Hochschule
für Bankwirtschaft / HfB

Nr. 18

Einführung in die Optionspreisbestimmung

Heinz Cremers

August 1999
ISSN 1436-9753

Autor: Prof. Dr. Heinz Cremers
Quantitative Methoden
und Spezielle Bankbetriebslehre
Hochschule für Bankwirtschaft,
Frankfurt am Main
eMail: cremers@hfb.de

Herausgeber: Hochschule für Bankwirtschaft
Private Fachhochschule der BANKAKADEMIE
Sternstraße 8 • 60318 Frankfurt/M.
Tel.: 069/95946-16 • Fax: 069/95946-28

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Ein-Periodenmodell 9

3 Konzept der risikoneutralen Bewertung 11

4 Optionspreisbestimmung mit Black / Scholes: Theorie 13

5 Optionspreisbestimmung mit Black / Scholes: Praxis 17

6 Optionssensitivitäten 23

7 Optionspreisbestimmung mit Cox / Ross / Rubinstein 27

8 Bewertung amerikanischer Optionen 35

9 Monte Carlo Simulation 39

10 Berechnung der Volatilität 41

11 Anhang 42

Literatur 49

Weitere Literatur 49

1 Einleitung

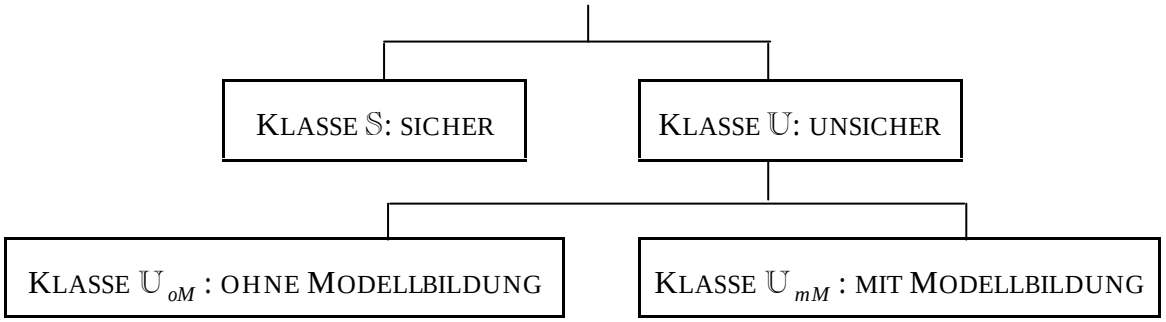
Marktbewertung. Im Unterschied zur *Renditebewertung* eines Finanzproduktes, die sich alleine an der Zahlungsreihe orientiert, werden bei der *Marktbewertung* (auch: *Mark to Market-Bewertung*) Informationen des Marktes einbezogen. Aus dem Arbitragebegriff hergeleitet, ist dieses Bewertungskonzept das Fundament der Preisfindung, der Ertragsrechnung und der Risikoanalyse von Finanzprodukten.

Die Marktbewertung kennt die Verfahren der *Duplikation* und *Diskontierung*, die beide auf den Barwert/Fairer Preis eines Finanzproduktes führen. Tritt an die Stelle der bloßen Wertfeststellung eines Produktes die Preisfeststellung für den Handel, bezeichnen wir den Barwert auch als Fairen Preis.

Duplikation. Das Duplikationsverfahren konstruiert ein Portfolio aus Handelsprodukten, das die Zahlungen des zu bewertenden Produktes exakt nachbildet. Der Barwert/Faire Preis ergibt sich dann als Preis des Duplikationsportfolios. Notwendige Voraussetzung dieses Verfahrens ist – neben einer hinreichenden Markttiefe – die Arbitragefreiheit der gehandelten Produkte. In ihrer einfachsten Form ist die Arbitragefreiheit durch das Gesetz des einheitlichen Preises (Law of One Price) charakterisiert, wonach zwei Portfolios mit gleichen Zahlungen auch den gleichen Preis haben müssen.

Diskontierung. Das Diskontierungsverfahren bestimmt zunächst aus den Marktdaten gehandelter Titel Diskontierungsfaktoren zu jedem Zahlungszeitpunkt des zu bewertenden Produktes. Hierzu wird das System der Konsistenzgleichungen angesetzt, das für jedes Handelsprodukte fordert: Die Summe der diskontierten Zahlungen ist gleich dem heutigen Preis (vgl. Anwendung 2.4.2). Ist eine derart konsistente Diskontierungsstruktur bestimmt, ergibt sich in einem arbitragefreien Markt der Barwert als Summe der diskontierten Zahlungen des zu bewertenden Produktes.

Sicherheit. Welche Form diese Bewertungskonzepte annehmen hängt wesentlich davon ab, ob die zukünftigen Zahlungen eines Finanzproduktes im Bewertungszeitpunkt festliegen – also in diesem Sinne sicher sind – oder nicht. Im Fall der Unsicherheit zeigt sich, daß es Finanzprodukte gibt (z.B. Optionen), die ohne stochastische Modellbildung nicht zu bewerten sind. Der Barwert/Faire Preis dieser Produkte wird nun nicht mehr alleine durch den Markt entschieden, sondern ebenfalls durch die Wahl des Bewertungsmodells (*Markt- und Modellbewertung*). Die Bewertungsproblematik impliziert daher die folgende Klasseneinteilung:



Preis und Wert. Vom *Preis* eines Gutes G im Zeitpunkt t, der mit $S(t,G)$ bezeichnet wird, ist der *Wert* $V(t,G)$ zu unterscheiden. Während Preise mit der Absicht des Kaufs bzw. Verkaufs gestellt werden, behält das Gut auch dann seinen Wert, wenn es nicht zum Verkauf steht. Da für Handelsprodukte ständig Preise quotiert werden, ist für dieses Produkt mit $V(t,G)=S(t,G)$ stets eine Form der Bewertung gegeben. Das *Problem der Bewertung* stellt sich aber nicht nur für Nicht-Handelsprodukte. Auch der Marktpreis eines Handelsproduktes kann hinterfragt werden. So vergleicht z.B. ein Anlageberater den Börsenpreis $S(t,\mathrm{A})$ einer Aktie A mit ihrem inneren Wert $V(t,\mathrm{A})$.

Wir nennen den Wert $V(t_0,G)$ zum heutigen Zeitpunkt t_0 *Barwert* (*Present Value*) und bezeichnen ihn mit $PV(G)$. Zielen die Bewertungsverfahren für G auf die Preisfindung für den Handel, so nennen wir den Barwert *Fairer Preis* (Fair Value) und schreiben $S_{FV}(t_0,G)$.

Vertragserfüllung. Folgt dem Vertragsabschluß unmittelbar (meist unter Berücksichtigung einer Wertstellungsfrist) die Erfüllung der gegenseitig vereinbarten Leistungen, sprechen wir von einem *Kassaprodukt* (auch: *Spot Contract*). Der vereinbarte Preis ist der *Kassapreis* (auch: *Spot Price*). Bei einem *Terminprodukt* (auch: *Forward Contract*) fallen Abschluß und Erfüllung zeitlich auseinander. Die Spanne zwischen diesen beiden Zeitpunkten ist die *Laufzeit* des Terminkontraktes.

Ein Terminprodukt $\mathrm{TP}=\mathrm{TP}(t_\ell,G,K)$ ist somit die Vereinbarung zweier Vertragsparteien über den Kauf/Verkauf eines bestimmten Gutes G (*Basiswert* oder *Underlying*), zu einem bestimmten Zeitpunkt t_ℓ (*Lieferzeitpunkt*) und zu einem bestimmten festen Preis K (*Lieferpreis*). Der Käufer hält eine *Long Position*, der Verkäufer hält eine *Short Position*. Je nach Basiswert können

- Warentermingeschäfte (z.B. Gold oder Kaffee) und
- Finanztermingeschäfte (z.B. Wertpapier oder Währung)

unterschieden werden. Derjenige Preis $S_T=S_T(t_0,t_\ell,G)$ zahlbar in t_ℓ für G, für den der Wert des Terminproduktes in t_0 null ist, heißt *Terminpreis* (auch: *Forward Price*). Während der Lieferpreis K über die Laufzeit des Kontraktes konstant bleibt,

ändert sich der Terminpreis mit der Zeit t_0.

Ist an die Lieferung in t_ℓ keine Bedingung geknüpft, sprechen wir auch genauer von *unbedingten Termingeschäften*. Optionen sind dagegen *bedingte Termingeschäfte* (vgl. Anwendung 1.4.1). Eine *Kaufoption* (*Call*) bzw. *Verkaufsoption* (*Put*) auf ein bestimmtes Gut *G* (*Basiswert* oder *Underlying*) gibt dem Käufer der Option das Recht, das Produkt *G* zu einem bestimmten Termin t_ℓ (*Verfalltag* oder *Expiration Date*) und zu einem vorher festgelegten Preis *K* (*Basispreis* oder *Strike*) vom Verkäufer der Option (auch: *Stillhalter*) zu kaufen bzw. an ihn zu verkaufen. Der Käufer der Option zahlt für dieses Recht dem Verkäufer eine *Prämie* (auch: Preis der Option). Kann die Option nur am Verfalltag ausgeübt werden, sprechen wir von einer *europäischen Option*; Kann die Option zu jedem Zeitpunkt während der Laufzeit ausgeübt werden, liegt eine *amerikanische Option* vor.

Jeder Optionstypus (Call und Put) hat zwei Seiten: Die Option kann gekauft (Long Position) oder verkauft (Short Position) werden. Wir unterscheiden damit die Positionen:

Kauf eines Call (Long Call). Gegen Zahlung der Prämie hat der Käufer das Recht den Basiswert zum vereinbarten Strike zu erwerben.

Verkauf eines Call (Short Call). Der Verkäufer muß den Basiswert zum Strike auf Abruf liefern und erhält für diese Verpflichtung die Optionsprämie.

Kauf eines Put (Long Put). Gegen Zahlung der Prämie hat der Käufer das Recht den Basiswert zum Strike an den Stillhalter zu verkaufen.

Verkauf eines Put (Short Put). Der Verkäufer eines Put muß den Basiswert zum Strike auf Abruf abnehmen und erhält für diese Verpflichtung die Optionsprämie.

Auszahlung. Bei der Erfüllung eines Terminproduktes $TP = TP(t_\ell, G, K)$ zahlt der Käufer im Zeitpunkt t_ℓ den vereinbarten Preis *K* gegen Lieferung des Basiswertes *G*. Aus Sicht dieser *physischen Lieferung* ist ein Terminkontrakt ein sicheres Produkt. Wird statt *G* der Kassapreis $S_\ell = S(t_\ell, G)$ gezahlt (auch: *Cash Settlement*), erhalten wir die *Auszahlung* (*Payoff*) des Terminproduktes:

$$CF(t_\ell, \mathrm{TP}) = S_\ell - K \quad \text{für eine Long Position TP}$$
$$CF(t_\ell, -\mathrm{TP}) = K - S_\ell \quad \text{für eine Short Position - TP}$$

Bei unbekanntem Kassapreis in t_ℓ ist aus dieser Sicht der Terminkontrakt ein unsicheres Produkt. Die Bilder 1 und 2 zeigen die Auszahlungsprofile einer Long und Short Position. Da ein Terminkontrakt im Zeitpunkt des Vertragsabschlusses keine Kosten verursacht, ist die Auszahlung gleichzeitig der Ertrag aus dem Kon-

trakt.

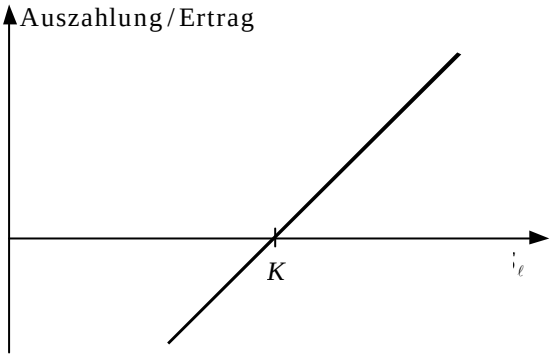


Bild 1 Long Position

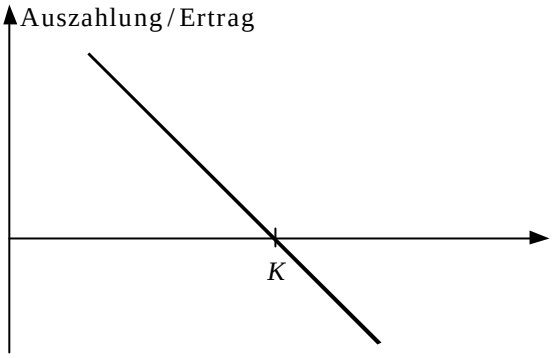


Bild 2 Short Position

Da ein Call bzw. Put nur dann ausgeübt wird, wenn der Kassapreis $S_\ell = S(t_\ell, G)$ des Basiswertes G im Verfall t_ℓ über bzw. unter dem Strike K liegt, ergeben sich für Optionen die folgenden Auszahlungen:

$CF(t_\ell, \mathrm{C}) = \max(S_\ell - K,\ 0)$ für einen Long Call C

$CF(t_\ell, -\mathrm{C}) = -\max(S_\ell - K,\ 0)$ für eine Short Call - C

$CF(t_\ell, \mathrm{P}) = \max(K - S_\ell,\ 0)$ für einen Long Put P

$CF(t_\ell, -\mathrm{P}) = -\max(K - S_\ell,\ 0)$ für eine Short Put - P

Die Auszahlungsprofile finden sich in den Bildern 3 bis 6. Während das Risiko einer Long Position auf den Kaufpreis (Prämie) beschränkt bleibt, hat die Chance keine Grenze nach oben. Bei einer Short Position besteht die Chance darin, daß die Option nicht zur Ausübung kommt – also die Prämie vereinnahmt werden kann. Das Risiko dagegen ist unbegrenzt.

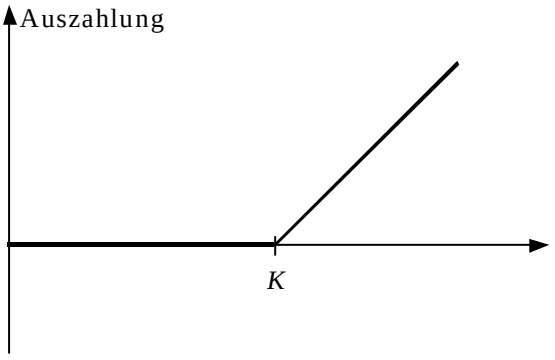


Bild 3 Long Call

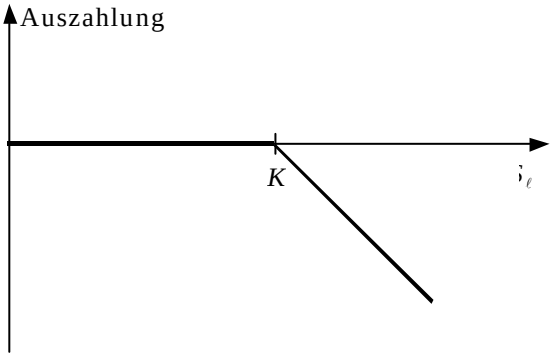


Bild 4 Short Call

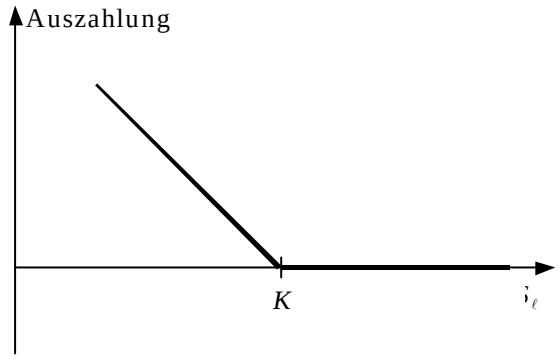


Bild 5 Long Put

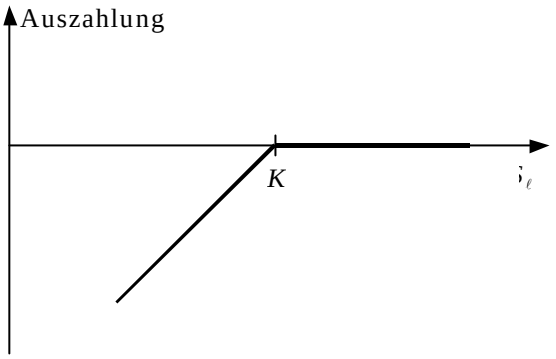


Bild 6 Short Put

Aus der Auszahlungsfunktion erhält man die Ertragsfunktion durch Subtraktion (Long Position) bzw. Addition (Short Position) der Optionsprämie (vgl. Bild 7)

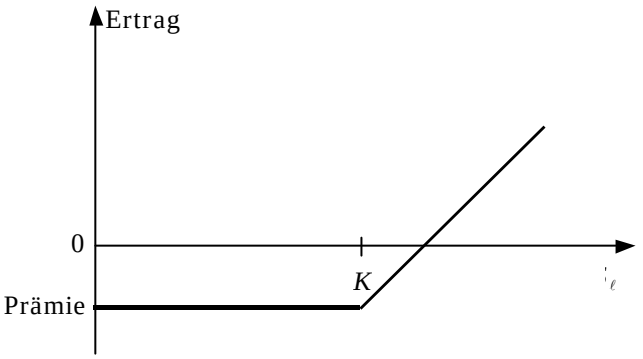


Bild 7 Long Call

Terminprodukte. Terminprodukte mit physischer Lieferung gehören zur Klasse $\mathbb{S}$, d.h. sie sind sicher. Wir unterscheiden die Problemstellungen der Bewertung (eines bestehenden Terminkontraktes) und der Preisfindung (eines neuen Terminkontraktes).

