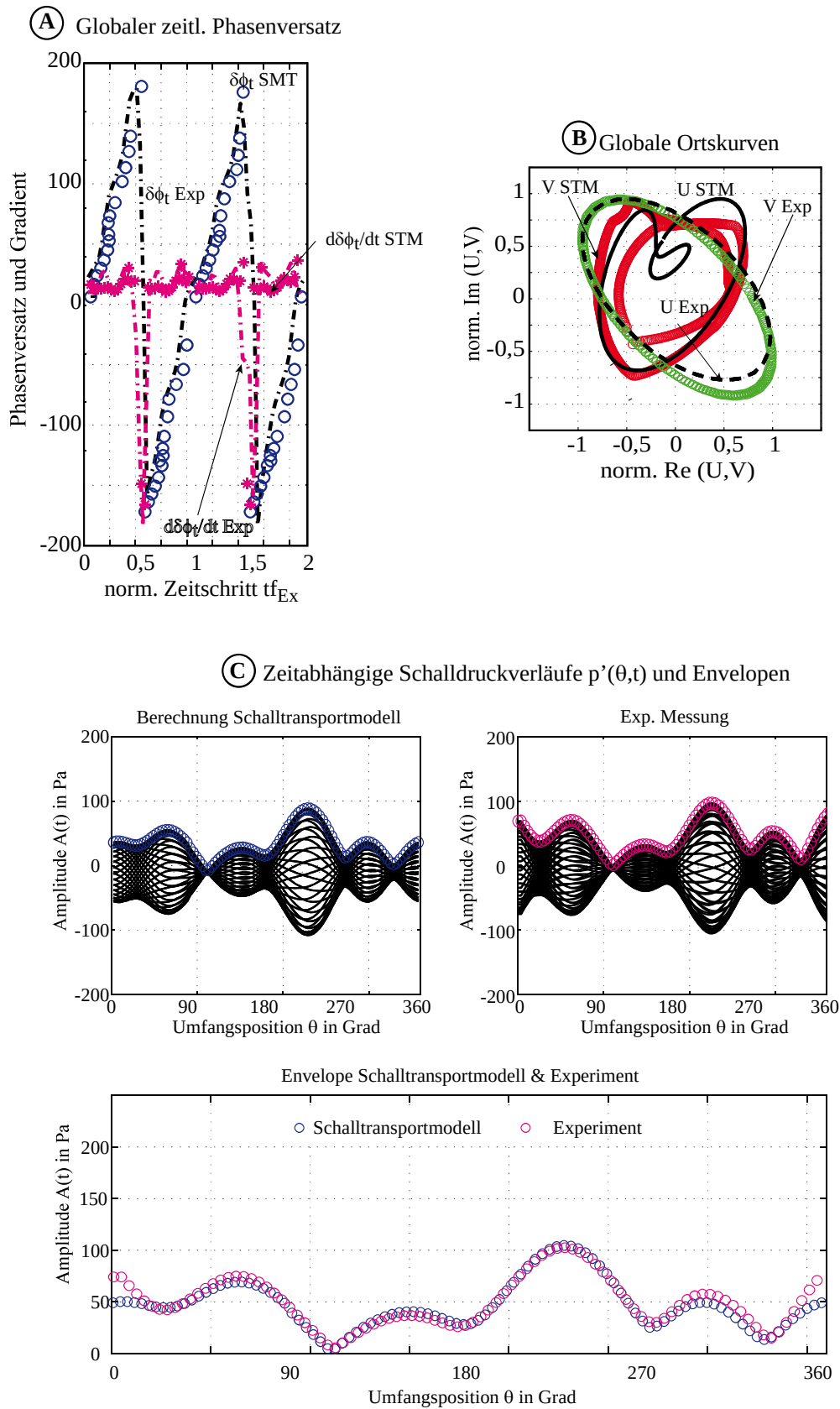


Abbildung E.9: Vergleich von Experiment und Berechnung. (A) globale Phasenbeziehungen. (B) globale Ortskurven. (C) Zeitverläufe der Umfangsdruckverteilung und Bestimmung der Envelope

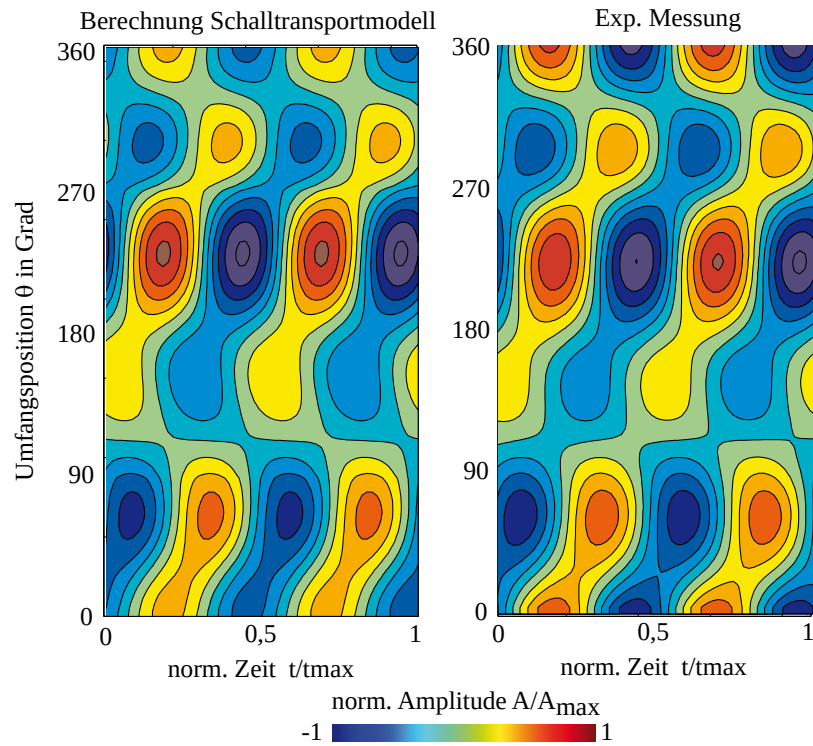


Abbildung E.10: Vergleich der zeitlichen Verläufe der azimuthalen Schalldrücke in der Messebene.

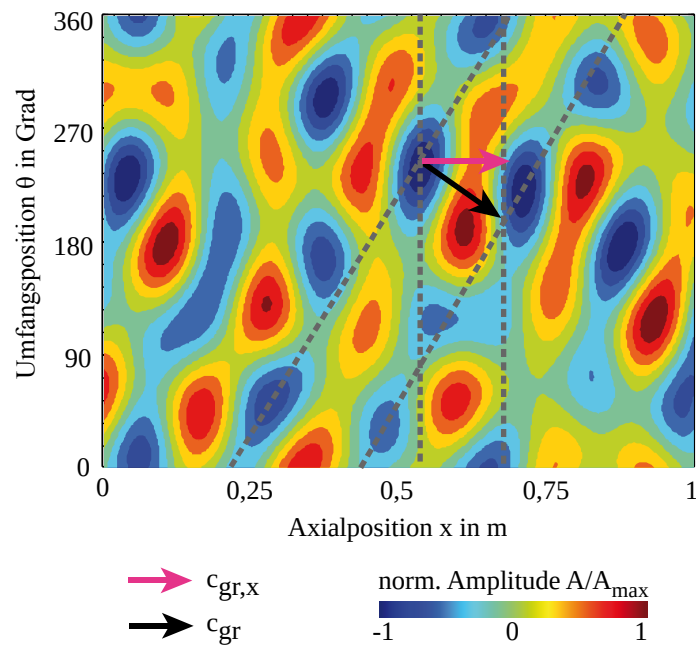


Abbildung E.11: Mit dem Schalltransportmodell berechnetes Schallfeld in azimuthaler und axialer Ausbreitungsrichtung an der Kanalwand zu einem Zeitpunkt t .

E.3 Versuchsturbinenexperimente

E.3.1 Übersicht Betriebspunktparameter der Turbinenmessungen

In diesem Kapitel werden detaillierte Informationen zu den in Abschnitt 2.2 ausgewerteten Betriebsparamter der Luftturbinenexperimente gegeben. Zum einen werden die Ergebnisse der Sondentraversierungen der Strömungsfeldparameter angegeben. Zum anderen werden die Ergebnisse der Cut-On-Moden Berechnung vorgestellt. Zusammenfassend sind die wichtigsten Parameter für jeden Betriebspunkt in einer Tabelle aufgeführt.

E.3.2 LT1: $\dot{m} = 4 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$

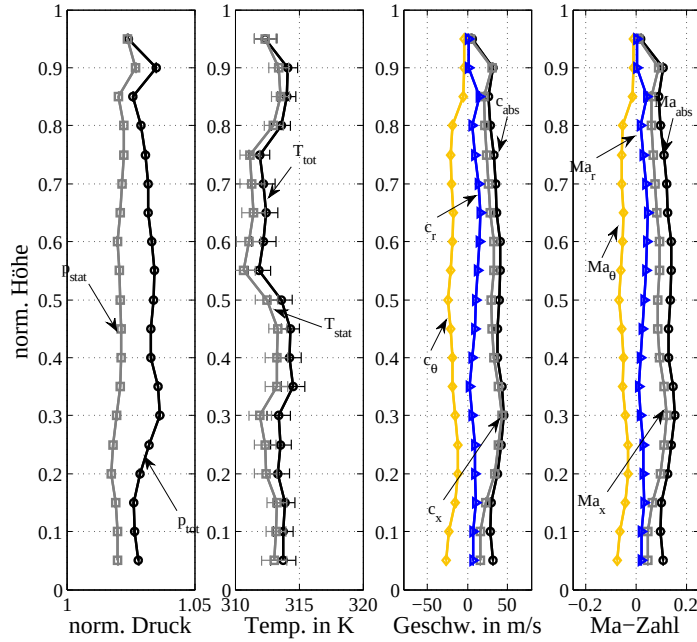


Abbildung E.12: Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 4 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

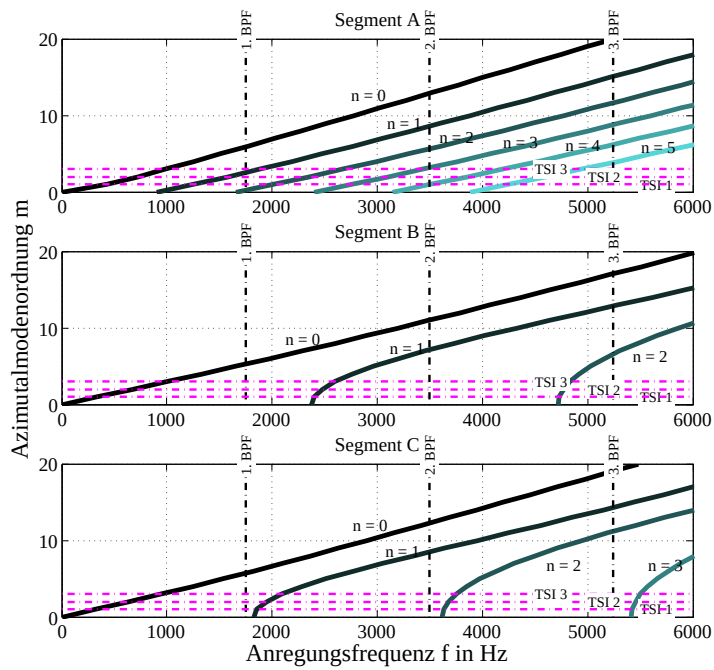


Abbildung E.13: Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 4 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