Bewertung. Vorgelegt sei ein Terminprodukt $\mathrm{TP} = \mathrm{TP}(t_\ell, G, K)$ mit Lieferzeitpunkt t_ℓ, Basiswert G und Lieferpreis K, das während der Laufzeit in t_0 zu bewerten ist. Gegeben sei weiterhin der aktuelle Terminpreis $S_T = S_T(t_0, t_\ell, G)$ und die Diskontierungsstruktur $df_1, \ldots, df_N$ eines Marktes. Dann bestimmt sich der Barwert $PV(\mathrm{TP})$ durch Duplikation wie folgt:

	t_0	t_ℓ
Terminprodukt TP	$-PV(\mathrm{TP})$	$G-K$
Kauf Terminprodukt		$G-S_T$
Geldanlage	$-S_T \cdot df_\ell$	S_T

Geldaufnahme	$K \cdot df_\ell$	$-K$
Portfolio	$-(S_T - K) \cdot df_\ell$	$G - K$

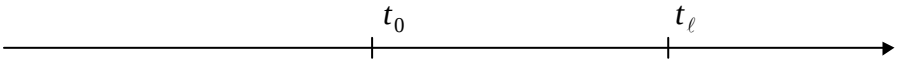
Mit dem Gesetz des einheitlichen Preises gilt somit

$$PV(\text{TP}) = (S_T - K) \cdot df_\ell$$

Bestimmung des Terminpreises. Zu einem Terminkontrakt TP mit Lieferzeitpunkt t_ℓ und Basiswert G ist im Zeitpunkt $t_0 < t_\ell$ ein Terminpreis $S_T = S_T(t_0, t_\ell, G)$ so zu bestimmen, daß der Wert des Kontraktes heute (in t_0) null ist, d.h.

$$V(t_0, \text{TP}(t_\ell, G, S_T)) = 0$$

Ist der Kassapreis $S_0 = S(t_0, G)$ von G bekannt und liegt die Diskontierungsstruktur $df_1, \ldots, df_N$ eines Marktes vor, so bestimmen wir den Terminpreis mit dem Duplikationsverfahren (*Cash & Carry Duplikation*).



Terminprodukt TP	0	$G - S_T$
Kauf G	$G - S_0$	
G halten	$-G$	G + Erträge - Kosten
Finanzierung	S_0	$-S_0 \cdot zf_\ell$
Portfolio	0	$G - (S_0 \cdot zf_\ell - \text{Erträge + Kosten})$

Dabei ist $zf_\ell = 1/df_\ell$ der Aufzinsungsfaktor des Marktes. Das Halten von G während der Laufzeit des Terminkontraktes kann sowohl Kosten verursachen (z.B. Lagerhaltungskosten eines Warentermingeschäftes) als auch Erträge erwirtschaften (z.B. der Stückzinsertrag eines Couponbonds). Mit dem Gesetz des einheitlichen Preises gilt dann für den Terminpreis

$$S_T = S_0 \cdot zf_\ell - \text{Erträge} + \text{Kosten}$$

Man bezeichnet die Differenz zwischen Terminpreis und Kassapreis als *Haltekosten* (auch: *Cost of Carry* oder *Bruttorefinanzierungskosten*), also

$$\text{Haltekosten} = S_T - S_0 = S_0(zf_\ell - 1) - \text{Erträge + Kosten}$$

Der reine Finanzierungsanteil $S_0(zf_\ell - 1)$ stellt dagegen die *Nettorefinanzierungskosten* dar. Mit annualisierter, kontinuierlicher Haltekostenrate b schreibt sich der

Terminpreis auch in der Form

$$S_T = S_0 \, \mathrm{e}^{b \cdot Tg(t_0, t_\ell)}$$

Entstehen aus dem Basiswert G während der Laufzeit (t_0, t_ℓ) weder Kosten noch Erträge, so ist der Terminpreis gleich dem aufgezinsten Kassapreis

$$S_T = S_0 \cdot zf_\ell$$

Für den Barwert des Terminproduktes TP gilt dann

$$PV(\mathrm{TP}) = (S_0 \cdot zf_\ell - K) \cdot df_\ell = S_0 - K \cdot df_\ell$$

Bewertung unsicherer Finanzprodukte. Sind Zeitpunkte oder Beträge zukünftiger Zahlungen unbekannt, sprechen wir von einem unsicheren Produkt. Beispiele unsicherer Finanzprodukte sind:

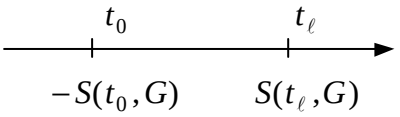
- Terminprodukt $\mathrm{TP} = \mathrm{TP}(t_\ell, G, K)$ auf den Basiswert G mit Lieferpreis K und Barausgleich im Lieferzeitpunkt t_ℓ, d.h. mit der Auszahlung

  $$CF(t_\ell, \mathrm{TP}) = S(t_\ell, G) - K$$

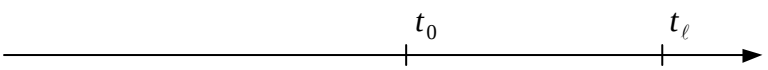
- Calloption $\mathrm{C} = \mathrm{C}(t_\ell, G, K)$ auf den Basiswert G mit Strike K und Verfall in t_ℓ, d.h. mit der Auszahlung

  $$CF(t_\ell, \mathrm{C}) = \max(S(t_\ell, G) - K, \; 0)$$

Die Unsicherheit dieser Produkte hat ihre Ursache in dem – aus Sicht von t_0 - unbekannten Preis $S(t_\ell, G)$. Leistet G keine Zahlungen im Zeitraum (t_0, t_ℓ), so erzielt der Kauf von G in t_0 die Auszahlung $S(t_\ell, G)$ im Zeitpunkt t_ℓ



Damit kann die Auszahlung des Terminproduktes dupliziert werden



Kauf G	$-S(t_0, G)$	$S(t_\ell, G)$
Geldaufnahme	$K \cdot df_\ell$	$-K$
Gesamt	$-(S(t_0, G) - K \cdot df_\ell)$	$S(t_\ell, G) - K$

und wir erhalten den Barwert

$$PV(\mathrm{TP}) = S(t_0, G) - K \cdot df_\ell$$

der mit dem Barwert des entsprechenden Terminproduktes mit physischer Lieferung übereinstimmt. Die Duplikation gelingt dabei ohne eine stochastische Modellbildung der unsicheren Zahlung $S(t_\ell, G)$. Die Begründung liegt in der *linearen Beziehung* zwischen Auszahlung $f(S_\ell) = CF(t_\ell, \mathrm{TP})$ und Preis $S_\ell = S(t_\ell, G)$:

$$f(S_\ell) = S_\ell - K$$

Die Auszahlung $g(S_\ell) = CF(t_\ell, \mathrm{C})$ des Calls dagegen ist eine *konvexe Funktion* des Preises S_ℓ:

$$g(S_\ell) = \max(S_\ell - K,\ 0)$$

Es ist genau diese Konvexität, die eine einfache Duplikation, d.h. eine Duplikation ohne ein stochastisches Modell des Preises $S(t_\ell, G)$ unmöglich macht. Wir unterscheiden also in der Klasse $\mathbb{U}$ aller unsicheren Produkte die Klasse $\mathbb{U}_{oM}$ derjenigen Produkte, die ohne stochastische Modellbildung zu bewerten sind und die Klasse $\mathbb{U}_{mM}$ derjenigen Produkte, deren Bewertung ein stochastisches Modell erfordert.

Bewertung von Optionen. Optionen gehören zur Klasse $\mathbb{U}_{mM}$ der unsicheren Produkte, die nur mit stochastischer Modellbildung zu bewerten sind. Der Faire Preis der Option hängt neben den Marktdaten auch von der Wahl des Modells ab (*Markt- und Modellbewertung*). Bevor wir spezielle Optionspreismodelle behandeln, sollen Problemstellung und Lösung am einfachen Beispiel eines Ein-Periodenmodells aufgezeigt werden. Insbesondere wird deutlich, wie die Bewertungskonzepte der Duplikation und Diskontierung in der vorliegenden Produktklasse zu modifizieren sind.

2 Ein-Periodenmodell

Markt. Ein Finanzmarkt $\mathbb{M}$ handelt im Zeitpunkt t_0 einen Bond B und eine Aktie A. Wir betrachten den Zeitraum (t_0, t_ℓ) eines Monats und nehmen an, daß A und B in diesem Zeitraum keine Zahlungen leisten. Die Preise der Wertpapiere A und B im Zeitpunkt t_0 sind mit $S(t_0, \mathrm{A}) = S(t_0, \mathrm{B}) = 100$ GE festgelegt. Während der Bondpreis in t_ℓ mit $S_\ell^B = S(t_\ell, \mathrm{B}) = 101$ GE bereits im Zeitpunkt t_0 bekannt ist, ist der Aktienpreis $S_\ell^A = S(t_\ell, \mathrm{A})$ aus Sicht t_0 eine zufällige Größe. Zu bewerten ist ein

Call C auf die Aktie mit Basispreis $K = 105$ GE und Verfall in t_ℓ. Die Zahlung des Calls in t_ℓ ist $CF(t_\ell, \mathrm{C}) = \max(S_\ell^A - K,\ 0) = \max(S_\ell^A - 105,\ 0)$ und somit unsicher. Gesucht ist der Faire Preis $S_{FV}(t_0, \mathrm{C})$ des Calls im Zeitpunkt t_0 (Optionsprämie). Das folgende Cashflow Diagramm faßt die Daten der Problemstellung nochmals zusammen:

	t_0	t_ℓ
Aktie A	- 100	S_ℓ^A
Bond B	- 100	101
Call C	$-S_{FV}(t_0, \mathrm{C})$	$\max(S_\ell^A - 105,\ 0)$

Duplikation. Wir stellen zunächst fest, daß keine Portfoliokombination aus Aktie und Bond möglich ist, welche die Callzahlung im Zeitpunkt t_ℓ nachbildet. Ohne eine Modellannahme des zukünftigen Aktienkurses S_ℓ^A ist der Call nicht duplizierbar.

Ein einfaches Modell der Aktienbewegung ist in Bild 8 dargestellt. Danach beschreiben nur zwei Zustände den Kurs der Aktie in t_ℓ: Im Zustand u (up) steigt die Aktie auf $S_\ell^A(u) = 110$ GE und im Zustand d (down) fällt die Aktie auf $S_\ell^A(d) = 90$ GE. $\Omega = \{u, d\}$ ist somit die Zustandsmenge des Modells. Da der Bond eine deterministische Preisentwicklung hat, gilt unabhängig vom Zustand $S_\ell^B(u) = S_\ell^B(d) = 101$ GE.

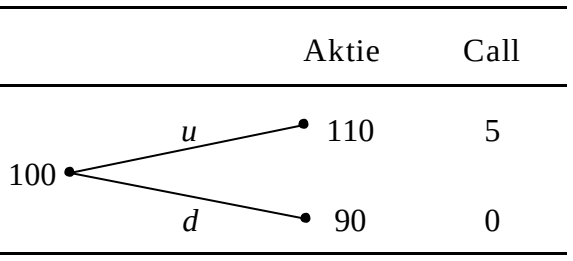


Bild 8

Für die Auszahlung $CF(t_\ell, \mathrm{C})$ des Calls ergibt sich in Abhängigkeit der Zustände u und d

$$CF(t_\ell, \mathrm{C}, u) = \max(S_\ell^A(u) - 105,\ 0) = 5 \text{ GE}$$

$$CF(t_\ell, \mathrm{C}, d) = \max(S_\ell^A(d) - 105,\ 0) = 0 \text{ GE}$$

Eine Handelsstrategie $PF = q_A \mathrm{A} + q_B \mathrm{B}$ bestehend aus Aktie und Bond ist ein *Duplikationsportfolio* zu C, wenn im Zeitpunkt t_ℓ für jeden Zustand $w \in \Omega$ gilt: $S(t_\ell, PF, w) = CF(t_\ell, \mathrm{C}, w)$, d.h.

$$q_A S_\ell^A(u) + q_B S_\ell^B(u) = CF(t_\ell, \mathrm{C}, u)$$
$$q_A S_\ell^A(d) + q_B S_\ell^B(d) = CF(t_\ell, \mathrm{C}, d)$$

Einsetzen der Modellvorgaben ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 110q_A + 101q_B &= 5 \\ 90q_A + 101q_B &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $q_A = 0{,}25$ und $q_B = -0{,}2228$. Damit zahlt das Portfolio $PF = 0{,}25\mathrm{A} - 0{,}2228\mathrm{B}$ und der Call C im Zeitpunkt t_ℓ in jedem Zustand den gleichen Betrag. Wir setzen für Markt und Modell Arbitragefreiheit im Sinne des Law of One Price voraus: Zwei Portfolios, die im Zeitpunkt t_ℓ für alle Zustände den gleichen Preis haben, stimmen in ihrem Preis auch im Zeitpunkt t_0 überein. Der Preis des Duplikationsportfolios *PF* im Zeitpunkt t_0 ist dann der Faire Preis (Barwert) des Calls, also

$$\begin{aligned} S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) &= S(t_0, PF) = q_A S(t_0, \mathrm{A}) + q_B S(t_0, \mathrm{B}) \\ &= 0{,}25 \cdot 100 - 0{,}2228 \cdot 100 = 2{,}72 \text{ GE} \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Modell $S_\ell^A(u) = 125$ GE und $S_\ell^A(d) = 85$ GE führt auf den erhöhten Optionspreis $S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = 7{,}92$ GE. Der Optionspreis ist somit von dem gewählten Modell abhängig.