E.3 Versuchsturbinenexperimente

Segment A				Segment B				Segment C			
Ra in m		0,2475		0,2125		0,2368					
sigma		0,000		0,635		0,570					
p tot in Pa				114213		103961					
p stat in Pa						102936					
T tot in K				336		313					
T stat in K						312					
Ma x		0,048		0,109		0,078					
Ma θ		-		-		-0,046					
Ma r		-		-		0,026					

Cut On Frequenzen	0	0	903	1654	0	2372	4718	0	1823	3615
	1	434	1257	2013	337	2398	4730	318	1854	3630
	2	720	1581	2351	672	2474	4768	633	1946	3675
	3	991	1890	2675	1005	2598	4830	942	2091	3749
	4	1254	2189	2990	1334	2762	4916	1243	2283	3851
	5	1513	2480	3298	1658	2963	5025	1536	2512	3978
	6	1769	2767	3600	1976	3194	5155	1820	2770	4130
	7	2022	3049	3897	2289	3451	5305	2097	3049	4304
	8	2275	3328	4191	2597	3727	5474	2368	3341	4499
	9	2526	3604	4481	2899	4020	5660	2636	3642	4713

Blockier Frequenzen	0	0	904	1656	0	2386	4746	0	1823	3615
	1	435	1258	2015	339	2413	4759	318	1854	3630
	2	721	1583	2353	676	2489	4796	633	1946	3675
	3	992	1892	2678	1011	2613	4859	942	2091	3749
	4	1255	2191	2994	1342	2779	4946	1243	2283	3851
	5	1514	2483	3302	1668	2981	5055	1536	2512	3978
	6	1771	2770	3604	1988	3213	5186	1820	2770	4130
	7	2025	3053	3902	2303	3471	5337	2097	3049	4304
	8	2277	3332	4196	2612	3750	5507	2368	3341	4499
	9	2528	3608	4486	2916	4044	5694	2636	3642	4713

BPF, 0: 1748 1/min				BPF, 1: 3497,1 1/min				BPF, 2: 5245,7 1/min			
--------------------	--	--	--	----------------------	--	--	--	----------------------	--	--	--

TSI +	h1	h2	h3	TSI -
	59	89	119	
	88	118	148	
	117	147	177	
	146	176	206	
	175	205	235	

h1	h2	h3
1	31	61
-28	2	32
-57	-27	3
-86	-56	-26
-115	-85	-55

m in kg/s	4,01
n in 1/min	3500
p amb in Pa	100830

* TSI: Tyler Sofrin Inter. Mode

* TSI: Tyler Sofrin Inter. Mode

Abbildung E.14: Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 4 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

E.3.3 LT1: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$

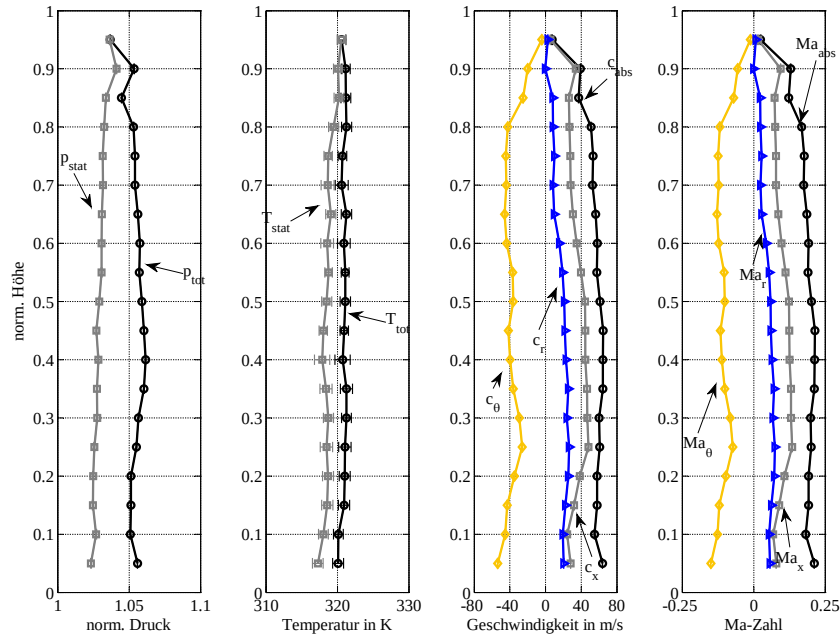


Abbildung E.15: Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

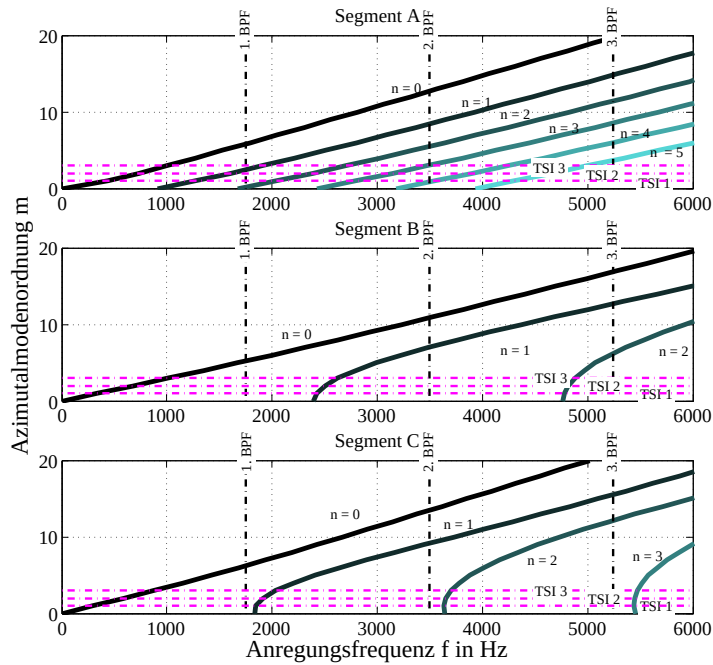


Abbildung E.16: Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

E.3 Versuchsturbinenexperimente

Segment A				Segment B				Segment C			
Ra in m		0,2475		0,2125		0,2368		0,2368		0,2368	
sigma		0,000		0,635		0,570		0,570		0,570	
p tot in Pa				119688		104159		104159		104159	
p stat in Pa						101745		101745		101745	
T tot in K				346		320		320		320	
T stat in K						317		317		317	
Ma x		0,058		0,132		0,096		0,096		0,096	
Ma θ		-		-		-0,102		-0,102		-0,102	
Ma r		-		-		0,045		0,045		0,045	

0				1				2			
Cut On Frequenzen	0	0	915	1675	0	2396	4765	0	1838	3645	
	1	439	1273	2038	340	2422	4778	295	1844	3635	
	2	729	1601	2380	679	2500	4816	587	1911	3655	
	3	1003	1913	2708	1015	2624	4879	873	2032	3704	
	4	1269	2216	3027	1347	2790	4966	1152	2200	3780	
	5	1531	2511	3339	1675	2993	5076	1421	2405	3883	
	6	1791	2801	3645	1997	3227	5207	1682	2640	4011	
	7	2048	3087	3946	2313	3486	5359	1936	2895	4161	
	8	2303	3369	4243	2623	3765	5529	2184	3165	4332	
	9	2557	3649	4536	2928	4061	5718	2428	3443	4523	

Blockier Frequenzen	0	0	916	1677	0	2417	4807	0	1847	3662	
	1	440	1275	2041	343	2444	4820	322	1879	3677	
	2	730	1603	2384	685	2522	4859	641	1971	3723	
	3	1005	1916	2713	1024	2647	4922	954	2119	3798	
	4	1271	2219	3032	1359	2815	5010	1259	2313	3900	
	5	1534	2515	3344	1690	3019	5120	1556	2545	4029	
	6	1794	2806	3651	2014	3255	5253	1844	2806	4183	
	7	2051	3092	3952	2333	3516	5406	2124	3088	4360	
	8	2307	3375	4250	2646	3798	5578	2399	3385	4557	
	9	2561	3655	4544	2954	4097	5768	2670	3690	4774	

BPF, 0: 1748,8 1/min				BPF, 1: 3497,6 1/min				BPF, 2: 5246,4 1/min			
----------------------	--	--	--	----------------------	--	--	--	----------------------	--	--	--

h1				h2				h3			
TSI +	59	89	119	1	31	61					
	88	118	148	-28	2	32					
	117	147	177	-57	-27	3					
	146	176	206	-86	-56	-26					
	175	205	235	-115	-85	-55					

m in kg/s		5,01
n in 1/min		3500
p amb in Pa		98805

* TSI: Tyler Sofrin Inter. Mode

Abbildung E.17: Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

E.3.4 LT1: $\dot{m} = 6 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$

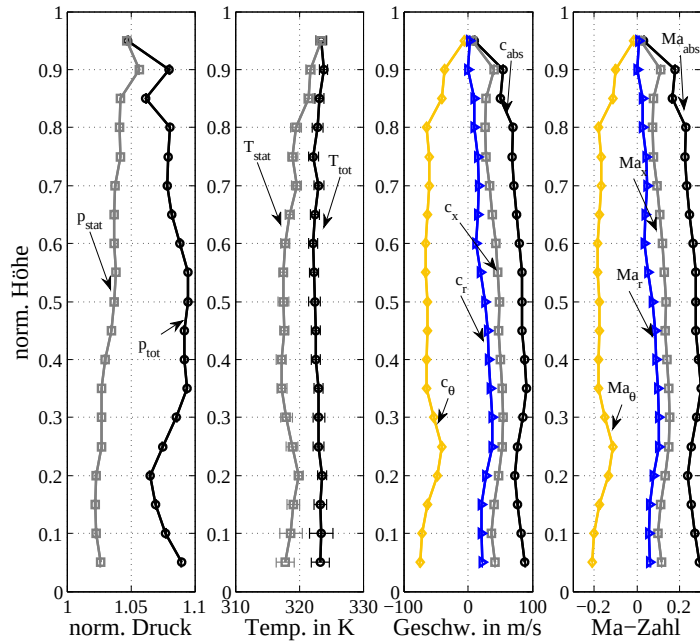


Abbildung E.18: Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 6 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

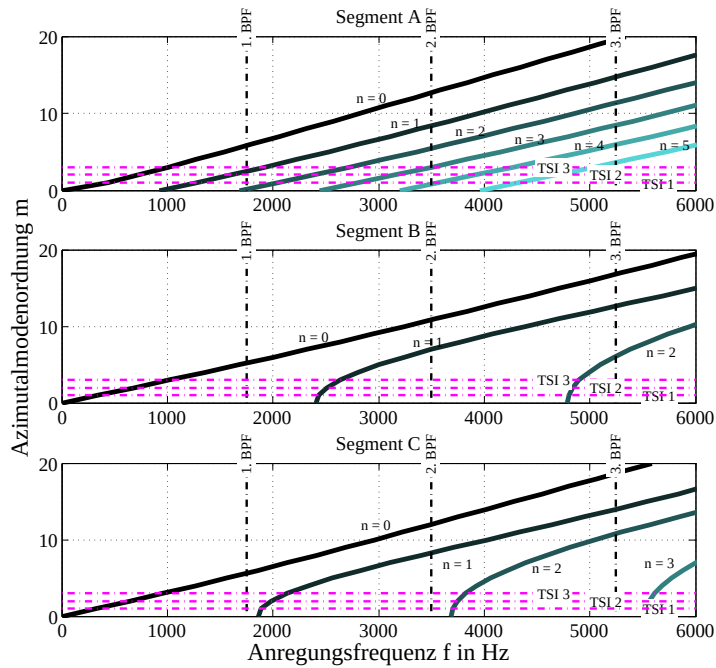


Abbildung E.19: Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 6 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

E.3 Versuchsturbinenexperimente

Segment A				Segment B				Segment C			
Ra in m		0,2475		0,2125		0,2368		0,2368		0,570	
sigma		0,000		0,635				0,570			
p tot in Pa				127806		106760		106760			
p stat in Pa						102226		102226			
T tot in K				350		323		323			
T stat in K						319		319			
Ma x		0,058		0,132		0,113		0,113			
Ma θ		-		-		-0,156		-0,156			
Ma r		-		-		0,058		0,058			

0				1				2			
Cut On Frequenzen	0	0	920	1685	0	2406	4786	0	1860	3687	
	1	442	1281	2051	342	2433	4798	324	1891	3703	
	2	734	1611	2395	682	2510	4837	645	1985	3748	
	3	1009	1925	2726	1020	2635	4900	961	2133	3824	
	4	1277	2230	3047	1353	2802	4987	1268	2329	3927	
	5	1541	2527	3360	1682	3006	5097	1567	2562	4057	
	6	1802	2819	3668	2005	3240	5229	1856	2825	4212	
	7	2061	3107	3971	2322	3500	5381	2139	3109	4390	
	8	2318	3391	4270	2634	3781	5553	2416	3408	4588	
	9	2573	3672	4565	2941	4078	5742	2688	3715	4807	

Blockier Frequenzen	0	0	922	1689	0	2434	4840	0	1860	3687	
	1	443	1284	2055	346	2461	4853	324	1891	3703	
	2	735	1615	2400	690	2539	4892	645	1985	3748	
	3	1011	1930	2732	1031	2665	4956	961	2133	3824	
	4	1280	2235	3053	1369	2834	5044	1268	2329	3927	
	5	1545	2533	3367	1701	3040	5155	1567	2562	4057	
	6	1806	2825	3676	2028	3277	5289	1856	2825	4212	
	7	2065	3113	3979	2349	3540	5443	2139	3109	4390	
	8	2323	3398	4279	2664	3824	5616	2416	3408	4588	
	9	2579	3680	4575	2974	4125	5808	2688	3715	4807	

BPF, 0: 1748 1/min				BPF, 1: 3497,8 1/min				BPF, 2: 5246,7 1/min			
--------------------	--	--	--	----------------------	--	--	--	----------------------	--	--	--

h1				h1				h1			
TSI +	59	89	119	1	31	61		1	31	61	
	88	118	148	-28	2	32		2	32	32	
	117	147	177	-57	-27	3		3	32	32	
	146	176	206	-86	-56	-26					
	175	205	235	-115	-85	-55					

m in kg/s		6,03
n in 1/min		3500
p amb in Pa		98812

* TSI: Tyler Sofrin Inter. Mode

Abbildung E.20: Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 6 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

E.3.5 LT1: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$

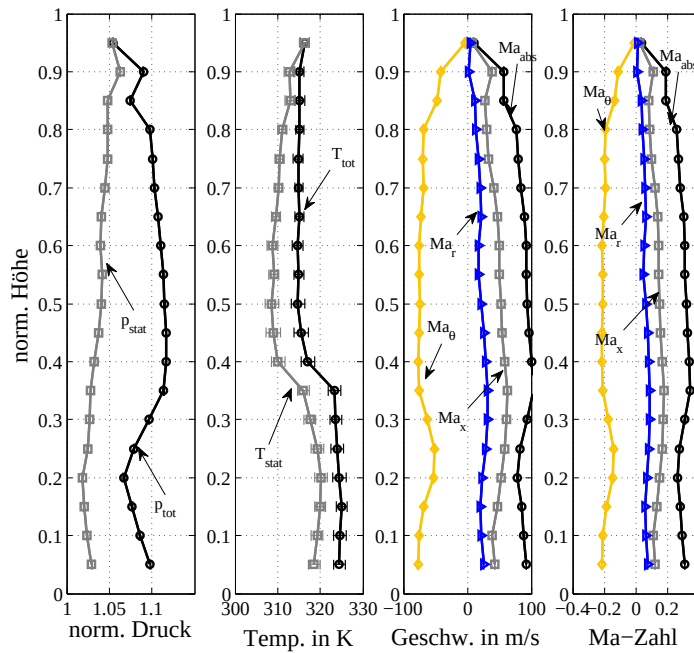


Abbildung E.21: Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

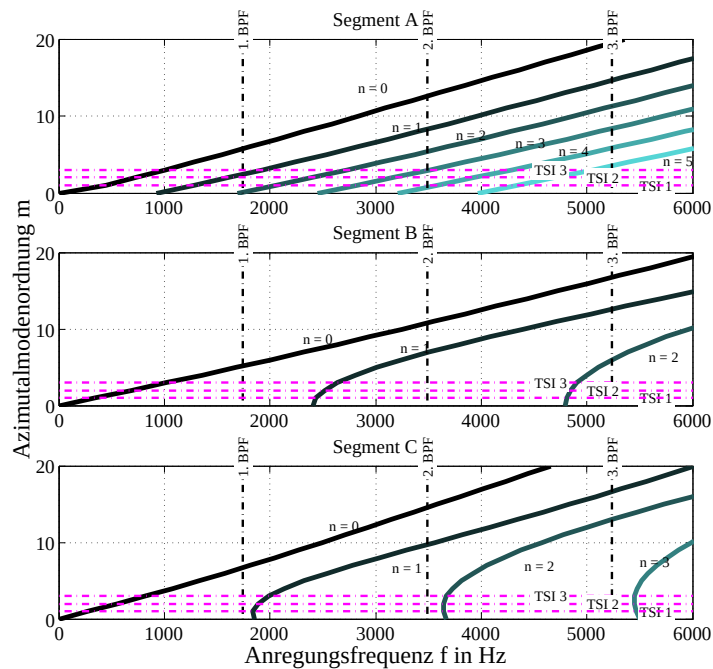


Abbildung E.22: Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

E.3 Versuchsturbinenexperimente

Segment A				Segment B				Segment C			
Ra in m		0,2475		0,2125		0,2368					
sigma		0,000		0,635		0,570					
p tot in Pa				137072		111106					
p stat in Pa						105203					
T tot in K				346		319					
T stat in K						313					
Ma x		0,072		0,165		0,127					
Ma θ		-		-		-0,180					
Ma r		-		-		0,057					

		0	1	2			0	1	2			0	1	2
Cut On Frequenzen	0	0	924	1692	0	2411	4794	0	1852	3673				
	1	444	1286	2058	342	2437	4807	277	1838	3643				
	2	736	1617	2404	683	2515	4846	552	1886	3643				
	3	1013	1933	2736	1021	2640	4909	820	1988	3672				
	4	1282	2238	3058	1356	2807	4996	1081	2137	3730				
	5	1547	2537	3373	1685	3011	5106	1333	2325	3814				
	6	1809	2830	3682	2009	3246	5239	1576	2541	3922				
	7	2068	3118	3986	2327	3507	5391	1812	2779	4054				
	8	2326	3404	4286	2639	3788	5563	2042	3031	4206				
	9	2583	3686	4582	2946	4086	5752	2268	3291	4379				

		0	1	2			0	1	2			0	1	2
Blockier Frequenzen	0	0	926	1696	0	2444	4861	0	1867	3703				
	1	445	1289	2064	347	2471	4874	325	1899	3718				
	2	738	1621	2410	693	2549	4912	648	1993	3764				
	3	1016	1938	2743	1036	2676	4977	965	2142	3840				
	4	1286	2244	3066	1374	2846	5065	1273	2338	3944				
	5	1551	2543	3381	1708	3053	5177	1573	2573	4074				
	6	1813	2837	3691	2036	3291	5311	1864	2837	4230				
	7	2074	3126	3996	2359	3555	5466	2148	3122	4408				
	8	2332	3413	4297	2675	3840	5640	2426	3422	4608				
	9	2590	3696	4594	2987	4142	5832	2699	3730	4827				

BPF, 0: 1745,9 1/min				BPF, 1: 3492 1/min				BPF, 2: 5237,9 1/min			
----------------------	--	--	--	--------------------	--	--	--	----------------------	--	--	--

		h1	h2	h3			h1	h2	h3			m in kg/s		7,04
TSI +		59	89	119	1	31	61						n in 1/min	3500
		88	118	148	-28	2	32						p amb in Pa	101415
		117	147	177	-57	-27	3							
		146	176	206	-86	-56	-26							
		175	205	235	-115	-85	-55							

* TSI: Tyler Sofrin Inter. Mod

Abbildung E.23: Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 3500 \text{ min}^{-1}$.

E.3.6 LT1: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 5000 \text{ min}^{-1}$

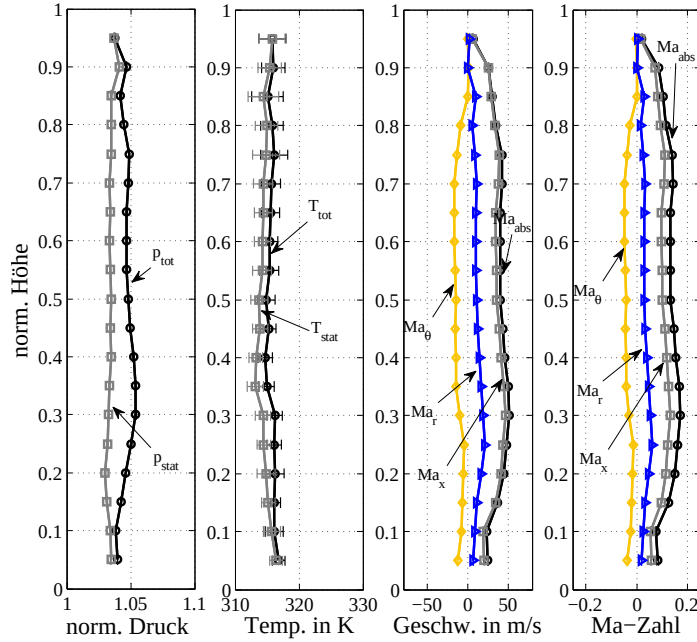


Abbildung E.24: Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 5000 \text{ min}^{-1}$.

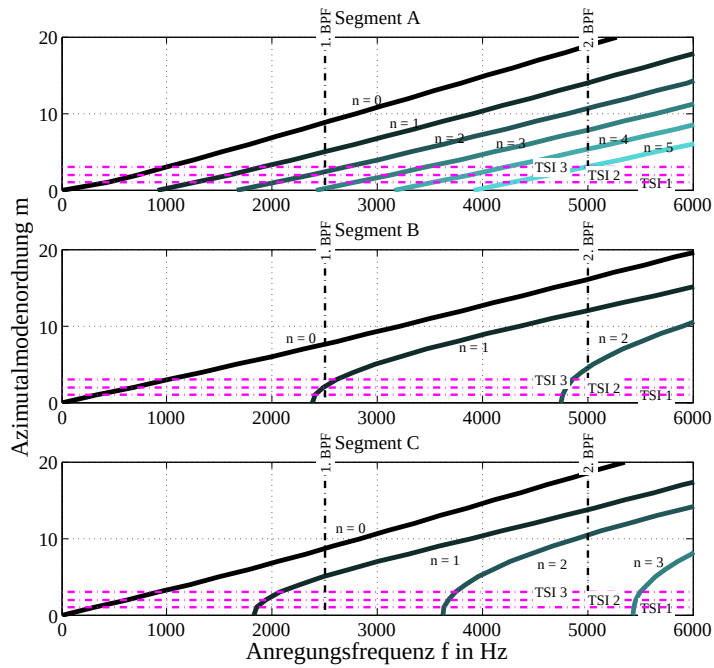


Abbildung E.25: Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 5000 \text{ min}^{-1}$.