Diskontierung. Im Markt $\mathbb{M}$ ist mit dem Bond ein risikofreier Diskontierungsfaktor gegeben. Dieser ist zustandsunabhängig und berechnet sich zu

$$df_\ell = \frac{S(t_0, \mathrm{B})}{S(t_\ell, \mathrm{B})} = \frac{100}{101} = 0{,}9901$$

Für den zustandsabhängigen Preis $S_\ell^A = S(t_\ell, \mathrm{A})$ der Aktie A wählen wir wieder das Modell mit Zustandsmenge $\Omega = \{u, d\}$, $S_\ell^A(u) = 110$ GE und $S_\ell^A(d) = 90$ GE, ergänzen aber die stochastische Modellbildung durch die Angabe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes *Q*. Dabei bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten $Q(\{u\}) = q$ und $Q(\{d\}) = 1 - q$ derart, daß der Erwartungswert des diskontierten Aktienpreises in t_ℓ gleich ist dem Preis der Aktie in t_0, also

$$\begin{aligned} E_Q(S_\ell^A) \cdot df_\ell = S_0^A \;&\Leftrightarrow\; S_\ell^A(u) \cdot q \cdot df_\ell + S_\ell^A(d) \cdot (1-q) \cdot df_\ell = S_0^A \\ &\Leftrightarrow\; 110 \cdot q \cdot df_\ell + 90 \cdot (1-q) \cdot df_\ell = 100 \end{aligned}$$

mit der Lösung $q = 0{,}55$ und $1 - q = 0{,}45$. Wir schreiben das W-Maß *Q* auch in der Form

$$Q = \begin{bmatrix} u & d \\ 0{,}55 & 0{,}45 \end{bmatrix}$$

Der Callpreis berechnet sich nun als diskontierter Erwartungswert der Auszahlung des Calls im Zeitpunkt t_ℓ, denn wegen der Duplizierbarkeit des Calls durch Aktie und Bond gibt es ein Portfolio $PF = q_A A + q_B B$, das im Zeitpunkt t_ℓ in allen Zuständen den gleichen Preis hat wie der Call. Folglich stimmen auch die Preise in t_0 überein und es gilt

$$\begin{aligned} S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) &= S(t_0, PF) = q_A S_0^A + q_B S_0^B = (q_A E_Q(S_\ell^A) + q_B E_Q(S_\ell^B)) \cdot df_\ell \\ &= E_Q(q_A S_\ell^A + q_B S_\ell^B) \cdot df_\ell = E_Q(S(t_\ell, PF)) \cdot df_\ell = E_Q(CF(t_\ell, \mathrm{C})) \cdot df_\ell \end{aligned} \tag{1}$$

Mit $CF(t_\ell, \mathrm{C}, u) = 5$ und $CF(t_\ell, \mathrm{C}, d) = 0$ berechnen wir dann weiter

$$E_Q(CF(t_\ell, \mathrm{C})) \cdot df_\ell = (5q + 0 \cdot (1-q)) \cdot df_\ell = 5 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}9901 = 2{,}72 \text{ GE}$$

also $S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = 2{,}72$ GE, d.h. Duplikation und Diskontierung führen auf den gleichen Callpreis.

3 Konzept der risikoneutralen Bewertung

Das Konzept. Wir fassen die Resultate der Diskontierung zusammen und geben für die folgenden Modelle einen Ausblick.

1. Neben dem *riskanten* Basiswert der Option, dessen zukünftiger Preis aus Sicht t_0 unbekannt (stochastisch) ist, wird ein *risikofreier* Titel mit bekannter (deterministischer) zukünftiger Preisentwicklung gehandelt. Dies kann ein risikofreier Bond B oder ein risikofreier Zins *r* sein. Mit einer kontinuierlichen Verzinsung, die in der Optionspreistheorie meist gewählt wird, gilt für die Diskontierungsfaktoren entsprechend

$$df_\ell = \frac{S(t_0, \mathrm{B})}{S(t_\ell, \mathrm{B})} \quad \text{oder} \quad df_\ell = \mathrm{e}^{-r \cdot Tg(t_0, t_\ell)}$$

2. Der zukünftige Preis $S_\ell = S(t_\ell, F)$ des Basiswertes F wird in einem stochastischen Modell (Ω, Q) abgebildet. Dabei liegt der Bestimmung des W-Maßes Q keine subjektive Einschätzung des Eintretens der Modellzustände zugrunde. Q bestimmt sich im Ein-Periodenmodell des Abschnitts A alleine aus der *risikoneutralen* Bedingung, daß der diskontierte Erwartungswert des Preises S_ℓ gleich ist dem

Preis $S_0 = S(t_0, F)$ des Basiswertes in t_0, d.h. $E_Q(S_\ell) \cdot df_\ell = S_0$ oder

$$E_Q(S_\ell) = S_0 zf_\ell = S_0 \, \mathrm{e}^{r \cdot Tg(t_0, t_\ell)}$$

mit kontinuierlichem Zins *r*. Ergeben sich aus dem Basiswert *F* während der Optionslaufzeit Erträge oder Kosten, ersetzen wir die reinen Finanzierungskosten *r* (Nettofinanzierungskosten) durch die gesamten Haltekosten *b* (Cost of Carry oder Bruttofinanzierungskosten) und bestimmen das Wahrscheinlichkeitsmaß *Q* durch

$$(2) \qquad E_Q(S_\ell) = S_0 \, \mathrm{e}^{b \cdot Tg(t_0, t_\ell)}$$

d.h. der erwartete Preis von *F* im Zeitpunkt t_ℓ ist gleich dem Terminpreis aus heutiger Sicht. Im Sinne der Spieltheorie liegt somit ein *faires Spiel* vor, d.h. der Einsatz ist gleich dem Erwartungswert der Auszahlung. Da man Spieler eines fairen Spiels als risikoneutral bezeichnet, verlangt Gleichung (2) eine risikoneutrale Bestimmung der Wahrscheinlichkeit. *Q* heißt *risikoneutrales Maß* und die Bewertung eines Derivats mit diesem Maß wird *risikoneutrale Bewertung* genannt. Stochastische Modelle für den Preis S_ℓ sind:

Ein–Periodenmodell:	Zweipunktverteilung
Black / Scholes–Modell:	Logarithmische Normalverteilung
Cox / Ross / Rubinstein-Modell:	Binomialverteilung
Monte Carlo Simulation:	Logarithmische Normalverteilung

Die freien Parameter der Verteilungen sind dabei jeweils geeignet zu bestimmen und (2) ist stets eine der Bestimmungsgleichungen.

3. Wesentlich für die Optionspreisbestimmung ist nun der für das Ein-Periodenmodell und die Modelle von Black / Scholes und Cox / Ross / Rubinstein gültige Schluß, daß sich mit dem risikoneutralen Maß *Q* auch der Faire Preis der Option als diskontierter Erwartungswert der Auszahlung in t_ℓ berechnet:

$$(3) \qquad S_{FV}(t_0, \text{Option}) = E_Q(CF(t_\ell, \text{Option})) \cdot df_\ell$$

Während der Nachweis dieser Beziehung im einfachen Ein–Periodenmodell unproblematisch ist (vgl. die Herleitung (1) oben), verlangt die Begründung in den Modellen von Black / Scholes und Cox / Ross / Rubinstein tiefer liegende mathematische Verfahren. Hier muß unsere statische Betrachtung, die nur den Preis S_ℓ im Zeitpunkt t_ℓ modelliert, durch ein dynamisches Preismodell $t \to S_t$ ersetzt werden. Dies ist entweder ein Zeit-diskreter Prozeß $t_n \to S_{t_n}$ mit $n = 0,1,\ldots,N$ und $t_N = t_\ell$ oder ein kontinuierlicher Prozeß $t \to S_t$ mit $t \in [t_0, t_\ell]$. Notwendige Voraussetzung für den Nachweis von (3) ist in beiden Fällen die Duplizierbarkeit der Option im jeweiligen Modell. Die Duplikation gelingt jedoch nicht, ohne das Port-

folio ständig den neuen Preisen anzupassen, d.h. die Duplikationsstrategie basiert wesentlich auf der stochastischen Preisentwicklung. In den folgenden Modellen werden wir (3) ohne Beweis verwenden.

Die Monte Carlo Simulation verlangt den Nachweis (3) nicht. Aus den Simulationen $S_1,\ldots,S_n$ des Preises S_ℓ bestimmt sie zunächst die simulierten Auszahlungen $CF_1(t_\ell,\text{Option}),\ldots,CF_n(t_\ell,\text{Option})$ der Option und damit – ohne Erwartungswertbildung – den Fairen Preis:

$$(4)\qquad S_{FV}(t_0,\text{Option}) \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} CF_k(t_\ell,\text{Option})\cdot df_\ell$$

Modellvoraussetzungen. Wir unterstellen einen reibungslosen Markt ohne Steuern und Transaktionskosten. Alle Produkte sind beliebig teilbar und Leerverkäufe sind bei gleichen Angebots- und Nachfragepreisen zugelassen. Der Zins ist während der Optionslaufzeit konstant (risikofreier Zins) und gleich für alle Laufzeiten.

Tageberechnung. In den folgenden Abschnitten beziehen sich die annualisierten Modellgrößen (Zeit und Volatilität) auf einen einheitlichen Tageoperator – etwa: $Tg = \text{actual}/365$ oder $Tg = \text{actual}/365{,}25$. In den Zahlenbeispielen wählen wir zur Vereinfachung stets $Tg = 30\text{E}/360$. Zudem vereinbaren wir die abkürzende Notation $T = Tg(t_0,t_\ell)$.

4 Optionspreisbestimmung mit Black / Scholes: Theorie

Exkurs: Logarithmische Normalverteilung. Die Zufallsvariable X besitzt eine *logarithmische Normalverteilung* (auch *Lognormalverteilung*) mit den Parametern $m \in \mathbb{R}$ und $s^2 > 0$, wenn $\ln X$ normalverteilt ist mit den Parametern m und s^2, d.h. $\ln X \sim \mathbb{N}(m,s^2)$. Sie hat demzufolge die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\,s\,x}\exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2s^2}\right) \quad \text{für} \quad x > 0$$

und $f_X(x) = 0$ für $x \le 0$. Bezeichnung: $X \sim \mathbb{LN}(m;s^2)$. Folgerung: Ist die Zufallsvariable X normalverteilt, so ist e^X lognormalverteilt. Erwartungswert und Varianz geben wir ohne Rechenweg an.

$$E(X) = \text{e}^{m+s^2/2} \quad \text{und} \quad V(X) = \text{e}^{2m+s^2}(\text{e}^{s^2} - 1)$$

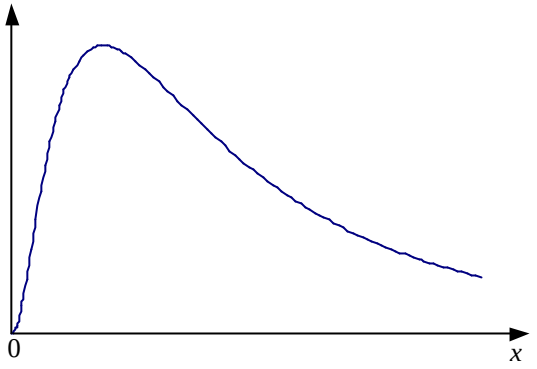


Bild 9

Lognormal-verteiltes Preismodell. Gegeben ist der Basiswert F einer Option mit der Laufzeit $t_\ell - t_0$. Bei bekanntem Preis $S_0 = S(t_0, F)$ ist ein stochastisches Modell für den Preis $S_\ell = S(t_\ell, F)$ im Verfall t_ℓ gesucht. Die kontinuierliche Rendite R der Preisentwicklung $S_0 \to S_\ell$ ist definiert durch

$$R = \ln \frac{S_\ell}{S_0} = \ln S_\ell - \ln S_0$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz treffen wir für R die Annahme einer Normalverteilung $\mathbb{N}(n, t^2)$ mit Erwartungswert n und Varianz t^2. Wegen $\ln S_\ell = \ln S_0 + R$ hat somit der Preis

$$S_\ell = S_0 \, \mathrm{e}^R$$

eine Lognormalverteilung mit den Parametern $\ln S_0 + n$ und t^2. Erwartungswert und Varianz berechnen sich zu

$$E(S_\ell) = \mathrm{e}^{\ln S_0 + n + t^2/2} = S_0 \, \mathrm{e}^{n + t^2/2}$$
$$V(S_\ell) = \mathrm{e}^{2(\ln S_0 + n) + t^2} (\mathrm{e}^{t^2} - 1) = S_0^2 \, \mathrm{e}^{2n + t^2} (\mathrm{e}^{t^2} - 1)$$

Preismodell von Black und Scholes. Im Black / Scholes–Modell erhalten die Parameter n und t^2 eine spezielle Interpretation. Für den Parameter t^2 wird

$$t^2 = s^2 T$$

gesetzt. s^2 ist somit die *Varianz der kontinuierlichen Jahresrendite R*. Die Standardabweichung s wird *Volatilität* des Finanzproduktes F genannt und bleibt ein exogen zu bestimmender Parameter des Black / Scholes–Modells.

Den Parameter n bestimmen wir über den Ansatz (2) der risikoneutralen Bewertung

$$S_0\,\mathrm{e}^{n+t^2/2} = S_0\,\mathrm{e}^{bT} \quad \Rightarrow \quad n + \frac{t^2}{2} = bT \quad \Rightarrow \quad n = \left(b - \frac{s^2}{2}\right)T$$

Setzen wir für die $\mathbb{N}(n, t^2)$–verteilte Rendite $R = n + tZ$ mit einer $\mathbb{N}(0,1)$–verteilten Zufallsvariablen Z, so ergibt sich für den Preis S_ℓ das folgende Modell:

$$(5) \qquad S_\ell = S_0\,\mathrm{e}^R = S_0\,\mathrm{e}^{n+tZ} = S_0 \exp\left(\left(b - \frac{s^2}{2}\right)T + s\sqrt{T}\,Z\right)$$

Dies ist der Wert eines geometrischen Prozesses mit normalverteilten Störvariablen im Endzeitpunkt $t_n = t_\ell$. Folglich ist S_ℓ lognormalverteilt mit den Parametern $\ln S_0 + (b - s^2/2)T$ und $s^2 T$ und hat die Dichtefunktion

$$(6) \qquad f_{S_\ell}(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\,s\sqrt{T}\,x} \exp\left(-\frac{(\ln(x/S_0) - (b - s^2/2)T)^2}{2s^2 T}\right)$$

Für den Erwartungswert und die Varianz gilt

$$(7) \qquad E(S_\ell) = S_0\,\mathrm{e}^{bT}$$

$$(8) \qquad V(S_\ell) = \mathrm{e}^{2\ln S_0 + 2(b - s^2/2)T + s^2 T}(\mathrm{e}^{s^2 T} - 1) = S_0^2\,\mathrm{e}^{2bT}(\mathrm{e}^{s^2 T} - 1)$$

Optionspreisbestimmung. Ziel ist die Bewertung (Preisbestimmung) eines europäischen Call C und Put P auf den Basiswert F mit Basispreis K und Verfall in t_ℓ. Call und Put leisten somit in t_ℓ die Zahlungen

$$CF(t_\ell, \mathrm{C}) = \max(S_\ell - K,\ 0) \quad \text{und} \quad CF(t_\ell, \mathrm{P}) = \max(K - S_\ell,\ 0)$$

Der Markt erlaubt Geldanlagen und –aufnahmen zum kontinuierlichen Zinssatz r. Für den Diskontierungsfaktor gilt somit

$$df_\ell = \mathrm{e}^{-rT}$$

Black und Scholes (1973) haben gezeigt, daß in ihrem Modell unter der Annahme einer konstanten Zins– und Volatilitätsentwicklung, die Option durch ein geeignetes Portfolio aus Basiswert F und Zins r dynamisch dupliziert werden kann – und weiter: Der Faire Preis der Option bestimmt sich als diskontierter Erwartungswert der Auszahlungen in t_ℓ, wobei der Erwartungswert bezüglich der Lognormalverteilung (6) zu bilden ist (Konzept der risikoneutralen Bewertung); also

$$S_{FV}(t_0, \text{Option}) = E(CF(t_\ell, \text{Option})) \cdot \mathrm{e}^{-rT}$$

$$= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \max(x-K,\ 0)\, f_{S_t}(x)\,dx \cdot \mathrm{e}^{-rT} & \text{(Call)} \\ \int_{\mathbb{R}} \max(K-x,\ 0)\, f_{S_t}(x)\,dx \cdot \mathrm{e}^{-rT} & \text{(Put)} \end{cases}$$

Führen wir die Integration durch (vgl. Anhang), erhalten wir folgende Optionspreisformeln:

$$\text{Call} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = S_0\, \mathrm{e}^{(b-r)T}\, \Phi(d_1) - K \mathrm{e}^{-rT}\, \Phi(d_2)$$

$$\text{Put} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = K \mathrm{e}^{-rT}\, \Phi(-d_2) - S_0\, \mathrm{e}^{(b-r)T}\, \Phi(-d_1)$$

$$\text{mit} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (b + s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

$$\Phi = \text{Verteilungsfunktion der } \mathbb{N}(0,1)\text{-Verteilung}$$

Die Beziehung zwischen Call- und Putpreis regelt die *Put-Call-Parität*

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = S_0\, \mathrm{e}^{(b-r)T} - K \mathrm{e}^{-rT}$$

Die Haltekosten b konkretisieren sich mit der Wahl des speziellen Basiswertes F der Option:

Haltekosten b	Basiswert F
$b = r$	Aktie ohne Dividendenzahlungen
$b = r - q$	Aktie mit kontinuierlicher Dividendenrate q
$b = r - r_f$	Devise mit Auslandszinssatz r_f
$b = 0$	Terminprodukt und Bond; ersetze S_0 durch $S_0^T = S_0 \, \mathrm{e}^{bT}$

(vgl. hierzu den folgenden Abschnitt 5). Ist der Basiswert ein Terminprodukt, wird anstelle des Kassapreises S_t der Terminpreis $S_t^T = S_t \, \mathrm{e}^{b \cdot Tg(t,t_\ell)}$ modelliert. Da im Verfalltag t_ℓ Kassapreis S_ℓ und Terminpreis S_ℓ^T übereinstimmen, ergibt der Ansatz (2) der risikoneutralen Bewertung

$$E_Q(S_\ell^T) = E_Q(S_\ell) = S_0 \, \mathrm{e}^{bT} = S_0^T$$

also $b = 0$. Folglich gilt: In einer risikoneutralen Welt ist der Terminpreis in t_0 gleich dem erwarteten Kassapreis in t_ℓ und die erwartete Wachstumsrate b eines Terminproduktes ist null.

5 Optionspreisbestimmung mit Black / Scholes: Praxis

Je nach Basiswert F sind die Haltekosten b der allgemeinen Black / Scholes-Formel des letzten Abschnittes entsprechend zu modifizieren.

Aktien ohne Dividendenzahlungen. Zur Bewertung europäischer Optionen auf eine Aktie, die während der Laufzeit keine Dividenden zahlt, erhalten wir mit $b = r$ die Optionspreisformeln (Black und Scholes, 1973)

$$\text{Call} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = S_0 \Phi(d_1) - K \, \mathrm{e}^{-rT} \, \Phi(d_2)$$

$$\text{Put} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = K \, \mathrm{e}^{-rT} \, \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1)$$

$$\text{mit} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

$$\text{Put-Call-Parität} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = S_0 - K \, \mathrm{e}^{-rT}$$

Beispiel. Betrachte einen europäischen Call und Put mit Verfall in 6 Monaten und Strike 400 GE. Der Aktienpreis im Bewertungszeitpunkt beträgt 420 GE bei einer Volatilität von 20%. Der kontinuierliche 6-Monatszins ist 10%. Also $S_0 = 420$; $K = 400$; $T = 0{,}5$; $r = 0{,}1$ und $s = 0{,}2$. Wir berechnen zunächst

$$d_1 = \frac{\ln(420/400) + (0{,}10 + 0{,}2^2/2)\cdot 0{,}5}{0{,}2\cdot\sqrt{0{,}5}} = 0{,}7693$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}2\cdot\sqrt{0{,}5} = 0{,}6278$$

Damit gilt weiter

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = 420\cdot 0{,}7791 - 400\,\mathrm{e}^{-0{,}05}\cdot 0{,}7349 = 47{,}59 \text{ GE}$$

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = 400\,\mathrm{e}^{-0{,}05}\cdot 0{,}2651 - 420\cdot 0{,}2209 = 8{,}09 \text{ GE}$$

Ist der Callpreis $S_{FV}(t_0, \mathrm{C})$ bestimmt, kann der Putpreis auch über die Put–Call-Parität berechnet werden

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = 47{,}59 - 420 + 400\,\mathrm{e}^{-0{,}05} = 8{,}09 \text{ GE}$$

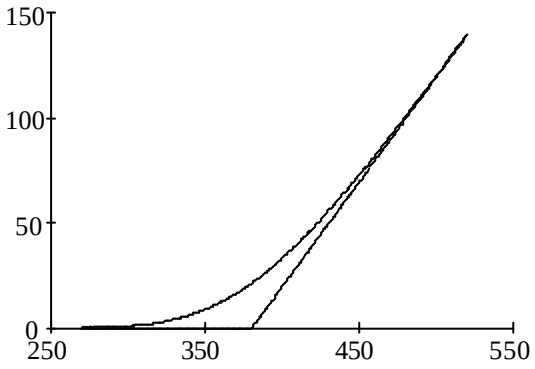


Bild 10 Call

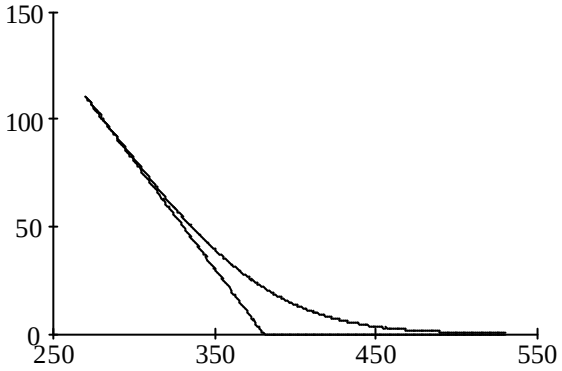


Bild 11 Put

Die Geradenstücke

$$\text{Call} \quad \max(S_\ell - 400\,\mathrm{e}^{-0{,}05},\ 0) = \begin{cases} S_\ell - 400\,\mathrm{e}^{-0{,}05} & \text{für } S_\ell \geq 400\,\mathrm{e}^{-0{,}05} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Put} \quad \max(400\,\mathrm{e}^{-0{,}05} - S_\ell,\ 0) = \begin{cases} 400\,\mathrm{e}^{-0{,}05} - S_\ell & \text{für } S_\ell \leq 400\,\mathrm{e}^{-0{,}05} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben dabei den *inneren Wert* der Option. Dies ist eine untere Wertgrenze der Option. Die Differenz zwischen Optionspreis und innerem Wert wird *Zeitwert* der Option genannt.

Aktien mit kontinuierlicher Dividendenzahlung. Zur Bewertung europäischer Optionen auf eine Aktie oder einen Aktienindex mit bekannter kontinuierlicher Dividendenrate *q*, erhalten wir mit $b = r - q$ die Optionspreisformeln (Merton, 1973)

$$\text{Call} \quad S_{FV}(t_0,\mathrm{C}) = S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,\Phi(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2)$$
$$\text{Put} \quad S_{FV}(t_0,\mathrm{P}) = K\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,\Phi(-d_1)$$
$$\text{mit} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

$$\text{Put-Call-Parität} \quad S_{FV}(t_0,\mathrm{C}) - S_{FV}(t_0,\mathrm{P}) = S_0\,\mathrm{e}^{-qT} - K\mathrm{e}^{-rT}$$

Beispiel. Betrachte einen europäischen Call und Put mit Verfall in 3 Monaten und Strike 135 GE. Der Aktienpreis im Bewertungszeitpunkt beträgt 130 GE bei einer Volatilität von 32%. Die Aktie zahlt eine kontinuierliche Dividendenrate von 4% per annum. Der kontinuierliche 3-Monatszins liegt bei 8%. Also $S_0 = 130$ GE; $K = 135$ GE; $T = 0{,}25$; $q = 0{,}04$; $r = 0{,}08$ und $s = 0{,}32$. Wir berechnen zunächst

$$d_1 = \frac{\ln(130/135) + (0{,}08 - 0{,}04 + 0{,}32^2/2)\cdot 0{,}25}{0{,}32\cdot\sqrt{0{,}25}} = -0{,}0934$$
$$d_2 = d_1 - 0{,}32\cdot\sqrt{0{,}25} = -0{,}2534$$

Damit gilt weiter

$$S_{FV}(t_0,\mathrm{C}) = 130\,\mathrm{e}^{-0{,}01}\cdot 0{,}4628 - 135\,\mathrm{e}^{-0{,}02}\cdot 0{,}4000 = 6{,}64 \text{ GE}$$
$$S_{FV}(t_0,\mathrm{P}) = 135\,\mathrm{e}^{-0{,}02}\cdot 0{,}6000 - 130\,\mathrm{e}^{-0{,}01}\cdot 0{,}5372 = 10{,}26 \text{ GE}$$

Aktien mit Cash Dividendenzahlungen. Zur Bewertung europäischer Optionen auf eine Aktie A, die mehrere Cash-Dividenden während der Optionslaufzeit zahlt, verwenden wir die Optionspreisformel mit $b = r$ und ersetzen S_0 durch

$$S_0^- = S(t_0,\mathrm{A}) - D_1\,\mathrm{e}^{-r\cdot Tg(t_0,t_1)} - D_2\,\mathrm{e}^{-r\cdot Tg(t_0,t_2)} - \cdots - D_n\,\mathrm{e}^{-r\cdot Tg(t_0,t_n)}$$
$$\text{mit} \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_\ell$$

In den folgenden Formeln bezeichnet S_0^- somit den Preis der Aktie minus dem Barwert aller Dividendenzahlungen:

$$\text{Call} \quad S_{FV}(t_0,\mathrm{C}) = S_0^-\Phi(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2)$$
$$\text{Put} \quad S_{FV}(t_0,\mathrm{P}) = K\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S_0^-\Phi(-d_1)$$
$$\text{mit} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0^-/K) + (r + s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

Beispiel. Betrachte einen europäischen Call und Put auf eine Aktie, die in 3 Monaten und in 6 Monaten jeweils eine Dividende von 1,5 GE zahlt. Verfall ist in

9 Monaten; der Strike wird auf 90 GE festgesetzt. Der Aktienpreis im Bewertungszeitpunkt beträgt 100 GE bei einer Volatilität von 28%. Der kontinuierliche 9-Monatszins ist 10%. Also $S = 100$; $K = 90$; $T = 0{,}75$; $r = 0{,}1$; $s = 0{,}25$; $D_1 = D_2 = 1{,}5$; $Tg(t_0, t_1) = 0{,}25$ und $Tg(t_0, t_2) = 0{,}5$. Wir berechnen zunächst den bereinigten Aktienpreis

$$S_0^- = 100 - 1{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}025} - 1{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}05} = 97{,}11 \text{ GE}$$

und damit

$$d_1 = \frac{\ln(97{,}1102/90) + (0{,}1 + 0{,}28^2/2)\cdot 0{,}75}{0{,}28\cdot\sqrt{0{,}75}} = 0{,}7441$$
$$d_2 = d_1 - 0{,}28\cdot\sqrt{0{,}75} = 0{,}5016$$

Folglich gilt

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = 97{,}1102\cdot 0{,}7716 - 90\,\mathrm{e}^{-0{,}075}\cdot 0{,}6920 = 17{,}15 \text{ GE}$$
$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = 90\,\mathrm{e}^{-0{,}075}\cdot 0{,}3080 - 97{,}1102\cdot 0{,}2284 = 3{,}53 \text{ GE}$$

Devisen. Sei $S_0 = S(t_0, 1\,\mathrm{GE}_f)$ der Preis für eine Geldeinheit der Auslandswährung zahlbar in Geldeinheiten GE der Inlandswährung (Preisnotierung). r bezeichne den Inlandszins und r_f den Auslandszins. Zur Bewertung europäischer Devisenoptionen erhalten wir mit $b = r - r_f$ die Optionspreisformeln (Garman und Kohlhagen, 1983)

$$\text{Call}\quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = S_0\,\mathrm{e}^{-r_f T}\,\Phi(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2)$$
$$\text{Put}\quad S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S_0\,\mathrm{e}^{-r_f T}\,\Phi(-d_1)$$
$$\text{mit}\quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + s^2/2)T}{s\sqrt{T}}\quad \text{und}\quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

$$\text{Put-Call-Parität}\quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = S_0\,\mathrm{e}^{-r_f T} - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Beispiel. Betrachte eine europäische Call USD/Put Euro Option mit 6Monaten Laufzeit mit Strike 0,83. Der Preis für einen US-Dollar ist im Bewertungszeitpunkt mit 0,85 Euro festgelegt bei einer Volatilität von 10,3%. Der 6-Monatszins des Inlands ist 3%, der des Auslands 5%. Also $S_0 = 0{,}85$; $K = 0{,}83$; $T = 0{,}5$; $r = 0{,}03$; $r_f = 0{,}05$ und $s = 0{,}103$. Wir berechnen zunächst

$$d_1 = \frac{\ln(0{,}85/0{,}83) + (0{,}03 - 0{,}05 + 0{,}103^2/2)\cdot 0{,}5}{0{,}103\cdot\sqrt{0{,}5}} = 0{,}2260$$
$$d_2 = d_1 - 0{,}103\cdot\sqrt{0{,}5} = 0{,}1532$$

Damit gilt weiter

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = 0{,}85\,\mathrm{e}^{-0{,}025}\cdot 0{,}5894 - 0{,}83\,\mathrm{e}^{-0{,}015}\cdot 0{,}5609 = 0{,}0300 \text{ GE}$$

Für den entsprechenden Put USD / Call Euro gilt $S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = 0{,}0187$ GE.

Terminprodukte. Bewertung europäischer Optionen auf ein Terminprodukt verwenden wir die Optionspreisformel mit $b = 0$ und ersetzen S_0 durch den Terminpreis $S_0^T = S_0\,\mathrm{e}^{bT}$ (Black, 1976, kurz: Black 76)

$$\text{Call} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = \mathrm{e}^{-rT}(S_0^T\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$
$$\text{Put} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = \mathrm{e}^{-rT}(K\Phi(-d_2) - S_0^T\Phi(-d_1))$$
$$\text{mit} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0^T/K) + (s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

$$\text{Put-Call-Parität} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = (S_0^T - K)\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Beispiel. Betrachte einen europäischen Call und Put auf ein Terminprodukt mit Verfall in 1,5 Monaten und Strike 110. Der Terminpreis im Bewertungszeitpunkt beträgt 110 GE bei einer Volatilität von 25%. Der kontinuierliche 1,5-Monatszins ist 10%. Also $S_0^T = K = 110$; $T = 0{,}125$; $r = 0{,}1$ und $s = 0{,}25$. Wir berechnen zunächst

$$d_1 = \frac{\ln(110/110) + (0{,}25^2/2)\cdot 0{,}125}{0{,}25\cdot\sqrt{0{,}125}} = 0{,}0484$$
$$d_2 = d_1 - 0{,}25\cdot\sqrt{0{,}125} = -0{,}0484$$

und damit weiter

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = \mathrm{e}^{-0{,}05}(110\cdot 0{,}5193 - 110\cdot 0{,}4807) = 4{,}18 \text{ GE}$$
$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = \mathrm{e}^{-0{,}05}(110\cdot 0{,}5193 - 110\cdot 0{,}4807) = 4{,}18 \text{ GE}$$

Bonds. Europäische Bondoptionen mit einer deutlich längeren Restlaufzeit des Bonds gegenüber der Laufzeit der Option können mit dem Modell Black 76 für Terminprodukte bewertet werden. Dabei ist zu beachten, daß dieses Modell nicht den Pull-to–Par-Effekt des Bonds berücksichtigt. Am Laufzeitende ist der Preis

des Bonds gleich dem Nennwert plus einer Couponzahlung. Folglich steigt die Unsicherheit eines Bonds zunächst und fällt dann wieder. Dies steht im Widerspruch zu der Annahme des Black 76 Modells, daß die Unsicherheit (Varianz) mit zunehmender Laufzeit des Basiswertes linear zunimmt. Die Bewertung von Bondoptionen ist daher einzuschränken auf Optionen mit kurzer Laufzeit gegenüber der Restlaufzeit des Bonds. Eine Händlerregel besagt, daß die Optionslaufzeit höchstens $1/5$ der Restlaufzeit des Bonds betragen sollte.