E.3 Versuchsturbinenexperimente

Segment A				Segment B				Segment C			
Ra in m		0,2475		0,2125		0,2368					
sigma		0,000		0,635		0,570					
p tot in Pa				122596		106169					
p stat in Pa						104920					
T tot in K				340		316					
T stat in K						314					
Ma x		0,056		0,127		0,095					
Ma θ		-		-		-0,029					
Ma r		-		-		0,030					

0				1				2			
Cut On Frequenzen	0	0	911	1667	0	2387	4747	0	1830	3629	
	1	438	1267	2029	339	2413	4759	312	1854	3637	
	2	726	1594	2369	676	2490	4797	621	1939	3675	
	3	998	1905	2696	1011	2614	4860	924	2078	3742	
	4	1264	2206	3014	1342	2779	4946	1219	2263	3836	
	5	1525	2500	3324	1668	2981	5056	1506	2485	3957	
	6	1783	2789	3628	1989	3214	5186	1784	2737	4102	
	7	2038	3073	3928	2303	3472	5337	2055	3010	4270	
	8	2293	3355	4224	2613	3750	5507	2320	3296	4458	
	9	2546	3633	4516	2917	4045	5695	2581	3591	4666	

0				1				2			
Blockier Frequenzen	0	0	912	1670	0	2406	4785	0	1838	3646	
	1	438	1269	2032	342	2433	4798	320	1870	3661	
	2	727	1596	2373	682	2510	4837	638	1962	3706	
	3	1000	1908	2701	1020	2635	4900	950	2109	3780	
	4	1266	2209	3019	1353	2802	4987	1254	2302	3883	
	5	1527	2504	3329	1682	3006	5097	1549	2533	4011	
	6	1785	2793	3634	2005	3240	5229	1835	2793	4164	
	7	2042	3078	3934	2322	3500	5381	2115	3074	4340	
	8	2296	3360	4231	2634	3781	5553	2388	3369	4536	
	9	2550	3639	4523	2941	4078	5742	2658	3673	4752	

BPF, 0: 2502 1/min				BPF, 1: 5005 1/min				BPF, 2: 7507 1/min			
--------------------	--	--	--	--------------------	--	--	--	--------------------	--	--	--

h1				h2				h3			
TSI +	59	89	119	1	31	61	TSI -	1	31	61	
	88	118	148	-28	2	32		-28	2	32	
	117	147	177	-57	-27	3		-57	-27	3	
	146	176	206	-86	-56	-26		-86	-56	-26	
	175	205	235	-115	-85	-55		-115	-85	-55	

m in kg/s		4,99
n in 1/min		5000
p amb in Pa		101445

* TSI: Tyler Sofrin Inter. Mod

Abbildung E.26: Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 5000 \text{ min}^{-1}$.

E.3.7 LT1: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$

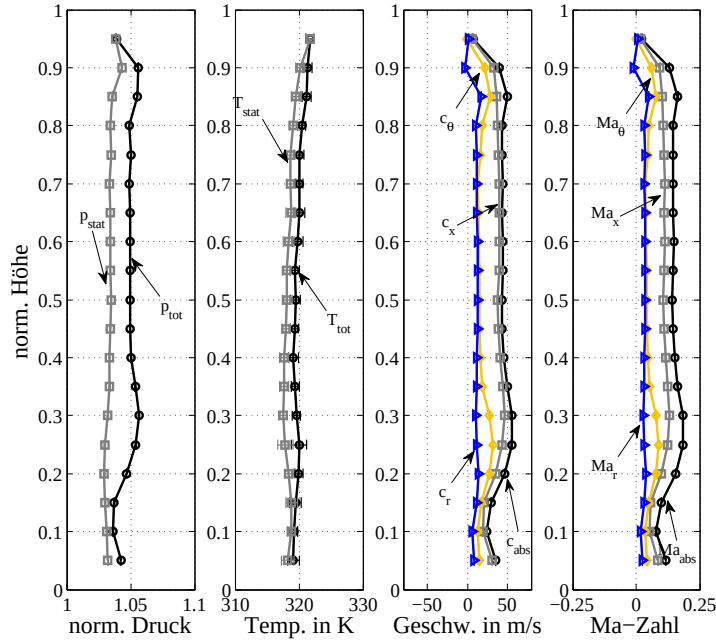


Abbildung E.27: Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$.

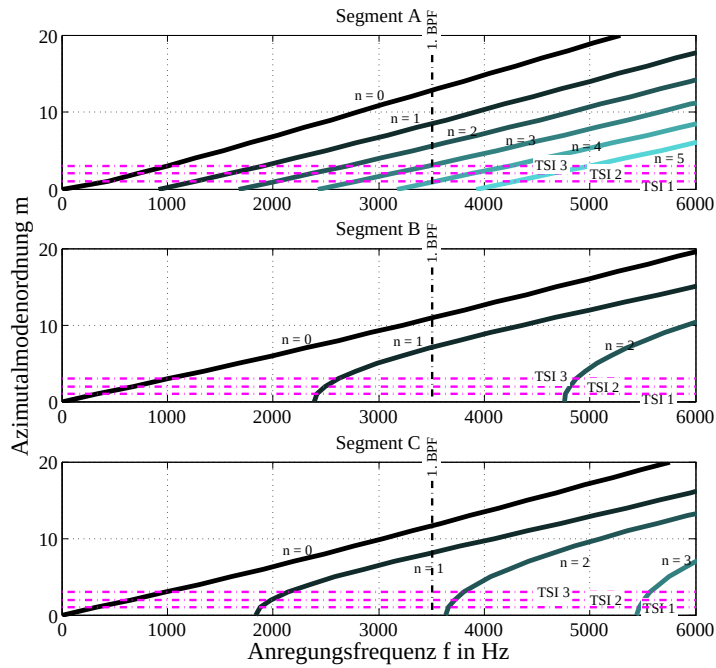


Abbildung E.28: Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$.

E.3 Versuchsturbinenexperimente

Segment A				Segment B				Segment C			
Ra in m		0,2475		0,2125		0,2368					
sigma		0,000		0,635		0,570					
p tot in Pa				122541		105984					
p stat in Pa						104493					
T tot in K				343		320					
T stat in K						318					
Ma x		0,056		0,128		0,099					
Ma θ		-		-		0,050					
Ma r		-		-		0,029					

0				1				2			
Cut On Frequenzen	0	0	913	1671	0	2392	4757	0	1834	3636	
	1	439	1270	2033	340	2418	4769	332	1877	3663	
	2	727	1597	2374	678	2495	4807	661	1982	3721	
	3	1001	1909	2702	1013	2619	4870	984	2141	3808	
	4	1266	2211	3020	1345	2785	4957	1300	2346	3922	
	5	1528	2506	3331	1672	2988	5066	1607	2588	4063	
	6	1787	2795	3636	1993	3221	5197	1905	2860	4228	
	7	2043	3080	3937	2308	3479	5349	2196	3153	4415	
	8	2298	3362	4233	2618	3758	5519	2481	3460	4624	
	9	2551	3641	4526	2923	4053	5707	2763	3775	4852	

0				1				2			
Blockier Frequenzen	0	0	914	1674	0	2412	4796	0	1843	3654	
	1	439	1272	2036	342	2438	4809	321	1874	3669	
	2	729	1600	2378	684	2516	4847	639	1967	3714	
	3	1002	1912	2707	1022	2641	4911	952	2114	3789	
	4	1268	2214	3025	1356	2808	4998	1256	2307	3891	
	5	1530	2510	3337	1686	3012	5108	1552	2539	4020	
	6	1789	2799	3642	2009	3247	5241	1839	2799	4173	
	7	2046	3085	3943	2327	3508	5393	2119	3081	4349	
	8	2301	3367	4240	2640	3789	5565	2394	3377	4546	
	9	2555	3647	4534	2947	4087	5754	2663	3681	4763	

BPF, 0: 3505,1 1/min				BPF, 1: 7010,2 1/min				BPF, 2: 10515,3 1/min			
----------------------	--	--	--	----------------------	--	--	--	-----------------------	--	--	--

h1				h1				h3			
TSI +	59	89	119	1	31	61	TSI -	1	31	61	
	88	118	148	-28	2	32		-28	2	32	
	117	147	177	-57	-27	3		-57	-27	3	
	146	176	206	-86	-56	-26		-86	-56	-26	
	175	205	235	-115	-85	-55		-115	-85	-55	

m in kg/s	5,02
n in 1/min	7000
p amb in Pa	101069

* TSI: Tyler Sofrin Inter. Mode

Abbildung E.29: Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 5 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$.

E.3.8 LT1: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$

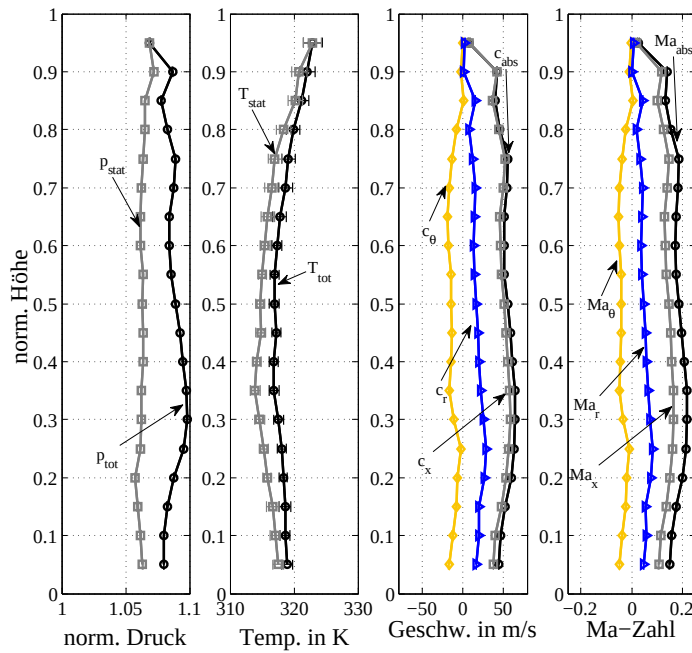


Abbildung E.30: Ergebnisse der Strömungsfeldtraversierungen hinter der ersten Stufe der Luftturbine bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$.