Zur Bewertung europäischer Optionen auf einen Bond verwenden wir also die Optionspreisformel mit $b = 0$ und ersetzen S_0 durch den Terminpreis $S_0^T = S_0\,\mathrm{e}^{rT}$. Für einen Couponbond CB ist der Preis $S_0 = S(t_0, \mathrm{CB})$ die Summe aus dem Kurs $S_{ex}(t_0, \mathrm{CB})$ und den Stückzinsen STZ, also

$$S_0^T = (S_{ex}(t_0, \mathrm{CB}) + STZ(t_0, t_\ell))\,\mathrm{e}^{rT}$$

Dann gilt für den Optionspreis

$$\text{Call} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = \mathrm{e}^{-rT}(S_0^T \Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

$$\text{Put} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = \mathrm{e}^{-rT}(K\Phi(-d_2) - S_0^T \Phi(-d_1))$$

$$\text{mit} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0^T/K) + (s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

$$\text{Put-Call-Parität} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = (S_0^T - K)\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Beispiel. Betrachte einen europäischen Call auf einen Couponbond CB mit 3 Jahren Restlaufzeit; die Laufzeit der Option beträgt 3 Monate; der Strike ist 100. Der Kurs des Bonds (clean price) beträgt im Bewertungszeitpunkt 97,80 GE bei einer Volatilität von 4%. Der kontinuierliche 3-Monatszins mit $Tg = 30\mathrm{E}/360$ berechnet sich für 91 Tage aus dem Geldmarktsatz zu 7% wie folgt:

$$r = \ln\left(1 + 0{,}07 \cdot \frac{91}{360}\right) \cdot \frac{360}{90} = 7{,}0159\%$$

Für den Terminpreis gilt somit

$$S_0^T = (97{,}80 + 4{,}2123)\,\mathrm{e}^{0{,}0701590{,}25} = 103{,}82 \text{ GE}$$

Also ist $S_0^T = 103{,}82$; $K = 100$; $T = 0{,}25$; $r = 0{,}070159$ und $s = 0{,}04$. Wir berechnen zunächst

$$d_1 = \frac{\ln(103{,}82/100) + (0{,}04^2/2)\cdot 0{,}25}{0{,}04\cdot\sqrt{0{,}25}} = 1{,}8832$$
$$d_2 = d_1 - 0{,}04\cdot\sqrt{0{,}25} = 1{,}8632$$

und damit weiter

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = \mathrm{e}^{-0{,}070160{,}25}(103{,}82\cdot 0{,}9702 - 100\cdot 0{,}9688) = 3{,}77 \text{ GE}$$

Für den entsprechenden Put berechnet sich ein Preis von $S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = 0{,}02$ GE.

6 Optionssensitivitäten

Die folgenden Sensitivitäten einer Option (auch »Greeks« genannt) sind die partiellen Ableitungen der allgemeinen Black/ Scholes-Formel. Sie bestimmen die Änderung des Optionspreises bei kleinen Bewegungen der jeweiligen Einflußgröße. Für die Berechnung der Ableitungen wird auf dem Anhang verwiesen.

Notationen. Wir verwenden in diesem Abschnitt die folgenden Notationen : $S = S_0 = S(t_0, F)$; $T = Tg(t_0, t_\ell)$; $C = S_{FV}(t_0, \mathrm{C})$ und $P = S_{FV}(t_0, \mathrm{P})$.

Zahlenbeispiel. Die folgenden Beispiele und Graphiken beziehen sich sämtlich auf eine Aktienoption ohne Dividendenzahlungen mit sechs Monaten Laufzeit und Strike 200 GE. Der Aktienpreis beträgt 210 GE bei einer Volatilität von 20%. Der 6-Monatszins ist 6%. Also $S = 210$; $K = 200$; $T = 0{,}5$; $b = r = 0{,}06$ und $s = 0{,}2$. Damit gilt

$$d_1 = \frac{\ln(210/200) + (0{,}06 + 0{,}2^2/2)\cdot 0{,}5}{0{,}2\cdot\sqrt{0{,}5}} = 0{,}6278$$
$$d_2 = d_1 - 0{,}2\cdot\sqrt{0{,}5} = 0{,}4864$$
$$\phi(d_1) = 0{,}3276\,; \quad \Phi(d_1) = 0{,}7349\,; \quad \Phi(d_2) = 0{,}6867\,; \quad \Phi(-d_2) = 0{,}3133$$

Delta. Die Sensitivität des Optionspreises bei kleinen Preisänderungen des Basiswertes wird *Delta* der Option genannt.

$$\text{Call} \quad \Delta_{Call} = \frac{\partial C}{\partial S} = \mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) > 0$$
$$\text{Put} \quad \Delta_{Put} = \frac{\partial P}{\partial S} = \mathrm{e}^{(b-r)T}(\Phi(d_1) - 1) < 0$$

Beispiel. $\Delta_{Call} = \Phi(d_1) = 0{,}7349$ und $\Delta_{Put} = \Phi(d_1) - 1 = -0{,}2651$

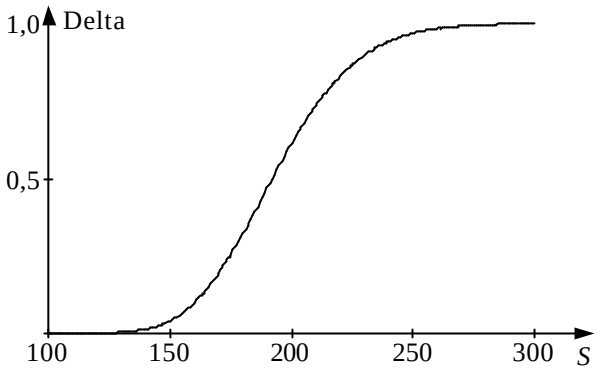


Bild 12 Delta

Gamma. Die Sensitivität des Deltas einer Option bei kleinen Preisänderungen des Basiswertes wird *Gamma* der Option genannt. Gamma ist für Call- und Putoptionen gleich.

$$\Gamma = \Gamma_{Call,Put} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\phi(d_1)\,e^{(b-r)T}}{S\sigma\sqrt{T}} > 0$$

Beispiel. $\Gamma = \dfrac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} = \dfrac{0{,}3276}{210 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{0{,}5}} = 0{,}0110$

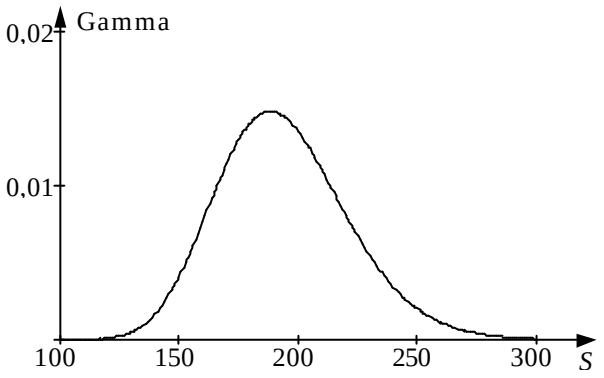


Bild 13 Gamma

Bild 14 zeigt das Verhalten von Gamma bei abnehmender Restlaufzeit. Ist die Option am Geld, d.h. $S \approx K e^{-rT}$, so kann das Gamma über alle Schranken wachsen.

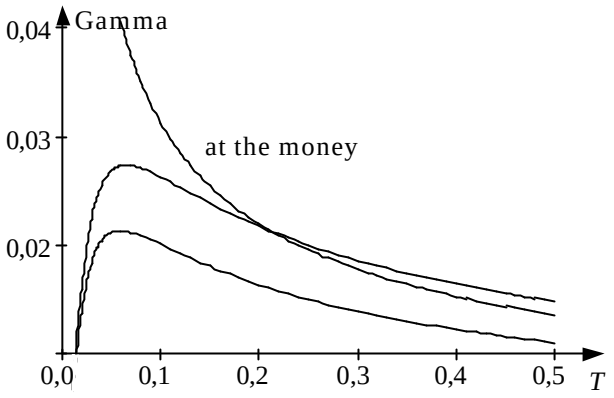


Bild 14 Gamma

Vega. Die Sensitivität des Optionspreises bei kleinen Änderungen der Volatilität wird *Vega* der Option genannt. (Während die anderen Sensitivitäten entsprechende griechische Buchstaben haben, ist Vega der Name eines Sterns.) Vega ist für Call- und Putoptionen gleich.

$$Vega = Vega_{Call,Put} = \frac{\partial C}{\partial s} = \frac{\partial P}{\partial s} = S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\sqrt{T} > 0$$

Beispiel. $Vega = S\phi(d_1)\sqrt{T} = 210 \cdot 0{,}3276 \cdot \sqrt{0{,}5} = 48{,}6461$

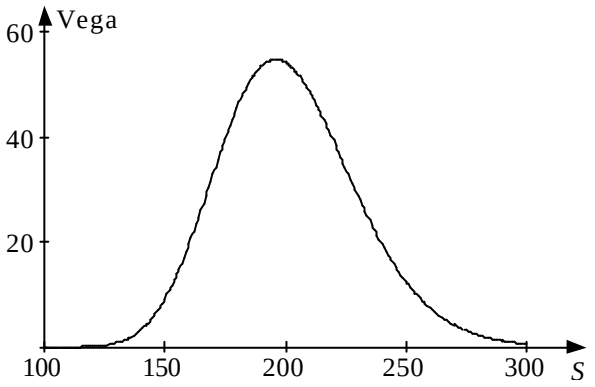


Bild 15 Vega

Rho. Die Sensitivität des Optionspreises bei kleinen Änderungen des Zinssatzes wird *Rho* der Option genannt.

$$\text{Call} \quad r_{Call} = \frac{\partial C}{\partial S} = \begin{cases} TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) > 0 & \text{für } b \neq 0 \\ -TC < 0 & \text{für } b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Put} \quad r_{Put} = \frac{\partial P}{\partial S} = \begin{cases} -TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) < 0 & \text{für } b \neq 0 \\ -TP < 0 & \text{für } b = 0 \end{cases}$$

Beispiel. $r_{Call} = 0{,}5 \cdot 200 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}03} \cdot 0{,}6867 = 66{,}6405$

$$r_{Put} = -0{,}5 \cdot 200 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}03} \cdot 0{,}3133 = -30{,}4041$$

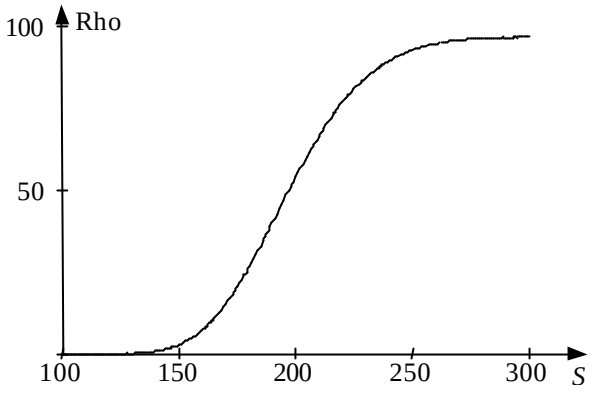


Bild 16 Rho

Theta. Die Sensitivität des Optionspreises bei kleinen Änderungen der Restlaufzeit wird *Theta* der Option genannt. Da die Restlaufzeit abnimmt, wird Theta meist als negative Ableitung des Optionspreises nach der Zeit dargestellt.

$$\text{Call} \quad \Theta_{Call} = -\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)s}{2\sqrt{T}} - (b-r)S^{(b-r)T}\Phi(d_1) - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

$$\text{Put} \quad \Theta_{Put} = -\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)s}{2\sqrt{T}} + (b-r)S^{(b-r)T}\Phi(-d_1) + rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2)$$

Beispiel. $$\Theta_{Call} = -\frac{S\phi(d_1)s}{2\sqrt{T}} - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

$$= -\frac{210 \cdot 0{,}3276 \cdot 0{,}2}{2\sqrt{0{,}5}} - 0{,}06 \cdot 200 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}03} \cdot 0{,}6867 = -17{,}7261$$

$$\Theta_{Put} = -\frac{S\phi(d_1)s}{2\sqrt{T}} + rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2)$$

$$= -\frac{210 \cdot 0{,}3276 \cdot 0{,}2}{2\sqrt{0{,}5}} + 0{,}06 \cdot 200 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}03} \cdot 0{,}3133 = -6{,}0807$$

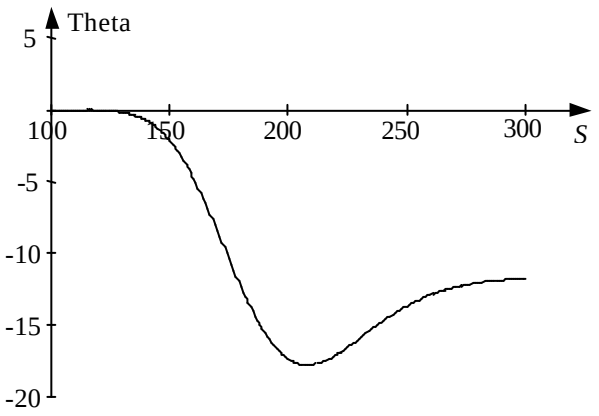


Bild 17 Theta

7 Optionspreisbestimmung mit Cox/Ross/Rubinstein

Gegeben ist der Basiswert *F* einer Option mit der Laufzeit $t_\ell - t_0$. Wir bestimmen ein stochastisches Modell der Preisentwicklung $t \to S(t,F)$, das sowohl in der Zeit als auch in den Zuständen diskret ist.

Binomial-verteiltes Preismodell. Zunächst zerlegen wir die Laufzeit $T = Tg(t_0, t_\ell)$ in *n* gleiche Teilintervalle der Länge $\Delta t = T/n$ (vgl. Bild 18). In dem folgenden Modell kann der Preis innerhalb eines Teilintervalls Δt nur um einen bestimmten Betrag steigen oder fallen. Um dies genauer zu fassen, setzen wir $S_k = S(t_k, F)$ für den Preis im Zeitpunkt t_k. Ausgehend von S_k im Zeitpunkt t_k entwickelt sich der Preis S_{k+1} im Zeitpunkt t_{k+1} in einen der folgenden beiden Zustände

$$S_{k+1} = S_k u, \quad u > 1 \quad \text{oder} \quad S_{k+1} = S_k d, \quad 0 < d < 1$$

Dabei sind *u* (für »up«) und *d* (für »down«) feste, zeitunabhängige Multiplikatoren (vgl. Bild 19). Wir setzen $p = P(S_{k+1} = S_k u)$ für die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung; entsprechend ist $1 - p = P(S_{k+1} = S_k d)$ die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung. Bei gegebenem S_k ist folglich S_{k+1} eine Zweipunktverteilte, d.h. genauer eine $\mathbb{ZP}(S_k u, S_k d, p)$-verteilte Zufallsvariable.

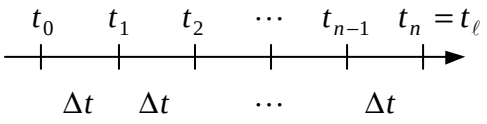


Bild 18

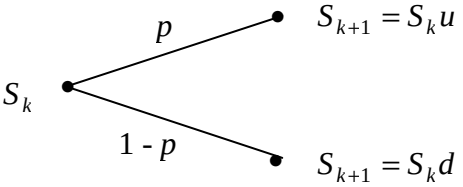


Bild 19

Startet der Preis im Zeitpunkt t_0 in S_0, so gibt jede Folge $(b_1, \ldots, b_n)$ bestehend aus up's und down's einen konkreten Preisverlauf an. Ist etwa $n = 4$ und (b_1, b_2, b_3, b_4) = (up, down, up, up), so beschreibt der zugehörige Preis in den Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, t_3 die Bewegung: S_0, $S_1 = S_0 u$, $S_2 = S_0 ud$, $S_3 = S_0 u^2 d$, $S_4 = S_0 u^3 d$. $S_0, S_1, S_2, \ldots$ ist damit ein geometrischer Random Walk (vgl. Basiswissen, Lektion 13, Abschnitt 13.4.2) Die Gesamtheit der möglichen Preisverläufe ist in Bild 20 dargestellt. Die spezielle Baumstruktur wird *rekombinierend* genannt: Wegen $S_0 ud = S_0 du$ ist das Preisresultat einer Aufwärtsbewegung gefolgt von einer Abwärtsbewegung gleich dem Resultat bei umgekehrter Reihenfolge.