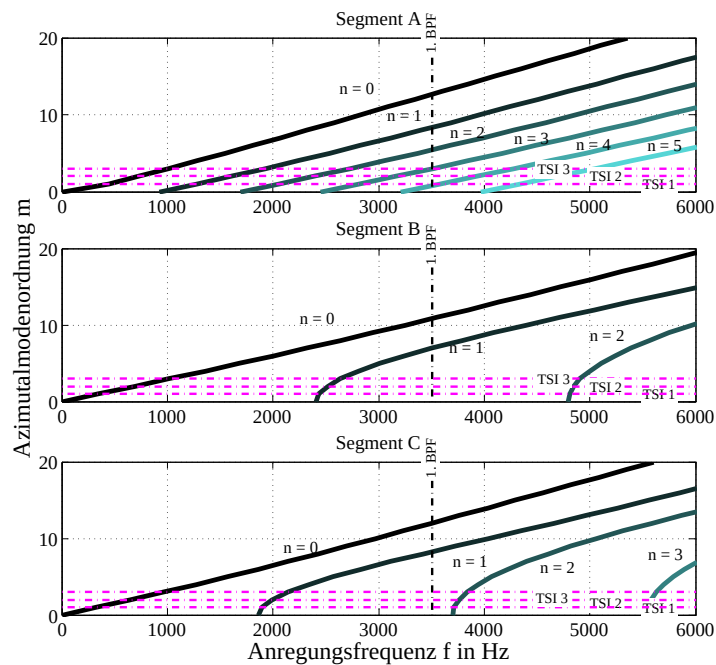


Abbildung E.31: Berechnung der ausbreitungsfähigen radialen und azimuthalen Moden bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$.

E.3 Versuchsturbinenexperimente

Segment A				Segment B				Segment C			
Ra in m		0,2475		0,2125		0,2368		0,2368		0,2368	
sigma		0,000		0,635		0,570		0,570		0,570	
p tot in Pa				140473		109736		109736		109736	
p stat in Pa						107388		107388		107388	
T tot in K				351		318		318		318	
T stat in K						316		316		316	
Ma x		0,070		0,158		0,134		0,134		0,134	
Ma θ		-		-		-0,031		-0,031		-0,031	
Ma r		-		-		0,045		0,045		0,045	

Cut On Frequenzen		0	1	2		0	1	2		0	1	2
	0	0	923	1690		0	2411	4795		0	1865	3699
	1	444	1284	2057		342	2437	4807		325	1897	3714
	2	736	1616	2402		683	2515	4846		647	1991	3760
	3	1012	1931	2734		1022	2640	4909		964	2140	3836
	4	1281	2236	3055		1356	2807	4996		1272	2336	3940
	5	1546	2535	3370		1685	3011	5107		1571	2570	4070
	6	1807	2827	3679		2009	3246	5239		1862	2834	4225
	7	2067	3116	3982		2327	3507	5391		2146	3119	4403
	8	2324	3401	4282		2639	3788	5563		2423	3419	4603
	9	2581	3683	4579		2946	4086	5753		2697	3727	4822

Blockier Frequenzen		0	1	2		0	1	2		0	1	2
	0	0	925	1694		0	2442	4856		0	1865	3699
	1	445	1288	2062		347	2468	4869		325	1897	3714
	2	738	1620	2408		692	2547	4907		647	1991	3760
	3	1015	1936	2740		1035	2674	4972		964	2140	3836
	4	1284	2242	3063		1373	2843	5060		1272	2336	3940
	5	1549	2541	3378		1707	3050	5172		1571	2570	4070
	6	1812	2834	3687		2034	3288	5306		1862	2834	4225
	7	2072	3123	3992		2356	3552	5460		2146	3119	4403
	8	2330	3409	4293		2673	3836	5634		2423	3419	4603
	9	2587	3692	4590		2984	4138	5826		2697	3727	4822

BPF, 0: 3508 1/min				BPF, 1: 7017 1/min				BPF, 2: 10526 1/min			
--------------------	--	--	--	--------------------	--	--	--	---------------------	--	--	--

TSI +	h1	h2	h3	TSI -
	59	89	119	
	88	118	148	
	117	147	177	
	146	176	206	
	175	205	235	

h1	h2	h3
1	31	61
-28	2	32
-57	-27	3
-86	-56	-26
-115	-85	-55

m in kg/s	7,00
n in 1/min	7000
p amb in Pa	100999

* TSI: Tyler Sofrin Inter. Mode

Abbildung E.32: Übersicht der wichtigsten Betriebs- und Modenparameter bei: $\dot{m} = 7 \text{ kg/s}$, $n = 7000 \text{ min}^{-1}$.

Literaturverzeichnis

- Airbus (2013): Global Market Forecast - Future Journeys 2013 to 2032. Technischer Bericht, AIRBUS, S.A.S., Blagnac Cedex, France.
- Alexiou, A.; Aretakis, N.; Roumeliotis, I. und Mathioudakis, K. (2010): Short and Long Range Mission Analysis for a Geared Turbofan with Active Core Technologies. In: Proc. ASME Turbo Expo 2010. Glasgow, UK.
- Amiet, R. (1971): Transmission and Reflection of Sound by a Blade Row. In: 9th AIAA Aerospace Sciences Meeting. New York.
- Amiet, R. (1974): Transmission and Reflection of Sound by a Blade Row. In: Journal of Sound and Vibration, Band 34(03):S. 399–412.
- Argüelles, P.; Bishoff, M.; Evans, S.; Kröll, W.; J.L., L.; Lina, A.; Lumsden, J.; Ranque, D.; Rasmussen, S.; Reutlinger, P.; Robins, S.; Terho, H. und Wittlöv, A. (2001): A vision for 2020 - Meeting Society's Needs and Winning Global Leadership. Technischer Bericht, European Commission, Brussels, Belgium.
- Atassi, H. und Golubev, V. (1998): Unsteady Disturbances in Swirling Turbomachinery Flows. In: In: Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines, S. 131 – 146.
- Aungier, R. (2006): Turbine Aerodynamics - Axial-Flow and Radial-Inflow Turbine Design and Analysis. ASME Press, New York.
- Babisch, W. (1998): Epidemiological Studies on Cardiovascular Effects of Traffic Noise. In: Advances in Noise Research, Band 1:S. 312–327.
- Babisch, W. (2000): Traffic Noise and Cardiovascular Disease: Epidemiological Review and Synthesis. In: Noise Health, Band 2:S. 9–32.
- Bake, F.; Kings, N. und Roehle, I. (2008): Fundamental Mechanism of Entropy Noise in Aero-Engines: Experimental Investigation. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Band 130.
- Bake, F.; Kings, N. und Roehle, I. (2009a): Experimental Investigation of the Entropy Noise Mechanism in Aero-Engines. In: Aeroacoustics, Band 8(1):S. 125–142.
- Bake, F.; Richter, C.; Mühlbauer, B.; Kings, N.; Roehle, I.; Thiele, F. und Noll, B. (2009b): The Entropy Wave Generator(EWG): A Reference Case on Entropy Noise. In: Journal of Sound and Vibration, Band 326:S. 574–598.

- Bartelt, M.; Laguna, J. und Seume, J. (2013): Synthetic Sound Source Generation for Acoustical Measurements in Turbomachines. In: Proceedings of the ASME Turbo Expo, GT2013-95045. San Antonio, Texas.
- Bartelt, M.; Meinzer, C.; Laguna, J. und Seume, J. (2012): Design Methodology and Experimental Validation of an Aeroacoustic Test Rig for Turbomachinery Applications. In: The 13th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines. Tokio, Japan.
- Bartelt, M. und Seume, J. (2011): Auslegung und Optimierung eines Aeroakustik-Kanals für Turbomaschinenanwendungen unter Verwendung numerischer Methoden. In: Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress. Bremen, Deutschland.
- Bennett, G.; O Reilly, C.; Liu, H. und Tapken, U. (2009): Modelling Multi-Modal Sound Transmission from Point Sources in Ducts with Flow using a Wave-Based Method. In: The 16th International Congress on Sound and Vibration. Krakow, Poland.
- Berster, P.; Gehlhausen, M.; Grimme, W.; Hepting, M.; Horn, S.; Leipold, A.; Maertens, S.; Meincke, P.; Murphy, M.; Pabst, H. und Wilken, D. (2011): Luftverkehrsbericht 2011. Daten und Kommentierungen des deutschen und weltweiten Luftverkehrs. Technischer Bericht, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
- Berster, P.; Gehlhausen, M.; Grimme, W.; Hepting, M.; Leipold, A.; Maertens, S.; Murphy, M.; Pabst, H. und Wilken, D. (2010): Luftverkehrsbericht 2010. Daten und Kommentierungen des deutschen und weltweiten Luftverkehrs. Technischer Bericht, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
- BGBl (2007): Gesetz zum Schutz gegen Fluglärm. In: Bundesgesetzblatt Jahrgang 2007 Teil 1 Nr. 56.
- Bi, W.; Pagneux, V.; Lafarge, D. und Auregan, Y. (2007): An Improved Multimodal Method for Sound Propagation in Nonuniform Lined Ducts. In: J. Acoust. Soc. Am., Band 122(1):S. 280–290.
- Binner, M. (2011): Experimentelle Untersuchungen von Teil- und Schwachlastzuständen in Hochdruckdampfturbinen. Dissertation, Inst. für Turbomaschinen u. Fluid Dynamik, Leibniz Universität Hannover.
- Bird, R.; Stewart, W. und Lightfoot, E. (2007): Transport Phenomena. John Wiley & Sons, Ltd., New York, Brisbane, Toronto.
- BMU (2011): Hintergrund Fluglärm. <http://www.bmu.de/laermschutz/themenbereiche/verkehrslaerm/doc/41275.php>. Zuletzt abgerufen am 10.03.2014.
- Bolleter, U. und Chanaud, R. (1971): Propagation of Fan Noise in Cylindrical Ducts. In: J. of the Acoustical Society of America, Band 49(3):S. 627–638.
- Bolleter, U.; Cohen, R. und Wang, J. (1973): Design Considerations for an In-Duct Sound-power Measuring System. In: J. of Sound and Vibration, Band 28(4):S. 669–685.

- Bolleter, U. und Crocker, M. (1972): Theory and Measurement of Modal Spectra in Hard-Walled Cylindrical Ducts. In: J. of the Acoustical Society of America, Band 51(5):S. 1439–1447.
- Briggs, W. und Henson, v. (1995): The DFT - An Owners Manual for the Discrete Fourier Transform. SIAM - Soc. for Industrial and Applied Math., Philadelphia, PA.
- Brigham, E. und Morrow, R. (1967): The Fast Fourier Transform. In: Spectrum, IEEE, Band 4(12):S. 63–70.
- Bronstein, I.; Mühlig, H.; Musiol, G. und Semendjajew, K. (2013): Taschenbuch der Mathematik. Harri Deutsch, Frankfurt, Main.
- Broszat, D. (2008): Aircraft Engine Noise Footprint Reduction via a Non-Uniform Inlet Liner Concept. Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München.
- Broszat, D.; Korte, D.; Tapken, U. und Moser, M. (2009): Validation of Turbine Noise Prediction Tools with Acoustic Rig Measurements. In: Proc. 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Miami, Florida.
- Broszat, D.; Selic, T. und Marn, A. (2013): Verification of Inverse Cut-off Effect in a Turbomachinery Stage. Part 2 - Comparison to Experimental Results. In: Proc. 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Berlin, Germany.
- Bubolz, T. (2004): Untersuchung von randzonenkorrigierten Axialverdichterbeschaufelungen mit mit Strömungs-Messsonden. Dissertation, Leibniz Universität Hannover.
- Bucher, I. (2004): Estimating the Ratio Between Travelling and Standing Vibration Waves under Non-Stationary Conditions. In: J. of Sound and Vibration, Band 270:S. 341–359.
- Bunse-Gerstner, A. und Gragg, W. (1988): Singular Value Decomposition of Complex Symmetric Matrices. In: J. Computational and app. Mathematics, Band 21.
- Campos, L. (2007a): On 24 Forms of the Acoustic Wave Equation in Vortical Flows and Dissipative Media. In: Applied Mechanics Reviews, Band 60:S. 291–315.
- Campos, L. (2007b): On 36 Forms of the Acoustic Wave Equation in Potential Flows and Inhomogeneous Media. In: Applied Mechanics Reviews, Band 60:S. 149–171.
- Campos, L.; Oliveira, J. und Kobayashi, M. (1999): On Sound Propagation in a Linear Shear Flow. In: Journal of Sound and Vibration, Band 219(5):S. 739–770.
- Candel, S. (1975): Acoustic Conservation Principles and an Application to Plane and Modal Propagation in Nozzles and Diffusers. In: Journal of Sound and Vibration, Band 41(2):S. 207–232.
- Cepni, A.; Stancil, D. und Brodtkorb, D. (2004): Experimental Mode Content Analysis Technique for Complex Overmoded Waveguide Systems. In: Antennas and Propagation Society International Symposium, IEEE.

- Chen, G. und Wang, Z. (2012): A Signal Decomposition Theorem with Hilbert Transform and its Application to Narrowband Time Series with Closely Spaced Frequency Components. In: *Mechanical Systems and Signal Processing*, Band 28:S. 258–279.
- Chiu, H. und Summerfield, M. (1973): *Theory of Combustion Noise*. Technischer Bericht, AMS Report, No.1136.
- Chu, E. (2008): *Continuous Fourier Transforms - Analysis, Application and Fast Algorithms*. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Cumpsty, N. und Marble, F. (1977): The Interaction of Entropy Fluctuations with Turbine Blade Rows; A Mechanism of Turbojet Engine Noise. In: *Proc. R. Soc. London*, Band 357:S. 323–344.
- Delfs, J. (2009): *Basics of Aeroacoustics - Letcure Notes*. DLR: Inst. für Aerodynamik u. Strömungstechnik, Abteilung Technische Akustik, Braunschweig.
- Doak, P. (1973a): Excitation, Transmission and Radiation of Sound from Source Distributions in Hard-Walled Ducts of Finite Length (I): The Effects of Duct Cross-Section Geometry and Source Distribution Space-Time Pattern. In: *Journal of Sound and Vibration*, Band 31(1):S. 1–72.
- Doak, P. (1973b): Excitation, Transmission and Radiation of Sound from Source Distributions in Hard-Walled Ducts of Finite Length (II): The Effects of Duct Length. In: *Journal of Sound and Vibration*, Band 31(2):S. 137–174.
- Doyle, V. und Matta, R. (1977): *Attenuation of Upstream-Generated Low Frequency Noise by Gas Turbines*. Technischer Bericht, NASA CR-135219, Cleveland, Ohio.
- Dutt, A. und Rokhlin, V. (1993): Fast Fourier Transforms for Nonequispaced Data. In: *SIAM J. Sci. Comput.*, Band 14(6):S. 1368–1393.
- EG/2002/30 (2002): *Über Regeln und Verfahren für lärmbedingte Betriebsbeschränkungen auf Flughäfen der Gemeinschaft*. In: *Richtlinie 2002/30/EG des Europäischen Parlaments und des Rates*.
- Elnady, T. und Boden, H. (2001): Application of the Point Matching Method to Model Circumferentially Segmented Non-Locally Reacting Liners. In: *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA 2001-2202. Maastricht, Netherlands.
- Enghardt, L.; Moreau, A.; Tapken, U. und Kennepohl, F. (2009): Radial Mode Decomposition in the Outlet of a LP Turbine - Estimation of the Relative Importance of Broadband Noise. In: *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA 2009-3286. Miami, Florida.
- Enghardt, L.; Tapken, U.; Neise, W.; Kennepohl, F. und Hening, K. (2001): *Acoustic Mode Analysis Using in Duct Sensor Rakes*. In: *Turbine Blade/Vane Interaction Noise*. Berlin.

- Eriksson, C.; Rosenlund, M.; Petershagen, G.; Hilding, A.; Ostenson, C. und Bluhm, G. (2007): Aircraft Noise and Incidence of Hypertension. In: *Epidemiology*, Band 18:S. 716–721.
- Evers, H. (1985): Strömungsformen im Ventilationsbetrieb einer ein-mehrstufig beschaufelten Modellturbine. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Universität Hannover.
- Evesque, S.; Polifke, W. und Pankiewicz, C. (2003): Spinning and Azimuthal Standing Acoustic Modes in Annular Combustors. In: 9th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference and Exh. Hilton Head, SC.
- Farassat, F. und Meyers, M. (1996): A Study of Wave Propagation in a Duct and Mode Radiation. In: AIAA Aeroacoustic Conference, PA.
- Farlow, S. (1993): Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Dover Publications, Inc., New York.
- Faustmann, C.; Lengani, D.; Spataro, R.; Marn, A. und Göttlich, F., E. Heitmeir (2013): Experimental Investigation of the Noise Generation and Propagation for Different Turning Mid Turbine Frame Setups in a Two-Stage Two-Spool Test Turbine. In: Proc. ASME Turbo Expo 2013. San Antonio, Texas.
- FAZ (2013): Schlaf von Flughafen-Anwohnern wird untersucht. In: In: Frankfurter Allgemeine Zeitung 26.06.2013.
- Feeny, B. (2008): A Complex Orthogonal Decomposition for Wave Motion Analysis. In: *J. of Sound and Vibration*, Band 310(1–2):S. 77 – 90. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.047>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X07006049>.
- Feldman, M. (2006): Time-varying Decomposition and Analysis Based on the Hilbert Transform. In: *J. of Sound and Vibration*, Band 295:S. 518–530.
- Feldman, M. (2010): Hilbert Transform in Vibration Analysis. In: *Mech. Systems and Signal Processing*, Band 25:S. 735–802.
- Feldman, M. (2011): Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibrations. John Wiley & Sons, Ltd., West Sussex, UK.
- Gabard, G. und Astley, R. (2008): A Computational Mode-Matching Approach for Sound Propagation in Three-Dimensional Ducts with Flow. In: *Journal of Sound and Vibration*, Band 315(4-5):S. 1103 – 1124.
- Gander, W.; G.H., G. und Strebel, R. (1994): Least-Squares Fitting of Circles and Ellipses. In: *BIT*, Band 34:S. 558–578.
- Gerasik, V. und Stastna, M. (2010): Complex Group Velocity and Energy Transport in Absorbing Media. In: *Phys. Rev. E*, Band 81. doi:10.1103/PhysRevE.81.056602. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.056602>.

- Ghiladi, A. (1981): Drehklängenstehung in axialen Turbomaschinen und -Ausbreitung in angeschlossenen Rohrleitungen. Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, RWTH Aachen.
- Glegg, S. (1999): The Response of a Swept Blade Row to a Three-Dimensional Gust. In: J. of Sound and Vibration, Band 227(1):S. 29–64.
- Goldstein, M. (1976): Aeroacoustics. McGraw-Hill, Inc., New York.
- Goldstein, M. (1978): Unsteady Vortical and Entropic Distortions of Potential Flows Round Arbitrary Obstracles. In: Journal of Fluid Mechanics, Band 89(03):S. 433–468.
- Golub, G. und Reinsch, C. (1970): Singular Value Decompostion and Least Squares Solutions. In: Numer. Math, Band 14:S. 403–420.
- Golub, G. und van Loan, C. (1996): Matrix Computations - Third Ed. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.
- Golubev, V. und Atassi, H. (1995): Aerodynamic and Acoustic Response of a Blade Row in Unsteady Swirling Flow. In: Proc. CEAS/ AIAA Aeroacoustic Conference. Munich, Germany.
- Golubev, V. und Atassi, H. (1996): Sound Propagation in an Annular Duct with Mean Potential Swirling Flow. In: Journal of Sound and Vibration, Band 198(05):S. 601–616.
- Golubev, V. und Atassi, H. (1998): Acoustic Vorticity Waves in Swirling Flows. In: Journal of Sound and Vibration, Band 209(02):S. 203–222.
- Gorazd, L.; Jurkiewicz, J. und Snakowska, A. (2012): Experimental Verification of the Theoretical Model of Sound Radiation from an Unflanged Duct with Low Mean Flow. In: Archives of Acoustics, Band 37(2):S. 227–236.
- Gorji-Bandpy, M. und Azimi, M. (2012): Technologies for Jet Noise Reduction in Turbofan Engines. In: Aviation, Band 16(1):S. 25–32.
- Goto, K. und Kaneko, T. (2002): Distribution of Blood Pressure Data from People Living Near an Airport. In: Journal of Sound and Vibration, Band 250:S. 145–149.
- Graham, W.; Hall, C. und Morales, V. (2014): The Potential of Future Aircraft Technology for Noise and Pollutant Emissions Reduction. In: Transport Policy - Air Transportation and the Environment, Band 34:S. 36–51.
- Greiser, E.; Jahnsen, K. und Greiser, C. (2006): Beeinträchtigung durch Fluglärm: Arzneimittelverbrauch als Indikator für gesundheitliche Beeinträchtigungen. Technischer Bericht, Umweltbundesamt.
- Gröl, W. (2012): Mit belegten Broten gegen den Lärm. In: In: Süddeutsche Zeitung 25.03.2012.

- Grüning, D. (2008): Digitale Signalverarbeitung: Bausteine, Systeme, Anwendungen. Forotar Print und Media AG, Bern.
- Harel, P. und Perulli, M. (1972): Measurement, in a Duct, of the Space-Structure of the Discrete-Frequency Noise Generated by an Axial Compressor. In: J. of Sound and Vibration, Band 23(4):S. 487–506.
- Hay, J.; Busse-Gerstengabe, S.; Richter, C.; Thiele, F.; Blohm, L. und L., E. (2013): A Comprehensive Study on Non-Locally Reacting Liners. Part 2: Impedance Education and Liner Modeling. In: Proc. 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Berlin, Germany.
- Hayes, W. (1973): Group Velocity and Nonlinear Dispersive Wave Propagation. In: Proc. Royal Soc. - Math. and Physical Sci., Band 332(1589):S. 199–221.
- Heinig, K. (1983): Sound Propagation in Multistage Axial Flow Turbomachines. In: AIAA Journal, Band 21(01).
- Hellmich, B. und Seume, J. (2004): Acoustic Resonance in a Four-Stage High-Speed Axial Compressor. In: ISROMAC 10. Honolulu, USA.
- Hellmich, B. und Seume, J. (2006): Causes of Acoustic Resonance in a High-Speed Axial Compressor. In: ASME Turbo Expo 2006. Barcelona, Spain.
- Hersch, A. und Liu, C. (1976): Sound Propagation in Choked Ducts. Technischer Bericht, NASA CR-135123, Chatsworth, CA.
- Hines, C. (1974): Propagation Velocities and Speeds in Ionospheric Waves: A Review. In: Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, Band 36:S. 1179–1204.
- Hoeren, T. (2011): Mein Dank gilt meinem Hund. In: duz - deutsches Universitätszeitung, Band 4:S. 60–61.
- Holste, F. (1995a): Ermittlung der aerodyn Lärmquellen und Berechnungen des abgestrahlten Schallfeldes mittels der im Nahfeld gemessenen Druckschwankungen am Beispiel eines Triebwerksmodell. Dissertation, VDI.
- Holste, F. (1995b): Noise Source Identification in a Propfan Model by Means of Acoustical Near Field Measurements. In: Journal of Sound and Vibration, Band 203(04):S. 641–665.
- Huang, X.; Chen, X.; Ma, Z. und Zhang, X. (2008): Efficient Computation of Spinning Modal Radiation Through an Engine Bypass Duct. In: AIAA Journal, Band 46(6):S. 1413–1423.
- Huff, D. (2007): Noise Reduction Technologies for Turbofan Engines. Technischer Bericht, NASA, TM-2007-214495.
- Hulse, B. und Large, J. (1967): The Mechanisms of Noise Generation in a Compressor Model. In: , S. 191–198.