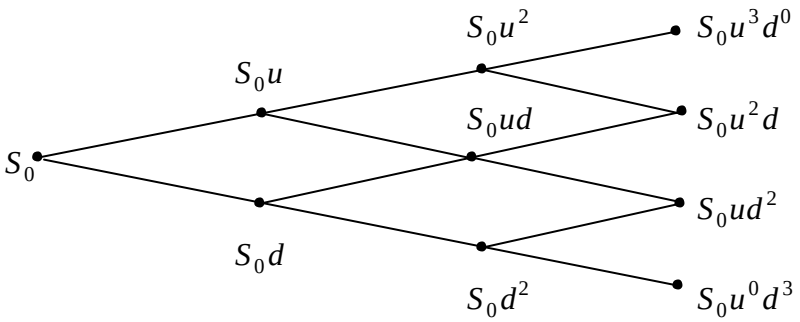


Bild 20

Jeder der $n+1$ Endpreise $S_n = S_0 u^i d^{n-i}$ ist charakterisiert durch die Anzahl i der Aufwärtsbewegungen, d.h. durch die Anzahl der up's in der Folge $(b_1,\ldots,b_n)$; die Reihenfolge ist dabei unerheblich. Die zufällige Wahl einer Folge $(b_1,\ldots,b_n)$ entspricht aber dem Behältermodell einer Binomialverteilung versehen mit den Kugeln »up« und »down« im Mischungsverhältnis p = Anzahl up-Kugeln : Gesamtzahl. Die Zufallsvariable S_n ist folglich $\mathbb{B}(n,p)$-verteilt, d.h.

$$P(S_n = S_0 u^i d^{n-i}) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{für} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

(Zur Binomialverteilung vgl. Basiswissen, Lektion 13)

Beispiel. Mit den Parameterwerten $n = 4$, $S_0 = 100$, $p = 0{,}6$, $u = 1{,}1$ und $d = 0{,}9$ ergeben sich die Endpreise mit den zugehörigen Binomial-Wahrscheinlichkeiten zu

k	$S_0 u^i d^{n-i}$	$P(S_4 = S_0 u^i d^{n-i})$
0	65,61	0,0256
1	80,19	0,1536
2	98,01	0,3456
3	119,79	0,3456
4	146,41	0,1296

Binomialmodell von Cox/Ross und Rubinstein. Drei Bestimmungsgleichungen legen die Modellparameter u, d und p fest. Die erste Gleichung stellt eine Symmetriebeziehung zwischen den Multiplikatoren u und d her.

(9) $$u = \frac{1}{d}$$

Interpretation. Wegen $u \cdot d = 1$ kehrt der Preis nach einer Aufwärtsbewegung ge-

folgt von einer Abwärtsbewegung (und vice versa) stets zum Ausgangswert zurück. Die Preisentwicklung $S_0, S_1, S_2, \ldots$ ist somit ein symmetrischer Random Walk. Die zweite Bestimmungsgleichung lautet

(10) $\quad S_k up + S_k d(1-p) = S_k \, \mathrm{e}^{b\Delta t}$

Interpretation. Bedingung (10) ist der Ansatz der risikoneutralen Bewertung (2) des Abschnitts B und wir werden die zugehörige Wahrscheinlichkeit im folgenden mit Q bezeichnen. Dazu beachten wir, daß die Preisentwicklung $S_k \to S_{k+1}$ eines Teilschrittes Δt Zweipunkt-verteilt – genauer: $\mathbb{ZP}(S_k u, S_k d, p)$ - verteilt - ist. Nach dem Konzept der risikoneutralen Bewertung ist aber aus Sicht des Zeitpunktes t_k der erwartete Preis $E_Q(S_{k+1})$ gleich dem Terminpreis $S_k \, \mathrm{e}^{b\Delta t}$. Division durch S_k und Auflösen nach p ergibt

(11) $\quad p = \dfrac{a-d}{u-d} \quad$ mit $\quad a = \mathrm{e}^{b\Delta t}$

Zur Herleitung einer dritten Bestimmungsgleichung bemerken wir, daß die Parameter u und d die Schwankungsbreite, d.h. genauer die Varianz des Preismodells festlegen. Größere u-Werte implizieren stärkere Preisbewegungen. Ausgehend vom Preis S_k im Zeitpunkt t_k ergibt sich für die Varianz $V(S_{k+1})$ der Zufallsgröße S_{k+1} einerseits $S_k^2 \, \mathrm{e}^{2b\Delta t}(\mathrm{e}^{s^2\Delta t} - 1)$ (vgl. hierzu Gleichung (8) im Modell von Black und Scholes; s - auch Volatilität genannt – ist dabei die Standard-abweichung der kontinuierlichen Jahresrendite und wird meist auf empirischem Wege bestimmt). Andererseits ist im vorliegenden Modell der zufällige Preis S_{k+1} $\mathbb{ZP}(S_k u, S_k d, p)$-verteilt; also

$$S_k^2 u^2 p + S_k^2 d^2 (1-p) - S_k^2 (up + d(1-p))^2 = S_k^2 \, \mathrm{e}^{2b\Delta t}(\mathrm{e}^{s^2\Delta t} - 1)$$

oder mit Gleichung (10)

(12) $\quad u^2 p + d^2 (1-p) = \mathrm{e}^{2b\Delta t + s^2 \Delta t}$

Eine (approximative) Lösung der Gleichungen (9), (10) und (12) ist mit

$$u = \mathrm{e}^{s\sqrt{\Delta t}} \quad , \quad d = \mathrm{e}^{-s\sqrt{\Delta t}} \quad , \quad p = \frac{\mathrm{e}^{b\Delta t} - d}{u - d}$$

gegeben (vgl. Anhang). Zusammenfassend stellen wir fest, daß bei n Teilintervallen Δt - also $\Delta t = T/n$ - der Preis S_ℓ im Zeitpunkt t_ℓ eine binomialverteilte – genauer: $\mathbb{B}(n, p)$-verteilte – Zufallsvariable ist mit Trägermenge

$$Tr_{S_\ell} = \{S_0 u^0, d^n, S_0 u^1 d^{n-1}, S_0 u^2 d^{u-2}, \ldots, S_0 u^n d^0\}$$

und Dichtefunktion

$$f_{S_\ell}(S_0 u^i d^{n-i}) = \binom{n}{i} p(1-p)^{n-i} \quad \text{für} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Optionspreisbestimmung. Ziel ist die Bewertung (Preisbestimmung) eines europäischen Call C und Put P auf den Basiswert F mit Basispreis K und Verfall in t_ℓ. Call und Put leisten somit in t_ℓ die Zahlungen

$$CF(t_\ell, \mathrm{C}) = \max(S_\ell - K,\ 0) \quad \text{und} \quad CF(t_\ell, \mathrm{P}) = \max(K - S_\ell,\ 0)$$

Analog zum Vorgehen von Black und Scholes zeigen nun Cox, Ross und Rubinstein, daß sich der Faire Preis der Option als diskontierter Erwartungswert der Auszahlungen in t_ℓ bestimmt. Abgezinst wird wieder mit einem kontinuierlichen Zinssatz r; der Erwartungswert wird bezüglich der Binomialverteilung $\mathbb{B}(n,p)$ gebildet, d.h.

(13) $$S_{FV}(t_0,\ \text{Option}) = E(CF(t_\ell,\ \text{Option}))\,\mathrm{e}^{-rT}$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \max(S_0 u^i d^{n-i} - K,\ 0) \cdot f_{S_\ell}(S_0 u^i d^{n-i}) \cdot \mathrm{e}^{-rT} & \text{(Call)} \\ \sum_{i=0}^{n} \max(K - S_0 u^i d^{n-i},\ 0) \cdot f_{S_\ell}(S_0 u^i d^{n-i}) \cdot \mathrm{e}^{-rT} & \text{(Put)} \end{cases}$$

Zur Berechnung des Optionspreises bieten sich zwei Verfahren an:

1. Iteration. Während der Binomialbaum durch Vorwärtsiteration bestimmt wird, ergibt sich der Optionspreis durch iteratives Rückwärtsrechnen.

Vorwärtsiteration: $S_{k+1} = \begin{cases} S_k u & \text{für up} \\ S_k d & \text{für down} \end{cases}$

Rückwärtsiteration: Mit den Notationen $C_{k,i}$ und $P_{k,i}$ für den Callpreis bzw. Putpreis im Zeitpunkt t_k bei i Aufwärtsbewegungen und entsprechend $S_{k,i}$ für den Preis des Basiswertes – also $S_{k,i} = S_0 u^i d^{k-i}$ - gilt

$$C_{n,i} = \max(S_{n,i} - K,\ 0) \ \text{ und } \ C_{k,i} = [C_{k+1,i+1} p + C_{k+1,i}(1-p)]\mathrm{e}^{-r\Delta t} \ \text{ für } \ k < n$$
$$P_{n,i} = \max(K - S_{n,i},\ 0) \ \text{ und } \ P_{k,i} = [P_{k+1,i+1} p + P_{k+1,i}(1-p)]\mathrm{e}^{-r\Delta t} \ \text{ für } \ k < n$$

2. Erwartungswert. Gemäß Formel (13) werden die zustandsabhängigen Auszahlungen der Option mit den Binomialwahrscheinlichkeiten gewichtet und dann aufsummiert. Diskontieren des Erwartungswertes ergibt dann den Optionspreis.

Beispiel. Eine Aktie A ohne Dividendenzahlungen notiert in t_0 mit dem Preis 100 GE. Zu bewerten ist ein europäischer Call C auf A mit Basispreis 105 GE und Verfall in 3 Monaten. Der kontinuierliche Zins für 3 Monate beträgt 10%; die Aktie besitzt eine Volatilität von 40%. Also $S_0 = 100$; $K = 105$; $T = 0{,}25$; $b = r = 0{,}1$ und $s = 0{,}4$. Wir bestimmen den Callpreis durch ein Binomialmodell mit $n = 3$ Schritten (um den Rechenaufwand überschaubar zu halten). Mit $\Delta t = 0{,}25/3 = 1/12$ berechnen wir die Modellparameter:

$$u = \mathrm{e}^{0{,}4\sqrt{1/12}} = 1{,}1224 \quad \text{und} \quad d = \frac{1}{u} = 0{,}8909$$

$$p = \frac{\mathrm{e}^{0{,}1/12} - 0{,}8909}{1{,}1224 - 0{,}8909} = 0{,}5073 \quad \text{und} \quad 1 - p = 0{,}4927$$

Mit diesen Angaben kann der Binomialbaum konstruiert werden (vgl. Bild 21).

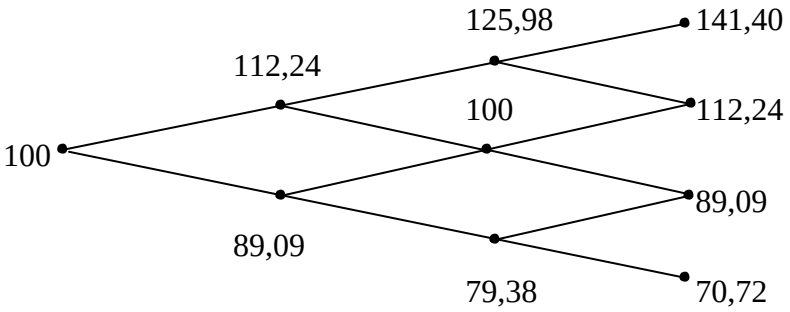


Bild 21

1. Lösungsverfahren (Iteration). Beginnend mit den Callpreisen im Zeitpunkt t_3 werden diese iterativ rückwärts gerechnet; z.B.

$$C_{3,3} = \max(141{,}40 - 105,\ 0) = 36{,}40$$

$$C_{2,2} = [36{,}40p + 7{,}24(1-p)]\mathrm{e}^{-r\cdot\Delta t} = (36{,}40 \cdot 0{,}5073 + 7{,}24 \cdot 0{,}4927)\,\mathrm{e}^{-0{,}1/12} = 21{,}85$$

Aktien–	Call			
preis	t_0	t_1	t_2	t_3
141,40				36,40
125,98			21,85	
112,24		12,77		7,24
100,00	7,32		3,64	
89,09		1,83		0
79,38			0	
70,72				0

Der Faire Callpreis ist damit $S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = 7{,}32$ GE.

2. Lösungsverfahren (Erwartungswert). Die Erwartungswertbildung ist in der folgenden Tabelle aufgearbeitet:

i	$S_{3,i} = S_0 u^i d^{3-i}$	$C_{3,i} = \max(S_{3,i} - 105, 0)$	$p_i = \binom{3}{i} p^i (1-p)^{3-i}$	$C_{3,i} \cdot p_i$
0	70,72	0	0,1196	0
1	89,09	0	0,3694	0
2	112,24	7,24	0,3804	2,75
3	141,40	36,40	0,1306	4,75
Summe			1,0000	7,50

Der Faire Callpreis ergibt sich durch Abzinsen des Erwartungswertes in t_ℓ auf den Zeitpunkt t_0:

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = E_Q(CF(t_\ell, \mathrm{C})) \cdot \mathrm{e}^{-rT} = 7{,}50 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 0{,}25} = 7{,}32 \text{ GE}$$

Abschließend vergleichen wir dieses Resultat mit dem Ergebnis aus $n = 5$ Teilintervallen und dann mit dem exakten Ergebnis aus der Black/Scholes–Formel. Zunächst gilt mit den Modellgrößen

$$\Delta t = 0{,}05\,, \quad u = 1{,}0936\,, \quad d = 0{,}9144\,, \quad p = 0{,}5056$$

und dem Iterationsverfahren:

Aktien–	Call					
preis	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
156,39						51,39
143,01					38,54	
130,78				26,82		25,78
119,59			17,77		15,11	
109,36		11,35		8,68		4,36
100,00	7,06		4,91		2,19	
91,44		2,74		1,10		0,00
83,62			0,55		0,00	
76,47				0,00		0,00
69,92					0,00	
63,94						0,00

Der Faire Callpreis ist damit $S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = 7{,}06$ GE. Zur Berechnung des Optionspreises mit Black / Scholes bestimmen wir

$$d_1 = \frac{\ln(100/105) + (0{,}1 + 0{,}4^2/2) \cdot 0{,}25}{0{,}4 \cdot \sqrt{0{,}25}} = -0{,}0190$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}4 \cdot \sqrt{0{,}25} = -0{,}2190$$

und damit weiter

$$\begin{aligned} S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) &= 100\Phi(-0{,}0190) + \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 0{,}25}\,\Phi(-0{,}2190) \\ &= 100(1 - 0{,}5080) - 105\,\mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 0{,}25} \cdot (1 - 0{,}5871) = 6{,}92 \text{ GE} \end{aligned}$$

Die Resultate zeigen bei steigender Anzahl n der Teilintervalle eine Verbesserung des Optionspreises im Binomialmodell. In der Praxis erzielen $n = 30$ bis 50 Unterteilungen in der Regel eine hinreichende Genauigkeit.

Zusammenhang zum Black / Scholes-Modell. Mit dem zentralen Grenzwertsatz kann gezeigt werden: Bei feiner werdender Zerlegung der Laufzeit T konvergieren die Optionspreise nach Cox / Ross / Rubinstein gegen die entsprechenden Optionspreise nach Black / Scholes.

8 Bewertung amerikanischer Optionen

Gegenüber der europäischen Option (Notationen: C^E = Call und P^E = Put) erlaubt eine amerikanische Option (Notationen: C^A = Call und P^A = Put) die Ausübung während der gesamten Laufzeit $t_\ell - t_0$. Bei sonst gleichen Ausstattungen gelten somit für den Fairen Preis die Beziehungen

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^E) \le S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^A) \quad \text{und} \quad S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^E) \le S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A)$$

Calloption. Übt der Käufer eines amerikanischen Calls die Option im Zeitpunkt $t < t_\ell$ vorzeitig aus und leistet der Basiswert während der Optionslaufzeit keine Zahlungen (etwa eine Aktie ohne Dividendenzahlungen), so erhält er die Auszahlung $S_t - K$. Hält der Käufer den Basiswert bis zum Verfalltermin t_ℓ, so verfügt er über den Betrag $S_\ell - K\mathrm{e}^{r \cdot Tg(t,t_\ell)}$. Wegen

$$S_\ell - K\mathrm{e}^{r \cdot Tg(t,t_\ell)} < S_\ell - K \le \max(S_\ell - K,\ 0)$$

ist dies bei positivem Zins r weniger, als die Option im Verfall auszahlt. Ein vorzeitiges Optieren führt somit zu einem schlechteren Ergebnis und folglich gilt

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^A) = S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^E)$$

Leistet der Basiswert im Zeitpunkt $t < t_\ell$ eine Zahlung B und übt der Käufer den Call noch vor der Zahlung aus, so ist bei entsprechend hoher Zahlung ein Ergebnis

$$S_\ell - K\mathrm{e}^{r \cdot Tg(t,t_\ell)} + B\mathrm{e}^{r \cdot Tg(t,t_\ell)} > \max(S_\ell - K,\ 0)$$

denkbar. Ein vorzeitiges Optieren ist dann vorteilhaft und der Preis des amerikanischen Calls ist höher als der Preis des europäischen Calls.

Putoption. Bei einer Putoption kann vorzeitiges Ausüben selbst dann vorteilhaft sein, wenn der Basiswert keine Zahlungen während der Optionslaufzeit leistet. Ist z.B. der Strike $K = 20$ Euro und der Preis des Basiswertes nahe 0, so erzielt der Käufer bei sofortiger Ausübung einen Ertrag von 20 Euro. Wartet der Investor dagegen bis zum Verfalltermin, so kann der Ertrag nur weniger werden, wobei negative Preise ausgeschlossen sind. Außerdem ist es günstiger, jetzt 20 Euro als später zu erhalten. Folglich gilt nur

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A) \ge S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^E)$$

Bild 22 zeigt, daß es bei positivem Zins r stets einen genügend kleinen Preis S^*

des Basiswertes gibt, der ein vorzeitiges Ausüben lohnend erscheinen läßt. Sinkt der Preis auf diesen kritischen Wert, wird der Put ausgeübt und nimmt sofort den Wert $K - S^*$ an.

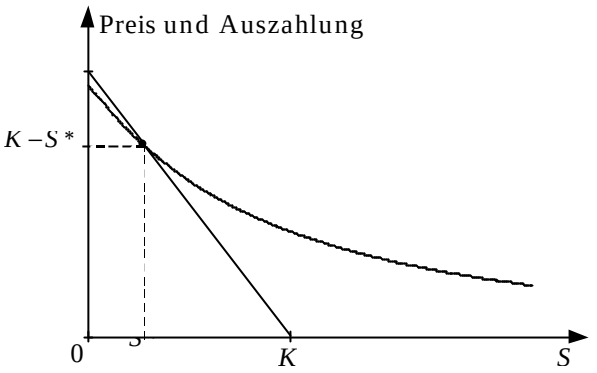


Bild 22

Beziehungen zwischen Callpreis und Putpreis. Leistet der Basiswert keine Zahlungen während der Optionslaufzeit (der Fall $b = r$), gilt für europäische Optionen die Put-Call-Parität

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^E) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^E) = S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Da die Callpreise einer amerikanischen und europäischen Option übereinstimmen, folgt

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A) \geq S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^E) = S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^E) - S_0 + K\,\mathrm{e}^{-rT} = S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^A) - S_0 + K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

und damit

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^A) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A) \leq S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Hält ein Investor ein Portfolio PF aus amerikanischem Put und Basiswert, so gilt für den Wert $V(t_\ell, PF)$ im Verfalltermin

$$\begin{aligned} V(t_\ell, PF) &= \begin{cases} \max(K - S_\ell,\ 0) + S_\ell = \max(S_\ell, K) & \text{bei Nicht - Ausübung vor } t_\ell \\ K\,\mathrm{e}^{r \cdot Tg(t,t_\ell)} & \text{bei Ausübung in } t < t_\ell \end{cases} \\ &< \max(S_\ell - K,\ 0) + K\,\mathrm{e}^{r \cdot Tg(t,t_\ell)} = CF(t_\ell, \mathrm{C}^E) + K\,\mathrm{e}^{r \cdot Tg(t,t_\ell)} \\ &\leq CF(t_\ell, \mathrm{C}^E) + K\,\mathrm{e}^{rT} = CF(t_\ell, \mathrm{C}^A) + K\,\mathrm{e}^{rT} \end{aligned}$$

Dies ist die Zahlung eines amerikanischen Calls und einer Geldanlage K in t_0. Nach dem Gesetz des einheitlichen Preises muß dann für die Preise in t_0 gelten

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A) + S_0 \leq S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^A) + K$$

und damit

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^A) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A) \geq S_0 - K$$

Insgesamt erhalten wir somit die »Put-Call-Parität für amerikanische Optionen«

$$S_0 - K \leq S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^A) - S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A) \leq S_0 - K\mathrm{e}^{-rT}$$

Bewertung. Da die Black/Scholes-Formel und die später behandelte Monte Carlo-Simulation nur für europäische Optionen gelten, sind wir bei der Bewertung amerikanischer Putoptionen auf das Modell von Cox/Ross/Rubinstein verwiesen. Beachten wir, daß ein amerikanischer Put stets ausgeübt wird, wenn

$$S_{FV}(t, \mathrm{P}^A) < K - S_t$$

gilt, so müssen wir das Iterationsverfahren wie folgt ändern:

$$P_{k,i}^A = \max(K - S_0 u^i d^{k-i}, [P_{k+1,i+1}^A p + P_{k+1,i}^A (1-p)]\mathrm{e}^{-r\Delta t}$$

Beispiel. Eine Aktie A ohne Dividendenzahlungen notiert in t_0 mit dem Preis 100 GE. Zu bewerten ist ein amerikanischer Put auf A mit Basispreis 95 GE und Verfall in 6 Monaten. Der kontinuierliche Zins für 6 Monate beträgt 7%; die Aktie besitzt eine Volatilität von 40%. Also $S_0 = 100$; $K = 95$; $T = 0{,}5$; $b = r = 0{,}07$ und $s = 0{,}4$. In einem Binomialmodell mit $n = 5$ Teilintervallen – also $\Delta t = 0{,}5/5 = 0{,}1$ - berechnen sich die Modellparameter wie folgt:

$$u = \mathrm{e}^{0{,}4\cdot\sqrt{0{,}1}} = 1{,}1348 \quad \text{und} \quad d = \mathrm{e}^{-0{,}4\cdot\sqrt{0{,}1}} = 0{,}8812$$

$$p = \frac{\mathrm{e}^{0{,}07\cdot 0{,}1} - 0{,}8812}{1{,}1348 - 0{,}8812} = 0{,}4961 \quad \text{und} \quad 1 - p = 0{,}5039$$

Durch Vorwärtsiteration konstruieren wir zuerst den Binomialbaum und berechnen dann rückwärts die Putpreise.

Aktien–	Amerikanischer Put					
preis	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
188,22						0,00
165,86					0,00	
146,15				0,00		0,00
128,79			0,86		0,00	
113,48		3,45		1,72		0,00
100,00	7,80		6,04		3,44	
88,12		12,19		10,38		6,88
77,65			18,41		17,35	
68,42				26,58		26,58
60,29					34,71	
53,13						41,87

Der Faire Preis ist damit $S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A) = 7{,}80$ GE. Wir beachten dabei, daß z.B. im Zeitpunkt t_3 bei $i = 0$ Aufwärtsbewegungen der erwartete Putpreis

$$[P_{4,1}p + P_{4,0}(1-p)]\mathrm{e}^{-r\Delta t} = [17{,}35 \cdot 0{,}4961 + 34{,}71 \cdot 0{,}5039]\,\mathrm{e}^{-0{,}007} = 25{,}92$$

kleiner ist als die Auszahlung

$$K - S_0 u^0 d^3 = 95 - 68{,}42 = 26{,}58$$

und damit in diesem Zeitpunkt und Zustand der Put zur Ausübung kommt. Wir vergleichen den Preis des amerikanischen Put noch mit dem Preis des entsprechenden europäischen Put:

Aktien–	Europäischer Put					
preis	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
188,22						0,00
165,86					0,00	
146,15				0,00		0,00
128,79			0,86		0,00	
113,48		3,37		1,72		0,00
100,00	7,51		5,88		3,44	
88,12		11,70		10,05		6,88
77,65			17,59		16,69	
68,42				25,26		26,58
60,29					34,04	
53,13						41,87

und stellen fest:

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^E) = 7{,}51 \text{ GE} < 7{,}80 \text{ GE} = S_{FV}(t_0, \mathrm{P}^A)$$

Da für den entsprechenden amerikanischen Call gilt (wieder bei $u = 5$ Teilintervallen)

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^A) = S_{FV}(t_0, \mathrm{C}^E) = 15{,}78 \text{ GE}$$

können wir auch die »Put-Call-Parität für amerikanische Optionen« bestätigen:

$$100 - 95 \le 15{,}78 - 7{,}80 \le 100 - 91{,}73$$

9 Monte Carlo Simulation

Lognormal-verteiltes Preismodell. Gegeben ist der Basiswert F einer Option mit der Laufzeit $t_\ell - t_0$. Analog zum Black/Scholes–Modell bestimmen wir den Preis $S_\ell = S(t_\ell, F)$ durch

$$S_\ell = S_0 \exp\left(\left(b - \frac{s^2}{2}\right)T + s\sqrt{T}\,Z\right)$$

mit dem heutigen Preis $S_0 = S(t_0, F)$, dem risikofreien kontinuierlichen Zins r, der

Volatilität s und einer $\mathbb{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen Z. S_ℓ ist der Wert eines geometrischen Prozesses mit normalverteilten Störvariablen im Endzeitpunkt $t_n = t_\ell$.

Optionspreisbestimmung. Ziel ist die Bewertung (Preisbestimmung) eines europäischen Call C und Put P auf den Basiswert F mit Basispreis K und Verfall in t_ℓ. Call und Put leisten somit in t_ℓ die Zahlungen

$$CF(t_\ell, \mathrm{C}) = \max(S_\ell - K,\ 0) \quad \text{und} \quad CF(t_\ell, \mathrm{P}) = \max(K - S_\ell,\ 0)$$

Der Markt erlaube Geldanlagen und –aufnahmen zum kontinuierlichen Zinssatz r. Für den Diskontierungsfaktor gilt somit

$$df_\ell = \mathrm{e}^{-rT}$$

Die Monte Carlo Simulation verläuft nun in fünf Schritten:

- Simuliere $\mathbb{U}(0,1)$-verteilte Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_n$.
- Transformiere die x-Werte in $\mathbb{N}(0,1)$-verteilte Zufallszahlen:

$$z_k = \Phi^{-1}(x_k) \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n$$

- Transformiere die z-Werte in Meßwerte des Preises S_ℓ:

$$s_k = S_0 \exp\left(\left(b - \frac{s^2}{2}\right)T + s\sqrt{T}z_k\right) \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n$$

- Berechne die zugehörigen Auszahlungen der Option

$$c_k = \max(s_k - K,\ 0) \text{ (Call)} \quad \text{und} \quad p_k = \max(K - s_k,\ 0) \text{ (Put)}$$

- Bestimme den fairen Preis der Option

$$S_{FV}(t_0, \text{Option}) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mathrm{e}^{-rT} & \text{(Call)} \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \mathrm{e}^{-rT} & \text{(Put)} \end{cases}$$

Beispiel. Eine Aktie A ohne Dividendenzahlungen notiert in t_0 mit dem Preis 100 GE. Zu bewerten ist ein europäischer Call C auf A mit Basispreis 105 GE und Verfall in 3 Monaten. Der kontinuierliche Zins für 3 Monate beträgt 10%; die Aktie besitzt eine Volatilität von 40%. Also $S_0 = 100$; $K = 105$; $T = 0{,}25$; $b = r = 0{,}1$ und $s = 0{,}4$ (vgl. das Beispiel in Abschnitt 7). Ist z_k eine Realisierung der Zufallsgröße

Z, so gilt für den Preis S_ℓ im Zeitpunkt t_ℓ

$$s_k = S_0\, e^{(b-s^2/2)T+s\sqrt{T}z_k} = 100\, e^{(0{,}1-0{,}4^2/2)\cdot 0{,}25+0{,}4\cdot\sqrt{0{,}25}\cdot z_k} = 100\, e^{0{,}005+0{,}2\,z_k}$$

Mit den Angaben der Tabelle 1 (beachte: statt $n = 20$ müßten mindestens $n = 10\,000$ Werte simuliert werden) ergibt sich dann der faire Callpreis zu

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20} c_k\, e^{-0{,}025} = 6{,}85 \text{ GE}$$

k	x_k	z_k	s_k	c_k	k	x_k	z_k	s_k	c_k
1	0,1396	-1,0820	80,9449	0,0000	11	0,5226	0,0567	101,6476	0,0000
2	0,4633	-0,0921	98,6667	0,0000	12	0,7754	0,7568	116,9257	11,9257
3	0,3230	-0,4592	91,6823	0,0000	13	0,6870	0,4874	110,7917	5,7917
4	0,8155	0,8984	120,2824	15,2824	14	0,3953	-0,2655	95,3038	0,0000
5	0,2770	-0,5917	89,2856	0,0000	15	0,5672	0,1692	103,9607	0,0000
6	0,0426	-1,7218	71,2230	0,0000	16	0,5486	0,1221	102,9854	0,0000
7	0,1435	-1,0645	81,2284	0,0000	17	0,8588	1,0751	124,6104	19,6104
8	0,9721	1,9120	147,3152	42,3152	18	0,8477	1,0267	123,4096	18,4096
9	0,8466	1,0220	123,2929	18,2929	19	0,6468	0,3766	108,3641	3,3641
10	0,6832	0,4766	110,5514	5,5514	20	0,2138	-0,7932	85,7589	0,0000

Tabelle 1

Bemerkung. Ihre eigentliche Anwendung bei der Preisbestimmung hat die Monte Carlo Simulation im Bereich exotischer pfadabhängiger Optionen (vgl. Cremers, Monte Carlo Simulation).

10 Berechnung der Volatilität

Bezogen auf das Modell ist die Volatilität eine extern zu bestimmende Marktgröße. Sie ist ein Maß für die Streuung der kontinuierlichen Rendite des Basiswertes F. Anders als der heutige Preis $S_0 = S(t_0, F)$ oder Marktzins $r = r(t_0, t_\ell)$ ist die Volatilität nicht unmittelbar aus den Marktdaten abzulesen. Für ihre Bestimmung gibt es folgende Möglichkeiten:

Historische Volatilität. Bei diesem Ansatz wird die Volatilität aus der vergangenen Preisentwicklung bestimmt. Dazu beobachtet man während eines bestimmten Zeitraumes (etwa 1 oder 2 Jahre) die Preise $S_n = S(t_n, F)$, $n = 1,2,\ldots,N+1$, in den Zeitpunkten $t_1,\ldots,t_{N+1} =$ heute. Die Zeitabstände $t_{n+1} - t_n$, $n = 1,\ldots,N$, sind dabei

gleich (etwa 1 Tag oder 1 Monat). Im nächsten Schritt werden die kontinuierlichen Renditen

$$R_n = \ln \frac{S_{n+1}}{S_n} \quad \text{für} \quad n = 1, \ldots, N$$

bestimmt. Mit der Schätzfunktion für die Standardabweichung (vgl. Lektion 12, Gleichungen (12.29) – (12.31)) bestimmt sich die Volatilität dann wie folgt

$$\hat{s} = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} \left(R_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} R_n \right)^2 \right)^{1/2}$$

Multiplizieren wir diesen Wert mit dem Faktor $\sqrt{250}$ bei Tagesrenditen, $\sqrt{52}$ bei Wochenrenditen und $\sqrt{12}$ bei Monatsrenditen, so erhalten wir die annualisierte Volatilität, die in den Optionspreismodellen verlangt ist.

Implizite Volatilität.. Gibt es eine gehandelte Option mit ähnlichem Basiswert, Laufzeit und Strike, so kann diejenige Volatilität bestimmt werden, die in eine gegebene Bewertungsformel (Black / Scholes- oder Binomialmodell) eingesetzt, auf den Marktpreis der Option führt. Diese *implizite Volatilität* wird dann auf den Basiswert *F* übertragen.