- Hurfar, C. (2012): Untersuchung von Skalierungsmethoden für aeroakustische Anwendungen in Turbomaschinen. Diplomarbeit, Leibniz Universität Hannover.
- Hurfar, C.; Bartelt, M. und Seume, J. (2015): A Scaling Methode for Modal Sound Propagation in Annular Ducts. In: Proc. ASME Turbo Expo 2015. Montreal, Canada.
- Ingard, U. (2008): Notes on Acoustics. Infinity Science Press, Hingham, USA.
- Ingard, U. und Singhal, V. (1975): Effect of flow on the acoustic resonances of an open-ended duct. In: J. Acoust. Soc. Am., Band 58(4):S. 788–793.
- Jackson, L. (1996): Digital Filters and Signal Processing. 3rd Ed. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- Jarup, L.; Babisch, W.; Houthuijs, D.; Pershagen, G.; Katsouyanni, K.; Cadum, E.; Dudley, P. S. I., M. and Savigny; Swart, O. B. G., W. and Breugelmans; Selander, J.; Charalampidis, A. S.; Dimakopoulou, K.; Sourtzi, M., P. and Velonakis und Vigna-Taglianti, F. (2008): Hypertension and exposure to noise near airports - the HYENA study. In: Environmental Health Perspectives, Band 116:S. 329–333.
- Johnson, F. (1990): Physical Cause of Group Velocity in Normally Dispersive, Nondissipative Media. In: American Journal of Physics, Band 58(11):S. 1044–1056. doi: <http://dx.doi.org/10.1119/1.16270>. URL <http://scitation.aip.org/content/aapt/journal/ajp/58/11/10.1119/1.16270>.
- Kaji, S. und Okazki, T. (1970a): Generation of Sound by Rotor Stator Interaction. In: Journal of Sound and Vibrarion, Band 13(03):S. 281–307.
- Kaji, S. und Okazki, T. (1970b): Propagation of Sound Waves Through A Blade Row, Part 1. In: Journal of Sound and Vibrarion, Band 11(03):S. 339–353.
- Kaji, S. und Okazki, T. (1970c): Propagation of Sound Waves Through A Blade Row, Part 2. In: Journal of Sound and Vibrarion, Band 11(03):S. 355–375.
- Kammeyer, D. und Kroschel, K. (2006): Digitale Signalverarbeitung. Teubner, Wiesbaden, D.
- Kaplan, B.; Nicke, E. und Voss, C. (2006): Design of a Highly Efficient Low-Noise Fan for Ultra-High Bypass Engines. In: ASME Turbo. Expo 2006. Barcelona, Spain.
- Keller, C. (2013): Entwicklung und Verifikation eines Verfahrens zur Lokalisation rotierender Schallquellen in Rohrsystemen. Diplomarbeit, Leibniz Universität Hannover.
- Kelly, J.; Nayfeh, A. und Watson, L. (1982): Acoustic Propagation in Partially Chocked Converging-Diverging Ducts. In: Journal of Sound and Vibrarion, Band 81(4):S. 519–534.
- Kemp, S. W., N.H. (1953): Aerodynamic Interference Between Moving Blade Rows. In: Journal of Aeronautical Science, Band 20(09):S. 585–597.

- Kerrebrock, J. (1977): Small Disturbances in Turbomachine Annuli with Swirl. In: AIAA Journal, Band 15(06):S. 794–803.
- Kerschen, G. und Golinval, J. (2002): Physical Interpretation of the Proper Orthogonal Modes Using the Singular Value Decomposition. In: J. of Sound and Vibration, Band 249(5):S. 849–865.
- Kester, J. und Pickett, G. (1972): Application of Theoretical Acoustics of the Reduction of Jet Engine Noise. In: J. Appl. Phys., Band 5:S. 12–28.
- Kings, N.; Enghardt, L. und Bake, F. (2012): Indirect Combustion Noise: Experimental Investigation of the Vortex Sound Generation in a Choked Convergent-divergent Nozzle. Nantes, France.
- Klema, C. und Laub, A. (1980): The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications. In: IEEE Trans. on Automatic Control, Band 25(2):S. 164–176.
- Koch, W. (1971): On the Transmission of Sound Waves through a Blade Row. In: Journal of Sound and Vibration, Band 18(01):S. 111–128.
- Kousen, K. (1995): Eigenmode Analysis of Ducted Flows with Radially-Dependent Axial and Swirl Components. In: CEAS/AIAA Aeroacoustic Conference, 96-1679. München, Germany.
- Kousen, K. (1996): Pressure Modes in Ducted Flows with Swirl. In: AIAA Journal, Band 96-1679.
- Kousen, K. (1999): Eigenmodes of Ducted Flows with Radially-Dependent Axial and Swirl Velocity Components. Technischer Bericht, NASA/CR 1999-208881.
- Laguna, J. (2015): On the Sensitivity of the Radial Mode Analysis for the Experimental Evaluation of Sound Propagation in a Low-Pressure Turbine. Dissertation, Leibniz Universität Hannover.
- Laguna, J.; Bartelt, M.; Drechsel, B. und Seume, J. (2012): Entwicklung einer variablen Messeinheit für Schallfeldanalysen in Turbomaschinen. In: 38. Jahrestagung für Akustik - DAGA 2012. Darmstadt, Deutschland.
- Laguna, J.; Bartelt, M. und Seume, J. (2013): Impact of Swirl on the Sensitivity of the Radial Mode Analysis in Turbomachinery. In: Proc. ASME Turbo Expo 2013, GT2013-95460. San Antonio, Texas.
- Lansing, D.; Drischler, J. und Pusey, C. (1970): Radiation of Sound From an Unflanged Circular Duct with Flow. In: J. Acoust. Soc. Am., Band 48(75).
- Lehoucq, R.; Sorensen, D. und Yang, C. (1998): ARPACK Users Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. Siam.
- Lerch, R.; Sessler, G. und Wolf, D. (2009): Technische Akustik - Grundlagen und Anwendungen. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

- Lighthill, M. (1964): Group Velocity. In: J. Inst. Maths Applics, Band 1:S. 1–28.
- Lindfield, G. und Penny, J. (2012): Numerical Methods Using Matlab. Elsevier, Amsterdam, Heidelberg, New York.
- Logue, M.; Atassi, H. und Kamel, M. (2009): Propagation of Acoustic Waves Through a Rotor. In: The 12th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines. London, GB.
- Lohmann, D. (1978): Zur Schallausbreitung in Zylinderkanälen mit helikalen Einbauten. Dissertation, Fak. f. Maschinenbau u. Elektrotechnik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig.
- Mani, R. und Horvay, G. (1970): Sound Transmission through Blade Rows. In: J. of Sound and Vibration, Band 12(1):S. 59–83.
- Marcuse, D. (1971): Pulse Propagation in Multimode Dielectric Waveguides. In: Bell Sys. Tech. Journal, Band 51(6):S. 1199–1233.
- Mathews, D. und Rekos, N. (1977): Prediction and Measurement of Direct Combustion Noise in Turbopropulsion Systems. In: J. of Aircraft, Band 14(9):S. 850–859.
- Matta, R. und Mani, R. (1979): Theory of Low Frequency Noise Transmission Through Turbines. Technischer Bericht, NASA- CR 159457.
- Medlin, G. (1990): Advances in Digital Signal Processing. In: Control and Dynamic Systems, Band 33:S. 89–128.
- Meykens, K.; Van Rompaey, R. und Janssen, H. (1998): Dispersion in Acoustic Waveguides - A Teaching Laboratory Experiment. In: Am. J. of Physics, Band 67.
- Mincu, D.; Polacsek, E.; Manoha, E. und Clair, V. (2012): Acoustic Transmission Through a 3D Rotating Fan Using Computational Aero Acoustics. In: Proc. 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Colorado Springs, Colorado.
- Moore, C. (1979): Measurement of Radial and Circumferential Modes in Annular and Circular Fan Ducts. In: J. of Sound and Vibration, Band 62(2):S. 235–256.
- Morfey, C. (1964): Rotating Pressure Patterns in Ducts: Their Generation and Transmission. In: J. of Sound and Vibration, Band 1:S. 60–87.
- Morfey, C. (1972): The Acoustics of Axial Flow Machines. In: J. of Sound and Vibration, Band 22(4):S. 445–466.
- Mugridge, B. (1969): The Measurement of Spinning Acoustic Modes Generated in an Axial Flow Fan. In: J. of Sound and Vibration, Band 10(2):S. 227–246.
- Muir, R. (1977a): The Application of a Semi-Actuator Disk Model to Sound Transmission Calculations in Turbomachinery, Part 1: The Single Blade Row. In: J. of Sound and Vibration, Band 54(3):S. 393–408.

- Muir, R. (1977b): The Application of a Semi-Actuator Disk Model to Sound Transmission Calculations in Turbomachinery, Part 2: Multiple Blade Rows. In: J. of Sound and Vibration, Band 55(3):S. 335–349.
- Munjal, M. (1987): Acoustics of Ducts and Mufflers - with Application to Exhaust and Ventilation System Design. John Wiley & Sons, New York, Brisbane, Toronto.
- Nayfeh, A.; Kaiser, J. und Telionis, D. (1974): Acoustics of Aircraft Engine-Duct Systems. In: AIAA Journal, Band 13(2):S. 130–153.
- Neise, W.; Dobrzynski, W. und Michel, U. (2005): Bewertung des Stands der Technik in der Lärmreduktionstechnologie für Verkehrsflugzeuge. Technischer Bericht, Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt, DLR.
- Nijboer, R. (2001): Eigenvalues and Eigenfunctions of Ducted Swirling Flows. In: Proc. 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Maastricht, Netherlands.
- Noiray, N. und Schuermans, B. (2013): On the dDynamic Nature of Azimuthal Thermoacoustic Modes in Annular Gas Turbine Combustion Chambers. In: Proc. of the Royal Soc., Band 469:S. 1–15.
- NoisedB (): Noise Certification Database. <http://noisedb.stac.aviation-civile.gouv.fr>, note = zuletzt abgerufen am 12.03.2014, year=2014, urldate = 12.03.2014,.
- Paarmann, L. (2001): Design and Analysis of Analog Filters- A Signal Processing Perspective. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- Panek, L. (2011): Simualtion und Modellierung der tonalen Schallausbreitung in Nebestromkanälen von Flugtriebwerken. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- Parmentier, J.; Salas, P.; Wolf, P.; Staffelbach, G.; Nicoud, F. und Poinso, T. (2012): A Simple Analytical Model to Study and Control Azimuthal Instabilities in Annular Combustion Chambers. In: Combustion and Flame, Band 159:S. 2374–2387.
- Peeters, P.; Middel, J. und A., H. (2005): Fuel Efficiency of Commercial Aircraft- An Overview of Historical and Future Trends. Technischer Bericht, Nationaal Lucht-en Ruimtevaartlaboratorium, NRL.
- Plumlee, H.; Dean, P.; Wynne, A. und Burrin, R. (1973): Sound Propagation in and Radiation from Acoustically Lined Flow Ducts: A Comparison of Experiment and Theory. Technischer Bericht, NASA CR. 2306.
- Posson, H. und Moreau, S. (2013): Effect of Rotor Shielding on Fan-Outlet Guide Vanes Broadband Noise Prediction. In: AIAA Journal, Band 51:S. 1576–1592.
- Rabiner, L.; McClellan, J. und Parks, T. (1975): FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation. In: Proc. of the IEEE, Band 63(4):S. 595–610.
- Regan, B. und Eaton, J. (1999): Modelling the Influence of Acoustic Liner Non-Uniformities on Duct Modes. In: J. of Sound and Vibration, Band 219(5):S. 859–879.