11 Anhang

Black/Scholes-Formel. Zur Herleitung der Black / Scholes-Formel für eine Calloption ist die folgende Integrationsaufgabe zu lösen:

$$E(CF(t_\ell, \mathrm{C})) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x - K,\ 0) f_{S_\ell}(x)\, dx = \int_{K}^{+\infty} (x - K) f_{S_\ell}(x)\, dx$$
$$= \int_{K}^{+\infty} x f_{S_\ell}(x)\, dx - \int_{K}^{+\infty} K f_{S_\ell}(x)\, dx$$

Wir berechnen zunächst das zweite Integral und verwenden dabei die Substitutionsregel (vgl. Basiswissen, Lektion 9):

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(f(z) g'(z) dz \quad \text{mit} \quad x = g(z) \quad \text{und} \quad z = g^{-1}(x)$$

für bestimmte Integrale. Setze

$$z = g^{-1}(x) = \frac{\ln(x/S_0) - (b - s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{bzw.} \quad x = g(z) = S_0\, e^{(b-s^2/2)T + s\sqrt{T}z}$$

also

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{s\sqrt{T}x} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{s\sqrt{T}x}dx$$

Mit der Abkürzung $\phi(z) = (1/\sqrt{2p})\exp(-z^2/2)$ für die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung folgt

$$\int_K^{+\infty} K f_{S_\ell}(x)\,dx = K\int_K^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}\,s\sqrt{T}x}\exp\left(-\frac{(\ln(x/S_0) - (b - s^2/2)T)^2}{2s^2\sqrt{T}}\right)dx = K\int_{g^{-1}(K)}^{+\infty}\phi(z)\,dz$$

Wir nutzen die Symmetrie der Standardnormalverteilung und schließen weiter

$$\int_K^{+\infty} K f_{S_\ell}(x)\,dx = K\int_{-\infty}^{d_2}\phi(z)\,dz = K\Phi(d_2)$$

$$\text{wobei} \quad d_2 = -g^{-1}(K) = \frac{\ln(S_0/K) + (b - s^2/2)T}{s\sqrt{T}}$$

Zur Berechnung des ersten Integrals verwenden wir die gleiche Substitution und erhalten

$$\int_K^{+\infty} x f_{S_\ell}(x)\,dx = \int_{g^{-1}(K)}^{+\infty} S_0\, e^{(b-s^2/2)T + s\sqrt{T}z}\cdot\phi(z)\,dz$$

$$= S_0\, e^{bT}\int_{g^{-1}(K)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2p}}\, e^{-\frac{(z - s\sqrt{T})^2}{2}}\,dz$$

Mit der weiteren Substitution $y = z - s\sqrt{T}$ und der Symmetrie der Standardnormalverteilung gilt schließlich

$$\int_K^{+\infty} x f_{S_\ell}(x)\,dx = S_0\cdot e^{bT}\int_{-\infty}^{d_1}\phi(y)\,dy = S_0\, e^{bT}\cdot\Phi(d_1)$$

$$\text{wobei} \quad d_1 = -(g^{-1}(K) - s\sqrt{T}) = d_2 + s\sqrt{T}$$

Durch Diskontieren erhalten wir für den Preis eines europäischen Call – und mit analoger Rechnung für den Put - die Formel von Black und Scholes

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{C}) = S_0\, e^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) - K\, e^{-rT}\,\Phi(d_2) \qquad \text{(Call)}$$

$$S_{FV}(t_0, \mathrm{P}) = K\, e^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S_0\, e^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1) \qquad \text{(Put)}$$

Dabei ist

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (b + s^2/2)T}{s\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

Cox/Ross/Rubinstein-Modellgrößen. Vorgegeben sind die Bestimmungsgleichungen

(9) $u = 1/d$

(11) $p = \dfrac{a-d}{u-d}$ mit $a = \mathrm{e}^{b\Delta t}$

(12) $u^2 p + d^2(1-p) = \mathrm{e}^{2b\Delta t + s^2\Delta t}$

Zur Bestimmung der Modellgrößen *u*, *d* und *p*. Mit (11) folgt aus (12)

$$u^2 p + d^2(1-p) = \frac{u^2 a - u^2 d + d^2 u - d^2 a}{u-d} = \frac{(u^2 - d^2)a - ud(u-d)}{u-d}$$
$$= (u+d)a - ud = (u+d)a - 1 = a^2\,\mathrm{e}^{s^2\Delta t}$$

Dies ist äquivalent zu

$$u + d = \frac{1}{a} + a\,\mathrm{e}^{s^2\Delta t}$$

Wegen $u = 1/d$ folgt weiter

$$u = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{a} + a\,\mathrm{e}^{s^2\Delta t}$$

Damit sind die Parameter *u*, *d* und *p* bestimmt: Zunächst wird *u* aus dem vorgegebenen Marktdaten *r* und s^2 berechnet; dann ergibt sich *d* einfach aus (9) und schließlich *p* aus (11).

Approximative Bestimmung der Parameter *u*, *d* und *p*. Werden in der Reihenentwicklung der e-Funktion (vgl. Basiswissen, Lektion 8, Beispiel 8.3.7)

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

alle Terme der Ordnung x^2 und höher vernachlässigt (dies ist zulässig für kleine *x*-Werte), so folgt

$$c = \mathrm{e}^{-b\Delta t} + \mathrm{e}^{b\Delta t}\mathrm{e}^{s^2\Delta t} \approx 1 - b\Delta t + (1 + b\Delta t)(1 + s^2\Delta t)$$
$$\approx 1 - b\Delta t + 1 + b\Delta t + s^2\Delta t = 2 + s^2\Delta t$$

Damit gilt näherungsweise für u

$$u \approx 1 + \frac{s^2\Delta t}{2} + \sqrt{\frac{(2 + s^2\Delta t)^2 - 4}{4}}$$
$$\approx 1 + \frac{s^2\Delta t}{2} + \sqrt{\frac{4 + 4s^2\Delta t - 4}{4}} = 1 + s\sqrt{\Delta t} + \frac{s^2\Delta t}{2} \approx \mathrm{e}^{s\sqrt{\Delta t}}$$

Für kleine Zeitintervalle Δt kann also vereinfachend angenommen werden:

$$u = \mathrm{e}^{s\sqrt{\Delta t}} \quad , \quad d = \mathrm{e}^{-s\sqrt{\Delta t}} \quad , \quad p = \frac{\mathrm{e}^{b\Delta t} - d}{u - d}$$

Sensitivitäten. Mit den Notationen der Abschnitte 4 und 6 gilt:

$$d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$
$$d_2^2 = d_1^2 - 2d_1 s\sqrt{T} + s^2 T$$
$$= d_1^2 - 2[\ln(S/K) + (b + s^2/2)T] + s^2 T$$
$$= d_1^2 - 2\ln(S\,\mathrm{e}^{bT}/K)$$
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$
$$\phi(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2p}}\mathrm{e}^{-d_1^2/2 + \ln(S\mathrm{e}^{bT}/K)} = \frac{1}{\sqrt{2p}}\mathrm{e}^{-d_1^2/2}\mathrm{e}^{\ln(S\mathrm{e}^{bT}/K)} = \phi(d_1)S\,\mathrm{e}^{bT}/K$$
$$\phi(d_1) = \phi(d_2)K/S\,\mathrm{e}^{bT}$$
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-z^2/2)dz \quad \text{und} \quad x = x(S)$$
$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial S} = \phi(x)\frac{\partial x}{\partial S}$$

Delta

$$\begin{aligned}\Delta_{Call} &= \frac{\partial C}{\partial S} = \mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial S} \\ &= \mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= \mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(d_1)S\,\mathrm{e}^{bT}\Big/K\frac{\partial d_1}{\partial S} \\ &= \mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{Put} &= \frac{\partial P}{\partial S} = K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(-d_2)}{\partial S} - \mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1) - S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\frac{\partial \Phi(-d_1)}{\partial S} \\ &= K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(-d_2)\frac{-\partial d_2}{\partial S} - \mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1) - S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(-d_1)\frac{-\partial d_1}{\partial S} \\ &= K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(-d_1)S\,\mathrm{e}^{bT}\Big/K\frac{\partial d_1}{\partial S} - \mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(-d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} \\ &= -\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1) < 0\end{aligned}$$

Gamma

$$\Gamma_{Call} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_{Call}}{\partial S} = \frac{\partial\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1)}{\partial S} = \frac{\phi(d_1)\mathrm{e}^{(b-r)T}}{S s\sqrt{T}} > 0$$

$$\Gamma_{Put} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_{Put}}{\partial S} = \frac{-\partial\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1)}{\partial S} = \frac{\phi(d_1)\mathrm{e}^{(b-r)T}}{S s\sqrt{T}} > 0$$

Rho für $b \neq 0$

$$\begin{aligned}r_{Call} &= \frac{\partial C}{\partial r} = TS\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) - TS\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial r} \\ &\quad + TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial r} \\ &= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(d_1)S\,\mathrm{e}^{bT}\Big/K\frac{\partial d_1}{\partial r} \\ &= TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{Put} &= \frac{\partial P}{\partial r} = -TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) + K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(-d_2)}{\partial r} \\ &\quad - TS\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1) + TS\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1) - S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\frac{\partial \Phi(-d_1)}{\partial r} \\ &= -TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) < 0\end{aligned}$$

für $b = 0$

$$
\begin{aligned}
r_{Call} = \frac{\partial C}{\partial r} &= -TS\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial r} + TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial r} \\
&= -TS\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} \\
&\quad + TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(d_1)S\,\mathrm{e}^{bT}/K\frac{\partial d_1}{\partial r} \\
&= -TS\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(d_1) + TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) \\
&= -TC < 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{Put} = \frac{\partial P}{\partial r} &= -TK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) + K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(-d_2)}{\partial r} \\
&\quad + TS\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\Phi(-d_1) - S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\frac{\partial \Phi(-d_1)}{\partial r} \\
&= TP < 0
\end{aligned}
$$

Vega

$$
\begin{aligned}
Vega_{Call} = \frac{\partial C}{\partial s} &= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial s} - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial s} \\
&= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial s} - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial s} \\
&= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial s} - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(d_1)S\,\mathrm{e}^{bT}/K\frac{\partial d_2}{\partial s} \\
&= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial s} - \frac{\partial d_2}{\partial s}\right) \\
&= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\sqrt{T} > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Vega_{Put} = \frac{\partial P}{\partial s} &= K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(-d_2)}{\partial s} - S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\frac{\partial \Phi(-d_1)}{\partial s} \\
&= K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(-d_2)\left(-\frac{\partial d_2}{\partial s}\right) - S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(-d_1)\left(-\frac{\partial d_1}{\partial s}\right) \\
&= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial s} - \frac{\partial d_2}{\partial s}\right) \\
&= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\sqrt{T} > 0
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial d_1}{\partial s} - \frac{\partial d_2}{\partial s} = \left(-\frac{\ln(S\,\mathrm{e}^{bT}/K)}{s^2\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sqrt{T}\right) - \left(-\frac{\ln(S\,\mathrm{e}^{bT}/K)}{s^2\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sqrt{T}\right) = \sqrt{T}
$$

Theta

$$\begin{aligned}\Theta_{Call} &= -\frac{\partial C}{\partial T} = -(b-r)S^{(b-r)T}\Phi(d_1) - S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial T} \\ &\quad - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) + K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial T} \\ &= -(b-r)S^{(b-r)T}\Phi(d_1) - S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} \\ &\quad - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) + K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\phi(d_1)S\,\mathrm{e}^{bT}/K\frac{\partial d_2}{\partial T} \\ &= S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\left(\frac{\partial d_2}{\partial T} - \frac{\partial d_1}{\partial T}\right) - (b-r)S^{(b-r)T}\Phi(d_1) - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2) \\ &= -\frac{S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)s}{2\sqrt{T}} - (b-r)S^{(b-r)T}\Phi(d_1) - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{Put} &= -\frac{\partial P}{\partial T} = rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\frac{\partial \Phi(-d_2)}{\partial T} \\ &\quad + (b-r)S^{(b-r)T}\Phi(-d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\frac{\partial \Phi(-d_1)}{\partial T} \\ &= rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2) + (b-r)S^{(b-r)T}\Phi(-d_1) + S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)\left(\frac{\partial d_2}{\partial T} - \frac{\partial d_1}{\partial T}\right) \\ &= -\frac{S\,\mathrm{e}^{(b-r)T}\,\phi(d_1)s}{2\sqrt{T}} + (b-r)S^{(b-r)T}\Phi(-d_1) + rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(-d_2)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} - \frac{\partial d_1}{\partial T} = \left(-\frac{\ln(S/K)}{2sT^{3/2}} + \frac{b}{2s\sqrt{T}} - \frac{s}{4\sqrt{T}}\right) - \left(-\frac{\ln(S/K)}{2sT^{3/2}} + \frac{b}{2s\sqrt{T}} + \frac{s}{4\sqrt{T}}\right) = -\frac{s}{2\sqrt{T}}$$

Literatur

Der vorliegende Text ist enthalten in

Cremers, H.: Basiswissen Mathematik und Stochastik für Banker, Bankakademie-Verlag, 2. Auflage, Frankfurt 1999

Weitere Literatur

Haug, E.G.: The Complete Guide to Option Pricing Formulas, McGraw-Hill, New York 1998

Hull, J.C.: Options, Futures and other Derivatives, Prentice Hall, London 1997

Stoll, H.R. und Whaley R.E.: Futures and Options, Theory and Applications, South-Western Publishing Co., Cincinnati, Ohio 1993

Duffie, D.: Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press, Princeton 1998

Cremers, H.: Monte Carlo Simulation bei der Bewertung Exotischer Optionen und in der Risikoanalyse, Arbeitsbericht Nr.19 der Hochschule für Bankwirtschaft, Frankfurt 1999

Cremers, H.: Theorie und Praxis der Finanzen für Investment Banker, Bankakademie Verlag, Frankfurt 1999

Arbeitsberichte der Hochschule für Bankwirtschaft

Bisher sind erschienen:

Nr.	Autor/Titel	Jahr
1	Moormann, Jürgen Lean Reporting und Führungsinformationssysteme bei deutschen Finanzdienstleistern	1995
2	Cremers, Heinz; Schwarz, Willi Interpolation of Discount Factors	1996
3	Jahresbericht 1996	1997
4	Ecker, Thomas; Moormann, Jürgen Die Bank als Betreiberin einer elektronischen Shopping-Mall	1997
5	Jahresbericht 1997	1998
6	Heidorn, Thomas; Schmidt, Wolfgang LIBOR in Arrears	1998
7	Moormann, Jürgen Stand und Perspektiven der Informationsverarbeitung in Banken	1998
8	Heidorn, Thomas; Hund, Jürgen Die Umstellung auf die Stückaktie für deutsche Aktiengesellschaften	1998
9	Löchel, Horst Die Geldpolitik im Währungsraum des Euro	1998
10	Löchel, Horst The EMU and the Theory of Optimum Currency Areas	1998
11	Moormann, Jürgen Terminologie und Glossar der Bankinformatik	1999
12	Heidorn, Thomas Kreditrisiko (CreditMetrics)	1999
13	Heidorn, Thomas Kreditderivate	1999

14	**Jochum, Eduard** **Hoshin Kanri / Management by Policy (MbP)**	**1999**
15	**Deister, Daniel; Ehrlicher, Sven; Heidorn, Thomas** **CatBonds**	**1999**
16	**Pierre Chevalier, Thomas Heidorn, Merle Rütze** **Gründung einer deutschen Strombörse für Elektrizitätsderivate**	**1999**
17	**Heinz Cremers** **Value at Risk-Konzepte für Marktrisiken**	**1999**

Bestelladresse:

Hochschule für Bankwirtschaft, z. Hd. Frau Ellen Glatzer
Sternstraße 8, 60318 Frankfurt/M.
Tel.: 069/95946-16, Fax: 069/95946-28

Weitere Informationen über die Hochschule für Bankwirtschaft erhalten Sie im Internet unter *www.hfb.de*