- Rice, E. (1979): Modal Propagation Angles in Ducts With Soft Walls and Their Connection with Suppressor Performance. Technischer Bericht, NASA Tech. Memo., NASA-TM-79081.
- Rice, E.; Heidmann, M. und Sofrin, T. (1979): Modal Propagation Angles in a Cylindrical Duct with Flow and Their Relation to Sound Radiation. Technischer Bericht, NASA Tech. Memo., NASA-TM-79030.
- Rienstra, S. und Hirschberg, A. (2011): An Introduction to Acoustics. Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Netherlands.
- Sager, H. (2012): Fourier Transformation - Beispiele, Aufgaben, Anwendungen. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, Zürich, Schweiz.
- Salant, R. (1968): Symmetric Normal Modes in a Uniform Rotating Fluid. In: Journal of Acoustic Soc. Am., Band 43(6):S. 1302–1305.
- Sanchez, J.; Piot, E. und Casalis, G. (2012): Theoretical and Numerical Investigation of Optimal Impedance in Lined Ducts with Flow. In: Proc. Acoustics Conf. Nantes, France.
- Schafheitlin (1908): Die Theorie der Besselschen Funktionen. Teubner, Leipzig, Berlin.
- Schiffer, H. (1976): Ausbreitung des Schalls von Turbomaschinen in Rohrleitungen mit Diskontinuitäten. Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen.
- Schönwald, N. (2010): Effiziente Simulation der Schallausbreitung in anwendungsnahen Triebwerkskonfigurationen. Dissertation, Fakultät V - Verkehrs- und Maschinenwesen der Technischen Universität Berlin.
- Shanker, P. (1972): Acoustic Refraction and Attenuation in Cylindrical and Annular Ducts. In: J. of Sound and Vibration, Band 22(2):S. 233–246.
- Shannon, C. (1949): Communication in the Presence of Noise. In: Proc. IRE, Band 37:S. 10–21.
- Sherlock, B. (1999): Windowed Discrete Fourier Transform for Shifting Data. In: Signal Processing, Band 74:S. 169–177.
- Smith, M. (2004): Aircraft Noise. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Sydney.
- Smith, M. und House, M. (1967): Internally Generated Noise from Gas Turbine Engines. Measurement and Prediction. In: Journal of Engineering for Power, Band Apr.:S. 177–190.
- Sofrin, T. und McCann, J. (1966): Pratt and Whitney Experience in Compressor-Noise Reduction. In: J. Acoustical Society of America, Band 40:S. 1248–1249.

- Spurk, J. und Aksel, N. (2007): Strömungslehre - Einführung in die Theorie der Strömung. 7. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Stahl, B. und Argüello, G. (1986): Experimentelle Untersuchungen zur Schallerzeugung und Schalldämpfung in einer Rohrströmung hinter einer unstetigen Querschnittserweiterung. Technischer Bericht, Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt DFVLR, Köln.
- Stewart, W. (2001): Matrix Algorithms. SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Sutliff, D. (2014): A Mode Propagation Database Suitable for Code Validation Utilizing the NASA Glenn Advanced Noise Control Fan and Artificial Sources. In: AIAA Sci Tech. National Harbor, Maryland.
- Taddei, F.; Lucia, M.; Cinelli, C. und Schipani, C. (2009): Experimental Investigation of Low Pressure Turbine Noise: Radial Mode Analysis for Swirling Flows. In: The 12th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines. London, GB.
- Tam, C. und Auriault, L. (1998): The Wave Modes in Ducted Swirling Flows. In: Journal of Fluid Mech., Band 371:S. 1–20.
- Tapken, U.; Bauers, R.; Arnold, F. und Zillmann, J. (2008): Turbomachinery Exhaust Noise Radiation Experiments - Part 2: In-Duct and Far-Field Mode Analysis. In: 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2008-2858. Vancouver, Canada.
- Tapken, U.; Bauers, R.; Neuhaus, L.; Humphreys, N.; Wilson, A. und Stöhr Ch., M., Beutke (2011): A New Fan Rig Noise Test and Radial Mode Detection Capability. In: Proc. 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Portland, Oregon.
- Tapken, U. und Enghardt, L. (2006): Optimization of Sensor Arrays for Radial Mode Analysis in Flow Ducts. In: 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2006-2638. Cambridge, MA.
- Tapken, U.; Raitor, T. und Enghardt, L. (2009): Tonal Noise Radiation from an UHBR Fan - Optimized In-Duct Radial Mode Analysis. In: 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2009-3288. Miami, Florida.
- Tester, B.; Baker, N.; Kempton, A. und Wright, M. (2004): Validation of an Analytical Model for Scattering by Intake Liner Splices. In: 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2004-2906. Manchester, GB.
- Traupel, W. (1977): Thermische Turbomaschinen - Erster Band. Thermodynamisch-strömungsmechanische Berechnungen. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Tyler, J. und Sofrin, T. (1962): Axial Flow Compressor Noise Studies. In: Society of Automotive Engineers Transactions, Band 70:S. 309–332.

- Umweltbundesamt, H. (2004): Chronischer Lärm als Risikofaktor für den Myokardinfarkt. Technischer Bericht, Umweltbundesamt.
- van Loan, C. (1992): Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform. SIAM, Soc. for Industrial and Applied Math., Philadelphia, PA.
- Vilenski, G. und Rienstra, S. (2007a): Numerical Study of Acoustic Modes in Ducted Shear Flow. In: J. of Sound and Vibration, Band 307:S. 610–626.
- Vilenski, G. und Rienstra, S. (2007b): On Hydrodynamic and Acoustic Modes in a Ducted Shear Flow with Wall Lining. In: Journal of Fluid Mech., Band 583:S. 45–70.
- Weber, H. und Ulrich, H. (2012): Laplace-, Fourier- und z-Transformationen. Vieweg Teubner Verlag, Wiesbaden, Deutschland.
- Weckmüller, C. und Guerin, S. (2009): CFD-CAA Coupling Applied to DLR UHBR-Fan: Comparison to Experimental Data. In: 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Miami, Florida.
- Welch, P. (1967): The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short Modified Periodograms. In: IEEE Trans. Audio Electroacoustic, Band 15:S. 70–73.
- Whitham, G. (1961): Group Velocity and Energy Propagation for Three-Dimensional Waves. In: Com. on Pure and Appl. Mathematics, Band 14:S. 675–691.
- WHO, H. (2011): Burden of Disease from Environmental Noise - Quantification of Healthy Life Years Lost in Europe. World Health Organization Regional Office for Europe, Copenhagen, Denmark.
- Witthaus, S.; Bartelt, M. und Seume, J. (2013): Sensitivity Study of the Sound Radiation of Aircraft Engine Compressors According to Different Inlet Conditions. In: AIA - DAGA 2013 Conference on Acoustics. Merano, Italy.
- Witthaus, S. und Seume, J. (2014): Boundary Condition for the Implementation of Arbitrary Acoustical Modes. In: Inter Noise. Melbourne, Australia.
- Wolf, P.; Staffelbach, G.; Gicquel, L.; Mueller, J. und Poinso, T. (2012): Acoustic and Large Eddy Simulation Studies of Azimuthal Modes in Annular Combustion Chambers. In: Combustion and Flame, Band 159:S. 3398–3413.
- Wright, M. (2005a): Hybrid Analytical/Numerical Method for Mode Scattering in Azimuthally Non-Uniform Ducts. In: J. of Sound and Vibration, Band 292:S. 583–594.
- Wright, M. (2005b): Lecture Notes on the Mathematics of Acoustics. Imperial College Press, London, UK.
- Wright, M. und McAlpine, A. (2007): Calculation of Modes in Azimuthally Non-Uniform Lined Ducts with Uniform Flow. In: J. of Sound and Vibration, Band 302(1–2):S. 403 – 407.

- Yin, J. und Delfs, J. (2001): Simulation of Open Rotor and Ducted-Rotor Noise Using CAA-Multidomain Method. In: TO AVT Symposium on Ageing Mechanisms and Control. Manchester, UK.
- Yoshikawa, M.; Gong, Y.; Ashino, R. und Vaillancourt, R. (2005): Case Study on SVD Multiresolution Analysis. In: Sci. Proc. of Riga Tech. Univ., Computer Science, Band 21(5):S. 65–79.
- Yourkovich, R. (1976): Attenuation of Acoustic Modes in Circular and Annular Ducts in the Presence of Sheared Swirling Flow. In: 3rd AIAA Aeroacoustic Conference, 76-498. Palo Alto, California.
- Zehner, P. (1980): Vier-Quadranten-Charakteristiken mehrstufiger axialer Turbinen. Fortschrittsberichte der VDI, Duesseldorf, Deutschland.
- Zhang, X. und Chen, X. (2014): Broadband Wave Propagation from an Aeroengine Duct. In: AIAA Journal, Band 52.
- Zhang, Z. und Park, K. (2004): On the Group Front and Group Velocity in a Dispersive Medium Upon Refraction From a Nondispersive Medium. In: J. Heat Transfer, Band 126.
- Zimmer, B.; Lipshitz, S.; Morris, K.; Vanderkooy, J. und Obasi, E. (2003): An Improved Acoustic Model for Active Noise Control in a Duct. In: J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Band 125:S. 382–395.

Wissenschaftlicher Werdegang

Persönliche Daten

Name	Michael Bartelt
Geburtsdatum	16. November 1979
Geburtsort	Cuxhaven
Familienstand	ledig

Schul Ausbildung

1986 - 1990	Paul-Gerhardt-Schule Meppen, Grundschule
1990 - 1992	Schulzentrum am Flötenteich Oldenburg, Orientierungsstufe
1992 - 1997	Neues Gymnasium Oldenburg
1997 - 2000	Herbart Gymnasium Oldenburg Abschluss: Allgemeine Hochschulreife

Wehrdienst

2000 - 2001	5. Fallschirmjäger Bataillon 313, Varel
-------------	---

Studium

2001 - 2002	Technische Universität Hamburg-Harburg, Verfahrenstechnik
2002 - 2006	Hochschule Bremen Abschluss: Diplom (FH), Luft- und Raumfahrttechnik
2006 - 2008	Leibniz Universität Hannover Abschluss: Master of Science, Maschinenbau
2008	Kungliga Tekniska Högskolan (KTH) Stockholm, Schweden Auslandssemester

Berufstätigkeit

2008 - 2014	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik der Leibniz Universität Hannover
seit 2014	Systemingenieur bei der MTU Maintenance Hannover GmbH

Hannover, im April 2015